

Сојузен натпревар 1978

Седмо одделение

1. Докажи дека $7^{10000} - 1$ е деливо со 10.

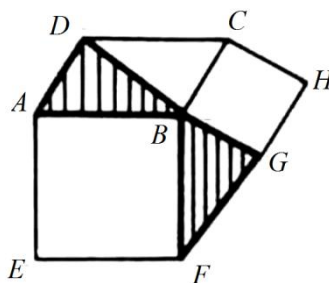
Решение. Од $(10a+a)(10b+1) = 100ab + 10(a+b) + 1$ следува дека производот на два броја чии цифри на единиците се 1 има цифра на единиците 1. Понатму, $7^4 = 49 \cdot 49 = 2401$, па затоа цифрата на единиците на $7^{10000} = (7^4)^{2500} = 2041^{2500}$ е 1. Според тоа, цифрата на единиците на бројот $7^{10000} - 1 = 2041^{2500} - 1$ е 0, што значи дека тој е делив со 10.

2. Над страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ од надворешната страна се конструирани квадрати $AEFB$ и $BGHC$. Докажи дека отсечката GF е еднаква на една од дијагоналите на паралелограмот $ABCD$.

Решение. За триаголниците BGF и ABD важи $AB = BF$ како страни на квадрат и $BG = BC = AD$. Од $\angle ABF = \angle CBG = 90^\circ$ следува

$$\angle ABC + \angle FBG = 180^\circ,$$

па затоа $\angle FBG = \angle BAD$. Според тоа, $\triangle BGF \cong \triangle ABD$. Оттуја следува $GF = BD$, што и требаше да се докаже.



3. Двократната плоштина на правилен шестаголник е еднаква на трикратната плоштина на рамностран триаголник. Определи го односот на периметрите на шестаголникот и триаголникот.

Решение. Ако a е должината на страната на шестаголникот, а b е должината на страната на триаголникот, тогаш $2 \cdot 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$, од каде добиваме $4a^2 = b^2$. Бидејќи $a, b > 0$, од последното равенство следува $b = 2a$, т.е. $6a = 3b$. Според тоа, периметрите на дадените фигури се еднакви, па нивниот однос е 1:1.

4. Во разностран триаголник ABC должината на висината повлечена од темето C кон страната AB е еднаква на збирот на должините на дру-

гите две висини. Изрази ја должината на страната AB во функција од должините на другите две страни. Потоа докажи дека не постојат триаголници кои го исполнуваат дадениот услов, а кај кои должината на страната BC е еднаква на 6 и должините на другите две страни се изразуваат со природни броеви.

Решение. Нека должините на страните AB, BC, CA се c, a, b соодветно, а должините на соодветните висини се h_c, h_a, h_b . Од

$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

следува

$$h_a = \frac{2P}{a}, h_b = \frac{2P}{b}, h_c = \frac{2P}{c}.$$

Сега, од условот $h_c = h_a + h_b$ добиваме $\frac{2P}{c} = \frac{2P}{a} + \frac{2P}{b}$, односно $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Оттука добиваме $c = \frac{ab}{a+b}$.

Ако $a = 6$, тогаш

$$c = \frac{6b}{6+b} = \frac{6b+36-36}{6+b} = 6 - \frac{36}{6+b}.$$

Според тоа, треба c да е природен број и $c = 6 - \frac{36}{6+b}$. Според условот на задачата последното е можно само ако $b = 6, c = 3$ или $b = 3, c = 2$ или $b = 12, c = 4$ или $b = 30, c = 5$. Случајот $b = 6, c = 3$ отпаѓа, бидејќи триаголникот треба да е разностран, а преостанатите случаи отпаѓаат бидејќи не е исполнето неравенството на триаголник.

5. Во 100×100 табела се запишани произволни десет илјади броеви. Со a_1 да го означиме збирот на броевите во првата колона, со a_2 збирот на броевите во втората колона итн. со a_{100} збирот на броевите во стотата колона. Понатаму, со b_1 да го означиме збирот на броевите во првиот ред, со b_2 збирот на броевите во вториот ред итн. со b_{100} збирот на броевите во стотиот ред. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{100} - b_{100}).$$

Решение. Дадениот израз може да се запише во видот

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{100}) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{100})$$

и тој еднаков на нула, бидејќи во првата заграда е збирот на сите 10000 броеви (збирот на колоните), а исто така и збирот во втората заграда е еднаков на збирот на сите 10000 броеви (збирот на редовите).

Осмо одделение

1. Сад е наполнет со стопроцентен алкохол. Одлеваме $2l$ алкохол и долеваме исто толку дестилирана вода. Оваа постапка ја повторуваме уште еднаш, т.е. одлеваме $2l$ мешавина и долеваме $2l$ дестилирана вода. На тој начин во садот добиваме 36% раствор алкохол. Колку литри раствор содржи овој сад?

