

STUDENTSKA RUBRIKA

Pellova jednadžba

IVONA MANDIĆ*

IVAN SOLDI†

Sažetak. Članak sadrži riješene primjere i probleme koji se svode na analizu skupa rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ te njenu usku povezanost sa diofantskim aproksimacijama i verižnim razlomcima.

Ključne riječi: Pellova jednadžba, verižni razlomak

Pell's equation

Abstract. This article contains solved examples and problems which are reduced to the study of the set of solutions of Pell's equation $x^2 - dy^2 = 1$ and their tight connection to diophantine approximation and continued fractions.

Key words: Pell's equation, continued fraction

1. Uvod

Algebarska jednadžba dviju ili više varijabli s cjelobrojnim koeficijentima kod koje se traže cjelobrojna ili racionalna rješenja naziva se diofantska jednadžba. Diofantska jednadžba

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{1}$$

gdje je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat, naziva se *Pellova jednadžba*. Ako je d potpun kvadrat, tj. $d = c^2$, $c \in \mathbb{Z}$ onda iz

$$x^2 - dy^2 = (x - cy)(x + cy) = 1$$

slijedi

$$(x - cy) = (x + cy) = \pm 1.$$

U tom slučaju imamo trivijalna rješenja $x = \pm 1$, $y = 0$.

Jednadžba je dobila ime po engleskom matematičaru Johnu Pellu (1611. - 1685.)

*studentica Odjela za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31 000 Osijek, imandic@mathos.hr

†Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31 000 Osijek, isoldo@mathos.hr

kojemu je Leonhard Euler (1707. - 1783.), po svemu sudeći, pogrešno pripisao zasluge za njezino rješavanje. Neke pojedinačne jednadžbe ovog tipa nalaze se u tekstovima starogrčkih matematičara Arhimeda (287. pr. Kr. - 212. pr. Kr.) i Diofanta (200. po. Kr. - 284. po. Kr.). Ipak, prvi su ih sustavno proučavali srednjovjekovni indijski matematičari. Europski matematičari koji su dali metode za rješavanje Pellovih jednadžbi su Pierre de Fermat (1601. - 1665.), Leonhard Euler (1707. - 1783.) i Joseph Louis Lagrange (1736. - 1813.) koji je prvi dao i strogi dokaz korektnosti predložene metode. U članku ćemo pokazati neke primjere i probleme koji se svode na rješavanje Pellove jednadžbe.

2. Pellova jednadžba $x^2 - dy^2 = 1$

Pri rješavanju Pellove jednadžbe prirodno je pitati se koliko ona ima rješenja. Neka je $S = \{(x_n, y_n) : n, x_n, y_n \in \mathbb{N}\}$ skup rješenja Pellove jednadžbe. Uređeni par (x_1, y_1) , $x_1 = \min\{x_n : x_n \in \mathbb{N}\}$, $y_1 = \min\{y_n : y_n \in \mathbb{N}\}$ koji zadovoljava jednadžbu (1) zove se njeno *fundamentalno rješenje*. To je najmanje rješenje te iste jednadžbe u prirodnim brojevima. Ponekad ga označavamo i $x_1 + y_1\sqrt{d}$. Sljedeći teorem daje nam broj rješenja i odnos fundamentalnog i svih drugih rješenja Pellove jednadžbe (1).

Teorem 1. *Pellova jednadžba $x^2 - dy^2 = 1$ ima beskonačno mnogo rješenja. Ako je (x_1, y_1) njeno fundamentalno rješenje, onda su sva rješenja ove jednadžbe u prirodnim brojevima dana sa*

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Dokaz teorema može se pronaći u [1].

Primjer 1. *Nađite sva rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - 3y^2 = 1$.*

Rješenje:

Fundamentalno rješenje Pellove jednadžbe $x^2 - 3y^2 = 1$ je $(x_1, y_1) = (2, 1)$. Prema Teoremu 2.1 sva rješenja dana su sa

$$x_n + y_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

pa jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja u \mathbb{N} .

