X РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика 1976-1985
подготвена од Илија Јанев и Коста Мишовски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Ако a е природен број и $x = a^3 + 3a^2 + 2a + 6$, да се докаже дека бројот x е делив со 6.

2. Легура од два метала во Штип тежи 500N. Легурата потопена во вода губи од својата тежина 180N. Да се најде по колку N од секој метал содржи легурата, ако во вода едниот метал губи 40% а другиот 20% од својата тежина.

3. Во една кружница тетивата AB и дијаметарот AC го определуваат лакот $\overset{\frown}{BC} = 60^\circ$. Тетивата EF што ги поврзува средините на лаците $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{AC}$ ја сече тетивата AB во точката M и дијаметарот AC во точката N.

а) Да се докаже дека триаголникот AMN е рамнокрак,

б) Да се определи должината на кружницата, ако е $\overset{\frown}{BC} = 3$ cm.

4. Помалата основа CD на трапезот ABCD е дијаметар на кружница која дијагоналите на трапезот ги располовува и ја допира поголемата основа AB. Да се најдат аглите на трапезот.

71. (1985.VII.1)

Бројот $x = a^3 + 3a^2 + 2a + 6$ можеме да го напишеме во овој облик:

$$
\begin{aligned}
x &= a^3 + 3a^2 + 2a + 6 = a(a^2 + 3a + 2) + 6 \\
&= a(a^2 + a + 2a + 2) + 6 \\
&= a[a(a + 1) + 2(a + 1)] + 6 \\
&= a(a + 1)(a + 2) + 6
\end{aligned}
$$

Бидејќи a е природен број, тогаш броевите a, $a + 1$, $a + 2$, се три сукцесивни природни броја, па еден од нив е делив со 2, а еден со 3; тогаш нивниот производ е делив со 6. Значи, бројот $x = a(a + 1)(a + 2) + 6$ ќе биде делив со 6, што требаше и да се докаже.

72. (1985.VII.2)

Ако x е тежина на едниот метал во легурата, тогаш (500 — x) е тежина на другиот метал. Од условот на задачата ќе имаме:

$$\frac{40}{100}\ x + \frac{20}{100}\ (500 - x) = 180$$

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}500 - \frac{1}{5}x = 180$$

$$\frac{1}{5}x = 180 - 100$$

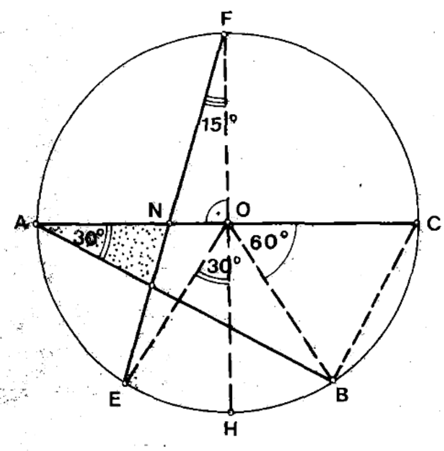
$$\frac{1}{5}x = 80$$

$$x = 400$$

Значи, легурата содржи 400 N од првиот метал и (500—x)N = 100 N од вториот метал.

Одговор: 400N и 100N.

73. (1985.VII.3



Црт. 47

За решавање на оваа задача ќе го користиме својството на периферискиот агол (. . . е двапати помал од соодветниот централен . . .)

а) Од условот следува:
$\sphericalangle BOC = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAC = 30^\circ$, како периферски агол над тетивата BC (види црт. 47)

Бидејќи точката E е средина на лакот $\overset{\frown}{AB}$ (по услов), следува:
$\sphericalangle AOE = \sphericalangle EOB = 60^\circ$

Бидејќи точката F е средина на лакот $\widehat{AC}$ (што не ја содржи точката B), следува $FO \perp AC$. Точката H нека е дијаметрално спротивна на F; тогаш е $HO \perp AC$, и OH е симетрала на $\measuredangle EOB$. Следува $\measuredangle EOH = 30^\circ$; тогаш $\measuredangle EFH = 15^\circ$ (како периферискi агол над лакот $\widehat{EH}$).

Од правоаголниот триаголник NOF имаме:

$\measuredangle ONF = 75^\circ$. Бидејќи е:

$\measuredangle ONF = \measuredangle ANM$ (како накрсни агли). Следува $\measuredangle ANM = 75^\circ$. Тогаш од збирот на внатрешните агли во Δ AMN добиваме и $\measuredangle AMN = 75^\circ$, т.е. триаголникот AMN има два еднакви агли, па е рамнокрак.

б) Триаголникот ABC е правоаголен (Талесова теорема), следува $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{BC}$ (катетата наспроти аголот од 30° е еднаква на половината од хипотенузата).

