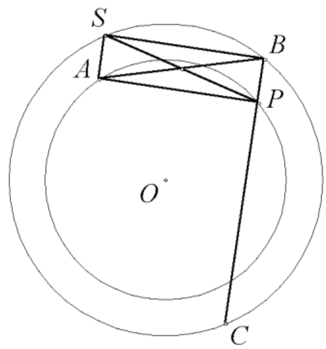
XXIX олимпијада

1. Во рамнина дадени се две кружници со радиуси R и r ($R > r$) со заеднички центар. Нека P е фиксна точка на помалата кружница, а точката B се движи по поголемата кружница. Правата BP повторно ја сече поголемата кружница во точката C. Нормалата l на BP во P, повторно ја сече помалата кружница во A, (ако l е тангента на кружницата во точката P, тогаш $A = P$).

а) Определи го множеството вредности на изразот $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$.

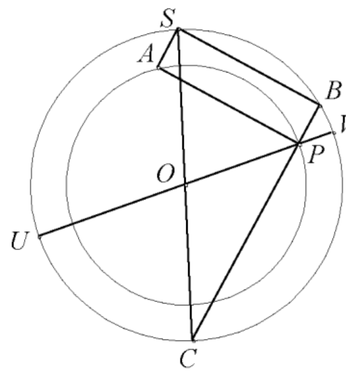
б) Определи го геометриското место на точки на средините на отсечката AB.

Решение. *Прв начин.* б) Го дополнуваме триаголникот APB до правоаголник $APBS$ (цртеж десно). Ако разгледаме осна симетрија со оска, симетралата на отсечката AP, добиваме дека точката S лежи на поголемата кружница. Во специјален случај, кога $A \equiv P$, земаме $S \equiv B$.



Во секој случај средината на отсечката AB се совпаѓа со средината на отсечката SP, и кога точката B минува низ сите точки од големата кружница, истото важи и за точката S, и обратно. Значи, бараното множество точки е еднакво на множеството од сите средини на отсечките PS, кога S се движи по големата кружница. Со други зборови, тоа е слика на големата кружница при хомотетија со центар P и коефициент $\frac{1}{2}$, а тоа е кружница со центар во средината на отсечката OP и радиус $\frac{R}{2}$.

а) За да го решиме првиот дел од задачата, ќе го користиме истиот правоаголник. Забележуваме дека OC е радиус на поголемата кружница, бидејќи аголот CBS е прав (цртеж десно). Затоа



$$\overline{AP}^2 = \overline{SB}^2 = \overline{SC}^2 - \overline{BC}^2 = 4R^2 - \overline{BC}^2,$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 - \overline{BP}^2, \quad \overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2.$$

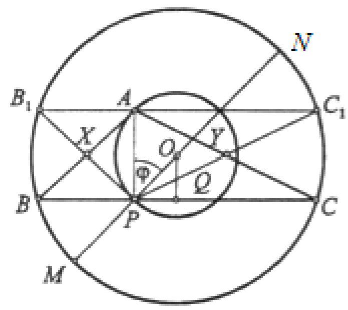
Од добиените равенства и степенот на точка во однос на кружница, добиваме

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 &= 2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= 8R^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 - \overline{BC}^2 \\ &= 8R^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 - (\overline{BP} + \overline{CP})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 8R^2 - 2\overline{BP}\cdot\overline{CP} \\ &= 8R^2 - 2\overline{UP}\cdot\overline{VP} \\ &= 8R^2 - 2(R+r)(R-r) \\ &= 6R^2 + 2r^2. \end{aligned}$$

Значи, бараното множество е $\{6R^2 + 2r^2\}$.