◇

Iz (2) lako dobivamo

$$\begin{aligned} (x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d}) &= x_{n+2} + y_{n+2}\sqrt{d}, \\ (x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}) &= x_n + y_n\sqrt{d}. \end{aligned}$$

Sada izjednačavanjem slobodnih članova imamo

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_1x_{n+1} + dy_1y_{n+1}, \\ x_n &= x_1x_{n+1} - dy_1y_{n+1}, \end{aligned}$$

odakle zbrajanjem dobivamo rekurziju $x_{n+2} = 2x_1x_{n+1} - x_n$. Analognim računom, tj. izjednačavanjem članova uz \sqrt{d} i zbrajanjem dobivamo rekurziju $y_{n+2} = 2x_1y_{n+1} - y_n$. Za početnu iteraciju uzima se trivijalno rješenje jednadžbe (1), $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Zadatak 1. Neka je (x_n, y_n) rastući niz rješenja Pellove jednadžbe (1) u prirodnim brojevima. Pokažite da za sve prirodne brojeve m, n vrijedi

$$\begin{aligned}x_{n+m} &= x_m x_n + dy_m y_n, \\y_{n+m} &= x_m y_n + y_m x_n, \\ \frac{x_{2m}}{y_{2m}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_m}{y_m} + \frac{dy_m}{x_m} \right).\end{aligned}$$

Rješenje:

Dokaz provedimo indukcijom po m . Uvrštavanjem $m = 1$ u prve dvije jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_1 x_n + dy_1 y_n, \\y_{n+1} &= x_1 y_n + y_1 x_n.\end{aligned}$$

Prema prethodnom računu, izjednačavanjem slobodnih članova i članova uz \sqrt{d} , gornje jednakosti vrijede za svaki prirodni broj n . Pretpostavimo da jednakosti vrijede za $m = k$, tj.

$$\begin{aligned}x_{n+k} &= x_k x_n + dy_k y_n, \\y_{n+k} &= x_k y_n + y_k x_n.\end{aligned}$$

Pokažimo istinitost za $m = k + 1$. Koristeći rezultate baze i pretpostavke indukcije slijedi

$$x_{n+k+1} = x_1 x_{n+k} + dy_1 y_{n+k} = x_1 (x_k x_n + dy_k y_n) + dy_1 (x_k y_n + y_k x_n).$$

Množenjem i grupiranjem članova dobivamo

$$x_{n+k+1} = x_n (x_1 x_k + dy_1 y_k) + dy_n (x_1 y_k + y_1 x_k) = x_{k+1} x_n + dy_{k+1} y_n.$$

Time je dokazana prva jednakost. Analognim računom lako se pokaže i istinitost druge jednakosti, tj.

$$y_{n+k+1} = x_{k+1} y_n + y_{k+1} x_n.$$

Posljednju jednakost dobivamo dijeljenjem prve jednakosti drugom, uz uvjet $m = n$.

$$\frac{x_{2m}}{y_{2m}} = \frac{x_m x_m + dy_m y_m}{2x_m y_m} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_m}{y_m} + \frac{dy_m}{x_m} \right).$$

◇

Zadatak 2. Neka su m i d proizvoljni prirodni brojevi i d nije potpun kvadrat. Pokažite da postoji beskonačno mnogo rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ pri čemu je y djeljiv s m .

Rješenje:

Neka je y djeljiv s m . To znači da postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $y = mk$, $m \in \mathbb{N}$. Trebamo pokazati da Pellova jednadžba $x^2 - dy^2 = 1$ uz taj uvjet ima beskonačno mnogo rješenja. Uvrštavanjem dobivamo jednadžbu

$$x^2 - d(mk)^2 = 1.$$

Sada, kvadriranjem i grupiranjem imamo

$$x^2 - (dk^2)m^2 = 1.$$

Označimo $d' := dk^2$. Dobivamo jednadžbu

$$x^2 - d'm^2 = 1, \quad (3)$$

d' nije potpun kvadrat (jer d nije potpun kvadrat). Primjenom Teorema 2.1 jednadžba (3) ima beskonačno mnogo rješenja u \mathbb{N} . Time je tvrdnja zadatka u potpunosti pokazana.

