Задача 1.

Положительные числа a и b таковы, что $a^3+b^3=ab+1$. Докажите, что

$$(a-b)^2+a+b\geq 2.$$

Первое решение. Заметим, что равенство $a^3+b^3=ab+1$ эквивалентно равенству

$$(a^2+b)(b^2+a)=(ab+1)^2.$$

Воспользуемся неравенством $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ для положительных $x=a^2+b$ и $y=b^2+a$:

$$(a^2+b)+(b^2+a)\geq 2\sqrt{(a^2+b)(b^2+a)}=2(ab+1).$$

Полученное неравенство

$$(a^2+b)+(b^2+a)\geq 2(ab+1)$$

равносильно $(a-b)^2+a+b\geq 2$.

Второе решение. Сделаем замену $m=a-b$ и $n=a+b$. Тогда

$$a^3+b^3=(a+b)((a-b)^2+ab)=n\left(m^2+\frac{n^2-m^2}{4}\right)=\frac{n^2-m^2}{4}+1=ab+1.$$

Следовательно, $S=m^2(3n+1)+n^3-n^2-4=0$. Если $m^2+n<2$, то, во-первых, $n<2$, а во-вторых,

$$S<(2-n)(3n+1)+n^3-n^2-4=(n-2)(n-1)^2\leq 0,$$

что противоречит равенству $S=0$. Значит, $m^2+n\geq 2$, что равносильно требуемому неравенству.

Третье решение. Сделаем замену $p=a+b$ и $q=ab$. Тогда равенство из условия равносильно равенству $p^3-3pq=q+1$. Выразим из него q:

$$q=\frac{p^3-1}{3p+1}\,. \tag{1}$$

Подставляя это значение в неравенство $p^2\geq 4q$, получаем неравенство $p^3\leq p^2+4$, откуда $p\leq 2$. Подставим теперь значение q из (1) в неравенство

$$(a-b)^2+a+b\geq 2 \iff p^2+p\geq 2+4q.$$

Равносильным преобразованиями приходим к

$$p^3-4p^2+5p-2\leq 0,$$

которое верно, так как оно равносильно $(p-1)^2(p-2)\leq 0$.

Problem 1.

Positive numbers a and b satisfy $a^3+b^3=ab+1$. Prove that

$$(a-b)^2+a+b\geq 2.$$

First solution. Note that the equality $a^3+b^3=ab+1$ is equivalent to

$$(a^2+b)(b^2+a)=(ab+1)^2.$$

Consider the inequality $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ for positive $x=a^2+b$ and $y=b^2+a$:

$$(a^2+b)+(b^2+a)\geq 2\sqrt{(a^2+b)(b^2+a)}=2(ab+1).$$

Thus,

$$(a^2+b)+(b^2+a)\geq 2(ab+1),$$

which is equivalent to the required $(a-b)^2+a+b\geq 2$.

Second solution. Denote $m=a-b$ and $n=a+b$. Then

$$a^3+b^3=(a+b)((a-b)^2+ab)=n\left(m^2+\frac{n^2-m^2}{4}\right)=\frac{n^2-m^2}{4}+1=ab+1.$$

Hence $S=m^2(3n+1)+n^3-n^2-4=0$. Suppose $m^2+n<2$, then $n<2$ and

$$S<(2-n)(3n+1)+n^3-n^2-4=(n-2)(n-1)^2\leq 0,$$

which contradicts $S=0$. So, $m^2+n\geq 2$, which is equivalent to the required inequality.

Third solution. Let $p=a+b$ and $q=ab$. The equality from the problem condition is equivalent to the equality $p^3-3pq=q+1$, whence

$$q=\frac{p^3-1}{3p+1}\,. \tag{1}$$

After substitution of (1) to $p^2\geq 4q$, we obtain $p^3\leq p^2+4$, whence $p\leq 2$. Now substitute (1) to

$$(a-b)^2+a+b\geq 2 \iff p^2+p\geq 2+4q.$$

By equivalent transformations we get

$$p^3-4p^2+5p-2\leq 0,$$

which is true since it is equivalent to $(p-1)^2(p-2)\leq 0$.

Задача 2.

Маша и Витя играют в игру на доске, имеющей форму правильного 1001-угольника. Вначале все вершины доски белые и в одной из них стои́т фишка. На каждом ходу Маша называет произвольное натуральное число k, затем Витя выбирает направление по или против хода часовой стрелки и сдвигает фишку в выбранном направлении на k вершин. Если в конце хода фишка оказывается в белой вершине, эта вершина закрашивается в красный цвет. Найдите наибольшее количество красных вершин, которого Маша может добиться вне зависимости от действий Вити, если количество ходов не ограничено.

Решение. Ответ: 858.

Так как число 1001 нечётно, то для любых двух вершин A и B доски существует ровно одна вершина, равноудалённая от них (она лежит на одной из двух дуг, на которые они разбивают описанную окружность 1001-угольника), эту вершину будем называть `средней` для A и B. Сделаем три замечания: `1)` если фишка стоит в средней для A и B вершине, то Маша может выбрать число k так, что после перемещения Вити фишка окажется в либо в A, либо в B; `2)` если Маша может выбрать число k так, что после перемещения Вити фишка окажется в либо в A, либо в B, то в данный момент фишка находится в средней для A и B вершине; `3)` если некоторое множество M вершин совпадает с множество вершин правильного многоугольника, то для любых двух вершин из M их средняя вершина тоже принадлежит M.

Стратегия Вити. Пусть Витя выберет произвольные 143 вершины, являющиеся вершинами правильного 143-угольника и такие, что фишка изначально не стоит ни в одной из них. Покажем, что он может делать ходы так, что ни одна из этих вершин не станет красной. Действительно, если в некоторый момент все эти вершины белые, то фишка не находится ни в одной из этих вершин, не находится в середине никаких двух выбранный вершин, следовательно, какое бы число Маша ни выбрала, Витя сможет сдвинуть фишку так, что она не попадёт ни в одну из выбранных им вершин. Таким образом, Витя может добиться того, что по крайней мере 143 вершины останутся белыми, т.е. Маша не может гарантированно закрасить более 858 вершин.

