Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2006/07 година

ЈЕДНА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

***Драгољуб Радуловић*, Земун**

У многим збиркама задатака из математике, како средњошколским тако и високошколским, појављује се међу неким значајнијим граничним вредностима следећа:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r,$$

при чему је r произвољан реалан број, али се ретко примењује.

Укаимо на неке могућности њене примене. Наравно, прво ћемо је доказати. Наиме, ова гранична вредност је последица једнакости $(1+x)^r=e^{r\ln(1+x)}$, $x>-1$ и следећих граничних вредности:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$

Заиста,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r=\lim_{x\to 0}\frac{e^{r\ln(1+x)}-1}{r\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot r=1\cdot 1\cdot r=r.$$

Пример 1. Одредити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-\sqrt[3]{1+bx}}{\sqrt[4]{1+cx}-\sqrt[5]{1+dx}}$, при чему су a,b,c,d неки реални бројеви и $c\neq\frac{4}{5}d$.

Решење.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+ax}-\sqrt[3]{1+bx}}{\sqrt[4]{1+cx}-\sqrt[5]{1+dx}}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+ax}-1-(\sqrt[3]{1+bx}-1)}{\sqrt[4]{1+cx}-1-(\sqrt[5]{1+dx}-1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{ax}\cdot a-\dfrac{\sqrt[3]{1+bx}-1}{bx}\cdot b}{\dfrac{\sqrt[4]{1+cx}-1}{cx}\cdot c-\dfrac{\sqrt[5]{1+dx}-1}{dx}\cdot d}\\&=\frac{\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b}{\frac{1}{4}c-\frac{1}{5}d}=\frac{30a-20b}{15c-12d}.\end{aligned}$$

Пример 2. Одредити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+x^\alpha A(x)}-\sqrt[n]{1+x^\alpha B(x)}}{\sqrt[p]{1+x^\alpha C(x)}-\sqrt[q]{1+x^\alpha D(x)}}$, при чему је $A(x)=\sum\limits_{i=0}^{k_1} a_i x^i$, $B(x)=\sum\limits_{i=0}^{k_2} b_i x^i$, $C(x)=\sum\limits_{i=0}^{k_3} c_i x^i$, $D(x)=\sum\limits_{i=0}^{k_4} d_i x^i$, $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, α ненегативан реалан број, m, n, p, q неки природни бројеви већи од 1, k_1, k_2, k_3, k_4 ненегативни цели бројеви и $c_0 \neq \dfrac{p}{q}\cdot d_0$.

Решење.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x^\alpha A(x)}-\sqrt[n]{1+x^\alpha B(x)}}{\sqrt[p]{1+x^\alpha C(x)}-\sqrt[q]{1+x^\alpha D(x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt[m]{1+x^\alpha A(x)}-1}{x^\alpha A(x)}\cdot A(x)-\dfrac{\sqrt[n]{1+x^\alpha B(x)}-1}{x^\alpha B(x)}\cdot B(x)}{\dfrac{\sqrt[p]{1+x^\alpha C(x)}-1}{x^\alpha C(x)}\cdot C(x)-\dfrac{\sqrt[q]{1+x^\alpha D(x)}-1}{x^\alpha D(x)}\cdot D(x)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{m}\cdot a_0-\dfrac{1}{n}\cdot b_0}{\dfrac{1}{p}\cdot c_0-\dfrac{1}{q}\cdot d_0}=\frac{(na_0-mb_0)pq}{(qc_0-pd_0)mn}.$$

Пример 3. Одредити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[2005]{1-x^2\sin x}-e^{x^3}}{\operatorname{tg}^3 x}$.

Решење.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[2005]{1-x^2\sin x}-e^{x^3}}{\operatorname{tg}^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt[2005]{1-x^2\sin x}-1}{x^3}-\dfrac{e^{x^3}-1}{x^3}}{\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt[2005]{1-x^2\sin x}-1}{-x^2\sin x}\cdot\left(-\dfrac{\sin x}{x}\right)-\dfrac{e^{x^3}-1}{x^3}}{\dfrac{1}{\cos^3 x}\cdot\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2005}\cdot(-1)-1}{1\cdot 1}=-\frac{2006}{2005}.$$

Приметимо да ако у претходном задатку уместо $\sin x$ ставимо $\arcsin x$ или $\operatorname{arctg} x$ и (или) уместо $\operatorname{tg} x$ ставимо $\arcsin x$ или $\operatorname{arctg} x$, резултат остаје исти уз аналоган поступак.

Задаци

1. Одредити $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2x-1}-1}$.

2. Одредити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x^2\sin\dfrac{1}{x}}-1}{e^x-\cos x}$, при чему је n произвољан природан број већи од 1. Може ли се претходна гранична вредност одредити применом Лопиталовог правила?

3. Одредити по дефиницији први извод функције $f(x) = \sqrt[n]{x}$ у произвољној тачки x из $\mathbb{R}^+$, при чему је n произвољан природан број већи од 1.