◇

Zadatak 3. *Pokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n sa svojstvom da je suma prvih n prirodnih brojeva jednaka kvadratu nekog prirodnog broja. Nađite barem 2 prirodna broja s tim svojstvom.*

Rješenje:

Vrijedi

$$\sum_{i=1}^n i = m^2,$$

tj.

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2.$$

Sada, množenjem s 8 dobivamo

$$4n^2 + 4n = 8m^2.$$

Svođenjem na potpuni kvadrat imamo

$$(2n+1)^2 - 1 = 8m^2,$$

odnosno

$$(2n+1)^2 - 8m^2 = 1.$$

Uvedimo supstituciju $x = 2n+1$, $y = m$. Sada se problem svodi na određivanje broja rješenja Pellove jednadžbe

$$x^2 - 8y^2 = 1.$$

Prema Teoremu 2.1 gornja jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja u \mathbb{N} . Fundamentalno rješenje je očito $(x_1, y_1) = (3, 1)$. Stoga iz $2n_1 + 1 = x_1$ slijedi $n_1 = 1$, $m_1 = 1$. Zaista, vrijedi $1 = 1^2$.

Sva rješenja jednadžbe $x^2 - 8y^2 = 1$ dana su sa

$$x_k + y_k\sqrt{8} = (3 + \sqrt{8})^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

zovemo *konvergente verižnog razlomka*. Brojnici i nazivnici konvergenti zadovoljavaju sljedeće rekurzije:

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n, \quad p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0a_1 + 1, \quad (p_{-1} = 1, p_{-2} = 0), \quad (4)$$

$$q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad (q_{-1} = 0, p_{-2} = 1). \quad (5)$$

Za svako rješenje Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$, $\frac{x}{y}$ je neka konvergenta u razvoju od \sqrt{d} u verižni razlomak. Broj \sqrt{d} je kvadratna iracionalnost pa mu je razvoj periodičan. On ima razvoj oblika

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, 2a_0}]$$

gdje je $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$. Precizni rezultati i veze verižnih razlomaka s diofantskim aproksimacijama i jednadžbama mogu se naći u [1] i [2].

Sada navedimo algoritam za razvoj kvadratnih iracionalnosti u verižni razlomak:

Neka je α kvadratna iracionalnost. Prikažimo je u obliku $\alpha = \frac{s_0 + \sqrt{d}}{t_0}$ gdje su $d, s_0, t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \neq 0$, d nije potpun kvadrat i $t_0 | (d - s_0^2)$. Ako je $\alpha = \sqrt{d}$, onda je $s_0 = 0$, $t_0 = 1$. Brojeve a_i računamo rekurzivno na sljedeći način:

$$a_i = \lfloor \frac{s_i + a_0}{t_i} \rfloor, \quad s_{i+1} = a_i t_i - s_i, \quad t_{i+1} = \frac{d - s_{i+1}^2}{t_i}.$$

Može se pokazati da je razvoj u verižni razlomak periodičan i da je duljina perioda $l(d) < 2d$ [vidi [1]]. Koristeći razvoj u verižni razlomak pokazuje se da Pellova jednadžba uvijek ima beskonačno rješenja. Bez dokaza navedimo sljedeći teorem:

Teorem 2. *Neka je l duljina perioda u razvoju \sqrt{d} .*

Ako je l paran, sva rješenja od $x^2 - dy^2 = 1$ dana su sa $(x, y) = (p_{nl-1}, q_{nl-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Posebno, fundamentalno rješenje je (p_{l-1}, q_{l-1}) .

Ako je l neparan, sva rješenja od $x^2 - dy^2 = 1$ dana su sa $(x, y) = (p_{2nl-1}, q_{2nl-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Posebno, fundamentalno rješenje je (p_{2l-1}, q_{2l-1}) .