Неявная стратегия Маши. Пусть Маша последовательно повторяет следующие действия: `проверка:` она выясняет, существует ли алгоритм, позволяющий ей закрасить по крайней мере одну вершину, `окраска:` если такой алгоритм существует, то она придерживается его, пока не закрасит одну вершину. Предположим, что ей не удастся такими действиями закрасить все вершины. Тогда в некоторый момент времени t есть множество W белых вершин, для которого проверка даёт отрицательный ответ. Рассмотрим наибольшее по включению множество V вершин, содержащее W и обладающее следующим свойством: у Маши нет алгоритма, позволяющего за конечное число ходов после момента t поместить фишку в хотя бы одну вершину из V. Такое множество существует, поскольку само W обладает этим свойством, кроме того, для каждой пары вершин из V их средняя вершина принадлежит V.

Окончание решения. Обозначим вершины 1001-угольника через $A_0A_1 \ldots A_{1000}$ и для произвольного целого числа n под вершиной A_n будем понимать вершину A_r, где r – остаток числа n при делении на 1001. Обозначим

$$V = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_v}\},$$

где $0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_v \le 1000$, а под i_{v+j}, $j \in \{1, 2\}$, мы будем подразумевать $i_j + 1001$. По определению множества V, для каждого $s \in \{1, \ldots, v\}$ число $\frac{i_s + i_{s+1}}{2}$ дробное, в частности, v нечётно. Но тогда число $\frac{i_s + i_{s+2}}{2}$ целое, следовательно, средняя для A_{i_s} и $A_{i_{s+2}}$ вершина совпадает с $A_{i_{s+1}}$, откуда вытекает, что множество V является множеством вершин правильного многоугольника. Наименьший простой делитель числа 1001 равен семи, поэтому, $|V| \le \frac{1001}{7} = 143$. Так как $W \subset V$, то Маша к этому моменту закрасила по крайней мере $1001 - 143 = 858$ вершин.

Явная стратегия Маши. Будем вместе с Машей последовательно строить множества вершин специального вида, всегда предполагая, что, если за несколько ходов Маша может гарантированно увеличить число красных вершин, то она сделает эти ходы незамедлительно, а потом начнёт строить все множества заново. В любой момент времени, если W – произвольное множество вершин и Маша может выбрать число k так, что после сдвига Вити фишка попадёт в вершину из W, независимо от выбранного им направления, то такое число k назовём W*-подходящим.*

Обозначим через V_0 множество белых вершин. Если есть хоть одно V_0-подходящее число, то Маша его выберет и после сдвига Вити количество красных вершин увеличится. Предположим что нет ни одного V_0-подходящего числа. Обозначим через V_1 множество всех вершин, являющихся средними для пар вершин из V_0. Если есть хотя бы одно $V_0 \cup V_1$-подходящее число, то Маша выберет его и после сдвига Вити фишка либо закрасит новую вершину, либо попадёт в какую-то из вершин V_1. Во втором случае на следующем ходу Маша сможет выбрать такое число k, что после сдвига Вити закрасится одна из вершин. Таким образом, после одного или двух ходов количество красных вершин увеличится.

Пусть мы уже построили множества $V_0, V_1, \ldots, V_n$ и нет ни одного $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n$-подходящего числа. Аналогично предыдущему, через V_{n+1} обозначим множество всех средних вершин для пар вершин из $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Если есть хотя бы одно $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{n+1}$-подходящее число, то Маша выберет его, после сдвига Вити фишка попадёт в какое-то множество V_i и за последующие не более чем i ходов будет закрашена по крайней мере одна новая вершина, так как Маша может на каждом ходу гарантированно уменьшать номер множества, в котором лежит фишка.

Предположим, что такими построениями Маша не сможет добиться того, что все вершины будут закрашены. Тогда последовательность $V_0 \subset V_0 \cup V_1 \subset V_0 \cup V_1 \cup V_2 \subset \ldots$ стабилизируется, т.е. для некоторого неотрицательного n нет ни одного $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n$-подходящего числа и $V_{n+1} \subset V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n = V$. Осталось заметить, что для множества V верны все рассуждения из пункта «окончание решения».

Problem 2.

Mary and Victor play the game on the board shaped like a regular 1001-gon. Initially, all vertices of the board are white, and there is a chip at one of them. On each turn, Mary chooses an arbitrary positive integer k, then Victor chooses a direction: clockwise or counterclockwise, and moves the chip in the chosen direction by k vertices. If at the end of the turn the chip stands at a white vertex, this vertex is painted red. Find the greatest number of vertices that Mary can make red regardless of Victor's actions, if the number of turns is not limited.

Solution. Answer: 858.

Since 1001 is odd, for each pair (A, B) of vertices there exists exactly one vertex equidistant from them (the midpoint of one of the two arcs into which they divide the circumcircle of the 1001-gon), we call this vertex `the middle` A and B. Let us make three observations: `1)` if the chip is in the middle of A and B, Mary can choose k such that after Victor's move the chip will end up in either A or B; `2)` if Mary can choose k such that after Victor's move the chip will end up in either A or B, then at this moment the chip is in the middle of A and B; `3)` if a set M of vertices coincides with the set of vertices of a regular polygon, then for each pair of vertices of M their middle also belongs to M.

Victor's strategy. Let Victor choose an arbitrary set of 143 vertices which coincide with the vertices of a regular 143-gon and the chip isn't placed at any of them. We will show that he can make his moves so that all these vertices will remain white forever. Indeed, if at some moment all chosen vertices are white then the chip isn't placed at any of them, it isn't placed at any middle of two chosen vertices, hence no matter what k Mary will choose, Victor can move the chip so that it will end up at an unchosen vertex. Thus, Victor can guarantee that at least 143 vertices will remain white and Mary will paint red at most 858 vertices.

