МЕТОДИКА НА НАСТАВАТА ПО АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА ВО ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Ристо Малчески

Ристо Малчески

МЕТОДИКА НА НАСТАВАТА ПО АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА ВО ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Скопје, 2020

Рецензент:
академик $\boxed{\text{Иван Ганчев}}$, ЈЗУ “Неофит Рилски”, Благоевград

Компјутерска обработка: Ристо Малчески

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.091.3:512.1(035)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Методика на наставата по аритметика и алгебра во основното образование / Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2020. - 188 стр. ; 25 см

Регистар. - Библиографија: стр. 181-188

ISBN 978-608-4904-74-8

а) Математика - Основно образование - Натавни методи - Прирачници
COBISS.MK-ID 111971850

СОДРЖИНА

III ГЛАВА
АЛГЕБАРСКИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ ВО УЧИЛИШНИОТ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

IV ГЛАВА
РАВЕНКИТЕ ВО УЧИЛИШНИОТ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

V ГЛАВА
НЕРАВЕНКИТЕ И НЕРАВЕНСТВАТА ВО УЧИЛИШНИОТ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Подготвувањето на наставниот кадар за основното и средното образование не може да се замисли без изучување на методиката на наставата по математика (општ и посебен дел). Оваа книга е резултат на долгогодишната наставна практика на авторот во севкупното образование, неговата работа со надарените ученици за математика од основното и средното образование и предавањата кои по истоимениот предмет ги држел на Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет во Скопје. Истата всушност непосредно се надоврзува на книгата [99] од наведената литература. Материјалот е поделен на шест глави и тоа:

1. Функциите и релациите во училишниот курс по математика,
2. Бројните множества во училишниот курс по математика,
3. Алгебарските рационални изрази во училишниот курс по математика,
4. Равенките во училишниот курс по математика,
5. Неравенките и неравенствата во училишниот курс по математика, и
6. Функциите во училишниот курс по математика.

Ваквата поделба е непосреден одраз како на наставните содржини, така и на поделбата на научните области кои се изучуваат во наставата по аритметика и алгебра во основното образование. При разработката на одделни глави посебно внимание е посветено на грешките кои ги прават учениците и можните начини за корегирање на истите. Се разбира, овие разгледувања не претендираат дека се наведени сите можни грешки кои се јавуваат во практиката, туку имаат за цел да укажат на значењето од пранавременото откривање и корегирање на грешките кои ги прават учениците. Понатаму, одделни разгледувања се пропратени и илустрирани со нестандардни алгоритми, кои имаат за цел да укажат на можностите за внатрешнопредметната интеграција на наставата и начините за работа со надарените ученици за математика.

Теориските разгледувања се илустрирани со бројни примери, кои се надевам ќе им бидат од корист на студентите како при совладувањето на наставните содржини по предметот, така и во почетокот на нивниот професионален ангажман како учители по математика. Сметам дека книгава, која е прв обид на ова поле во нашава држава, ќе биде корисна како за учителите во основното образование, така и за поширок круг читатели.

При пишувањето на книгава е користена обемна литература која е наведена на крајот на книгава.

Пријатна должност и особено задоволство ми е да им искажам благодарност на рецензентот академик Иван Ганчев кој со своите забелешки и сугестии даде посебен придонес за подобрување на содржините на оваа книга.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа книга, па затоа сум однапред благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија.

Јануари, 2016 Авторот
Скопје

I ГЛАВА
МНОЖЕСТВАТА И РЕЛАЦИИТЕ ВО УЧИЛИШНИОТ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Фундаментална линија во содржините во наставата по математика е темата “Множества и релации”. Основните содржини на оваа тема најчесто се поместени од I до VII одделение во основното образование. Со оваа линија директно се поврзани прашањата за бројните множества, координатен систем во рамнина и функција, па затоа усвојувањето на содржините од оваа тема е од суштинско значење за севкупната настава по математика.

1. ОБРАЗОВНИ ЦЕЛИ И СТРАТЕГИЈА ЗА РЕАЛИЗИРАЊЕ НА ТЕМАТА

При изучувањето на содржините од оваа тема треба да се постигнат следниве образовни цели:

- да се усвојат основните поими од теоријата на множествата,
- да се усвојат начините на задавање на множествата,
- да се усвои математичката симболика поврзана со теоријата на множествата,
- на високо операционо ниво да се усвојат операциите со множествата и нивните својства,
- да се усвојат поимите поврзани со структурните знаења за множествата, како што се: еквивалентни (истобројни) множества, конечно и бесконечно множество и истите да се користат во поедноставни случаи,
- да се усвојат поимот релација и својствата на релациите (рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност), и
- да се усвојат релациите за еквивалентност и подредување.

Стратегијата за реализирање на темата ги содржи следниве етапи:

i) се воведува поимот множество и се усвојуваат начините на задавање на множествата,

ii) се воведуваат поимите подмножество, еднакви множества и празно множество, при што се усвојуваат и симболите $\in, \notin, \varnothing$, $\subset, \supset, \subseteq$ и $\supseteq$,

iii) се воведуваат операциите унија, пресек и разлика на множества и се узвојуваат нивните својства,

iv) се воведуваат поимот подреден пар, операцијата Декартов производ на множества и се усвојуваат структурните знаења за множествата (еквивалентни множества, конечно и бесконечно множество), и

v) се воведува поимот релација и се изучуваат својствата на релациите.

Оваа тема се изучува во подолг временски период, при што одделните целини се изучуваат во различни учебни години од I до VII одделение. Притоа изучувањето на темата не е непрекинато и во овој период паралелно со оваа тема се усвојуваат и други знаења. Постои мислење дека долгиот период на изучување на оваа тема и фактот дека таа не се изучува во компактен период е основна пречка при усвојувањето на знаењата поврзани со темата. Меѓутоа, основната причина за слабото усвојување на знаењата од оваа тема е апстрактноста на поимите кои лежат во основата на темата, како што се: еквивалентни, конечни и бесконечни множества, релација на еквивалентност и релација на подредување. Се разбира, усвојувањето на содржините од оваа тема е условено и од возраста и предзнаењата на учениците, кои се ограничувачки фактор во изборот на примерите со кои ќе се дообјаснат поимите, па затоа потребно е овие знаења да се презентираат со поголемо внимание и на начин кој ќе биде подостапен за учениците.

2. МЕТОДСКИ БЕЛЕШКИ ЗА ИЗУЧУВАЊЕ НА ТЕМАТА

Во овој дел ќе се осврнеме на проблемите кои се јавуваат при изучувањето на множествата и релациите. Притоа посебно ќе се осврнеме на воведувањето на поимите еквивалентни множества, конечно и бесконечно множество.

2.1. МНОЖЕСТВА

Со поимот множество учениците се среќаваат уште од I одделение, но за прв пат со систематското изучување на множествата се среќаваат дури во V одделение. На оваа возраст учениците тешко се справуваат со фактот дека во математиката постојат основни и изведени поими, па затоа информацијата дека поимот множество е основен поим во математиката, кој не се дефинира, туку се објаснува со примери за учениците е нецелисходна. Затоа, најдобро е на оваа возраст учениците да не се оптеретуваат со терминот основен поим. Воведувањето на поимот множество и начините на задавање на множествата можеме да го направиме на следниов начин.

Веројатно ти е познато значењето на секој од зборовите: група, тим, колектив, стадо, јато, рој и колекција. Секој од овие зборови, велиме уште и *термини*, значи луѓе, животни или предмети. Во математиката наместо овие зборови ќе го користиме терминот *множество*.

Значи, множеството го сваќаме како целина од определени и различни елементи. Објектите од кои е формирано едно множество ги нарекуваме *елементи* или *точки на множеството*. Едно множество е определено ако точно се знае кои се неговите елементи, т.е. ако за секој објект можеме да кажеме дали му припаѓа или не му припаѓа на тоа множество.

Примери за множества се:

- сите ученици во твоето одделение,
- сите ученици од твоето училиште,
- сите букви од македонската азбука итн.

За означување на множествата најчесто ги користиме големите букви од латинската азбука: $A, B, C, D, \ldots$, а за означување на елементите на едно множество најчесто ги користиме малите букви од латинската азбука: $a, b, c, d, x, y, z, \ldots$.

i) Задавање на множествата со помош на набројување на неговите елементи (табеларен начин). Множеството чии елементи се броевите 1,2 и 3 го запишуваме вака: $\{1,2,3\}$. При овој начин елементите на дадено множество се наведуваат во големи загради и притоа редоследот на елементите во заградите не е битен.

Пример 1. а) Ако множеството A е составено од арапските цифри, тогаш тоа го запишуваме на следниот начин: $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

б) Записот на множеството B составено од самогласките на македонската азбука е: $B=\{\text{а, е, и, о, у}\}$. ♦

ii) Задавање на множествата со наведување на својството на неговите елементи. И во овој начин се користат големи загради. Се пишува една буква (најчесто x) којашто е заедничка договорна ознака за сите елементи на множеството, потоа се става верикална црта, а по неа се дава описно (со зборови или со формула) својството на елементите на множеството, т.е. $\{x \mid P(x)\}$.

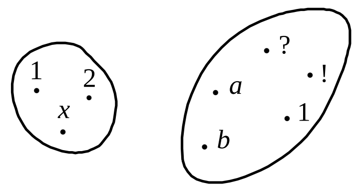
Пример 2. а) Ако M е множеството од сите букви од македонската азбука, тогаш истото можеме да го запишиме

$$M = \{x \mid x \text{ е буква од македонската азбука}\}.$$

б) Множеството $A = \{1,3,5,7,9\}$ можеме да го запишеме на следниов начин:

$$A = \{x \mid x \text{ е непарен природен број помал од } 10\}. \ ♦$$

iii) Претставување на множествата со помош на Венови дијаграми. Заради полесно расудување во геометријата, а исто така и во алгебрата, се користат цртежи, шеми, скици и слично. Слично се постапува и во теоријата на множествата, каде што множествата се претставуваат како дел од рамнината ограничен со затворена линија. Ваквите цртежи ги нарекуваме Венови дијаграми.



Пример 3. За множествата

$$A = \{1,2,x\} \text{ и } B = \{a,b,?,1,!\}$$

Веновите дијаграми се дадени на цртежот десно. ♦

Практиката покажува дека, при изучувањето на множествата, првиот посериозен проблем со кој се среќаваат учениците е поимот празно множество. Затоа воведувањето на овој поим треба добро да се мотивира, што може да се направи на следниов начин.

Дали постојат природни броеви кои се поголеми од 1 и се помали од 2? Јасно, не постои ниту еден таков природен број. Слично, не постојат квадрати кои не се паралелограми, а исто така не постојат луѓе кои се повисоки од 6 m итн. Според тоа, множеството од сите луѓе кои се повисоки од 6 m нема ниту еден елемент. За означување на вакви и слични ситуации воведуваме множество без елементи, кое го нарекуваме *празно множество*. Притоа сметаме дека постои само едно празно множество, кое го означуваме со симболот $\varnothing$.

Понатаму, во пример 3 видовме дека бројот 1 припаѓа на множеството A и тоа едноставно можеме да го означиме користејќи го симболот $\in$. Притоа пишуваме $1 \in A$ и читаме 1 *е елемент на множеството* A или 1 *припаѓа на множеството* A. Меѓутоа, бројот 5 не припаѓа на множеството A и ова пократко можеме да го запишеме користејќи го симболот $\notin$. Притоа пишуваме $5 \notin A$ и читаме 5 *не е елемент на множеството* A или 5 *не припаѓа на множеството* A.