Втор начин. а) Нека O е центарот на кружниците и нека OP ја сече поголемата кружница во точките M и N (цртеж десно). Средината на BC да ја означиме со Q и нека $\varphi = \measuredangle OPA$. Тогаш



$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 &= (\overline{BP}+\overline{PC})^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PA}^2 \\ &= 2(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{BP}\cdot\overline{PC}). \end{aligned} \quad (1)$$

Понатаму,

$$\begin{aligned} &\overline{PA} = 2r\cos\varphi, \\ &\overline{PB} = \overline{BQ} - \overline{QP} = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\varphi} - r\sin\varphi, \\ &\overline{PC} = \overline{CQ} + \overline{QP} = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\varphi} + r\sin\varphi, \\ &\overline{PB}\cdot\overline{PC} = \overline{PM}\cdot\overline{PN} = (R-r)(R+r) = R^2 - r^2, \end{aligned}$$

па ако замениме во (1), по средувањето на изразот добиваме

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 6R^2 + 2r^2.$$

б) Нека средината на AB е точката X, а средината на AC е точката Y. Со централна симетрија со центар во O точките B и C нека се пресликаат во C_1 и B_1, соодветно. Отсечката B_1C_1 минува низ A, а четириаголниците AB_1BP и AC_1CP се правоаголници. Затоа точките X и Y се средини на отсечките PB_1 и PC_1, соодветно, односно $\overrightarrow{PX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB_1}$ и $\overrightarrow{PY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PC_1}$. Оттука следува дека бараното геометриско место на средините на AB е кружница хомотетична на поголемата кружница со центар на хомотетија P и коефициент $\frac{1}{2}$, па нејзиниот радиус е $\frac{R}{2}$, а центарот ѝ е во средината на отсечката OP.

2. Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ се подмножества од некое множество B, такви што

а) секое множество A_i има точно $2n$ елементи

б) секој пресек $A_i \cap A_j$, $(1 \le i < j \le 2n+1)$ содржи точно еден елемент, и в) секој елемент од B се содржи барем во две множества A_i.

За кои вредности на n можеме на секој елемент од B да му придружиме еден од броевите 1 или 0 на начин таков што за секое множество A_i бројот на неговите елементите на кои им е придружена нула е еднаков на n.

Решение. Ќе докажеме дека такво означување на елементите на B со 0 или 1 е можно ако и само ако n е парен број.

Најпрво ќе докажеме дека секој елемент на B припаѓа точно на две од множествата A_i. Ќе докажеме дека за секој фиксен $j, 1 \le j \le 2n+1$, важи

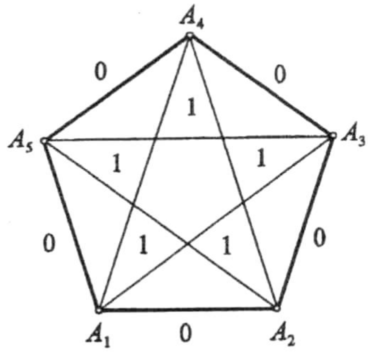
$$A_j = \bigcup_{i \neq j} (A_i \cap A_j) . \qquad (1)$$

Навистина $A_i \cap A_j \subseteq A_j$, па затоа $\bigcup_{i \neq j} (A_i \cap A_j) \subseteq A_j$. Обратно, нека $x \in A_j$. Тогаш според в) постои индекс $i \neq j$ таков што $x \in A_i$. Затоа $x \in A_i \cap A_j$, од што следува $A_j \subseteq \bigcup_{i \neq j} (A_i \cap A_j)$, со што равенството (1) е докажано. Да претпоставиме дека некој $x \in B$ е содржан барем во три множества A_i. Нека на пример $x \in A_1, x \in A_2, x \in A_3$. Тогаш од условот б) следува дека секое од множествата $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3), A_1 \cap A_4, ..., A_1 \cap A_{2n+1}$ содржи точно еден елемент, што противречи на условот а). Значи, секој елемент на B припаѓа точно на две множества A_i.

Множествата $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ може да ги претставиме како темиња на конвексен $(2n+1)-$аголник. Сега задачата се сведува на следнава поедноставна задача: За кои природни броеви n е можно страните и дијагоналите на $(2n+1)-$аголникот да се обележат со 0 и 1, така што од секое теме да излегуваат n отсечки со 0 и n отсечки со 1? Ако е можно такво означување, тогаш вкупниот број страни и дијагонали $1+2+...+2n = n(2n+1)$ мора да биде парен број, бидејќи колку што има отсечки означени со 0, толку има отсечки означени со 1. Затоа n мора да е парен број. Обратно, ако n е парен број, $n = 2k$, тогаш отсечката што ги поврзува A_i и A_j ја означуваме со 9 ако

$$0 < |i-j| (\mathrm{mod}\, 2n+1) \le k$$

и ја означуваме со 1 во спротивен случај. На пример, за $n = 2$ сите страни се означуваат со 0, а сите дијагонали со 1 (цртеж десно).



3. Функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е дефинирана со

$$f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(2n)=f(n),\ f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),$$
$$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n),\ \text{за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Определи го бројот на сите броеви $n\in\mathbb{N}$, помали или еднакви на 1988, за кои $f(n)=n$.

Решение. Ќе пресметаме неколку први членови на низата:

$$\begin{array}{ll}
f(1)=1 & f(11)=3f(5)-2f(2)=13 \\
f(2)=f(1)=1 & f(12)=f(6)=3 \\
f(3)=3 & f(13)=2f(7)-f(3)=11 \\
f(4)=f(2)=1 & f(14)=f(7)=7 \\
f(5)=2f(3)-f(1)=5 & f(15)=3f(7)-2f(3)=15 \\
f(6)=f(3)=3 & f(16)=f(8)=1 \\
f(7)=3f(3)-2f(1)=7 & f(17)=2f(9)-f(4)=17 \\
f(8)=f(4)=1 & f(18)=f(9)=9 \\
f(9)=2f(5)-f(2)=9 & f(19)=3f(9)-2f(4)=25 \\
f(10)=f(5)=5 & f(20)=f(10)=5.
\end{array}$$

На прв поглед претходните равенства не ни даваат никаква информација за функцијата f. Но овие равенства да ги запишеме во бинарен броен систем

$$\begin{array}{ll}
f(1)=1 & f(1011)=1101 \\
f(10)=01 & f(1100)=0011 \\
f(11)=11 & f(1101)=1011 \\
f(100)=001 & f(1110)=0111 \\
f(101)=101 & f(1111)=1111 \\
f(110)=011 & f(10000)=00001 \\
f(111)=111 & f(10001)=10001 \\
f(1000)=0001 & f(10010)=01001 \\
f(1001)=1001 & f(10011)=11001 \\
f(1010)=0101 & f(10100)=00101
\end{array}$$

Ќе докажеме дека функцијата f секој број n го пресликува во број чиј бинарен запис се добива од бројот n, ако цифрите ги запишеме во обратен редослед.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција.

Јасно, тоа е точно за $n=1,2,...,20$.

Ќе докажеме дека тоа е точно за секој природен број, ако е точно за сите броеви помали од него. За бројот n можни се следниве случаи: $n=2k$,

$n=4k+3$ и $n=4k+3$. Користејќи ја индуктивната претпоставка, како и дадената дефиниција на f се добива:

$$f(\overline{a_k...a_1 0}_{(2)}) = f(\overline{10}_{(2)}\cdot\overline{a_k...a_1 0}_{(2)}) = f(\overline{a_k...a_1}_{(2)})$$
$$=\overline{a_k...a_1}_{(2)} = \overline{0a_1...a_k}_{(2)},$$

$$f(\overline{a_k...a_2 01}_{(2)}) = f(\overline{100}_{(2)}\cdot\overline{a_k...a_1 0}_{(2)}+1)$$
$$=\overline{10}_{(2)}\cdot f(\overline{10}_{(2)}\cdot\overline{a_k...a_2}_{(2)}+1) - f(\overline{a_k...a_2}_{(2)})$$
$$=\overline{10}_{(2)}\cdot f(\overline{a_k...a_2 1}_{(2)}) - f(\overline{a_k...a_2}_{(2)})$$
$$=\overline{10}_{(2)}\cdot\overline{1a_2...a_k}_{(2)} - \overline{a_2...a_k}_{(2)} = \overline{10a_2...a_k}_{(2)},$$