Mary's implicit strategy. Let Mary repeat the following actions: `check:` she finds out whether there is an algorithm that allows her to paint red at least one new vertex, `coloring:` if such an algorithm exists, she follows it until paint red a new vertex. Suppose she cannot paint red all vertices. Then at some moment t there exists a set W of white vertices for which the check gives a negative answer. Consider the maximal set of vertices V such that it contains W and satisfy the following condition: Mary has no algorithm that allows her to place the chip at at least one vertex from V in a finite number of turns after t. Such a set exists since the set W itself satisfy this condition, moreover for every pair of vertices of V thein middle belongs to V.

End of the solution. Denote the vertices of the board by $A_0A_1\ldots A_{1000}$ and for any integer n by A_n we denote the vertexA_r, where r is the remainder of n modulo 1001. Let

$$V = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_v}\},$$

where $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_v \leq 1000$, and by i_{v+j}, $j \in \{1, 2\}$, we will mean $i_j + 1001$. By the definition of V, for each $s \in \{1, \ldots, v\}$ the number $\frac{i_s + i_{s+1}}{2}$ is not integer, in particular, v is odd. But then $\frac{i_s + i_{s+2}}{2}$ is integer whence the middle of A_{i_s} and $A_{i_{s+2}}$ belongs to V, i.e. it coincides with $A_{i_{s+1}}$. Therefore, V coincides with the set of vertices of a regular polygon. The least prime factor of 1001 is seven, hence $|V| \leq \frac{1001}{7} = 143$. Since $W \subset V$, Mary has painted red at least $1001 - 143 = 858$ vertices.

Mary's explicit strategy. Let Mary construct a set of special type and we will assume that if she can increase the number of red vertices (using the property of the constructed set) with by a several moves, she will make such moves and then begin to construct the set anew. At any moment if W is an arbitrary set of vertices and Mary can choose a positive integer k such that after Victor's move, regardless of his choice, the chip will end up at some vertex of W, then we will say that k is W*-suitable*.

Denote by V_0 the set of all white vertices. If there exists a V_0-suitable number, Mary will choose it and after the Victor's move the number of red vertices will increase. Suppose no V_0-suitable number exist. Denote by V_1 the set of all middles of the pairs of vertices of V_0. If there exists a $V_0 \cup V_1$-suitable number, Mary will choose it and after the Victor's move the chip will paint some vertex red of will end up at some vertex of V_1. In the second case Mary can choose k on her next move so that after the Victor's move some vertex of V_0 will become red. Thus, in one or two moves the number of red vertices will increase.

Assume that May has already constructed the sets $V_0, V_1, \ldots, V_n$ and no $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n$-suitable number exist. Similarly to the previous, by V_{n+1} we denote the set of all middles of pairs of vertices of $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n$. It there exists a $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{n+1}$-suitable number, Mary will choose it and and after the Victor's move the chip will end up at the vertex of some V_i and in the next no more than i turns the number of red vertices will increase since on each turn Mary can decrease the number of the set at the vertex of which the chip ended up.

Suppose using this strategy Mary cannot paint red all vertices. Then the sequence $V_0 \subset V_0 \cup V_1 \subset V_0 \cup V_1 \cup V_2 \subset \ldots$ eventually stabilise, i.e. for some nonnegative integer n there exists no $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n$-suitable numbers and $V_{n+1} \subset V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n = V$. It remains to note that for V holds true all arguments of the point «end of the solution».

Задача 3.

Пару натуральных чисел (x, y) назовем *хорошей*, если x и y не делятся друг на друга, а множества простых делителей x и y совпадают. Даны различные взаимно простые натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, для каждого из которых найдётся натуральное m такое, что пара $(a^n + bm, b^n + am)$ хорошая.

Первое решение. Не ограничивая общности, пусть $a > b$. Известно, что найдутся натуральные x, y такие, что $ax - by = 1$. По китайкой теореме об остатках найдется натуральное t такое, что

$$t \equiv \frac{1-y}{a} \pmod b \quad \text{и} \quad t \equiv \frac{1-x}{b} \pmod a.$$

Обозначим $v = x + bt > 1$ и $u = y + at > 1$. Тогда $av - bu = 1$ и $(u, v) = (ab, uv) = 1$. Найдётся бесконечно много натуральных n таких, что $uv \mid a^{n+1} - b^{n+1}$ (достаточно брать $n \equiv -1 \pmod{\varphi(uv)}$) и $ua^n - vb^n > 0$ (при $n > \log_{\frac{a}{b}} \frac{v}{u}$). Тогда при $m = ua^n - vb^n > 0$ верно равенство

$$u(a^n + bm) = v(b^n + am)$$

и сравнение

$$a^n + bm = a^n + b(ua^n - vb^n) = v(a^{n+1} - b^{n+1}) \equiv 0 \pmod u.$$

Аналогично, $b^n + am \equiv 0 \pmod v$. Следовательно, пара $(a^n + bm, b^n + am)$ хорошая.

Второе решение. Не ограничивая общности, пусть $a > b$. Подставим $m = \frac{a^n - b^n}{a - b} + ab(a^{n+1} - b^{n+1})$, где число n выберем позже. Тогда

$$a^n + bm = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}\left(1 + ab^2(a - b)\right) \quad \text{и} \quad b^n + am = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}\left(1 + a^2b(a - b)\right).$$

Так как числа $x = 1 + ab^2(a-b)$ и $y = 1 + a^2b(a-b)$ взаимно просты с a, b и $a-b$, то существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$ делится на каждое из них, например, достаточно выбирать $n \equiv -1 \pmod{\varphi(xy)}$. Для каждого из этих n пара $(a^n + bm, b^n + am)$ хорошая.

Problem 3.

We call a pair (x, y) of positive integers *good*, if x and y do not divide each other, and the sets of prime divisors of x and y coincide. Given distinct coprime positive integers a and b. Prove that there exist infinitely many positive integers n for each of which there is a positive integer m such that the pair $(a^n + bm, b^n + am)$ is good.