Според тоа, ако елементот x му припаѓа на множеството A, тогаш пишуваме $x \in A$, а ако елементот x не му припаѓа на множеството A, тогаш пишуваме $x \notin A$.

На крајот од овој дел треба да се разгледаат примери со кои ќе се овозможи сознателно усвојување на запишувањето на множествата, празното множество и симболите $\in$ и $\notin$. На пример, тоа може да се постигне со систем задачи од следниов вид.

Пример 4. а) Претстави ги со Венов дијаграм множествата

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \text{ и } B = \{3, a, \alpha, \Delta\}.$$

б) Претстави ги со Венов дијаграм множествата

$$P = \{a, b, c, x, y\} \text{ и } B = \{e, m, x, y\}.$$

в) Запиши ги табеларно множествата

$$M = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } x < 15\} \text{ и } P = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ и } 12 < x < 23\}.$$

г) Објасни зошто секое од следниве множества е празно множество:

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } x < 1\},\ B = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } 2 + x = 1\} \text{ и}$$

$$C = \{x \mid x \text{ е парен природен број помал од } 2\}.\ \blacklozenge$$

Природно е натамошното изучување на множеството да продолжи со воведување на поимите подмножество, еднакви множества и партитивно множество. Најчесто при воведувањето на поимот еднакви множество се оди строго дедуктивно, а потоа учениците согледуваат дека всушност станува збор за едно множество означено со две ознаки. Ваквиот пристап е оправдан и доста корисен, бидејќи со совладувањето на овие едноставни содржини учениците практично го усвојуваат дедуктивниот начин на мислење, т.е. дедуктивниот метод. Усвојувањето на наведените поими може да се направи, на пример, на следниов начин.

Пример 5. Да ги разгледаме множествата

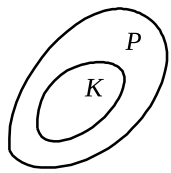
$$A=\{1,2,3\} \text{ и } B=\{1,2,3,x,y,z,t\}.$$

Забележуваме секој елемент на множеството A е елемент и на множеството B. Во овој случај велиме дека множеството A е подмножество од множеството B. ♦

Воопшто, за множеството A ќе велиме дека е *подмножество* од множеството B ако од $x \in A$ следува $x \in B$. Притоа означуваме $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. Ако $A \subseteq B$ и B содржи елемент кој не му припаѓа на A, тогаш ќе велиме дека A е *вистинско подмножество* од B и пишуваме $A \subset B$ или $B \supset A$.

Јасно, за множествата A и B од пример 5 важи $A \subset B$. Понатаму, за празното множество сметаме дека е подмножество од секое множество A. Од претходната дефиниција непосредно следува дека $A \subseteq A$, но A не е вистинско подмножество на самото себе.

Пример 6. Со K да го означиме множеството од сите квадрати, а со P множеството од сите правоаголници. Бидејќи секој квадрат е правоаголник, но не секој правоаголник е квадрат, добиваме дека $K \subset P$. Со помош на Венов дијаграм, последново е прикажано на цртежот десно. ♦



За множествата A и B ќе велиме дека се *еднакви* ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Притоа пишуваме $A = B$.

Пример 7. Множествата $A=\{1\}$ и $B=\{1,1\}$ се еднакви, бидејќи елементот 1 е единствен елемент како на множеството A, така и на множеството B. Слично,

$$\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Последното е во согласност со претходно кажаното дека *множеството е целина на различни елементи*, односно дека *секој елемент во множеството се смета само по еднаш*. ♦

Пример 8. Да го разгледаме множеството $A=\{a,b,c\}$. Негови подмножества се множествата

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,b,c\} = A.$$

Подмножествата на множеството A можеме да ги земеме за елементи на ново множество кое најчесто го означуваме со $\boldsymbol{B}(A)$ или $\boldsymbol{P}(A)$ и го нарекуваме булеан или партитивно множество на A. Според тоа,

$$\boldsymbol{B}(A) = \boldsymbol{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, A\}. \ \blacklozenge$$

Воопшто, за дадено множество A, множеството чии елементи се сите подмножества на A, се означува со $\boldsymbol{B}(A)$ или $\boldsymbol{P}(A)$, го нарекуваме *булеан* или *партитивно множество* на A.

На крајот од овој дел треба да се разгледаат примери со кои ќе се овозможи сознателно усвојување на поимите подмножество, вистинско подмножество, еднакви множества и партитивно множество, како и соодветните ознаки. На пример, тоа може да се постигне со систем задачи од следниов вид.

Пример 9. а) Кое од следниве тврдења е точно:

$i)$ $\{5\} \subseteq \{2,3,5\}$, $\quad$ $ii)$ $\{2,3,4\} \subset \{2,3,6,7,8\}$,

$iii)$ $\{a,b,x\} \subseteq \{1,a,2,b,3,x,4\}$, $\quad$ $iv)$ $\{!,?,a,1,2\} \supset \{a,!,?\}$.

б) За множеството $M = \{2,3,5\}$ одреди две множества A и B такви, што да важи $A \subset M$ и $M \subset B$.

в) Запиши ги вистинските подмножества на множеството

$$M = \{a,b,2,3\}.$$

г) За множеството $A = \{1,2,a,b\}$ одреди го множеството $\boldsymbol{P}(A)$. ♦

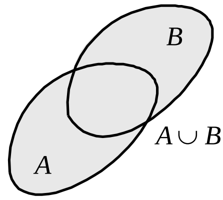
Во натамошните разгледувања посебно внимание треба да се обрне на операциите со множествата и нивните својства. Се разбира, во основното образование својствата на операциите не треба да се докажуваат, туку истите треба да се усвојат преку примери. Практиката покажува дека операциите со множествата и нивните својства подобро се усвојуваат ако истите се поткрепат со соодветни примери и се илустрираат со Венови дијаграми. Притоа, можно е после воведувањето на соодветната операција одма да се усвојат нејзините својства или прво да се усвојат сите операции, а потоа да се усвојуваат нивните својства. Практиката покажува дека првиот начин е подобар, па затоа на истиот накратко ќе се осврнеме. Јасно, и во едниот и во другиот случај пожелно е да ја објасниме причината за воведување на операциите со множествата и тоа може, на пример, да се направи на следниов начин.

Во досегашните разгледувања се осврнавме на поимите множество, подмножество и еднакви множества. Во практиката најчесто се среќаваме со проблеми во кои треба истовремено да ги разгледуваме елементите кои им припаѓаат на две или повеќе множества, потоа заедничките елементи на две или повеќе множества, па елементите кои му припаѓаат на едно, а не му припаѓаат на друго множество и слично. Претходно кажаното природно ги наметнува операциите со множествата на кои подетално ќе се осврнеме.

Унија на множествата A и B го нарекуваме множеството C, кое се состои од сите елементи кои му припаѓаат барем на едно од множествата A и B. Притоа означуваме $C = A \cup B$.

Според тоа,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$



Претставувањето на унијата на множествата A и B со Венов дијаграм е дадено на цртежот десно.

Пример 10. Најди ја унијата на множествата

а) $A = \{1,2,3,4,5\}$ и $B = \{6,7\}$.

б) $A = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ и } n < 9\}$ и $B = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ и } n \geq 5\}$

Решение. а) Имаме $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

б) Дадените множества ќе ги запишеме табеларно:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ и } B = \{5, 6, 7, 8, ..., k, ...\},$$

па затоа $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,...,k,...\} = \mathbf{N}$. ♦

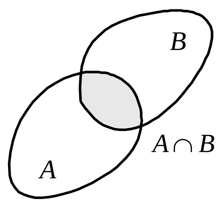
Во натамошните разгледувања, учениците со помош на погодно одбрани примери треба да ги усвојат својствата на унијата на множества, т.е. да усвојат дека за секои множества A, B и C точни се равенствата:

$$A \cup \varnothing = A,\ A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B,\ A \cup A = A,$$
$$A \cup B = B \cup A,\ \ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Пресек на множествата A и B го нарекуваме множеството C, кое се состои од сите елементи кои му припаѓаат на секое од множествата A и B. Притоа означуваме $C = A \cap B$.

Според тоа,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$



Претставувањето на пресекот на множествата A и B со Венов дијаграм е дадено на цртежот десно.

За множествата A и B ќе велиме дека се *дисјунктни* ако $A \cap B = \varnothing$.

Пример 11. Најди го пресекот на множествата

а) $A = \{1,2,3,a,b,c\}$ и $B = \{2,4,b,d,e,f\}$.

б) $A = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ і } n < 9\}$ и $B = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ і } n \geq 5\}$

Решение. а) Имаме $A \cap B = \{2, b\}$.

б) Дадените множества ќе ги запишеме табеларно

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ и } B = \{5, 6, 7, 8, ..., k, ...\}.$$

Според тоа, $A \cap B = \{5, 6, 7, 8\}$. ♦

Множествата A и B од примерот 11 а) и 11 б) не се дисјунктни (зошто?). Меѓутоа, множествата A и B од примерот 10 а) се дисјунктни.

Во натамошните разгледувања, учениците со помош на погодно одбрани примери треба да ги усвојат својствата на унијата на множества, т.е. да усвојат дека за секои множества A, B и C точни се равенствата:

$$A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B, , A \cap A = A,$$
$$A \cap B = B \cap A, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$

а потоа дека се точни и равенствата

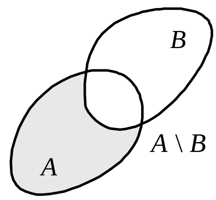
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \text{ и } (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Разлика на множествата A и B го нарекуваме множеството C, кое се состои од сите елементи на множеството A кои не му припаѓаат на множеството B. Означуваме $C = A \setminus B$.

Според тоа,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}.$$

Претставувањето на разликата на множествата A и B со Венов дијаграм е дадено на цртежот десно.



Пример 12. Најди ја разликата на множествата

$$A = \{n \mid n > 4, n \in \mathbf{N}\} \text{ и } B = \{n \mid n < 14, n \in \mathbf{N}\}.$$

Решение. Дадените множества ќе ги запишеме табеларно

$$A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...\} \text{ и}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}.$$

Според тоа,

$$A \setminus B = \{14, 15, 16, 17, ...\} = \{n \mid n \geq 14, n \in \mathbf{N}\}. ♦$$

На крајот од овој дел останува да се усвојат уште поимите подреден пар и Декартов производ. На пример, тоа можеме да го направиме на следниов начин.

Ако за елементите a и b однапред знаеме кој од нив е прв, а кој втор, тогаш така добиениот пар од елементи го нарекуваме *подреден пар* (*подредена двојка*), и запишуваме (a,b).

Декартов производ на множествата A и B го нарекуваме множеството C, во ознака $C = A \times B$, кое се состои од сите подредени парови (x,y), каде што $x \in A,\ y \in B$. Притоа, $(a,b) = (c,d)$ ако $a = c,\ c = d$.

