Osječki matematički list 17 (2017), 161-170

Pravilni zvjezdasti mnogokuti

Anja Corn*, Ljiljana Primorac Gajčić†

Sažetak

Pravilni zvjezdasti mnogokut je geometrijska figura koja se najčešće susreće u umjetnosti i arhitekturi, ali ima i svoju primjenu pri rješavanju određenih optimizacijskih problema. Takva figura nastaje uzastopnim spajanjem točaka (najčešće nesusjednih) koje su pravilno raspoređene na kružnici pri čemu se postupak spajanja ponavlja sve dok se ne vratimo u polaznu točku. U radu proučavamo njihova geometrijska svojstva te predstavljamo njihovu ulogu u umjetnosti i kulturi.

Ključne riječi: *mnogokut, pravilni zvjezdasti mnogokut*

Regular star polygons

Abstract

Regular star polygon is a geometric figure most commonly encountered in art and architecture, but it also has its application in solving certain optimization problems. This figure is generated by successively connecting points (most often nonadjacent) that are regularly spaced on the circle, whereby connection is repeated until we return to the starting point. In this paper, we study their geometrical properties and present their role in art and culture.

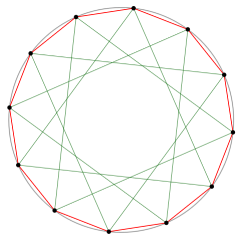
Keywords: *polygon, regular star polygon*

*Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, Sveučilište u Osijeku, email: anja.corn@ferit.hr

†Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: ljiljana.primorac@mathos.hr

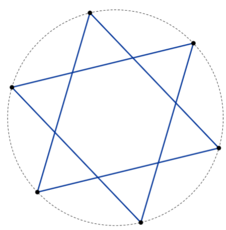
1 Uvod

Jeste li se ikada susreli s pojmom "šivanja" u matematici? Ako jeste, onda ste najvjerojatnije u osnovnoj školi "šivali" različite mnogokute, slika 1.



Slika 1: "Šivanje" mnogokuta

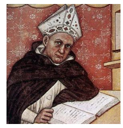
Ukoliko ste zaboravili ili nikada niste "šivali" mnogokute, možete uzeti papir te konstruirati kružnicu na kojoj pravilno rasporedite npr. 6 točaka i stavite pribadače na ta mjesta, te krećući od jedne točke, koncem povežite svaku drugu točku. Navedeni postupak završite u onom trenutku kada obiđete sve vrhove. Na taj način, dobit ćete poznatu Davidovu zvijezdu koja je simbol države Izrael, slika 2. Zbog svog oblika, navedeni mnogokuti dobili su naziv pravilni zvjezdasti mnogokuti.



Slika 2: Davidova zvijezda

Pravilni zvjezdasti mnogokuti su zbog svog zanimljivog izgleda stoljećima privlačili pažnju umjetnika i matematičara. Pravilni $\{\frac{5}{2}\}$ zvjezdasti mnogokut, poznatiji kao pentagram, bio je znak prepoznavanja učenika pitagorejske škole, a sakralne građevine iz perioda srednjeg vijeka gotovo su sigurno ukrašene ornamentima takvog oblika. Možda je okruženost pravilnim zvjezdastim mnogokutima i motivirala engleskog nadbiskupa od

Cathenburyja, matematičara i filozofa Thomasa Bradwardina te je istraživao njihova geometrijska svojstva. Nažalost, njegove bilješke ostale su neotkrivene godinama nakon njegove smrti. Johannes Kepler u prvom i drugom poglavlju svoje knjige *Harmonices Mundi* ili *Harmonije svijeta* opisivao je njihova svojstva, ali ih nije nazvao zvjezdastim mnogokutima. Zapravo, tek je hrvatski matematičar Branko Grünbaum, rođeni Osječanin, u Keplerovom djelu prepoznao definicije koje su se odnosile na zvjezdaste mnogokute. Oznaku $\{\frac{n}{p}\}$ (koja će poslije biti objašnjena) prvi je uveo Ludwig Schläfli i ona je danas poznata kao Schläflijev simbol. U 19. stoljeću poznati matematičar Coxeter predstavio je detaljnu teoriju pravilnih zvjezdastih mnogokuta dokazavši brojna geometrijska svojstva, a nekoliko godina kasnije predstavio je teoriju zvjezdastih poliedara.