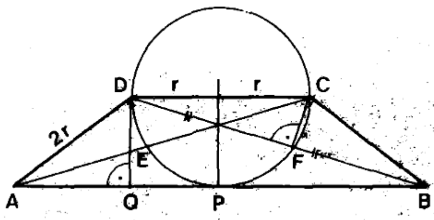
Значи, $\overline{AC} = 2 \cdot 3 = 6$.

Должината на кружницата е:

$L = \overline{AC} \cdot \pi = 6 \cdot 3{,}14 = 18{,}84$.

Одговор: б) 18,84 cm.

74. (1985.VII.4)



Црт. 48

Трапезот ABCD нека ги исполнува условите на задачата: $\overline{CD} = 2r$, $\overline{AE} = \overline{EC}$, $\overline{BF} = \overline{FD}$; P е допирна точка на основата AB со кружницата k (O, r). Аголот DFC = 90° (перифериският агол над дијаметарот CD), па следува дека Δ BDC е рамнокрак, т.е. $\overline{BC} = \overline{CD} = 2r$. Аналогно на тоа се докажува и дека е $\overline{AD} = \overline{DC} = 2r$, т.е. трапезот ABCD е рамнокрак. Доволно е да определиме еден негов агол.

Нека е $DQ \perp AB$, тогаш $\overline{DQ} = \overline{OP} = r$. Во правоаголниот Δ AQD, хипотенузата $\overline{AD} = 2r$ е двапати поголема од катетата $\overline{DQ} = r$; следува $\measuredangle A = 30^\circ$. Тогаш е $\measuredangle B = 30^\circ$, $\measuredangle C = \measuredangle D = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Одговор: $\measuredangle A = \measuredangle B = 30^\circ$

$\measuredangle C = \measuredangle D = 150^\circ$.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Ако е $a>0$, $b>0$ и $c>0$, тогаш важи неравенството: $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geqslant 6abc$. Докажи!

2. За кои два природни броја важи дека квадратот на едниот претставува збир од 1985 и квадратот на другиот.

3. Да се пресмета плоштината на правоаголен триаголник ако отсечките на кои е поделена хипотенузата со допирната точка на кружницата впишана во него се 3 cm и 8 cm.

4. Ортоцентарот на триаголникот ABC е H. Да се докаже дека важи релацијата:

$$\overline{AH}\cdot h_a+\overline{BH}\cdot h_b+\overline{CH}\cdot h_c=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

75. (1985.VIII.1)

Бидејќи според условот е $a>0$, $b>0$, $c>0$ ќе имаме:

$$a(b-c)^2 \geqslant 0; \quad b(c-a)^2 \geqslant 0; \quad c(a-b)^2 \geqslant 0$$

или

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geqslant 0$$
$$a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ac+a^2)+c(a^2-2ab+b^2) \geqslant 0$$
$$ab^2-2abc+ac^2+bc^2-2abc+ba^2+ca^2-2abc+cb^2 \geqslant 0$$
$$ab^2+ba^2+bc^2+cb^2+ac^2+ca^2 \geqslant 6abc$$
$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geqslant 6abc.$$

Доказот е завршен.

Решение II. Неравенството

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geqslant 6abc$$

е еквивалентно по ред, со неравенствата:

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2 \geqslant 6abc$$
$$b(a^2+c^2)+a(b^2+c^2)+c(a^2+b^2) \geqslant 6abc$$
$$b[(a-c)^2+2ac]+a[(b-c)^2+2bc]+c[(a-b)^2+2ab] \geqslant 6abc$$
$$b(a-c)^2+2abc+a(b-c)^2+2abc+c(a-b)^2+2abc \geqslant 6abc$$
$$b(a-c)^2+a(b-c)^2+c(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Бидејќи последното неравенство е точно за $a>0$, $b>0$, $c>0$, следува дека и почетното неравенство е точно.

76. (1985.VIII.2)

Ако броевите се x и y, тогаш од условот на задачата е:

$$x^2 = 1985 + y^2$$

или

$$x^2 - y^2 = 1985$$
$$(x-y)(x+y) = 1985. \qquad (1)$$

Бидејќи x и y се природни броеви $x-y<x+y$, и бројот 1985 може да се разложи на два множители (само на два начина) $1985 = 1 \cdot 1985 = 5 \cdot 397$, тогаш равенството (1) е еквивалентно на вкупност од два системи равенки:

$$\text{I} \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=1985 \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=397. \end{cases}$$

Решението на првиот систем е парот природни броеви (993, 992), а на вториот парот (201, 196)

Значи, постојат два пара природни броеви, коишто го задоволуваат условот на задачата, а тоа се паровите: (993, 992) и (201, 196).