Според тоа,

$$C = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

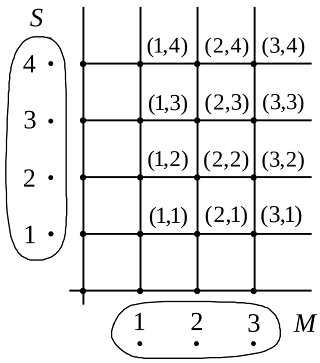
Декартовиот производ на непразното множество A со самото себе го нарекуваме *Декартов квадрат* на множеството A и го означуваме со A^2.

Пример 13. а) За множествата

$$M = \{1, 2, 3\} \text{ и } S = \{1, 2, 3, 4\}$$

Декартовиот производ е

$$M \times S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}.$$



На цртежот десно е даден графички приказ на Декартовиот производ на множествата M и S.

б) За множеството $A = \{x, y, z\}$ Декартовиот квадрат е

$$A^2 = \{(x,x), (x,y), (x,z), (y,x), (y,y), (y,z), (z,x), (z,y), (z,z)\}.$$

Да забележиме дека, како и при усвојувањето на претходните содржини, така и при усвојувањето на операциите со множествата и нивните својства потребно е да се решат поголем број задачи. Притоа од посебен интерес е решавањето на текстуални задачи со помош на Венови дијаграми, какви што се задачите од следниов пример.

Пример 14. а) Одделението IV-3 има 32 ученици. Од нив 18 ученици го купуваат списанието “Нумерус”, а 13 ученици го купуваат списанието “Развигор”. Колку ученици ги купуваат двете списанија, ако 8 ученици не се претплатени ниту на едно списание? Колку ученици купуваат само “Нумерус”, а колку само “Развигор”?

б) Во IV-2 одделение има 35 ученици, од кои 20 членуваат во ликовната, 11 во музичката секција, а 10 ученици не членуваат во овие две секции. Колку ученици членуваат и во двете секции, а колку само во една и која?

в) На балканската математичка олимпијада констатирано е дека 2 учесника говорат германски, англиски и руски јазик, 9 учесници само германски и англиски, 13 учесници само германски и руски, 12 учесници само руски и англиски, 6 учесници само германски, 7 само руски и 8 само англиски. Колку учесници биле на балканијадата ако секој од нив говори најмалку еден од овие три јазици? ♦

При изучувањето на множествата во основното образование најчесто е предвидено да се усвои и поимот еквивалентни (истобројни) множества. Воведувањето на овој поим е пропратено со бројни потешкотии, кои пред сè произлегуваат од: апстрактноста на поимот и психофизичките способности на учениците. Имено, овој поим најчесто се воведува во V одделение, возраст на која практично е невозможно учениците да го усвојат поимот пресликување и видовите пресликувања, па да може коректно да се воведат поимите еквивалентни, конечни и бесконечни множества. Во некои учебници поимот еквивалентни множества се воведува на следниов начин.

За едно множество A велиме дека *има повеќе елементи* од множеството B и пишуваме $\delta A > \delta B$, ако не може да се најде $P \subseteq A \times B$ за кое:

1) ако $(a,b),(a,c) \in P$, тогаш $b = c$,
2) ако $(a,d),(d,b) \in P$, тогаш $d = b$, и
3) за секој елемент $a \in A$ постои елемент $b \in B$, таков што $(a,b) \in P$.

За две множества A и B ќе велиме дека се *истобројни* и ќе пишуваме $\delta A = \delta B$, ако A нема повеќе елементи од B и B нема повеќе елементи од A. Често пати, истобројните множества A и B ги нарекуваме *еквивалентни*, а тоа се означува со $A \sim B$.

Едно множество се нарекува *конечно*, ако не е истобројно со ниедно вистинско подмножество.

Едно множество се нарекува *бесконечно*, ако не е конечно, односно тоа е истобројно со некое негово вистинско подмножество.

Од научна гледна точка на предложениот начин не може ништо да му се забележи, особено ако претходно изнесените дефиниции се поткрепени со доволен број примери и соодветни илустрации. Меѓутоа, практиката покажува дека на споменатата возраст не е можно учениците да го усвојат поимот еквивалентни множества, особено ако истиот е воведен на претходно изнесениот начин.

Друг пристап за воведување на поимите истобројни, конечни и бесконечни множества, кој може да се сретне во учебниците, е следниов.

Бројот на елементите на множествата

$$M=\{1,2,3,4\},\ A=\{a,b,c,d\},\ B=\{e,f,g\} \text{ и } D=\{12,34,56\}$$

е $\delta M=\delta A=4$ и $\delta B=\delta D=3$.

Ако две множества имаат ист број елементи, тогаш велиме дека се *истобројни множества*.

Понатаму, бројот на елементите на секое од множествата

$$\{1},\quad \{1,2\},,\quad \{1,2,3\},\quad ,...,\quad \{1,2,3,...,n\}$$

е еднаков соодветно на: 1,2,3, ...,n, т.е. некој природен број. За овие множества велиме дека се конечни. И множествата што се истобројни со нив се исто така *конечни множества*.

Празното множество нема ниту еден елемент, па природно е да кажеме дека неговиот број е 0, т.е. $\delta\varnothing=0$. Празното множество го сметаме за конечно.

За множествата, пак, кои не се конечни, велиме дека се *бесконечни*.

Очигледно, ваквиот начин на воведување на споменатите поими има низа недостатоци, од кои доволно е да спомeнеме дека при воведувањето на поимот истобројни (еквивалентни) множества користиме поим кој не само што претходно не е воведен, туку и не е наполно јасно што значи тоа две множества да имаат ист број елементи.

Како што можеме да видиме, воведувањето на поимот истобројни множества во V одделение е пропратено со низа проблеми. Една од можностите за решавање на настанатата ситуација е овој поим да се воведе во VII одделение, после изучувањето на пресликувањата. Притоа, дел од структурните знаења за множествата броеви, како што е бесконечноста може да се усвојат при усвојувањето на поимот еквивалентни множества, односно да се наведат како примери на бесконечни множества. Имено, откако ќе се воведе поимот пресликување и ќе се изучат видовите пресликувања, поимите еквивалентни множества може да се воведат на следниов начин.

Нека $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$ и пресликувањето $f:A\to B$ е дадено со

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Лесно се гледа дека f е биекција, т.е. меѓу множествата A и B постои биекција. Ваквите множества имаат посебна улога во математиката и за нив ќе велиме дека се еквивалентни. Попрецизно, ја имаме следната дефиниција.

За множествата A и B велиме дека се *истоброjни* (*еквивалентни*), со ознака $A \sim B$, ако постои биекција f од A во B.

Пример 15. а) Множествата

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g\} \text{ и } B = \{+, -, *, \in, \otimes, \oplus, \times\}$$

се еквивалентни. Навистина, пресликувањето $f : A \to B$ определено со

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ + & - & * & \in & \otimes & \oplus & \times \end{pmatrix}$$

е биекција, па затоа $A \sim B$.

б) Пресликувањето $f : \mathbf{N} \to M$, $M = \{2n-1 \mid n \in \mathbf{N}\}$ определено со

$$f(k) = 2k-1, \text{ за секој } k \in \mathbf{N}$$

е биекција. Навистина, за секои $k, n \in \mathbf{N}$ такви, што $k \neq n$, важи $2k \neq 2n$, па затоа $2k-1 \neq 2n-1$, што значи $f(k) \neq f(n)$, т.е. f е инјекција. Понатаму, нека $k \in \mathbf{N}$. Тогаш $2k-1 \in M$ и притоа важи $f(k) = 2k-1$. Според тоа, за произволен k од $\mathbf{N}$ најдовме елемент во M кој е слика на k, што значи дека f е сурјекција.

Конечно, f е сурјекција и инјекција, па значи е биекција. Според тоа, $\mathbf{N} \sim M$, т.е. множеството природни броеви е еквивалентно со множеството непарни природни броеви. ♦

Во претходниот пример под а) наведовме две еквивалентни множества. Меѓутоа, ако се обидеме да најдеме вистинско подмножество од множеството A кое е еквивалентно со множеството A ќе видиме дека тоа не е можно. Од друга страна во примерот под б) имаме $M \subset N$ и притоа важи $\mathbf{N} \sim M$. Претходно изнесеното е причина за поделба на множествата на конечни и бесконечни. Попрецизно ги имаме следниве дефиниции.

Едно множество се нарекува *конечно*, ако не е истоброjно со ниедно свое вистинско подмножество.

Едно множество се нарекува *бесконечно*, ако не е конечно, односно тоа е истоброjно со некое негово вистинско подмножество.

На крајот од овој дел останува уште да се разгледа соодветен систем задачи, кои ќе бидат во функција на усвојување на поимите еквивалентни множества, конечно и бесконечно множество.

2.2. РЕЛАЦИИ

Во практиката поимот релација се воведува во различни одделенија во основното образование. Меѓутоа, ако се има предвид потребата од компактно и научно изложување на знаењата при изучувањето на бројните множества, најдобро е поимот релација да се воведе во V одделение одма после изучувањето на множествата. Една од причините за ваквиот став е споредувањето на броевите, т.е. експлицитното користење на релацијата за подредување, која претходно не е усвоена. Најчестото оправдување за покасното изучување на релациите е дека содржините се апстрактни, но истото не држи бидејќи:

- со усвојувањето на Декартовиот е направена неопходната подготовка за воведување на поимот релација, и
- нивото на апстракција кај поимот релација е далеку пониско отколку кај поимите еквивалентни множества, конечно и бесконечно множество.

Во следните разгледувања накратко ќе се осврнеме на воведувањето на поимот релација и изучувањето на својствата на релации. Притоа, треба да се има во вид апстрактноста на содржините, па затоа е пожелно поимот и својствата да се илустрираат со едноставни, но репрезентативни примери кои ќе бидат достапни за учениците.

Со зборовите: поголем помал, еднаков, определени се релации (односи) во множеството природни броеви; со зборовите: роднина, татко, син, определени се релации (односи) во некое множество луѓе итн. За секоја од овие релации важно е да знаеме кој елемент, да го означиме со x, е во релација со друг елемент, да го означиме со y. Да забележиме дека притоа и редоследот на елементите е важен бидејќи елементот x може да е во релација со елементот y, но елементот y не мора да е во релација со елементот x. Така, на пример, $2>1$, но не е $1>2$.

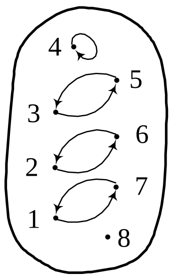
За проучување на ваквите соодноси во математиката се воведува поимот бинарна релација и овој поим може да се воведе во произволно множество.

Ако M е непразно множество, тогаш секое подмножество α од $M \times M$ го нарекуваме *бинарна релација* во M. Притоа наместо $(x,y) \in \alpha$ честопати ќе пишуваме $x\alpha y$ и ќе читаме "x е во релација α со y". Ако $(x,y) \notin \alpha$, т.е. ако x не е во релација α со y, ќе пишуваме $x \not\alpha y$.

Да забележиме, дека ако $x\alpha y$, тогаш тоа графички се прикажува така што x и y се поврзуваат со стрелка која е насочена од x кон y (види го цртежот во примерот 1).

Пример 1. а) Да го разгледаме множеството

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$



и во него да дефинираме бинарна релација α на следниов начин: $x\alpha y$ ако и само ако $x + y = 8$.