First solution. Without loss of generality, suppose $a > b$. It's well-known that there exist positive integers x, y such that $ax - by = 1$. Chinese remainder theorem implies that there exists positive integer t such that

$$t \equiv \frac{1-y}{a} \pmod{b} \quad \text{and} \quad t \equiv \frac{1-x}{b} \pmod{a}.$$

Denote $v = x + bt > 1$ and $u = y + at > 1$. Then $av - bu = 1$ and $(u, v) = (ab, uv) = 1$. There exist infinitely many positive integers n such that $uv \mid a^{n+1} - b^{n+1}$ (whenever $n \equiv -1 \pmod{\varphi(uv)}$) and $ua^n - vb^n > 0$ (whenever $n > \log_{\frac{a}{b}} \frac{v}{u}$). Thus for $m = ua^n - vb^n > 0$ we have

$$u(a^n + bm) = v(b^n + am)$$

and

$$a^n + bm = a^n + b(ua^n - vb^n) = v(a^{n+1} - b^{n+1}) \equiv 0 \pmod{u}.$$

Similarly, $b^n + am \equiv 0 \pmod{v}$. These equality and congruences implies that the pair $(a^n + bm, b^n + am)$ is good.

Second solution. Without loss of generality, suppose $a > b$. Let $m = \frac{a^n - b^n}{a-b} + ab(a^{n+1} - b^{n+1})$, where the value of n will be chosen later. Then

$$a^n + bm = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}(1 + ab^2(a-b)) \quad \text{and} \quad b^n + am = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}(1 + a^2b(a-b)).$$

Since $x = 1 + ab^2(a-b)$ and $y = 1 + a^2b(a-b)$ are coprime to a, b and $a-b$, there exist infinitely many positive integers n such that $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$ is a multiple of both of them (choose $n \equiv -1 \pmod{\varphi(xy)}$). For each such n the pair $(a^n + bm, b^n + am)$ is good.

Задача 4.

У Васи есть доска, на которой написано 999 последовательных натуральных чисел, а также 999 бумажек с надписями "Это число не делится на 2 "Это число не делится на 3 . . . , "Это число не делится на 1000". Вася приклеит по одной из своих бумажек к каждому из чисел на доске, а затем ему дадут по конфете за каждую бумажку, на которой окажется верное утверждение. Какое наибольшее количество конфет Вася сможет заработать, каковы бы ни были числа на доске?

Первое решение. Ответ: 998.

Если среди чисел есть кратное 1000!, то, очевидно, утверждение об этом числе не будет верным.

Покажем, как Вася может получить 998 конфет. Для этого он каждый раз будет приклеивать бумажку с надписью "Это число не делится на k где k – количество чисел без бумажек, к наибольшему или наименьшему из этих чисел. При этом, очевидно, числа без бумажек после каждого хода Васи последовательные, и если их k, то одно из двух крайних не делится на k. Таким образом Вася добьётся, чтобы все надписи вида "Это число не делится на k"при $2 \leq k \leq 999$ были верны. К последнему оставшемуся числу он приклеит последнюю бумажку.

Второе решение. То, что Вася может получить 998 конфет, можно доказать по-другому, используя лемму Холла о паросочетаниях. Сотрём с доски число, которое делится на 1000, если оно там есть, и любое чётное число в противном случае. Из множества бумажек удалим бумажку "Это число не делится на 2". Для доказательства утверждения задачи достаточно проверить, что для каждых k чисел от 3 до 1000 на доске есть не менее k чисел, каждое из которых не кратно хотя бы одному из них. При $k < 500$ это очевидно, потому что у каждого числа, большего 1, на доске не более 499 кратных; при $500 \leq k \leq 996$ – потому, что у числа, не меньшего 500, на доске не более двух кратных; при $k = 997$ – потому, что число, которое делится на 997 чисел от 3 до 1000, на доске может быть только одно; наконец, при $k = 998$ – потому что на доске вообще нет чисел, кратных 1000.

Третье решение. Вася может последовательно выбирать числа, которые не делятся на 2, 3, . . . , 999. Когда он выбирает число, не кратное k, уже выбраны $k-2$ числа, то есть осталось $1001-k$. Кратных k среди них меньше, чем $\frac{999}{k}+1$, и достаточно проверить, что $1001-k \geq \frac{999}{k}+1$, то есть $k+\frac{999}{k} \leq 1000$, что верно при $2 \leq k \leq 999$.

Problem 4.

Vasya has a board with 999 consecutive postive integers and 999 pieces of paper with texts "This number is not divisible by 2 "This number is not divisible by 3 . . . , "This number is not divisible by 1000". Vasya sticks one piece of paper to each number on the board and gets one candy for each correct statement. What maximum number of candies can he earn, irrespective of the numbers on the board?

First solution. Answer: 998.

If one of the numbers is divisible by 1000!, the statement about this number is assuredly not correct.

We will show now how Vasya can get 998 candies. To that end, he should at every step use the paper inscribed "This number is not divisible by k where k is the number still without papers. This paper he should stick to the smallest or to the greatest number. In this way, after each Vasya's move the numbers still without papers are consecutive, and if their number is k, the smallest and the largest number cannot be both divisible by k. In this way Vasya makes correct all statements "This number is not divisible by k"for $2 \leq k \leq 999$. The last paper goes to the last remaining number.