Thomas Bradwardine (1290.-1349.), engleski matematičar, fizičar, skolastički filozof i doktor teologije

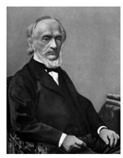
Johannes Kepler (1571.-1630.), njemački matematičar i astronom

2 Pravilni zvjezdasti mnogokuti

Pravilni zvjezdasti mnogokuti nastaju uzastopnim spajanjem točaka (najčešće nesusjednih) koje su pravilno raspoređene na kružnici pri čemu se postupak spajanja ponavlja sve dok se ne vratimo u polaznu točku.

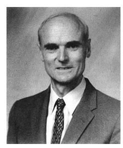
Branko Grünbaum (1929.-), profesor emeritus na University of Washington u Seattleu

Definicija 2.1. Neka su n i p nenegativni cijeli brojevi, te neka je na kružnici k na međusobno jednakim udaljenostima raspoređeno n točaka. Povezivanjem svake p-te točke dobiva se konkavna figura koju zovemo *pravilni* $\{\frac{n}{p}\}$ *zvjezdasti mnogokut*. Broj p naziva se *gustoćom* zvjezdastog mnogokuta.

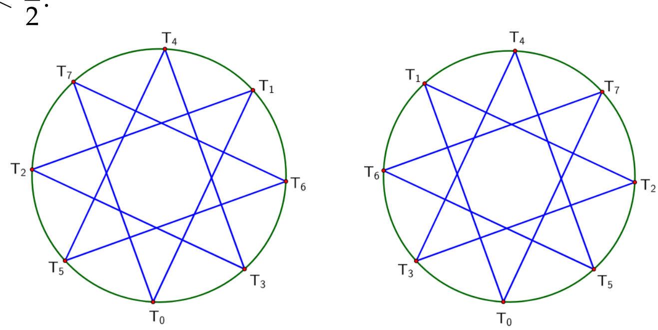


Ludwig Schläfli (1814.–1895.), švicarski matematičar, bavio se geometrijom i kompleksnom analizom

Uočimo da za $p = k$ i $p = n - k$, $k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$, dobivamo isti pravilni zvjezdasti mnogokut, slika 3. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $p < \dfrac{n}{2}$.



Harold Scott MacDonald Coxeter (1907.-2003.), smatra se jednim od najvećih geometričara 20. stoljeća

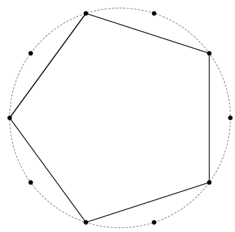


(a) pravilni $\{\frac{8}{3}\}$ zvjezdasti mnogokut

(b) pravilni $\{\frac{8}{5}\}$ zvjezdasti mnogokut

Slika 3: Sukladni pravilni zvjezdasti mnogokuti

Pravilni zvjezdasti mnogokut za koji je $p = 0$ često se izostavlja iz razmatranja budući da njegovi vrhovi nisu međusobno povezani i za njega ne definiramo unutarnji kut, a ne možemo računati niti površinu. Takav mnogokut zovemo diskretnom zvijezdom. Ukoliko je $p = 1$, pravilni zvjezdasti mnogokut je zapravo pravilni mnogokut s n vrhova, a ukoliko spojimo nasuprotne vrhove, tj. $p = \frac{n}{2}$, pri čemu je n paran broj, dobivena figura naziva se asterisk. Primijetimo da se za $p > 1$ stranice pravilnog zvjezdastog mnogokuta međusobno presijecaju, ali njihove presječne točke ne ubrajamo u vrhove ovakvog mnogokuta, slika 3(a).



Slika 4: Pravilni $\{\frac{10}{2}\}$ zvjezdasti mnogokut nakon jednog obilaska vrhova

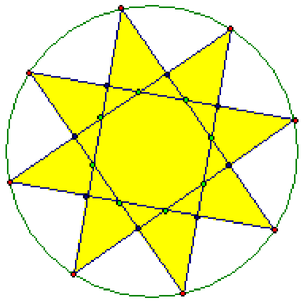
Promatrajući sliku 3(a) i sliku 4 zaključujemo kako je u nekim slučajevima moguće obići sve vrhove u jednom potezu, dok u drugim crtanje pravilnog zvjezdastog mnogokuta završi već nakon par koraka unatoč tome što svi vrhovi nisu posjećeni. Razlog tome leži u činjenici da su u prvom slučaju n i p relativno prosti, dok u drugom slučaju n i p imaju zajedničkog djelitelja. Ukoliko svi vrhovi nisu posjećeni, tada u sljedećem koraku proizvoljno odaberemo slobodni vrh te ponavljamo postupak sve dok se svi vrhovi ne posjete točno jedanput.