Одговор: 993 и 992; 201 и 196.

77. (1985.VIII.3) Имаме (црт. 49) $\overline{AP} = 3$ cm, $\overline{BP} = 8$ cm. $\overline{OP} = \overline{OM} = \overline{ON} = r$

$\measuredangle C = 90^o$. Тогаш:

$\overline{AP} = \overline{AN} = 3$ cm –

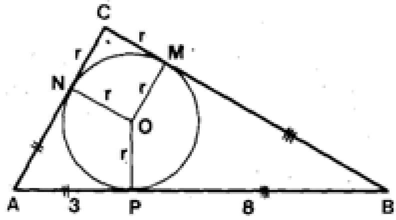
$\overline{BP} = \overline{BM} = 8$ cm.

$\overline{CM} = \overline{CN} = r$.

Плоштината на правоаголниот $\triangle$ ABC е

$P = \frac{1}{2}\ \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2}(r+3)(r+8) =$

$\frac{1}{2}(r^2 + 11r + 24)$ (1)



Црт. 49

Од Питагоровата теорема за $\triangle$ ABC имаме:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

$$(r+3)^2 + (r+8)^2 = 11^2$$

$$r^2 + 6r + 9 + r^2 + 16r + 64 = 121$$

$$2r^2 + 22r = 48$$

$$r^2 + 11r = 24 \qquad (2)$$

Ако резултатот (2) го замениме во (1), добиваме:

$$P = \frac{1}{2}(24 + 24) = 24.$$

Одговор: $P = 24$ cm²

Забелешка. Може да се докаже и општото тврдење: ,,Ако m и n се отсечките на кои е поделена хипотенузата со допирната точка од впишаната кружница во правоаголниот триаголник, тогаш неговата плоштина е еднаква на $m \cdot n$.

Решение:

Имаме (види црт. 49)

$$P = \frac{1}{2}(m+r)(n+r) = \frac{1}{2}(mn + mr + nr + r^2). \qquad (3)$$

Од Питагоровата теорема за $\triangle$ ABC имаме:

$$(m+r)^2 + (n+r)^2 = (m+n)^2$$

$$m^2 + 2mr + r^2 + n^2 + 2nr + r^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

$$2r^2 + 2mr + 2nr = 2mn$$

$$r^2 + mr + nr = mn \qquad (4)$$

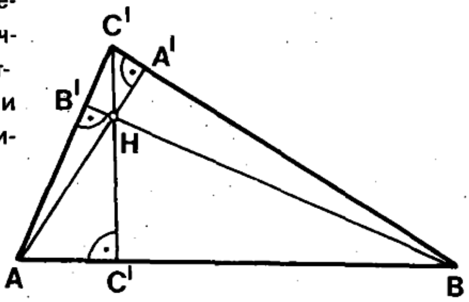
Ако резултатот (4) го замениме во (3) добиваме

$$P = \frac{1}{2}(mn + mn) = mn,$$

што требаше и да се докаже.

78. (1985.VIII.4)

Од цртежот е очигледно дека триаголниците AB'H и AA'C се слични (два агли им се еднакви . . .). Аналогно се слични и триаголниците CB'H и CC'A. Од сличноста на овие триаголници, следуваат пропорциите:



Црт. 50

$$\overline{AB'} : \overline{AH} = \overline{AA'} : \overline{AC}$$
$$\overline{CB'} : \overline{CH} = \overline{CC'} : \overline{CA}$$

или

$$\overline{AB'} \cdot \overline{AC} = \overline{AH} \cdot \overline{AA'}$$
$$\overline{CB'} \cdot \overline{CA} = \overline{CH} \cdot \overline{CC'}$$

$$\overline{AB'} \cdot b = \overline{AH} \cdot h_a$$
$$\overline{CB'} \cdot b = \overline{CH} \cdot h_c$$

Ако ги собереме последните две равенства, добиваме:

$$b(\overline{AB'} + \overline{CB'}) = \overline{AH} \cdot h_a + \overline{CH} \cdot h_c$$
$$b^2 = \overline{AH} \cdot h_a + \overline{CH} \cdot h_c \qquad (1)$$

На сличен начин добиваме:

$$a^2 = \overline{BH} \cdot h_b + \overline{CH} \cdot h_c \qquad (2)$$
$$c^2 = \overline{AH} \cdot h_a + \overline{BH} \cdot h_b \qquad (3)$$

Ако ги собереме равенките (1), (2) и (3) добиваме:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\overline{AH} \cdot h_a + 2\overline{BH} \cdot h_b + 2\overline{CH} \cdot h_c$$

или

$$\overline{AH} \cdot h_a + \overline{BH} \cdot h_b + \overline{CH} \cdot h_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

што требаше и да се докаже.