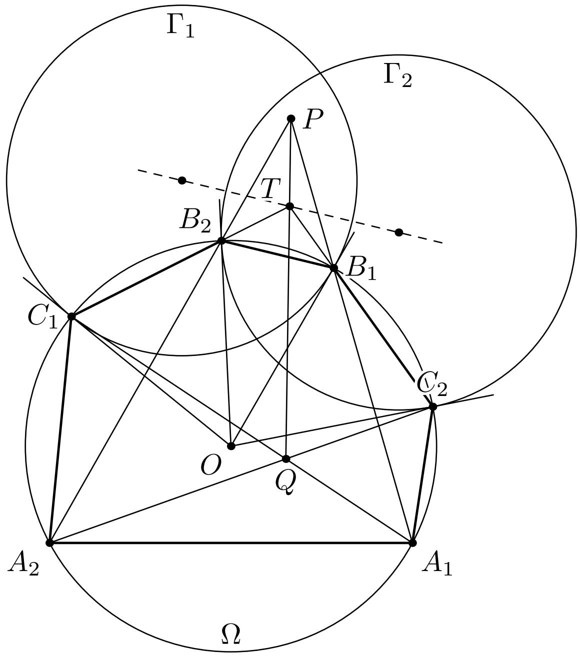
Second solution. Another proof that Vasya can get 998 candies uses Hall's marriage lemma. Let us remove the number divisible by 1000 if present on the board; otherwise, we remove any even number. We also remove the paper saying "This number is not divisible by 2". To prove the problem statement, it is enough now to check that for every k numbers from 3 to 1000 there are at least k numbers on the board not divisible by all of them. If $k < 500$, this is obvious because every number greater than 1 has at most 499 multiples on the board; if $500 \leq k \leq 996$, one of k numbers is at least 500 and therefore has at most two multiples on the board; if $k = 997$, there can be only one number on the board divisible by 997 numbers between 3 and 1000; finally, for $k = 998$ we note that now there are no numbers divisible by 1000 on the board.

Third solution. Vasya can choose numbers not divisible by 2, 3, . . . , 999 consecutively. When he wants a number not divisible by k, he has already used $k-2$ numbers, i.e., he still has $1001-k$ numbers. The number of multiples of k among them is less than $\frac{999}{k}+1$ numbers, so it is enough to check that $1001-k \geq \frac{999}{k}+1$, that is, $k+\frac{999}{k} \leq 1000$, which is true for $2 \leq k \leq 999$.

Задача 5.

В окружность Ω с центром O вписан выпуклый шестиугольник $A_1C_2B_1B_2C_1A_2$. Лучи A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P, а отрезки A_1C_1 и A_2C_2 — в точке Q. Окружность Γ_1 касается прямых OB_1 и OC_1 в точках B_1 и C_1 соответственно, а окружность Γ_2 касается прямых OB_2 и OC_2 в точках B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что существует гомотетия с центром на прямой PQ, переводящая Γ_1 в Γ_2.

Первое решение. Заметим, что лучи C_1B_2 и C_2B_1 пересекаются в некоторой точке T, лежащей внутри треугольника B_1B_2P. Применяя теорему Паскаля к $A_1B_1C_2A_2B_2C_1$, получаем, что точка T лежит на прямой PQ.



Рассмотрим инверсию с центром T и радиусом $\sqrt{TB_1 \cdot TC_2}$. Она переводит окружность Ω в себя, а также меняет местами точка B_1 и C_2, также как и точки C_1 и B_2. Значит, эта инверсия переводит окружность Γ_1 (перпендикулярную Ω) в окружность, проходящую через B_2 и C_2 и перпендикулярную Ω — то есть в Γ_2, поскольку такая окружность единственна.

Итак, наша инверсия меняет местами Γ_1 и Γ_2, и потому её центр T является также центром гомотетии, переводящей Γ_1 в Γ_2, что и требовалось.

Второе решение. Через O_1 и O_2 обозначим центры окружностей Γ_1 и Γ_2, а через R_1 и R_2 их радиусы соответственно. Пусть прямые C_1B_2 и C_2B_1 пересекаются в точке T.

Из теоремы Паскаля, применённой к $A_1B_1C_2A_2B_2C_1$, следует, что точка T лежит на прямой PQ. Далее, применяя теорему Паскаля к $B_1B_1C_2C_1C_1B_2$, получаем, что точки O_1, T и $B_1C_1 \cap B_2C_2$ лежат на одной прямой. Аналогично, точки O_2, T и $B_1C_1 \cap B_2C_2$ также лежат на одной прямой. Следовательно, T лежит на прямой O_1O_2. Из построений понятно, что T лежит на отрезке O_1O_2.

Теперь $\angle O_1B_1T = \angle B_2B_1T - \angle B_2B_1O_1 = \angle B_2A_2C_2 - \angle B_2A_2B_1 = \angle B_1C_2O_2$. Значит,

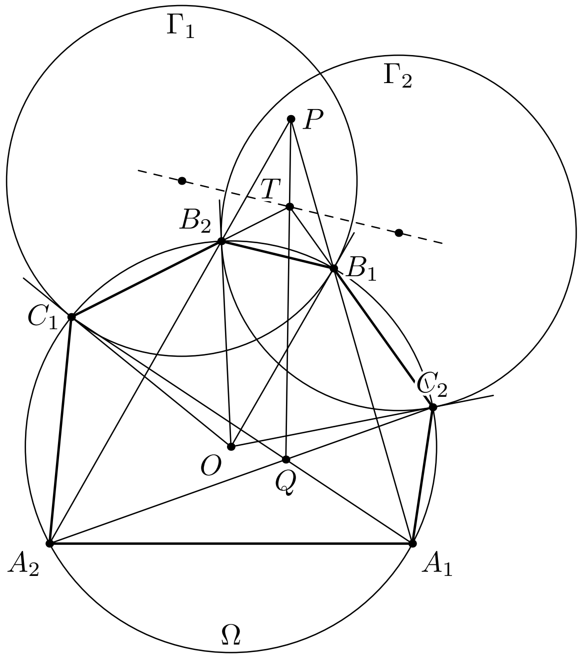
$$\frac{O_2C_2}{O_2T} = \frac{\sin\angle O_2TC_2}{\sin\angle TC_2O_2} = \frac{\sin\angle B_1TO_1}{\sin\angle O_1B_1T} = \frac{O_1B_1}{O_1T} \implies \frac{R_1}{R_2} = \frac{O_1B_1}{O_2C_2} = \frac{O_1T}{O_2T}.$$

Следовательно, T является центром гомотетии, переводящей Γ_1 в Γ_2.