Primjer 2. *Razvijte $\sqrt{15}$ u verižni razlomak.*

Rješenje:

$$s_0 = 0, \quad t_0 = 1, \quad a_0 = 3,$$

$$s_1 = a_0 t_0 - s_0 = 3, \quad t_1 = \frac{15 - s_1^2}{t_0} = 6, \quad a_1 = \lfloor \frac{s_1 + a_0}{t_1} \rfloor = \lfloor \frac{3+3}{6} \rfloor = 1,$$

$$s_2 = 3, \quad t_2 = 1, \quad a_2 = \lfloor \frac{3+3}{1} \rfloor = 6,$$

$$s_3 = 3, \quad t_3 = 6.$$

Vidimo da je $(s_1, t_1) = (s_3, t_3)$ pa je $\sqrt{15} = [3, \overline{1, 6}]$.

◇

Primjer 3. *Razvijte $\sqrt{29}$ u verižni razlomak.*

Rješenje:

$$s_0 = 0, \quad t_0 = 1, \quad a_0 = 5,$$

$$s_1 = a_0 t_0 - s_0 = 5, \quad t_1 = \frac{29 - s_1^2}{t_0} = 4, \quad a_1 = \lfloor \frac{s_1 + a_0}{t_1} \rfloor = \lfloor \frac{5+5}{4} \rfloor = 2,$$

$$s_2 = 3, \quad t_2 = 5, \quad a_2 = \lfloor \frac{3+5}{5} \rfloor = 1,$$

$$s_3 = 2, t_3 = 5, a_3 = \lfloor \frac{2+5}{5} \rfloor = 1,$$

$$s_4 = 3, t_4 = 4, a_4 = \lfloor \frac{3+5}{4} \rfloor = 2,$$

$$s_5 = 5, t_5 = 1, a_5 = \lfloor \frac{5+5}{1} \rfloor = 10,$$

$$s_6 = 5, t_6 = 4.$$

Jer je $(s_1, t_1) = (s_6, t_6)$, vrijedi $\sqrt{29} = [5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$.

◇

Zadatak 4. *Nadite sva rješenja jednadžbe $x^2 - 15y^2 = 1$ za koja je $1 < x < 1000$.*

Rješenje:

Prema prethodnom primjeru je $\sqrt{15} = [3, \overline{1, 6}]$. Dakle, period $l = 2$ je paran. Najmanje rješenje jednadžbe $x^2 - 15y^2 = 1$ je $(x_1, y_1) = (4, 1)$. Nadalje je

$$x_2 = 8 \cdot 4 - 1 = 31, y_2 = 8,$$

$$x_3 = 8 \cdot 31 - 4 = 244, y_3 = 63,$$

x_4 je već veći od 1000. Prema tome, sva rješenja koja zadovoljavaju traženi uvjet su $(x, y) = (4, 1), (31, 8), (244, 63)$.

◇

Zadatak 5. *Nadite najmanje rješenje jednadžbe $x^2 - 29y^2 = 1$ u prirodnim brojevima.*

Rješenje:

Iz razvoja $\sqrt{29}$ u verižni razlomak očito je period $l = 5$ neparan. Prema tome fundamentalno rješenje jednadžbe je $(x_1, y_1) = (p_{2l-1}, q_{2l-1}) = (p_9, q_9)$. Računamo:

$$p_0 = a_0 = 5, q_0 = 1,$$

$$p_1 = a_0 a_1 + 1 = 11, q_1 = a_1 = 2,$$

$$p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 16, q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 3,$$

$$p_3 = a_3 p_2 + p_1 = 27, q_3 = a_3 q_2 + q_1 = 5,$$

$$p_4 = 70, q_4 = 13,$$

$$p_5 = 727, q_5 = 135,$$

$$p_6 = 1524, q_6 = 283,$$

$$p_7 = 2251, q_7 = 418,$$

$$p_8 = 3775, q_8 = 701,$$

$$p_9 = 9801, q_9 = 1820.$$

Stoga je najmanje rješenje $(x_1, y_1) = (9801, 1820)$.

◇

Literatura

- [1] A. DUJELLA, *Diofantske jednadžbe*, Skripta, PMF - matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2007.
- [2] A. DUJELLA, *Uvod u teoriju brojeva*, Skripta, PMF - matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2006.
- [3] N. P. SMART, *The Algorithmic Resolution to Diophantine Equations*, Cambridge University Press, 1998.