Значи, ако $x\alpha y$, тогаш $x + y = 8$, па затоа $y + x = 8$, од што следува дека $y\alpha x$. Понатаму, од претходно изнесеното и од

$$1+7 = 2+6 = 3+5 = 4+4 = 8$$

следува дека

$$\alpha = \{(1,7), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (7,1)\}.$$

Да забележиме дека $1 \not\alpha 6,\ 7 \not\alpha 2, \dots,\ 8 \not\alpha x,$ za $x = 1,2,\dots,8$ бидејќи

$$1+6 \neq 8,\ 7+2 \neq 8, \dots, 8+x \neq 8, \text{ za } x = 1,2,\dots,8.$$

Графичкиот приказ на релацијата α е даден на цртежот десно.

б) Дадено е множеството A чии елементи се имињата на една група ученици:

$A = \{$Ана, Ева, Адам, Марко, Обрен, Ивана, Никола, Мери$\}$.

Во ова множество е дефинирана релацијата α на следниов начин:

$x\alpha y$ ако и само ако почетната буква на името на x е крајна буква на името на y,

за секои $x, y \in A$. Од условот имаме дека дадената релација е:

$\alpha = \{$(Ана, Ана), (Ана, Ева), (Ана, Ивана), (Ана, Никола), (Адам, Ана), (Адам, Ева),(Адам, Ивана), (Адам, Никола), (Марка, Адам), (Мери, Адам), (Обрен, Марко), (Ивана, Мери), (Никола, Обрен)$\}$.

в) За секое непразно множество M релациите

$$\Delta_M = \{(x,x) \mid x \in M\} \text{ и } \alpha = M \times M$$

ги нарекуваме *дијагонала* и *универзална релација* во M, соодветно. ♦

Во математиката најчесто се користат релации кои во извесна смисла се правилни, т.е. задоволуваат некои услови. Такви релации се рефлексивните, транзитивните, симетричните и антисиметричните релации, па затоа е неопходно истите одделно да ги разгледаме. Последното може да се направи на следниов начин.

За бинарната релацијата α определена на непразното множество M ќе велиме дека е *рефлексивна* ако $x\alpha x$, за секој $x \in M$.

Пример 2. а) Од $(x,x) \in \Delta_M$, за секој $x \in M$ непосредно следува дека дијагоналата на секое непразно множество е рефлексивна релација.

б) Дадено е множеството $M = \{1,2\}$ и релацијата

$$\alpha = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}.$$

Бидејќи $(1,1) \in \alpha$ и $(2,2) \in \alpha$, заклучуваме дека $x\alpha x$ за секој $x \in M$, т.е. релацијата α е рефлексивна.

в) Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата α определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x = y$. Јасно, $x = x$ за секој $x \in \mathbf{N}$, што значи дека оваа релација е рефлексивна.

г) Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата α определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x < y$. Бидејќи $x \not< x$ за секој $x \in \mathbf{N}$ заклучуваме дека оваа релација не е рефлексивна. Меѓутоа, ако земеме $x\alpha y$ ако и само ако $x \le x$, тогаш релацијата е рефлексивна. ♦

За бинарната релацијата α определена на непразното множество M ќе велиме дека е *симетрична* ако од $x\alpha y$ следува $y\alpha x$.

Пример 3. а) Дадено е множеството $M = \{1,2\}$ и релацијата

$$\alpha = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}.$$

Од $(1,1) \in \alpha$, $(2,1) \in \alpha$ и $(1,2) \in \alpha$ заклучуваме дека релацијата α е симетрична.

б) Нека $x, y \in \mathbf{N}$. Ако $x = y$, тогаш $y = x$. Според тоа, релацијата од примерот 2 в) е симетрична.

в) Бидејќи $2 < 4$ и $2 \le 4$, но $4 \not< 2$ и $4 \not\le 2$ заклучуваме дека релациите од примерот 2 г) не се симетрични. ♦

За бинарната релацијата α определена на непразното множество M ќе велиме дека е *транзитивна* ако од $x\alpha y$ и $y\alpha z$ следува $x\alpha z$.

Пример 4. а) Дадено е множеството $M=\{1,2\}$ и релацијата

$$\alpha=\{(1,1),(1,2),\ (2,1)\}.$$

Оваа релација не е транзитивна бидејќи $2\alpha 1$и $1\alpha 2$, но 2 не е во релација α со 2.

б) Нека $x,y,z\in\mathbf{N}$. Ако $x=y$ и $y=z$, тогаш $x=z$. Според тоа, релацијата од примерот 2 в) е транзитивна.

в) Нека $x,y,z\in\mathbf{N}$. Од $x<y$ и $y<z$ следува дека $x<z$, што значи дека првата релација во примерот 2 г) е транзитивна. Аналогно се докажува дека и втората релација од истиот пример е транзитивна. ♦

За бинарната релацијата α определена на непразното множество M ќе велиме дека е *антисиметрична* ако од $x\alpha y$ и $y\alpha x$ следува $x=y$.

Пример 5. а) Дадено е множеството $M=\{1,2\}$ и релацијата

$$\alpha=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}.$$

Оваа релација не е антисиметрична бидејќи $2\alpha 1$ и $1\alpha 2$, но $2\neq 1$.

б) Нека $x,y\in\mathbf{N}$. Од $x\le y$ и $y\le x$ следува дека $x=y$, што значи дека втората релација во примерот 2 г) е антисиметрична. ♦

Откако учениците ќе се запознаат со четирите карактеристични релации: рефлексивна, симетрична, антисиметрична и транзитивна релација, со помош на овие четири релации треба да се воведат уште две релации, *еквиваленција* и *подредување*, за кои може да се каже дека се најважните бинарни релации во математиката. Последното може да се направи на следниов начин.

За релацијата α ќе велиме дека е *релација на еквиваленција (еквивалентност)* ако таа е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Симболот ~ (читај: *тилда*) најчесто се користи како симбол за означување на еквивалентностите.

Пример 6. а) Дадено е множеството $M=\{1,2\}$ и релацијата

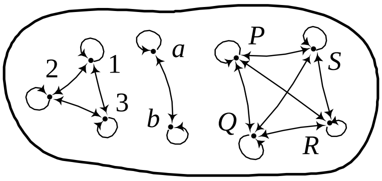
$$\alpha=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}.$$

Бидејќи $(2,2)\notin\alpha$, заклучуваме дека оваа релација не е рефлексивна, па затоа не е ниту релација на еквиваленција.

б) Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата α определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x = y$. Од примерите 2 в), 3 б) и 4 б) следува дека оваа релација е релација на еквиваленција.

в) Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата α определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x < y$. Според примерот 3 в) оваа релација не е симетрична, па затоа таа не е релација на еквиваленција.

Повторно од примерот 3 в) следува дека релацијата $x\alpha y$ ако и само ако $x \le y$, не е симетрична, што значи дека таа не е релација на еквиваленција. ♦



Да го разгледаме множеството

$$A = \{1, 2, 3, a, b, P, Q, R, S\}$$

и бинарната релација ~ прикажана со наведениот граф горе. Лесно се проверува дека оваа релација е рефлексивна, симетрична и транзитивна, односно дека е релација на еквиваленција. На цртежот забележуваме дека елементите на множеството A со оваа релација се распределени во три *класи на еквиваленција*. Едната класа ја сочинуваат елементите 1, 2, 3; втората класа елементите a, b; третата класа елементите P, Q, R, S. Како што можеме да забележиме, кои било два елементи од една класа се во релација меѓу себе, при што велиме дека се еквивалентни.

Во каков однос се елементите од различните класи, да кажеме 1 и a, a и Q? Очигледно $1 \not\sim a$, $Q \not\sim a$ и воопшто, кој било елемент од една класа не е во релација ~ со кој било елемент од друга класа, односно елементите од различните класи не се еквивалентни.

Покрај релацијата за еквиваленција во математиката важна улога има релацијата за подредување. За неа ја имаме следнава дефиниција.

Нека A е непразно множество. За релацијата α ќе велиме дека е *релација на подредување (подредување)* на A ако таа е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Нека α е релација на подредување на A. Ако за елементите $x, y \in A$ важи $x\alpha y$ или $y\alpha x$, тогаш ќе велиме дека тие се *споредливи*.

Ако секои два елементи на A се споредливи, ќе велиме дека релацијата α е *потполно подредување* во A и дека множеството A е *потполно подредено множество*, а во спротивно ќе велиме дека релацијата α е релација на *делумно подредување* и множеството A е *делумно подредено множество*.

Пример 7. а) Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата α определена $x\alpha y$ ако и само ако $x \leq y$. Во примерите 2 г), 4 в) и 5 б) докажавме дека оваа релација е рефлексивна, транзитивна и антисиметрична, што значи таа е релација на подредување. Јасно, вака дефинираната релација на подредување е потполно подредување во $\mathbf{N}$, што значи дека $\mathbf{N}$ е потполно подредено множество.

б) Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата α определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x < y$. Според примерот 2 г) оваа релација не е рефлексивна, па значи не е релација на подредување. ♦

3. ЗАДАЧИ ВО ТЕМАТА

Во претходната точка наведовме повеќе задачи кои можат да се искористат при усвојување на новите знаења и умеења. Исто така, се осврнавме и на решавањето на задачи со помош на Венови дијаграми, со што сите ученици ќе се стекнат со определени практични знаења и умеења.

Меѓутоа, при изучување на оваа тема изборот на задачите е значително ограничен. Ова пред се се должи како на структурата на темата, така и на фактот дека истата се изучува како прва тема во V одделение и на оваа возраст учениците не располагаат со неоходни знаења и умеења за формулирање и решавање на посложени задачи од теоријата на множествата. Сепак, кога станува збор за работата со надарените ученици за математика пожелно е истата добро да се осмисли и да се состави систем задачи за чие решавање се доволни знаењата усвоени во редовната настава, но решавањето на овие задачи ќе овозможи побрзо напредување на надарените ученици. Во овој дел, во делот за множества, ќе дадеме еден таков систем задачи, дел од кои можат да се искористат за индивидуална работа со учениците во редовната настава.

Задача 1. Дадено е множеството $A=\{1,2,3,4\}$. Определи ги сите множества X за кои важи $A \cup X = A$.

Задача 2. Дадено е множеството $A=\{1,2,3,4,5\}$. Определи ги сите подмножества X од множеството A, ако е $X=\{1,3,*,*\}$. (Само на местата на ѕвездичките треба да се запишат елементи од множеството A).

Задача 3. Дадени се множествата

$$A=\{4,5,8\},\ B=\{4,6,x,8\} \text{ и } C=\{5,3,8,x,y\}.$$

Определи ги елементите x и y ако $A\cup B=\{4,5,6,8,9\}$ и $B\cap C=\{4,8,9\}$.

Задача 4. Определи го множеството X, ако

$$X\subseteq\{1,2,3,4,5\} \text{ и } \{1,2,3\}\cap X=\{2,3\}.$$

Задача 5. Определи ги елементите на множеството B, ако

$$A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,e,m,n,p,q\},\ A\setminus B=\{e,m\},\ A\cap C=\varnothing \text{ и } C\setminus B=\{c,p\}.$$

Задача 6. Дадени се множествата $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{3,4,5\}$. Одреди го множеството X ако $A\cup X=A$ и $B\cap X=A\setminus(A\setminus B)$. Колку решенија има задачата?

Задача 7. Нека $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Дали постојат множества A и B такви што $A\cup B=S,\ A\cap B=\varnothing$ и збирот на елементите во множеството A да е еднаков на збирот на елементите во множеството B?