$$f(\overline{a_k...a_2 11}_{(2)}) = f(\overline{100}_{(2)}\cdot\overline{a_k...a_1}_{(2)}+\overline{11}_{(2)})$$
$$=\overline{11}_{(2)}\cdot f(\overline{10}_{(2)}\cdot\overline{a_k...a_2}_{(2)}+1) - \overline{10}_{(2)}\cdot f(\overline{a_k...a_2}_{(2)})$$
$$=\overline{11}_{(2)}\cdot f(\overline{a_k...a_2 1}_{(2)}) - \overline{10}_{(2)} f(\overline{a_k...a_2}_{(2)})$$
$$=\overline{11}_{(2)}\cdot\overline{1a_2...a_k}_{(2)} - \overline{10}_{(2)}\cdot\overline{a_2...a_k}_{(2)} = \overline{11a_2...a_k}_{(2)}.$$

Од досега изнесенот следува дека треба да се пребројат оние природни броеви $n,\ n<1988$, кои имаат симетричен запис во бинарен броен систем, во литературата познати како полиндроми.

Јасно, број со $2k$ цифри во бинарен запис е полиндром ако и само ако има облик $\overline{1a_{k-1}...a_2a_1a_1a_2...a_{k-1}1}_{(2)}$, каде $a_1,a_2,...,a_k\in\{0,1\}$. Такви броеви има 2^{k-1}.

Исто така број кој во бинарен систем има $2k+1$ цифра е таков ако и само ако е од облик $\overline{1a_{k-1}...a_2a_1a_2...a_{k-1}1}_{(2)}$ каде што $a_1,a_2,...,a_k\in\{0,1\}$, и такви има 2^k.

Имајќи предвид дека дека $2^{10}<1988<2^{11}$, броевиу помали од $2^{11}=2048$ кои во бинарен запис се симетрични има

$$2^0+2^0+2^1+2^1+2^2+2^2+2^3+2^3+2^4+2^4+2^5=94.$$

Меѓу нив има точно два броја поголеми од $1988=11111000100_2$. Тоа се броевите 11111011111_2 и 11111111111_2. Затоа бараниот број е $94-2=92$.

4. Докажи дека множеството од сите реални броеви x за кои е важи

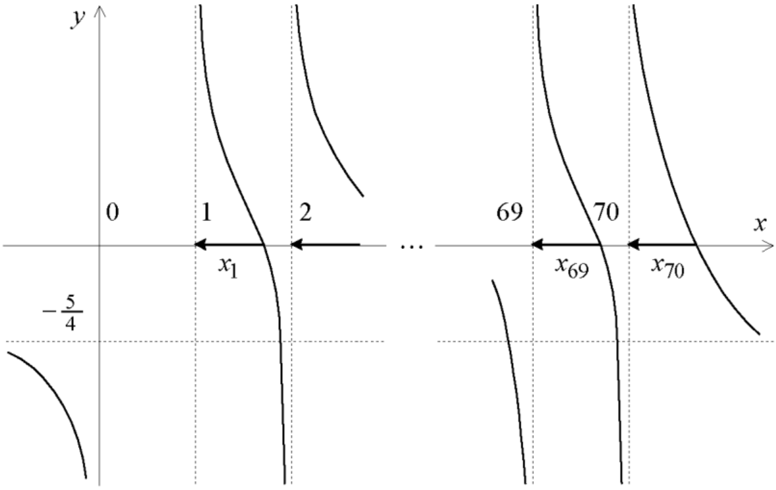
$$\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geq\frac{5}{4}$$

е унија од дисјунктни полуотворени интервали, со збир на должини 1988.

Решение. Ја разгледуваме функцијата

$$f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}-\frac{5}{4}.$$

Задачата сега гласи: докажи дека множеството од сите решенија на неравенката $f(x)\ge 0$ е унија на дисјунктни полуотворени интервали, чиј збир на должини е 1988.