U ovom članku proučavat ćemo pravilne zvjezdaste mnogokute u kojima su n i p relativno prosti brojevi i takve mnogokute nazivamo *jednostavnim pravilnim zvjezdastim mnogokutima*.

2.1 Geometrija pravilnih zvjezdastih mnogokuta

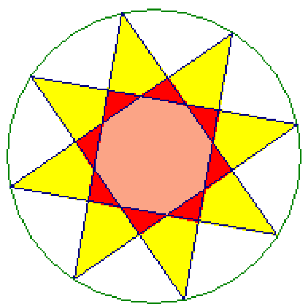
Značajan doprinos razumijevanju pravilnih zvjezdastih mnogokuta dao je spomenuti matematičar Coxeter, koji je dokazao da je unutarnji kut pri vrhu pravilnog $\{\frac{n}{p}\}$ zvjezdastog mnogokuta mjere $180° - \dfrac{360°}{n}p$. Ako u pravilnom zvjezdastom mnogokutu istaknemo točku T_0 kao polaznu te točke T_p i T_{2p}, tada se točka T_0 rotacijom za kut mjere $\dfrac{360°}{n} \cdot 2p$ oko središta S kružnice na kojoj leže vrhovi promatrane figure, preslika u točku

T_{2p}. Tada je kut $\angle T_0ST_{2p}$ mjere $360^\circ - \dfrac{360^\circ}{n}2p$. Budući da je kut $\angle T_0ST_{2p}$ središnji kut nad tetivom $\overline{T_0T_{2p}}$, kut $\angle T_0T_pT_{2p}$ je obodni kut nad istom tetivom i stoga mjere $180^\circ - \dfrac{360^\circ}{n}p$, [1].
Unutar svakog $\{\frac{n}{p}\}$ pravilnog zvjezdastog mnogokuta možemo uočiti $\{\frac{n}{p-1}\}$ pravilni zvjezdasti mnogokut pa zaključujemo da unutar danog $\{\frac{n}{p}\}$ pravilnog zvjezdastog mnogokuta postoji p pravilnih zvjezdastih mnogokuta čija se gustoća razlikuje za 1, slika 5.



Slika 5: Pravilni $\{\frac{8}{3}\}$, $\{\frac{8}{2}\}$ i $\{\frac{8}{1}\}$ zvjezdasti mnogokuti

Osim toga, svaki pravilni $\{\frac{n}{p}\}$ zvjezdasti mnogokut možemo rastaviti na $1 + np - n$ geometrijskih figura u koje ubrajamo deltoide, jednakokračne trokute i pravilni mnogokut. Ukoliko je $p > 1$, u rastavu imamo n trokuta i $n(p-2)$ deltoida, slika 6.



Slika 6: Pravilni $\{\frac{8}{3}\}$ zvjezdasti mnogokut s istaknutih 8 trokuta i 8 deltoida

Neka je s R označen polumjer kružnice opisane pravilnom $\{\frac{n}{p}\}$ zvjezdastom mnogokutu. Površinu ove geometrijske figure dobivamo na način da od površine pravilnog mnogokuta s n vrhova oduzmemo površinu n sukladnih jednakokračnih trokuta s krakovima koji se podudaraju s krakovima pravilnog zvjezdastog mnogokuta.

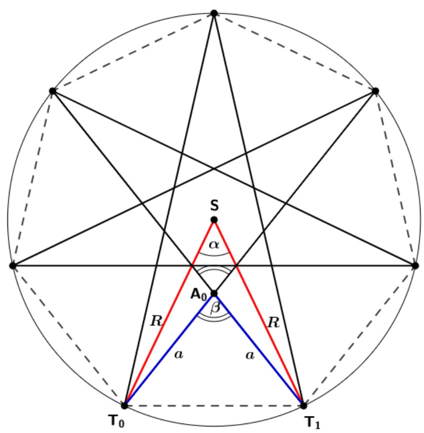
Stoga najprije izračunajmo površinu pravilnog mnogokuta. Radi lakšeg računanja, mnogokut ćemo podijeliti na n sukladnih jednakokračnih trokuta s krakovima duljine R i kutom pri vrhu S, koji iznosi $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, slika 7. Površina takvog trokuta je