Задача 8. Дадени се множествата

$$A=\{1,2,3,4,5,6,8\} \text{ и } B=\{2,4,5,6,8\}.$$

Одреди го множеството S, ако $A\cap S=\{3,4\}$ и $B\cup S=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Задача 9. Дадени се множествата

$$A=\{a,b,c,d,e\},\ B=\{a,d,f\},\ C=\{b,e,f,g\} \text{ и } D=\{a,f,g,h\}.$$

Одреди го множеството S ако се знае дека

$$S\subseteq A,\ S\cap(B\cup D)=\varnothing,\ (A\cap C)\setminus S=\varnothing \text{ и } \{c\}|S=\{c\}.$$

Задача 10. Одреди ги множествата A,B и C, ако се знае дека

$$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ B\cap C=\varnothing,\ B\cap A=\{5,6\},$$
$$C\cap A=\{3,8\},\ B\setminus A=\{1,2,4\},\ \delta(A)=4.$$

Задача 11. Одреди го множеството M ако се знае дека

$$M\subseteq A,\ (B\cup D)\cap M=\varnothing \text{ и } (A\cap C)\setminus M=\varnothing$$

каде $A=\{1,2,3,4\},\ B=\{1,3,5\},\ C=\{2,4,5,6\}$ и $D=\{1,5,6,7\}$.

Задача 12. Одреди ги множествата A,B и C ако се знае дека:

$$A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,e,f,g,h\},\ A\cap B\cap C=\{a,e\},$$
$$C\setminus B=\{b,c,g\},\ A\setminus C=\varnothing,\ A\cap C=\{a,e,g\} \text{ и } B\setminus C=\{f,h\}$$

Задача 13. За множествата M,N,P важи

$$M\cup N\cup P=\{1,2,3,4,5\},\ M\cap N\cap P=\{1,4\},\ N\setminus P=\{2,5\} \text{ и } P\setminus M\neq\varnothing.$$

Одреди го множеството P.

Задача 14. За множествата M,N,P важи $M\cap N\cap P=\{1,4\}$, $M\cup N\cup P=\{1,2,3,4,5,6\}$, $N\setminus P=\{2,5,6\}$ и $P\setminus M\neq\varnothing$. Одреди го множеството P.

II ГЛАВА
ИЗУЧУВАЊЕТО НА БРОЈНИТЕ МНОЖЕСТВА ВО УЧИЛИШНИОТ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Меѓу основните линии во содржината на наставата по математика е и темата “Развојот на поимот за број”. Основните содржини на оваа тема се поместени од I до VIII одделение во основното образование, а потоа најчесто во II клас од средното образование се изучуваат комплексните броеви. Со оваа линија се поврзани и прашањата за степен со реален показател, вредноста на експоненцијалната, логаритамската и тригонометриските функции, изучувањето на равенките и неравенките и мерењето на геометриските објекти. Токму затоа, не е престрого ако кажеме дека изучувањето на бројните множества лежи во основата на севкупната настава по математика, па затоа содржините кои се изучуваат во оваа тема имаат посебно значење за наставата по математика.

1. СВАЌАЊА ЗА ИЗУЧУВАЊЕТО НА БРОЈНИТЕ МНОЖЕСТВА

Развојот на математиката како наука, а со самото тоа како наставен предмет е најтесно поврзан со развојот на сваќањето за поимот број. Независно од тоа што постојат повеќе експерименти за градба на математиката врз основа на други основни поими, сепак поимот број е примарен во училишната математика.

Во современата математика терминот број се користи за означување на неколку множества објекти: природни, цели, рационални, реални и комплексни броеви. Постојат и други множества кои во своето име го содржат зборот “број”, како што се множествата алгебарски броеви, трансцедентни броеви итн., но бидејќи овие множества не се изучуваат во училишната математика во основното образование, истите нема да ги разгледуваме.

Историски гледано прво се формирани знаењата и умеењата за природните броеви, потоа за позитивните рационални броеви, а многу покасно за комплексните и целите броеви. Меѓутоа, ваквата *историска шема* на развојот на поимот за број е модифицирана во современите научни разгледувања, кои го претпочитаат аксиоматскиот пристап и се темелат на Пеановите аксиоми и алгебарските структури (групоид, полугрупа, група, прстен и поле). Притоа множествата броеви се усвојуваат по следната *логичка шема*: природни, цели, рационални, реални и комплексни броеви.

Како што можеме да забележиме, постои суштинска разлика меѓу историската и логичката шема на изучување на множествата броеви. Токму оваа разлика, но и летимичниот поглед на наставната и методската литература укажуваат дека не постои согласност не само во деталите, туку и во однос на суштинските прашања за изучување на множествата броеви во наставата по математика во основното образование, како што се:

1. Дали како основа за училишниот курс да се земе логичката или историската шема за изучување на множествата броеви?
2. Дали прво треба да се изучуваат обичните или десетичните дропки?
3. Дали комплексните броеви треба да се изучуваат од сите ученици и кога тие да се изучуваат?
4. Кога и како на учениците да им се даде идејата за реален број?
5. Кое е оптималното ниво на кое треба да се изучуваат множествата броеви во основното образование?
6. Како да се изврши оптимален избор на дополнителните наставни содржини кои треба да го пратат изучувањето на множествата броеви, се со цел учениците да се здобијат со практични знаења и умеења?

Одговорот на секое од претходно изнесените прашања не е ниту малку едноставен, па затоа за секое од нив ќе ги наведеме аргументите кои се однесуваат на спорните моменти.

1. Прифаќањето на логичката шема за изучување на множествата броеви овозможува целосно исполнување на дел од барањата од содржините на наставата по математика, како што се современоста, научноста и структурноста. Од друга страна, меѓу барањата на содржините е и нивната достапност и ова барање е ограничувачко при изучувањето на множествата броеви во основното образование. Имено, практиката покажува дека воведувањето на дел од алгебарските структури и нивната примена при изучувањето на множествата броеви, во основното образование има само негативни ефекти. Последното се должи на апстрактноста на алгебарските структури, но и на психофизичките способности на децата. Имено, покрај воведувањето на алгебарските структури, прифаќањето на логичката шема

доведува до прерано воведување на целите броеви и изучување на операциите во множеството цели броеви, кои многу тешко или воопшто не се осознаваат од помалите ученици.

Имајќи го предвид претходно кажаното, во училишниот курс во основното образование предност има историската шема на изучување на множествата броеви. Секако, изложувањето на наставните содржини може да биде збогатено со скриено користење на алгебарските структури, што во практиката значи разгледување на следниве прашања:

- усвојување на затвореноста на операциите во секое од одделните множества,
- егзистенцијата на неутрален елемент за одделна операција,
- усвојување на комутативниот, асоцијативниот и дистрибутивниот закон,
- усвојување на релацијата подредување во одделните множества броеви итн.

2. Училишната практика покажува дека при изучувањето на дропките, учениците можат да се здобијат со задоволителни знаења и умеења без разлика дали прво ќе се усвојат обичните, а потоа десетичните дропки или обратно, прво ќе се усвојат десетичните, а потоа обичните дропки. Според тоа, експериментот не негира ниеден од двата можни пристапа, па затоа ова прашање не треба да се предимензионира. Сепак, добро е да се согледаат можностите кои ги нудат и на двата пристапа.

Што се однесува до изучувањето на обичните дропки пред десетичните, важно е да се знае дека:

- Десетичните дропки се дел од обичните дропки и нивното изучување после обичните треба да заштеди наставно време и да ја засили улогата на дедуктивниот метод.
- За да се формира правилна претстава за дропките $\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ итн., треба да се има претстава за правилни дропки со помал именител.
- Воведувањето на десетичните дропки пред обичните создава претстава дека десетичните и обичните дропки се два различни вида броеви, од што постои опасност за формализам во знаењата.

Од друга страна, аргументите за изучување на десетичните дропки пред обичните се:

- Записот на десетичните дропки е природно продолжение на записот на природните броеви, па затоа истиот лесно се усвојува.
- Десетичните дропки се тесно поврзани со десетичниот мерен систем, што значи дека истите се дел од секојдневните активности на луѓето. Затоа нивното изучување е погодно за потполно остварување на дел од дидактичките принципи, како што се сознајноста, нагледноста, достапноста и индивидуалниот пристап.
- Усвојувањето на операциите со десетичните дропки е многу поедноставно, бидејќи тие се наполно аналогни со операциите во множеството природни броеви. Всушност, времето предвидено за усвојување на операциите со десетичните дропки може умешно да се искористи за доведување на знаењата и умеењата на учениците за операциите со природните броеви на ниво на алгоритми (технички процедури). Јасно, последното тешко може да се постигне со соодветните дејства кај обичните дропки, бидејќи во овој случај операциите по правило се реализираат со релативно мали природни броеви, за кои изведувањето на операциите во претходниот период најчесто е доведено до автоматизам и нивното повеќекратно повторување станува неинвентивно и со самото тоа здодевно за учениците.

Овде да забележиме дека освен двата споменати пристапи при изучувањето на обичните и десетичните дропки постои и трет, компромисен пристап. Имено, при изучувањето на операцијата делење во множеството природни броеви се воведува дропка со броител 1, со што се олеснува воведувањето на десетичните дропки пред обичните. Практиката покажува дека и овој пристап може да се прилагоди на возраста на учениците и да се реализира успешно.

3. Што се однесува до основното образование, до сега не е направен обид за изучување на комплексните броеви. Затоа за овој дел од образовниот систем не може да се каже дали комплексните броеви воопшто треба да се изучуваат, а уште помалку може да се даде одговор на прашањето дали тие треба да се изучуваат од сите ученици или не.

4. Психофизичките способности на учениците се ограничувачки фактор заради кој не сме во можност во основното образование реалните броеви да ги воведеме со запазување на високо ниво на научност. Иако истото не можеме да го постигнеме ниту во средното образование, сепак во осмо одделение кај учениците можеме да оформиме доволно јасна и научно издржана претстава за множеството реални броеви. Во натамошните

разгледувања ќе се осврнеме на неколку моменти кои тоа ни го овозможуваат.

5. Сознателното изучување на секое од основните бројни множества доведува до две квалитативно различни нивоа на усвојување: операционо и структурно. Ќе велиме дека ученикот има само операциони знаења, кога тој може само да оперира со броевите од дадено множество, без да ги знае својствата на множеството броеви. Слично, ќе велиме дека ученикот има структурни знаења, кога тој освен што знае да оперира со броевите од дадено множество, ги знае и својствата на множеството, како што се:

- затвореност во однос на изучените операции,
- ограниченост од долу,
- ограниченост од горе,
- дискретност,
- густо множество,
- пребројливост,
- непрекинатост итн.

Природно е да се запрашаме кои знаења за множествата броеви треба да ги понесат учениците со завршувањето на основното образование. Вообичаено во наставните програми е предвидено учениците да се стекнат како со операционите, така и со структурните знаења. Понатаму, учебниците, кои се непосреден одраз на наставните програми овозможуваат стекнување и на двата вида знаења и до тука е се во ред. Меѓутоа, при реализирањето на наставата учителите се судруваат со непостоење на образовни стандарди. Имено, во наставните програми нема разграничување на операционите и структурните знаења и како тоа не е направено ниту со учебниците, најчесто по инерција се тежнее сите ученици да се здобијат и со двата вида знаења. Меѓутоа, со стремежот да се постигне оваа цел не треба да се заборави дека само високото операционо ниво треба да е задолжително за сите ученици, бидејќи повеќето ученици ќе бидат полезни граѓани и без структурни знаења. Кога сме кај структурните знаења, важно е да напоменеме дека учителот сепак треба да тежнее да бидат усвоени од повеќето ученици, бидејќи нивното сознателно усвојување придонесува за развојот на толку посакуваните квалитети на мислењето, како што се: еластичноста, длабочината, широчината и критичноста.