Графиците на поединечните собироци од $f(x)$ се хиперболи, т.е. кривите $y=\frac{k}{x-k}$, $k=1,2,...,70$. Ако ги пресметаме границите на f во бесконечност и во точките $1, 2,..., 70$ заклучуваме:

1. f строго опаѓа на интервалите

$$(-\infty,1),(1,2),(2,3),...,(69,70),(70,+\infty)$$

2. $f(x)\to -\frac{5}{4}$, кога $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$;
3. $f(x)\to+\infty$, кога $x\to 1, 2,3,...,70$ од десно;
4. $f(x)\to-\infty$, кога $x\to 1, 2,3,...,70$ од лево.

Од овде гледаме дека постојат броеви

$$x_1\in(1,2), x_2\in(2,3),...,x_{69}\in(69,70),\quad x_{70}\in(70,+\infty)$$

такви што

$$f(x)\ge 0 \;\Leftrightarrow\; x\in(1,x_1]\cup(2,x_2]\cup...\cup(69,x_{69}]\cup(70,x_{70}]$$

(види ја скицата на графикот на функцијата f на горниот цртеж). Притоа $x_1, x_2,...\ ..., x_{69}, x_{70}$ се нули на функцијата. Но, равенката $f(x)=0$ е еквивалентна со равенката $P(x)=0$, каде P е полиномот

$$P(x)=\prod_{j=1}^{70}(x-j)-\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}k\prod_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{70}(x-j)$$

(бидејќи ниту еден од броевите $1,2,...,69,70$ не е нула на полиномот P). Збирот на должините на интервалите изнесува

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 2) + ... + (x_{70} - 70) = x_1 + x_2 + ... + x_{70} - (1 + 2 + ... + 70) .$$

Според Виетовите формули $x_1 + x_2 + ... + x_{70}$ е коефициентот пред x^{69} во нормираниот полином $P(x)$, со променет предзнак, т.е.

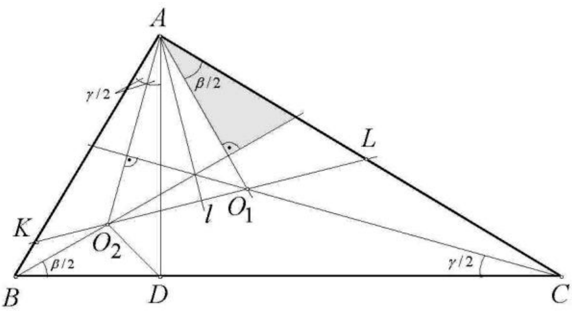
$$x_1 + x_2 + ... + x_{70} = -(-1 - 2 - 3 - ... - 70) - (-\tfrac{4}{5})(1 + 2 + ... + 70) .$$

Конечно, бараниот збир на должини е еднаков на

$$\tfrac{4}{5}(1 + 2 + ... + 70) = \tfrac{4}{5}\tfrac{70\cdot 71}{2} = 1988 .$$

5. Даден е $\triangle ABC$ со прав агол во темето A. Висината повлечена од темето A ја сече спротивната страна во точката D. Правата која минува низ центрите на вписаните кружници во триаголниците ABD и ACD ги сече страните AB и AC во точките K и L, соодветно. Нека S и T се плоштините на триаголниците ABC и AKL. Докажи дека $S \geq 2T$.

Решение. *Прв начин.* Нека O_1 и O_2 се центри на кружниците вписани во триаголниците ABD и ADC (цртеж десно), β и γ се агли кај темињата B и C соодветно. Пресметувајќи ги аглите во осенчениот триаголник, заклучуваме дека



правата $BO_2 \perp AO_1$; слично $CO_1 \perp AO_2$. Затоа симетралата на аголот A во триаголникот ABC (ја означуваме со l), лежи на висината на триаголникот AO_2O_1, т.е. $l \perp O_2O_1$. Значи, точката L е симетрична на точката K во однос на правата l, т.е. $\overline{AK} = \overline{AL}$ и

$$\measuredangle AKO_2 = \measuredangle ALO_1 = 45^\circ .$$

Бидејќи DO_2 е симетрала на аголот D во триаголникот ABD добиваме $\measuredangle ADO_2 = 45^\circ$, имаме $\triangle ADO_2 \cong \triangle AKO_2$, од што се добива $\overline{AK} = \overline{AD}$. Понатаму, од $\overline{AD} = \frac{bc}{a}$, добиваме

$$2T = \overline{AD}^2 \leq S = \tfrac{1}{2}bc \iff 2bc \leq a^2 = b^2 + c^2 \iff (b-c)^2 \geq 0 ,$$