$$P_{\triangle T_0 S T_1} = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

pa je površina pravilnog mnogokuta oblika

$$P_{\{\frac{n}{1}\}} = n \cdot P_{\triangle T_0 S T_1} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Kako bismo odredili površinu pravilnog zvjezdastog mnogokuta, preostaje još odrediti površinu trokuta $T_0 A_0 T_1$. Naime, svi ostali trokuti $T_i A_i T_{i+1}$, $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, gdje su točke A_i sjecišta dužina koje spajaju vrhove pravilnog zvjezdastog mnogokuta, međusobno su sukladni budući da imaju sukladne krakove i sukladne kutove među njima. Kao što smo već spomenuli, unutar $\{\frac{n}{p}\}$ mnogokuta, postoji $\{\frac{n}{p-1}\}$ mnogokut kojemu unutarnji kut pri vrhu iznosi $\beta = 180^\circ - 360^\circ \frac{p-1}{n}$, a kako je on vršni kut s kutom nasuprot osnovici u jednakokračnom trokutu $T_i A_i T_{i+1}$, oni su iste mjere, slika 7.



Slika 7: Pravilni $\{\frac{7}{3}\}$ zvjezdasti mnogokut

Preostaje još izračunati duljinu kraka $\{\frac{n}{p}\}$ pravilnog zvjezdastog mnogokuta. Promotrimo trokute $T_0 S T_1$ i $T_0 A_0 T_1$. Iz trokuta $T_0 S T_1$ dobivamo da je

$$|T_0T_1| = 2R\sin\frac{180^\circ}{n},$$

a iz trokuta $T_0A_0T_1$

$$\begin{aligned}|T_0T_1| &= 2a\sin\left(90^\circ - 180^\circ\frac{p-1}{n}\right)\\ &= 2a\cos\left(180^\circ\frac{p-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Izjednačavanjem te dvije jednakosti dobivamo duljinu kraka

$$a = R\frac{\sin\frac{180^\circ}{n}}{\cos\left(180^\circ\frac{p-1}{n}\right)}. \tag{1}$$

Površina traženog trokuta je

$$\begin{aligned}P_{\triangle T_0A_0T_1} &= \frac{1}{2}a^2\sin(180^\circ - 360^\circ\frac{p-1}{n})\\ &= \frac{1}{2}a^2\sin\left(360^\circ\frac{p-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Stoga, površinu $\{\frac{n}{p}\}$ pravilnog zvjezdastog mnogokuta računamo po formuli:

$$\begin{aligned}P_{\{\frac{n}{p}\}} &= P_{\{\frac{n}{1}\}} - n\cdot P_{\triangle T_0A_0T_1}\\ P_{\{\frac{n}{p}\}} &= \frac{n}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n} - \frac{n}{2}a^2\sin\left(360^\circ\frac{p-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Uvrstimo li (1) u prethodni izraz i iskoristimo li formulu za sinus dvostrukog kuta, dobivamo sljedeću formulu za površinu:

$$P_{\{\frac{n}{p}\}} = nR^2\sin\frac{180^\circ}{n}\left(\cos\frac{180^\circ}{n} - \sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\operatorname{tg}\frac{180^\circ(p-1)}{n}\right). \tag{2}$$

Kako pravilni $\{\frac{n}{p}\}$ zvjezdasti mnogokut sadrži $2n$ kraka duljine a, tada njegov opseg računamo po formuli $O = 2na$, tj.

$$O = 2nR\frac{\sin\frac{180^\circ}{n}}{\cos\left(180^\circ\frac{p-1}{n}\right)}. \tag{3}$$

Primjer 1. Vrtlar Maksim želi u svome vrtu posaditi cvijeće u obliku pravilnog $\{\frac{10}{3}\}$ zvjezdastog mnogokuta. S obzirom da Maksim želi da su suprotni vrhovi pravilnog zvjezdastog mnogokuta udaljeni 2 m, odredite površinu prekrivenu cvijećem.

Rješenje. Suprotni vrhovi pravilnog zvjezdastog mnogokuta udaljeni su 2 m, tj. polumjer kružnice na kojoj oni leže je 1 m, pa površinu $\{\frac{10}{3}\}$ pravilnog zvjezdastog mnogokuta računamo po formuli (2):

$$P = 10 \cdot 1^2 \cdot \sin 18^\circ (\cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 36^\circ) = 2,245.$$

Stoga je površina vrta prekrivena cvijećem jednaka 2.245 m^2. ◀

Primjer 2. Vrtlar Maksim sada želi ograditi cvjetnjak žicom tako da se na krajevima svakog kraka postavi stupac koji će držati žicu. Koliko metara žice i koliko stupaca je potrebno da se ogradi cvjetnjak?