6. Имајќи го предвид фактот дека човекот голем дел од своето време посветува на прибирање и обработка на податоци, природно е една од темите кои треба да го пратат изучувањето на множествата броеви да биде работата со податоци. Пожелно е оваа тема да се изучува во сите учебни години од основното образование, со тоа што застапеноста на содржините во V одделение треба да биде минимална, а истата крајно внимателно да се

зголемува во погорните одделенија. Последното е потребно, не само заради фактот дека сознателното усвојување на содржините од оваа тема е можно само после усвојувањето на рационалните броеви, туку и затоа што одделни содржини од оваа тема се исклучително тешки за децата од оваа возраст. Секако, ова се однесува на содржините од теоријата на веројатност и статистиката. Имено, поимите примерок, популација, случаен настан и веројатност на случајни настани се толку апстрактни, што практично е невозможно нивно сознателно усвојување во основното образование. Имајќи го предвид претходно кажаното, сметам дека застапеноста на овие содржини во основното образование може да биде последица само на неодговорниот однос на изготвувачите на програмата или на нивната методска необразованост.

Природно со изучувањето на рационалните броеви се поврзани поимите размер, пропорција и процент. Имајќи го предвид практичното значење на знаењата поврзани со овие поими, добро е истите да се изучуваат паралелно со усвојувањето прво на рационалните, а потоа и на реалните броеви.

Третата тема која е непосредно поврзана со изучувањето на множествата броеви, а која има огромно практично значење е мерењето на геометриските објекти. Сознателното усвојување на оваа тема претпочита претходно усвојување на мерните единици и множеството реални броеви. Меѓутоа, методска грешка е доколку темата се усвојува во еден циклус, па затоа кон нејзиното усвојување треба да се пристапи одма после воведувањето на обичните и децималните дропки. Овде да споменеме, дека заради важноста на оваа тема истата ќе ја разгледаме одделно.

2. ОБРАЗОВНИ ЦЕЛИ И СТРАТЕГИЈА ЗА РЕАЛИЗИРАЊЕ НА ТЕМАТА

При изучувањето на содржините од оваа тема треба да се постигнат следниве образовни цели:

- да се знаат имињата и релациите меѓу одделните бројни множества,
- да се усвојат операциите во одделните бројни множества на ниво на технички процедури,
- во едноставните случаи да се усвојат својствата на операциите на ниво на нивно порационално извршување, и
- да се усвојат поимите поврзани со структурните знаења за бројните множества, како што се: затвореност во однос на изучени-

те операции, ограниченоста од долу и од горе, дискретноста, густо множество, преброjливост и непрекинатост.

Стратегијата за реализирање на оваа тема е определена од неодминливото прашање:

Зошто, иако природните, целите, рационалните и реалните броеви се различни множества, тие се опфатени со заеднички термин "броеви"?

Едноставниот одговор на ова прашање, дека и покрај разликите меѓу овие множества, дефинираните операции собирање, множење, одземање и делење, како и релациите еднакво, помало и поголемо, имаат едни исти својства, ја определува стратегијата за изучување на оваа тема и нејзината суштина се состои во еднообразното усвојување на различните множества броеви. Ќе ги конкретизираме одделните етапи кои ја карактеризираат стратегијата на реализирање на оваа тема.

i) Откако ќе се воведе изучуваното множество броеви се воведуваат операциите собирање и множење, со што всушност започнува изучувањето на својствата на разгледуваното множество броеви.

ii) Се воведуваат релациите "еднакво", "помало" и "поголемо".

iii) Се воведуваат операциите "одземање" и "делење" и тоа може да се направи или истовремено со воведувањето на собирањето и множењето, соодветно, или подоцна. Ова доведува до две различни варијанти во реализирање на темата, при што изборот на стратегијата најчесто зависи од: расположливото наставно време и одлуката дали паралелно ќе ги изучуваме операциите кои се во тесна меѓусебна врска или ќе се определиме прво да ги изучиме структурните операции, а потоа нивните инверзни.

iv) Се изучуваат својствата на одделни подмножества од изучуваното множество броеви како, на пример, при изучувањето на природните броеви подетално се изучуваат простите и сложените броеви.

Стратегијата на изучувањето на темата го содржи и одговорот на едно од клучните прашања, а тоа е дали тежнееме кон структурно ниво на усвојување или тоа го оставаме за подоцна. Притоа, ако тежнееме кон структурно ниво на знаења, веднаш штом ќе се создадат услови, се воведуваат својствата кои ја карактеризираат структурата на множеството, а во спротивно само се наведуваат некои од нив, при што поголемиот дел од овие својства и не се спомнуваат.

Оваа тема се изучува во подолг временски период, при што одделните целини се изучуваат во различни учебни години од I до VII одделение. Притоа изучувањето на темата не е непрекинато и во овој период паралелно со оваа тема се усвојуваат и други знаења и умеења. Постои мислење дека долгиот период на изучување на оваа тема и фактот дека таа не се изучува во компактен период е основна пречка при усвојувањето на структурните знаења поврзани со множествата броеви. Меѓутоа, основната причина за слаботo усвојување на структурните знаења од оваа тема е апстрактноста на поимите кои лежат во основата на темата, како што се подредено множество, густо множество, супремум, инфимум, полугрупа, група, прстен, поле итн. Притоа посебна тешкотија е поимот реален број, како и операциите во множеството реални броеви, па затоа потребно е на учениците овие знаења да им се презентираат со поголемо внимание и на начин кој ќе биде подостапен за учениците.

Дел од стратегијата за реализирање на темата е откривањето на грешките кои учениците ги прават при изучувањето на содржините од оваа тема и нивно постојано корегирање, како на пример:

a) $3^2 = 6$ наместо $3^2 = 9$,

b) $0,2^3 = 0,8$ наместо $0,2^3 = 0,008$,

c) $(\frac{3}{4})^3 = \frac{9}{12}$ наместо $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$,

d) $\sqrt{2^{1/2}}^{\,2} = 2$ наместо $\sqrt{2^{1/2}}^{\,2} = \sqrt{2}$ итн.

кои во случајот се должат на лошото усвојување на поимот степен на реален број. Откако сме ја констатирале грешката, потребно да се решат поголем број задачи, сè додека операцијата степен на реален број не биде целосно усвоена од сите ученици. Меѓутоа, за да се справиме со типичните грешки кои учениците ги прават при степенувањето на реалните броеви поефикасно е превентивно да дејствуваме, што во претходните примери може да се постигне на следниот начин:

a) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$,

b) $0,2^3 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \cdot 0,2 = 0,008$,

c) $(\frac{3}{4})^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$, и

d) $\sqrt{2^{1/2}}^{\,2} = \sqrt{2^{1/2}} \cdot \sqrt{2^{1/2}} = \sqrt{2^{1/2} \cdot 2^{1/2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^1} = \sqrt{2}$.

3. МЕТОДСКИ БЕЛЕШКИ ЗА ИЗУЧУВАЊЕТО НА МНОЖЕСТВАТА БРОЕВИ

Во овој дел ќе се осврнеме на проблемите кои се јавуваат при изучувањето на природните, целите, рационалните и реалните броеви. Исто така ќе ги разгледаме и содржините за кои сметаме дека успешно може да се усвојуваат при изучувањето на овие множества броеви.

3.1. ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Усвојувањето на множеството природни броеви започнува од најрана возраст, во предучилишното образование и учениците веќе во четврто одделение имаат операциони знаења за множеството природни броеви и интуитивни структурни знаења за ова множество. Токму затоа веќе во петто одделение се настојува учениците да се здобијат со вистински структурни знаења за множество природни броеви. Притоа најчесто проширувањето на знаењата за множеството природни броеви, односно воведувањето на природните броеви се врзува за теоријата на множества и тоа се прави по следниот редослед:

- се врши повторување за множествата и операциите со нив: унија, пресек, разлика и Декартов производ,
- се воведува поимот еквивалентни множества и со помош на истиот се воведуваат поимите за конечно и бесконечно множество,
- се воведува поимот број на елементи на множество, и
- се воведува поимот природен број, како број на елементи на конечно множество.

На претходно изнесениот пристап не може да му се најде никаква забелешка, но прашање е дали дете на десетгодишна возраст може сознателно да ги усвои поимите еквивалентни множества, конечно и бесконечно множество, односно сознателно да ги усвои дефинициите:

- *Едно множество се нарекува конечно, ако не е еквивалентно со ниедно негово вистинско подмножество, и*
- *Едно множество се нарекува бесконечно, ако тоа е еквивалентно со некое негово подмножество.*

Практиката покажува дека на оваа возраст горните дефиниции можат сознателно да ги усвојат мал број ученици, за што основна причина е природата на дефинициите, т.е. фактот што во првата дефиниција имаме универзален квантификатор "... *ниедно негово* ...", а во втората егзистенционален квантификатор "... *со некое* ...", чие значење само по себе е апстрактно дури и за учениците од средното образование.

Претходно изнесеното ни дава за право да заклучиме дека при изучувањето на природните броеви во основното образование подобро е поимот природен број да се остави на ниво на интуитивна претстава, а поголемо внимание да се обрне на усвојувањето на:

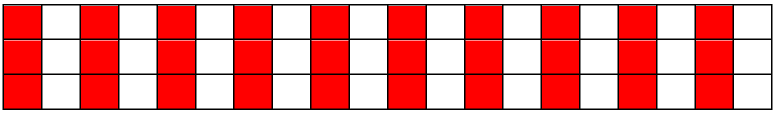
- десетичниот броен систем,
- операционите знаења,
- елементарните структурни знаења на множеството $\mathbf{N}_0$, како што се:
  - *i)* поимите претходник и следбеник на природен број,
  - *ii)* подредувањето, егзистенцијата на најмал елемент и непостоењето на најголем елемент во $\mathbf{N}_0$,
  - *iii)* својствата на операциите собирање и множење во $\mathbf{N}_0$ и поимот за степен,
  - *iv)* изводливоста на операциите одземање и делење во $\mathbf{N}_0$ и теоремата за делење со сотаток,
  - *v)* поимот за деливост и посебните признаци за деливост со 2, 3, 4, 5 и 9,
  - *vi)* поимите за прост и сложен природен број и преку примери да го усвојат каноничното разложување на природните броеви,
  - *vii)* да ги усвојат поимите заеднички делител, заеднички содржател, НЗД и НЗС на два и повеќе природни броја, и
  - *viii)* да го усвојат поимот заемно прости броеви.
- стекнатите операциони и елементарни структурни знаења да се користат при решавање на елементарни практични задачи.

Практиката покажува дека при усвојувањето на својствата на операциите во множеството $\mathbf{N}_0$ учениците се судруваат со низа потешкотии. Меѓутоа, со наголемување на нагледноста значително се олеснува усвојувањето на својствата на операциите во множеството $\mathbf{N}_0$. Ќе наведеме еден пример, во кој ќе покажеме како правоаголник поделен на единечни квадрати може да се искористи за подобро усвојување на својствата на операцијата множење на природни броеви.