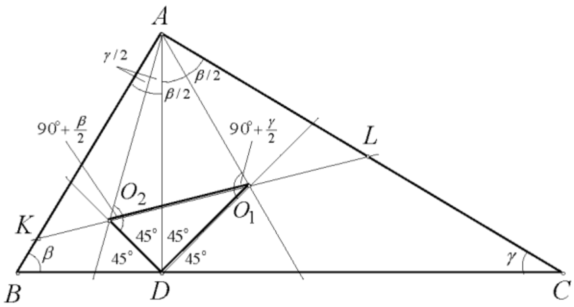
($a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако триаголникот е рамнокрак.

Втор начин. При истите ознаки како и во претходниот начин на решавање имаме,

$\frac{\overline{DO_1}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\overline{AD}}{\sin(90^\circ+\frac{\gamma}{2})} = \frac{\overline{AD}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$

(синусна теорема за триаголникот ADO_1, цртеж десно)

Слично, $\frac{\overline{DO_2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\overline{AD}}{\cos\frac{\beta}{2}}$ и затоа $\frac{\overline{DO_2}}{\overline{DO_1}} = \mathrm{tg}\beta$.



Од досега изнесеното имаме $\measuredangle DO_2O_1 = \beta$, и затоа $\measuredangle DO_1O_2 = \gamma$. Добиваме

$$\measuredangle AO_2O_1 = \measuredangle AO_2D - \measuredangle DO_2O_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

па затоа $\measuredangle KO_2A = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$. Аналогно се добива $\measuredangle LO_1A = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Според тоа, $\triangle KO_2A \cong \triangle DO_2A$ и $\triangle DO_1A \cong \triangle LO_1A$, од што следува $\overline{AK} = \overline{AD} = \overline{AL}$. Останатите пресметувања можат да се изведат со помош на тригонометрија, бидејќи $\overline{AD} = b\sin\gamma$, $\overline{AB} = b\,\mathrm{tg}\gamma$. Затоа неравенството го добива обликот $2\sin\gamma\cos\gamma \le 1$, односно $\sin 2\gamma \le 1$, кое очигледно е точно. Јасно, знак за рамвенство важи ако и само ако $\gamma = 45^\circ$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак.

6. Нека $a, b \in \mathbb{N}$ и $(ab+1) \mid (a^2+b^2)$. Докажи дека $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ е точен квадрат.

Решение. Нека $\frac{a^2+b^2}{1+ab} = k$ не е точен квадрат. Ако $a = b$, тогаш

$$k = (2-k)a^2 \ge 0,$$

за $k \le 2$, и тоа е можно само за $k = 1$, кој е точен квадрат. Нека (a,b) е решение на Диофантовата равенка $x^2 + y^2 = k(1+xy)$, во множеството $\mathbb{N}$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a > b$ и дека a е најмал меѓу сите такви решенија, т.е.

$$a = \min\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}, x > y, x^2 + y^2 = k(1+xy)\}.$$

Равенката

$$a^2 + b^2 = k(1+ab)$$

ја разгледуваме како квадратна равенка со непозната a. Нека a' е другото нејзино решение. Тогаш, $a + a' = kb$, т.е. $a' \in \mathbb{Z}$ и a' не е нула, бидејќи во спротивно $k = a^2$, односно k е точен квадрат. Понатаму, од

$$k(a'b+1) = a'^2 + b^2$$

следува $a'\geq 0$, т.е. $a'\in\mathbb{N}$. Освен тоа

$$aa'=b^2-k<b^2<ab,$$

па затоа $a'<b$. Значи парот (b,a') е решение на разгледуваната Диофантова равенка, во множеството $\mathbb{N}$, $b>a'$ и $b<a$, што противречи на минималноста на бројот a.

Од досега изнесеното следува дека ако a и b ги задоволуваат условите на задачата, тогаш $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ е точен квадрат.