Rješenje. Kako bismo odredili koliko je potrebno metara žice najprije ćemo izračunati opseg cvjetnjaka. Opseg cvjetnjaka računamo po formuli (3). Stoga je:

$$O = 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{\sin 18^\circ}{\cos 36^\circ} = 7,64.$$

Odnosno, potrebno je 7,64 m žice.
Odredimo sada i broj potrebnih stupaca. Broj stupaca jednak je zbroju broja vrhova i broja presječnih točaka koji odgovara broju vanjskih deltoida u pravilnom zvjezdastom mnogokutu. Naime, presječne točke su 2 vrha deltoida, no kako je jedna presječna točka vrh dvama deltoidima, dobivamo da je broj presječnica jednak $\frac{2 \cdot 10}{2} = 10$ budući da presječne točke brojimo dvaput. Stoga je broj stupaca jednak $10 + 10 = 20$. ◀

3 Pravilni zvjezdasti mnogokuti u kulturi i umjetnosti

Zvjezdasti mnogokuti pojavljuju se na raznim mjestima u umjetnosti i kulturi te nisu nužno uvijek pravilni, ali su simetrični. Ukoliko se pojavljuju na zastavi neke države, tada predstavljaju jedinstvo unutar te države. Zbog velike raznolikosti i rasprostranjenosti, mi ćemo pokazati samo neke zanimljive primjene pravilnih zvjezdastih mnogokuta.

Pravilni $\{\frac{5}{2}\}$ zvjezdasti mnogokut, koji se popularnije naziva pentragram, poznat je još iz antičkog razdoblja gdje je predstavljao planete: Merkur, Veneru, Mars, Jupiter i Saturn te je simbolizirao vječnost. U srednjem vijeku, pentagram je služio u magijske svrhe te su ga također koristili umjetnici i graditelji. Danas se obrnuti pentagram povezuje s okultizmom i crnom magijom. Spomenut ćemo još i pravilni $\{\frac{6}{2}\}$ zvjezdasti mnogokut koji je uz pentagram najrasprostranjeniji u svijetu. U judaizmu je poznat kao Davidova zvijezda čiji krakovi simboliziraju šest dana stvaranja svijeta, no također se koristi i u mnogim drugim religijama s različitim značenjima.

Pravilni zvjezdasti mnogokuti pojavljuju se na zastavama mnogih država. Najzastupljeniji je ponovno pentagram koji pronalazimo na zastavama država, a također krasi i zastavu Europske unije te simbolizira ideal jedinstva, solidarnosti i sklada među narodima Europe. Australija i Jordan na svojim zastavama imaju pravilne $\{\frac{7}{3}\}$ zvjezdaste mnogokute, dok Azerbajdžan ima pravilni $\{\frac{8}{3}\}$ zvjezdasti mnogokut. Zastava Republike Hrvatske sadrži dva pravilna $\{\frac{6}{2}\}$ zvjezdasta mnogokuta. Jedan se nalazi unutar najstarijeg poznatog hrvatskog grba, dok se drugi pravilni zvjezdasti mnogokut nalazi unutar grba Slavonije, slika 8.

Slika 8: Grb Republike Hrvatske

Pravilni zvjezdasti mnogokuti svoju su primjenu pronašli i u popločavanju podova i stropova raznih građevina kao što su katedrale, dvorci, muzeji, crkve i grobovi, slika 9. Iako je popločavanje ravnina pravilnim konveksnim mnogokutima poznato još od davnina, tek je 1619. godine prvi puta matematički obrađeno u Keplerovom djelu *Harmonije svijeta*.

Slika 9: Popločani pod u Crkvi Kristova uskrsnuća u St. Peterburgu, Rusija, slika preuzeta sa stranice [4]

Literatura

[1] Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry*, second edition, John Wiley and sons, New York, 1969.

[2] Johnson, A. *Famous problems and their mathematician*, Teacher Ideas Press, Greenwood village, 1999.

[3] Wilson, S. *Regular Star Polygons*, `http://web.sonoma.edu/users/w/wilsonst/papers/stars/default.html`, pristupljeno 07.07.2017.

[4] `http://thewanderingscot.com/photos/2009%20TransEurasia/West%20Russia/`, pristupljeno 24.06.2017.