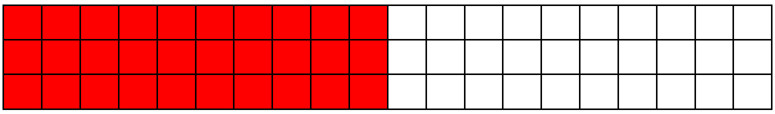
Пример 1. Дел од равенствата

$$\begin{aligned} 20\cdot 3 &= (10\cdot 2)\cdot 3 \\ &= 10\cdot(2\cdot 3) = (10\cdot 3)\cdot 2 \end{aligned}$$

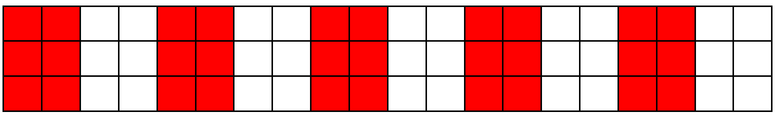
едноставно можеме да ги илустрираме со помош на следниве три цртежи. ♦



$3\cdot 20 = 60$



$(10\cdot 3)\cdot 2 = 60$



$10\cdot(2\cdot 3) = 60$

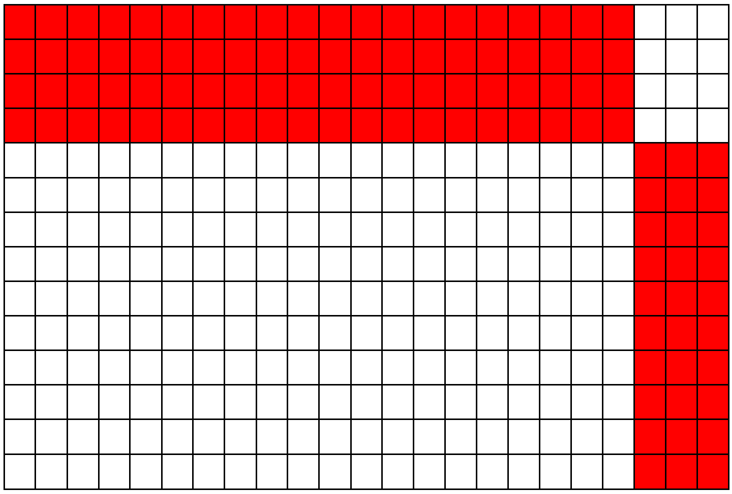
Понатаму, учениците се судруваат со потешкотии при множењето на повеќецифрени броеви. Можна причина за овие потешкотии е несознателното усвојување на множењето на повеќецифрени броеви, односно немањето сознание дека при множењето на повеќецифрени броеви ние практично повеќекратно ја користиме дистрибутивноста на множењето во однос на собирањето. Притоа полезно е ова да се илустрира на правоаголник поделен на единечни квадрати, што може да се види од следниот пример.

Пример 2. Низата равенства

$$\begin{aligned} 23\cdot 14 &= 23\cdot(10+4) \\ &= 23\cdot 10 + 23\cdot 4 \\ &= (20+3)\cdot 10 + (20+3)\cdot 4 \\ &= 20\cdot 10 + 3\cdot 10 + 20\cdot 4 + 3\cdot 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23\cdot 14 &= (20+3)\cdot 14 \\ &= 20\cdot 14 + 3\cdot 14 \\ &= 20\cdot(10+4) + 3\cdot(10+4) \\ &= 20\cdot 10 + 20\cdot 4 + 3\cdot 10 + 3\cdot 4 \end{aligned}$$

ја илустрираме со следниот цртеж



со забелешка дека плоштината на дадениот правоаголник можеме да ја пресметаме на четири начини и тоа:

- со множење на должините на страните,
- со разбивање на правоаголникот на два правоаголници делејќи ја страната со должина 23 на две отсечки со должини 20 и 3,
- со разбивање на правоаголникот два правоаголници делејќи ја страната со должина 14 на две отсечки со должини 10 и 4, и
- со разбивање на правоаголникот на четири правоаголници делејќи ја страната со должина 23 на две отсечки со должини 20 и 3 и страната со должина 14 на две отсечки со должини 10 и 4. ♦

Пожелно е паралелно со усвојувањето на комутативниот, асоцијативниот и дистрибутивниот закон да се усвојуваат и промените на резултатот во зависност од промената на компонентите. Изучувањето на ова прашање обично започнува со повторување на примери и задачи од материјалот усвоен во почетното образование, а потоа со решавање на погодно одбрани примери знаењата треба да се прошируваат и продлабочуваат.

Пример 3. Усвојувањето на промената на збирот на два броја во зависност од промената на собирците може да се реализира, на пример, со следниве задачи:

1. Најди го збирот на броевите 3276 и 1534.
   i) Во еден од собироци зголеми го бројот на стотките за 3.
   ii) Во еден од собироците зголеми го бројот на иљадарките за 2, а во другиот за 1.

iii) Во еден од собироците зголеми го бројот на десетките за 5, а во другиот намали го бројот на стотките за 2.

Како се менува збирот во секој од овие случаи? Дали од збирот на броевите 3276 и 1534 може да се пресмета збирот во секој и наведените случаи и ако може како тоа ќе се направи?

2. Пополни ја табелата:

a	15	122=15+107	15	56=15+41	37=15+22
b	234	234	220=234-14	251=234+17	201=234-33
$a+b$					

Што забележуваш? Како се менува збирот на броевите a и b во зависност од промената на собирците? ♦

Пример 4. Усвојувањето на промената на производот на два броја во зависност од промената на множителите може да се реализира, на пример, со следните задачи:

1. Страната на квадратот ја зголемуваме два пати. Што ќе се случи со неговиот периметар?
2. Нацртај правоаголник со страни $a = 6cm$ и $b = 13cm$.

   i) Зголеми ја страната b двапати.

   ii) Намали ја страната a трипати.

   Како се менува плоштината на правоаголникот во случајот *i*), а како во случајот *ii*).
3. Познато е дека
$$276 \cdot 15 = 4140.$$
   Едноставно пресметај ги производите $2760 \cdot 15$, $276 \cdot 5$ и $92 \cdot 45$.
4. Пополни ја таблицата

a	15	17=15+2	30	15	5
b	6	6	12	8=6+2	36
ab					

5. Без да ги пресметуваш производите, констатирај како тие се менуваат во секој од следните случаи:

   а) $300 \cdot 40$ и $300 \cdot (40 \cdot 3)$, б) $287 \cdot 5$ и $(287+7) \cdot 5$,

в) $324 \cdot 10$ и $(324-25) \cdot 10$, и

г) $215 \cdot 8$ и $215 \cdot (8+2)$. ♦

Изучувањето на содржините за деливост на природните броеви не подразбира изучување на елементарната теорија на броеви. Имено, овие содржини најчесто се изучуваат во петто одделение, па затоа точноста на одделните тврдења само ја илустрираме преку примери. Притоа основна задача е учениците да се здобијат со солидни операциони знаења, но и да се оспособат стекнатите знаења да ги користат при решавање на елементарни практични задачи. Постигнувањето на зададените цели е можно со внимателно одбрани задачи, како што се задачите зададени во следниот пример.

Пример 5. а) Од 30 керамички плочки во форма на квадрат со страна $15cm$ треба да формираме правоаголник. Кои димензии ги имаат можните правоаголници?

б) Од автобуска станица автобусите поаѓаат на секои 15 минути. Првиот автобус тргнува во 7 часот. Запиши го возниот ред од 7 до 13 часот.

в) Цената на еден билет е 360 денари. На крајот од денот во благајната имало 28000 денари. Непосредно по пребројувањето на парите, без да пресметува благајникот забележал дека во текот на продажбата направил грешка. Како го дознал тоа?

г) Гоце и неговата помала сестра Весна се ученици во основно училиште. Бројот на годините на секој од нив е прост број. Производот на броевите на нивните години е еднаков на нивниот куќен број, кој е поголем од 80, а помал од 100. Колку години има секој од нив?

д) Три жици со должини $280m, 420m$ и $630m$ треба да се исечат на еднакви и најдолги можни делови. Колкава е должината на секој од овие делови?

ѓ) Марија ја посетува својата баба на секои 5 дена. Последната посета била во недела. Која по ред ќе биде наредната неделна посета? Колку денови ќе поминат до тогаш?

е) Двајца велосипедисти тргнуваат истовремено од стартот на една кружна патека. Првиот ја минува патеката за 12, а вториот за 15 минути. По колку време велосипедистите ќе се најдат заедно на стартот? ♦

3.2. ВОВЕДУВАЊЕ НА ПОИМОТ ДРОПКА. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ДРОПКА И ОПЕРАЦИИ СО ДРОПКИ

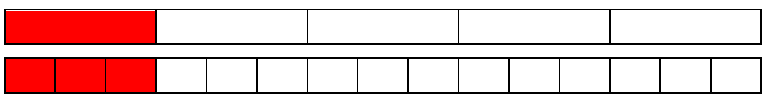
Многугодишната практика во предавањето на обичните дропки оформила доволно ефективни методи за нивно сознателно усвојување од страна на учениците. Овие методи, со определени нијанси во изложувањето, се користат скоро во сите учебници. Затоа во нашите разгледувања накратко ќе се осврнеме на овој проблем.

а) Дропките се сврзани со делењето на целото на еднакви делови и земање на неколку од добиените делови. При делењето на целото, кое суштински се разликува од добиените делови, постапката треба да се илустрира со примери во кои разликата е поочигледна. Тоа значи дека треба да се дели “торта”, а не “чоколада”, бидејќи деловите на кои се дели тортата по својата форма суштински се разликуваат од неа, што не е случај со деловите на чоколадото кои повторно имаат правоаголна форма.

б) При усвојувањето на поимот пожелно е помалку разновидни предмети да се делат на делови, бидејќи преголемата нагледност може да го сврти вниманието на учениците на одделните предмети, а не на поимот кој се усвојува.

в) При делењето на предметот на делови пожелно е да се испишат и да се илустрираат сите можни дропки, бидејќи нивното испишување во натамошната разработка на материјалот ќе ни овозможи полесно да ги усвоиме операциите собирање и одземање на дропки.

г) Пред да преминеме на воведувањето на операциите собирање и одземање на дропки задолжително треба да ги воведеме поимите привидна дропка, неправа дропка и мешан број, и да го усвоиме проширувањето и скратувањето на дропките. Притоа треба да се има предвид дека усвојувањето на проширувањето и скратувањето на дропките е проследено со бројни потешкотии, па затоа добро е истото да биде нагледно илустрирано. Последното може да се направи на следниов начин. Бидејќи дропките $\frac{1}{5}$ и $\frac{3}{15}$ се еднакви (види цртеж) добиваме дека $\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$ односно $\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}$.



Понатаму, откако ќе се разгледаат уште неколку примери заклучуваме дека:

Ако броителот и именителот на една дропка ги помножиме со кој било природен број, добиваме дропка еднаква на дадената т.е.

$$\frac{a}{b}=\frac{an}{bn},\, b\neq 0\,.$$

Ова е основното својство на дропките, а постапката ја нарекуваме ***проширување на дропки****.*

Во следната фаза, на учениците им се објаснува дека основното својство на дропките можат да го користат и во обратна насока, при што откако ќе се разгледаат неколку примери се формулира тврдењето.