Problem 5.

A convex hexagon $A_1C_2B_1B_2C_1A_2$ is inscribed in a circle Ω centered at a point O. The rays A_1B_1 and A_2B_2 intersect at P, and the segments A_1C_1 and A_2C_2 intersect at Q. A circle Γ_1 is tangent to the lines OB_1 and OC_1 at points B_1 and C_1, respectively; similarly, a circle Γ_2 is tangent to the lines OB_2 and OC_2 at points B_2 and C_2, respectively. Prove that there exists a homothety centered at a point on the line PQ, and turning Γ_1 into Γ_2.

First solution. Notice that the rays C_1B_2 and C_2B_1 meet at some point T inside the triangle B_1B_2P. By Pascal's theorem applied to $A_1B_1C_2A_2B_2C_1$, the point T lies on the line PQ.



Consider the inversion with center T with radius $\sqrt{TB_1 \cdot TC_2}$. It preserves the circle Ω; moreover, it swaps B_1 and C_2, as well as C_1 and B_2. Hence the inversion maps the circle Γ_1 (which is perpendicular to Ω) to a circle through B_2 and C_2 perpendicular to Ω, that is — to Γ_2, since such circle is unique.

Hence the inversion swaps Γ_1 and Γ_2, and .thus its center T is also a center of a homothety mappint Γ_1 into Γ_2, as desired.

Second solution. We denote the centres of the circles Γ_1, Γ_2 by O_1, O_2, and their radii R_1, R_2, respectively. Let T be the point of intersection of the lines C_1B_2 and C_2B_1.

Applying Pascal's theorem to $A_1B_1C_2A_2B_2C_1$ we see that T lies on the line PQ. Then, applying Pascal's theorem to $B_1B_1C_2C_1C_1B_2$ we see that O_1, T, and $B_1C_1 \cap B_2C_2$ are collinear. Similarly, O_2, T, and $B_1C_1 \cap B_2C_2$ are also collinear. Therefore T lies on the line O_1O_2. It is seen from the way T is constructed that it belongs to the segment O_1O_2.

Now $\angle O_1B_1T = \angle B_2B_1T - \angle B_2B_1O_1 = \angle B_2A_2C_2 - \angle B_2A_2B_1 = \angle B_1C_2O_2$. Hence

$$\frac{O_2C_2}{O_2T} = \frac{\sin \angle O_2TC_2}{\sin \angle TC_2O_2} = \frac{\sin \angle B_1TO_1}{\sin \angle O_1B_1T} = \frac{O_1B_1}{O_1T} \implies \frac{R_1}{R_2} = \frac{O_1B_1}{O_2C_2} = \frac{O_1T}{O_2T}.$$

Therefore, T is the centre of the homothety mapping Γ_1 to Γ_2.

Задача 6.

Для целого $n > 1$ обозначим через S_n множество всех перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, то есть множество всех взаимно однозначных отображений $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Пару целых чисел (a, b), где $1 \le a < b \le n$, назовём *расширяющейся* для перестановки $\sigma \in S_n$, если $|\sigma(a) - \sigma(b)| \geqslant |a - b|$.

(а) Верно ли, что при любом целом $n > 1$ найдется перестановка $\sigma \in S_n$, для которой количество расширяющихся пар меньше, чем $1000n\sqrt{n}$? (2 балла)

(б) Существуют ли целое $n > 1$ и перестановка $\sigma \in S_n$ такие, что количество расширяющихся пар для σ меньше, чем $\frac{1}{1000}n\sqrt{n}$? (5 баллов)

Ответ. (а) Да, существует. **(б)** Нет, не существуют.

Решение. (а) При каждом $n > 1$ мы предъявим перестановку, удовлетворяющую требуемым условиям.

Пусть $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$; тогда $n - k^2 \leqslant 2k$. Положим $\sigma(a) = a$ при всех $a > k^2$. Каждое $a \leqslant k^2$ единственным образом представляется в виде $a = 1 + i + kj$, где $0 \leqslant i, j \leqslant k - 1$. Используя это представление, определим

$$\sigma(1 + i + kj) = \begin{cases} 1 + i + (k-1)j, & \text{if } i < k - 1; \\ 1 + k(k-1) + j, & \text{if } i = k - 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что построенное отображение является перестановкой.

Теперь, если числа $1 \leqslant a < b \leqslant k^2$ представляются как $a = 1 + i + kj$ и $b = 1 + \ell + km$, причём $j < m$, а i и ℓ отличны от $k-1$, то

$$|\sigma(a) - \sigma(b)| = \sigma(b) - \sigma(a) = (\ell - i) + (k-1)(m-j) < (\ell - i) + k(m-j) = |a-b|,$$

так что пара (a,b) — не расширяющаяся. Таким образом, любая расширяющаяся пара (a,b) удовлетворяет одному из трёх условий: (1) a или b больше k^2; (2) $a = 1+i+kj$ и $b = 1+\ell+km$, где хотя бы одно из чисел i и ℓ равно $k-1$; (3) $a = 1+i+kj$ и $b = 1+\ell+km$, где $j = m$.

Итак, общее количество расширяющихся пар не превосходит

$$2(n-k^2)n + k \cdot k^2 + k\binom{k}{2} \leqslant 4kn + k^3 + \frac{k^3}{2} < 10n\sqrt{n},$$

что и требовалось.

(б) Мы покажем, что для любого целого $n > 1$ и любой $\sigma \in S_n$ количество расширяющихся пар для неё больше, чем $\frac{1}{1000}n\sqrt{n}$. Заметим, что все пары вида $(i, i+1)$ расширяющиеся, так что это количество не меньше $n-1$, а это число больше $\frac{1}{1000}n\sqrt{n}$, скажем, при всех $n \leqslant 1000$. Итак, далее мы считаем, что $n > 1000$. Положим $m = \frac{n+1}{2}$.