Решение. Кога од x литри алкохол ќе одлееме 2 литри и долееме 2 литри вода во растворот ќе има $x-2$ литри алокохол, т.е. ќе добиеме раствор со $\frac{100(x-2)}{x}$ проценти алкохол. Вкупното количество чист алкохол по второто прелевање ќе биде $x-2-2\frac{x-2}{x}$ литри, а тоа според условот е $0,36x$. Значи, $x-2-2\frac{x-2}{x}=0,36x$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $x(x-2)-2(x-2)=0,36x^2$, т.е. на равенката $(x-2)^2=(0,6x)^2$. Бидејќи $x-2$ и $0,6x$ се позитивни броеви добиваме $x-2=0,6x$, т.е. $x=5$ литри.

2. Трицифрен број е 33 пати поголем од збирот на своите цифри. Докажи дека овој број е делив со 9, а потоа определи го овој трицифрен број.

Решение. Нека $100a+10b+c$ е бараниот број. Тогаш

$$100a+10b+c=33(a+b+c).$$

Десната страна на последното равенство е делива со 3, па затоа и бројот $100a+10b+c$ е делив со 3. Тоа значи дека $a+b+c=3k$. Сега имаме $100a+10b+c=99k$, што значи дека бараниот број е делив со 9. Затоа $a+b+c=9$ или $a+b+c=18$ или $a+b+c=27$. Бидејќи

$$33 \cdot 9 = 297 \neq 33(2+9+7),$$

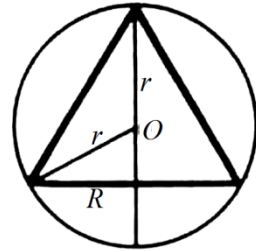
$$33 \cdot 18 = 594 = 33(5+9+4) \text{ и}$$

$$33 \cdot 27 = 891 \neq 33(8+9+1),$$

добиваме дека бараниот број е 594.

3. Од круг со радиус r исечен е впишаниот рамностран триаголник. Со помош на r изрази ги плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација на преостанатиот дел од кругот околу една своја оска на симетрија.

Решение. Со R и H да ги означиме должините на радиусот и висината на конусот кој се добива со ротација на исечениот рамностран триаголник и да ги изразиме преку r .
Имаме $H = \frac{3r}{2}$ и $R = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ (види цртеж десно).



За волуменот на телото добиваме

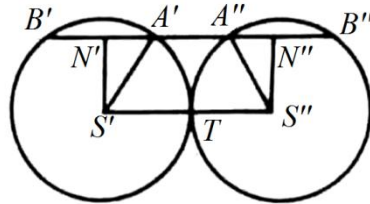
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{23}{24}\pi r^3.$$

За плоштината на телото добиваме

$$P = 4\pi r^2 + \pi r^2 + \pi R \cdot 2R = \frac{25}{4}\pi r^2.$$

4. Две кружници со радиус r се допираат надворешно. Конструирај права која ги сече двете кружници така што тие на неа определуваат три отсечки со еднаква должина.

Решение. *Анализа.* Нека N' и N'' се подножјата на висините од центрита на кружниците на бараните отсечки. Ако со x ја означиме должината на овие отсечки, тогаш $A'N' = A''N'' = \frac{x}{2}$. Но, $S'A' = S''A''$,



па затоа правоаголните триаголници $A'N'S'$ и $A''N''S''$ се складни. Според тоа, $S'N' = S''N''$, па затоа четириаголникот $S'S''N''N'$ е правоаголник. Според тоа, $N'N'' = 2r$ и како $A'N' = A''N'' = \frac{x}{2}$ и $A'A'' = x$, добиваме $2r = 2x$, односно $r = x$. Според тоа, триаголникот $S'TA'$ е рамностран.

Конструкција. Го конструираме рамностраниот триаголник $S'TA'$. Потоа низ A' повлекуваме права p паралелна на правата $S'S''$ и тоа е бараната права.

Доказот и дискусијата следуваат од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Во 100×100 табела се запишани произволни десет илјади броеви. Со a_1 да го означиме збирот на броевите во првата колона, со a_2 збирот на броевите во втората колона итн. со a_{100} збирот на броевите во стотата колона. Понатаму, со b_1 да го означиме збирот на броевите во

првиот ред, со b_2 збирот на броевите во вториот ред итн. со b_{100} збирот на броевите во стотиот ред. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{100} - b_{100}).$$

Решение. Види го решението на задачата 5 за *седмо одделение*.