Определим *ранг* целого числа $1 \leqslant a \leqslant n$ как $R(a) = |a - m|$. Обозначим через $C(a) = R(\sigma(a)) - R(a)$ *изменение ранга* числа a под действием σ. Дальнейшее решгение разбивается на два случая, в зависимости от значения суммы

$$\Sigma = \sum_{a=1}^{n} |C(a)| = \Sigma_+ + \Sigma_-, \qquad \text{где} \quad \Sigma_+ = \sum_{a\colon C(a) \geqslant 0} C(a) \quad \text{и} \quad \Sigma_- = \sum_{a\colon C(a)<0} |C(a)|.$$

Заметим сразу, что сумма всех чисел вида $C(a)$ нулевая, то есть $0 = \Sigma_+ - \Sigma_-$, и потому $\Sigma_+ = \Sigma_- = \frac{1}{2}\Sigma$.

Случай 1: $\Sigma > \frac{1}{2}n\sqrt{n}$. В этом случае воспользуемся следующей несложной леммой.

Лемма. Предположим, что $C(a) \geqslant 0$, Тогда число a участвует хотя бы в $C(a)$ расширяющихся парах.

Доказательство. Заметим, что $|a - b| \leqslant |a - m| + |b - m| \leqslant R(a) + (m-1)$ при любых a и b. Без ограничения общности, можно считать, что $\sigma(a) \leqslant m$, то есть $R(\sigma(a)) = m - \sigma(a)$. Теперь при любом b таком, что $\sigma(b) \geqslant n - C(a)$, имеем

$$|\sigma(b) - \sigma(a)| \geqslant \sigma(b) - \sigma(a) \geqslant n - C(a) - m + R(\sigma(a)) = R(a) + (m-1) \geqslant |a-b|,$$

то есть числа a и b образуют расширяющуюся пару, если только $b \neq a$. Количество b таких, что $\sigma(b) \geqslant n - C(a)$, равно $C(a)+1$, поэтому мы нашли хотя бы $C(a)$ расширяющихся пар, содержащих a. □

Поскольку каждая расширяющаяся пара состоит из двух чисел, согласно лемме получаем, что количество расширяющихся пар не меньше, чем $\frac{1}{2}\Sigma_+ = \frac{1}{4}\Sigma \geqslant \frac{1}{8}n\sqrt{n}$, что и требовалось.

Случай 2: $\Sigma < \frac{1}{2}n\sqrt{n}$. Обозначим

$$D_i = \{a\colon |C(a)| = i\} \quad \text{и} \quad d_i = |D_i|.$$

Заметим, что

$$\frac{n\sqrt{n}}{2} > \Sigma = \sum_i id_i \geqslant \sqrt{n}\sum_{i \geqslant \sqrt{n}} d_i, \qquad \text{откуда} \quad n' := \sum_{i<\sqrt{n}} d_i > \frac{n}{2}.$$

Далее, для любого $a \in D_i$ имеем $|\sigma(a) - m| = |a - m| \pm i$, или

$$\sigma(a) \in \{a+i, a-i, 2m-a+i, 2m-a-i\}. \tag{1}$$

Разобьём множество D_i на четыре подмножества, $D_i = D_{i,1} \sqcup D_{i,2} \sqcup D_{i,3} \sqcup D_{i,4}$, так, что значения σ на числах из одного подмножестве удовлетворяют одной и той же формуле в (2), то есть

$$a \in D_{i,1} \Rightarrow \sigma(a) = a+i; \quad a \in D_{i,2} \Rightarrow \sigma(a) = a-i;$$
$$a \in D_{i,3} \Rightarrow \sigma(a) = 2m-a+i; \quad a \in D_{i,4} \Rightarrow \sigma(a) = 2m-a-i.$$

Таким образом, если два числа $a < b$ лежат в одной части $D_{i,j}$, то $|\sigma(a) - \sigma(b)| = |a-b|$, так что пара (a,b) расширяющаяся.

Обозначим $d_{i,j} = |D_{i,j}|$ и $k = \lceil\sqrt{n}\rceil$. Тогда количество найденных расширяющихся пар есть

$$\sum_{i<\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{4}\binom{d_{i,j}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i<\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{4} d_{i,j}^2 - \frac{1}{2}\sum_{i<\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{4} d_{i,j} \geqslant \frac{1}{2\cdot 4k}\left(\sum_{i<\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{4} d_{i,j}\right)^2 - \sum_{i<\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{4} d_{i,j}$$
$$= \frac{n'^2}{8k} - \frac{n'}{2} = \frac{n'(n'-4k)}{8k} \geqslant \frac{n/2\cdot n/4}{16\sqrt{n}} \geqslant \frac{n\sqrt{n}}{128},$$

что и требовалось.

Problem 6.

For an integer $n > 1$, let S_n denote the set of permutations of the numbers $1, 2, \ldots, n$, i.e., the set of all one-to-one maps $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. We say that a pair of integers (a, b) with $1 \le a < b \le n$ is *expanding* for a permutation $\sigma \in S_n$ if $|\sigma(a) - \sigma(b)| \ge |a - b|$.

(a) Determine whether for every integer $n > 1$ there exists a permutation $\sigma \in S_n$ such that the number of expanding pairs for σ is smaller than $1000n\sqrt{n}$. (2 points)

(b) Do there exist an integer $n > 1$ and a permutation $\sigma \in S_n$ such that the number of expanding pairs for σ is smaller than $\frac{1}{1000}n\sqrt{n}$? (5 points)

Answer. (a) Yes, it exists. **(b)** No, they do not exist.

Solution. (a) For every $n > 1$, we present a permutation satisfying the required conditions.

Put $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$; then $n - k^2 \le 2k$. Set $\sigma(a) = a$ for all $a > k^2$. Every $a \le k^2$ is uniquely represented as $a = 1 + i + kj$, where $0 \le i, j \le k - 1$. Using this notation, we define

$$\sigma(1 + i + kj) = \begin{cases} 1 + i + (k-1)j, & \text{if } i < k-1; \\ 1 + k(k-1) + j, & \text{if } i = k-1. \end{cases}$$

It is easy to see that the defined map σ is indeed a permutation.

Now, if numbers $1 \le a < b \le k^2$ have representations $a = 1 + i + kj$ and $b = 1 + \ell + km$ with $j < m$, then

$$|\sigma(a) - \sigma(b)| = \sigma(b) - \sigma(a) = (\ell - i) + (k-1)(m-j) < (\ell - i) + k(m-j) = |a - b|,$$

so the pair (a, b) is not expanding. Hence a pair (a, b) with $1 \le a < b \le n$ may happen to be expanding only in the following three cases: (1) $b > k^2$; (2) $a = 1 + i + kj$ and $b = 1 + \ell + km$, where either i or ℓ equals $k - 1$; (3) $a = 1 + i + kj$ and $b = 1 + \ell + km$, where $j = m$.

So the total number of expanding pairs does not exceed

$$(n - k^2)n + k\cdot k^2 + k\binom{k}{2} \le 2kn + k^3 + \frac{k^3}{2} < 10n\sqrt{n},$$

as desired.

(b) We show that for every $n > 1$ and every $\sigma \in S_n$ the number of expanding pairs is at larger than $\frac{1}{1000}n\sqrt{n}$. Notice that all pairs of the form $(i, i+1)$ are expanding, so this number is at least $n - 1$ which is larger than $\frac{1}{1000}n\sqrt{n}$, say, for all $n \le 1000$. So we may assume that $n > 1000$. Set $m = \frac{n+1}{2}$.

For an integer $1 \le a \le n$ define its *rank* as $R(a) = |a - m|$. Let $C(a) = R(\sigma(a)) - R(a)$ denote the *rank change* of a under σ. The further argument is split into two cases, according to the value of the sum

$$\Sigma = \sum_{a=1}^{n}|C(a)| = \Sigma_+ + \Sigma_-, \qquad \text{where} \quad \Sigma_+ = \sum_{a\colon C(a)\ge 0} C(a) \quad \text{and} \quad \Sigma_- = \sum_{a\colon C(a)<0}|C(a)|.$$

Notice here that the sum of all the $C(a)$ vanishes, i.e., $0 = \Sigma_+ - \Sigma_-$, so $\Sigma_+ = \Sigma_- = \frac{1}{2}\Sigma$.

Case 1: $\Sigma > \frac{1}{2}n\sqrt{n}$. In this case, we implement the following simple

Lemma. Assume that $C(a) \ge 0$, Then a is a member of at least $C(a)$ expanding pairs.

Proof. Notice that $|a - b| \le |a - m| + |b - m| \le R(a) + (m - 1)$ for every a and b. Without loss of generality, we may assume that $\sigma(a) \le m$, so $R(\sigma(a)) = m - \sigma(a)$. Then for every b with $\sigma(b) \ge n - C(a)$ we have

$$|\sigma(b) - \sigma(a)| \ge \sigma(b) - \sigma(a) \ge n - C(a) - m + R(\sigma(a)) = R(a) + (m-1) \ge |a - b|,$$

so the numbers a and b form an expanding pair whenever $b \neq a$. There are $C(a)+1$ values of b with $\sigma(b) \geq n - C(a)$, hence at least $C(a)$ expanding pairs containing a have been found. $\square$

Due to the Lemma, since each expanding pair consists of two numbers, the number of expanding pairs is at least $\frac{1}{2}\Sigma_+ = \frac{1}{4}\Sigma \geq \frac{1}{8}n\sqrt{n}$, as desired.

Case 2: $\Sigma < \frac{1}{2}n\sqrt{n}$. Denote

$$D_i = \{a\colon |C(a)| = i\} \quad \text{and} \quad d_i = |D_i|.$$

Notice that

$$\frac{n\sqrt{n}}{2} > \Sigma = \sum_i i d_i \geq \sqrt{n} \sum_{i \geq \sqrt{n}} d_i, \qquad \text{whence} \quad n' := \sum_{i<\sqrt{n}} d_i > \frac{n}{2}.$$

Next, for every $a \in D_i$ we have $|\sigma(a) - m| = |a-m| \pm i$, so

$$\sigma(a) \in \{a+i, a-i, 2m-a+i, 2m-a-i\}. \tag{2}$$

Split the set D_i into four parts, $D_i = D_{i,1} \sqcup D_{i,2} \sqcup D_{i,3} \sqcup D_{i,4}$, so that the values of σ on all numbers in one part satisfy the same choice in (2), i.e.,

$$a \in D_{i,1} \Rightarrow \sigma(a) = a+i; \quad a \in D_{i,2} \Rightarrow \sigma(a) = a-i;$$
$$a \in D_{i,3} \Rightarrow \sigma(a) = 2m-a+i; \quad a \in D_{i,4} \Rightarrow \sigma(a) = 2m-a-i.$$

Thus, if two numbers $a < b$ belong to the same part $D_{i,j}$, then $|\sigma(a)-\sigma(b)| = |a-b|$, so the pair (a,b) is expanding.

Denote $d_{i,j} = |D_{i,j}|$ and $k = \lceil\sqrt{n}\rceil$. Then the number of expanding pairs we have found is

$$\sum_{i<\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{4} \binom{d_{i,j}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i<\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{4} d_{i,j}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i<\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{4} d_{i,j} \geq \frac{1}{2\cdot 4k} \left(\sum_{i<\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{4} d_{i,j} \right)^2 - \sum_{i<\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{4} d_{i,j}$$
$$= \frac{n'^2}{8k} - \frac{n'}{2} = \frac{n'(n'-4k)}{8k} \geq \frac{n/2 \cdot n/4}{16\sqrt{n}} \geq \frac{n\sqrt{n}}{128},$$

as desired.