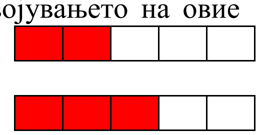
Ако и броителот и именителот на една дропка ги поделиме со некој нивен заеднички делител, добиваме дропка еднаква на дадената, т.е. ако $n\,|\,a$ *и* $n\,|\,b$*, тогаш*

$$\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n},\, b\neq 0\,.$$

Оваа постапка ја нарекуваме ***скратување на дропки****.*

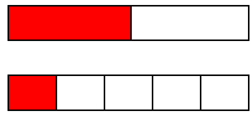
Во следните разгледувања, преку примери учениците треба да согледаат дека најголемиот природен број со кој една дропка може да се скрати е најголемиот заеднички делител на броителот и именителот, со што дадената дропка ја запишуваме како *нескратлива дропка*.

Усвојувањето на поимите привидна дропка, неправа дропка и мешан број не е пропратено се посебни методски потешкотии, па затоа на овие прашања нема подетално да се задржуваме. Исто така, во натамошните разгледувања на воведувањето на операциите со дропки, посебно нема да се осврнеме на нивните својства, бидејќи истите непосредно следуваат од дефинициите на операциите и својствата на операциите во множеството природни броеви.



д) При натамошното изучување на дропките посебно внимание треба да обрнеме на споредувањето на дропките. Усвојувањето на овие знаења најдобро е да го започнеме со споредување на дропки со еднаков именител. Како и во претходните разгледувања и овде презентирањето на новите знаења е исклучиво индуктивно и мора да е нагледно илустрирано. Притоа разгледуваме две дропки со еднаков именител, на пример $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$, истите ги претставуваме нагледно (цртеж горе), согледуваме на која дропка кој обоен дел соодветствува и во кој случај имаме поголема обоена површина и заклучуваме дека $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}$. Понатаму, откако ќе разгледаме уште два до три примери со учениците го формулираме тврдењето:

Од две дропки со еднакви именители поголема е онаа дропка што има поголем броител, односно ако $a < b$*, тогаш* $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.



Во следниот чекор разгледуваме две дропки со еднаков броител, на пример $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{5}$ и истите ги претставуваме нагледно (цртеж десно), согледуваме на која дропка кој обоен дел соодветствува и во кој случај имаме поголема обоена површина и заклучуваме дека $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$. Понатаму, откако ќе разгледаме уште два до три примери со учениците го формулираме тврдењето:

Од две дропки со еднакви броители поголема е онаа дропка што има помал именител, односно ако $b < c$*, тогаш* $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$.

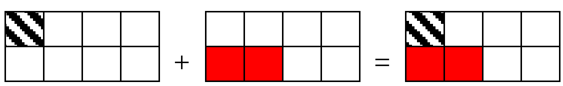
Конечно, преминуваме на споредување на дропки со различни броители и именители. Притоа, прво користејќи го проширувањето на дропки ја објаснуваме постапката на сведување на дропки на еднакви именители (на почеток пожелно е да не се користи НЗС на именителите, туку тоа да се остави за часовите за повторување). Имено, преку примери дропките од видот $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ ги сведуваме на дропките $\frac{ad}{bd}$ и $\frac{cd}{bd}$ кои имаат еднакви именители и потоа го изведуваме заклучокот :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ ако и само ако } ad < bc$$

ѓ) Целосното усвојување на дропките со конкретни именители е најдобра основа за формирање на правилата за собирање и одземање на обични дропки. Затоа е добро воведувањето на овие операции да се направи со помош на дропка која дава можност за комбинирање на повеќе случаи. Така, на пример, ако имаме дропки со именител 6, тогаш можни се следниве случаи:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6},\quad \frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6},\quad \frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6},\quad \frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\frac{5}{6},$$
$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{6}{6},\quad \frac{2}{6}+\frac{2}{6}=\frac{4}{6},\quad \frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6},\quad \text{итн.}$$

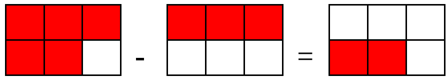
При воведувањето на операцијата собирање учениците задолжително прво треба сознателно да го усвојат собирањето на дропки со еднакви именители. Се разбира и во овој случај го користиме индуктивниот метод, при што почетните примери ги претставуваме нагледно. Така, на пример, за да го илустрираме собирањето $\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$ можеме да го искористиме цртежот:



и после неколку вакви примери заклучуваме:

> ***Збирот*** *на две дропки со еднакви именители е дропка со истиот именител како и дропките собирци, е броител еднаков на збирот на броителите на дропките собирци, т.е.* $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, c\neq 0$.

Сега можеме да преминеме на одземањето на дропки со еднакви именители. Јасно, и во овој случај го користиме индуктивниот метод, при што првите неколку примери ги претставуваме нагледно. Така, на пример, одземањето $\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{2}{6}$ го илустрираме со цртежот горе. Откако ќе разгледаме неколку примери задолжително треба да го запишеме заклучокот од нашите разгледувања:



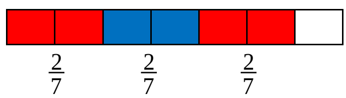
> ***Разлика*** *на две дропки со еднакви именители е дропка со ист именител како и дропките што ги одземаме, а броител еднаков на разликата од броителите на дропките што ги одземаме, т.е.*
>
> $$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},\ a,b>0, c\neq 0.$$

Конечно, преминуваме на собирање и одземање на дропки со различни именители. Имено, преку примери дропките од видот $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ ги сведуваме на дропките $\frac{ad}{bd}$ и $\frac{cd}{bd}$ кои имаат еднакви именители и потоа истите ги собираме, односно одземаме. Притоа, како и во претходните случаи пожелно е да го запишеме правилото за собирање (одземање) на дропки со различни именители:

> *Дропки со различни именители собираме или одземаме, така што:*
>
> - *Одредуваме НЗС за именителите на дропките.*
> - *Дропките ги сведуваме на најмал заеднички именител.*
> - *Собираме или одземаме дропки со ист именител.*

е) Операцијата множење на дропки ја воведуваме постапно, т.е. прво го усвојуваме множењето на дропка со природен број. Јасно и овде го применуваме индуктивниот метод, при што првите неколку примери ги претставуваме нагледно. Притоа, на почетокот преку примери се потсетуваме на дефиницијата на множењето на природни броеви, за да потоа истата ја прошириме на множење на природен број и дропка. Имено, прво можеме да ги разгледаме примерите

$$2\cdot 4=4+4=8 \text{ и } 5\cdot 3=3+3+3+3+3=15,$$



а потоа следниот пример:

$$3\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{2+2+2}{7}=\frac{6}{7}=\frac{3\cdot 2}{7},$$

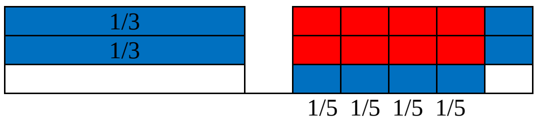
кој го илустрираме со помош на горниот цртеж. Понатаму, пожелно е да се разгледаат примери од следниве видови

$$4\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3+3+3+3}{8}=\frac{12}{8}=\frac{4\cdot3}{8}=\frac{3}{2} \text{ и}$$
$$3\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{3+3+3}{7}=\frac{9}{7}=\frac{3\cdot3}{7}$$

и потоа можеме да го формулираме правилото за множење на природен број со дропка

Природен број со дропка множиме така што со тој број го множиме броителот на дропката, а именителот останува непроменет, т.е. $n\cdot\frac{a}{b}=\frac{na}{b}, b\neq 0$.

Множењето на дропки повторно го воведуваме преку примери. Така, при наоѓање на производот $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ најдобро е да се послужиме со следниов цртеж при што во првиот чекор целото го делиме на три еднакви делови, а потоа секоја третина ја делиме на пет еднакви делови.



Понатаму од цртежот заклучуваме дека $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}=\frac{4\cdot2}{5\cdot3}$. Сега, откако ќе разгледаме уште два до три едноставни примери, учениците се подготвени да усвојат дека:

***Производот** на две дропки е дропка, чиј броител е еднаков на производот на броителите, а именителот е еднаков на производот на именителите на дропките, т.е.*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

ж) При усвојувањето на операцијата делење на дропки прво треба да се усвои поимот *заемнореципрочни дропки* и операцијата делење на дропка со природен број, која откако ќе се усвои дека: а*ко* $n\,|\,a$*, тогаш* $\frac{a}{b}:n=\frac{a:n}{b}$, се воведува на следниот начин:

$$\frac{a}{b}:n=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}:n=\frac{(a\cdot n):n}{b\cdot n}=\frac{a}{b\cdot n}.$$

Во натамошните разгледувања најдобро е да земеме конкретен пример, како што е: да го определиме количникот $\frac{3}{7}:\frac{2}{5}$. Тоа значи да определиме таков број x, кој помножен со делителот $\frac{2}{5}$ го дава деленикот $\frac{3}{7}$, т.е. од $\frac{3}{7}:\frac{2}{5}=x$, следува $\frac{2}{5}x=\frac{3}{7}$. Понатаму $\frac{2}{5}$ од бројот x е еднаков на $\frac{3}{7}$, па затоа $\frac{1}{5}$ од бројот x е еднаква на $\frac{3}{7}:2=\frac{3}{7\cdot 2}$, што значи дека $\frac{5}{5}$ од бројот x се еднакви на

$$5\cdot\frac{3}{7\cdot 2}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 2}=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{2} \text{ т.е. } \frac{3}{7}:\frac{2}{5}=x=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{2}.$$

Сега, откако ќе разгледаме уште еден до два едноставни примери, учениците се подготвени да усвојат дека:

*Дропка **делиме** така што деленикот го множиме со реципрочниот број на делителот, т.е.* $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Коментар. Најчесто, во желбата учениците да усвојат дел од структурните знаења за дропките, паралелно со усвојувањето на дропките се усвојува и нивното претставување на бројна полуправа. Притоа, како да се губи од вид дека оваа содржина во случајот останува изолирана, бидејќи се уште не е воведено множеството рационални броеви, а учениците ги немаат и потребните знаења за слични триаголници, со што практично не сме во можност да го реализираме претставувањето на голем број дропки како, на пример, $\frac{1}{3},\frac{4}{5},\frac{8}{7}$ итн. Затоа пожелно е претставувањето на дропките на бројна полуправа да се реализира при воведувањето на множеството рационални броеви, а пред истото да се воведи да се усвојат неопходните содржини од елементарна геометрија, се со цел да се обезбеди внатрешнопредметна интеграција на наставата.

При изучувањето на дропките, освен усвојувањето на својствата на операциите, скоро и да нема можност учениците да се здобиваат со структурни знаења, па затоа основна задача е учениците да се здобијат со солидни операциони знаења, но и да се оспособат стекнатите знаења да ги користат при решавање на елементарни практични задачи. Постигнувањето на зададените цели е можно со внимателно одбрани задачи, како што се задачите зададени во следниов пример.

Пример 6. а) Првиот ден Илија изел 1 петтина, а вториот ден 2 петтини од тортата. Колкав дел од тортата изел Илија двата дена?

б) За два дена Јане поминал $\frac{8}{9}$ од патот. Првиот ден поминал $\frac{4}{9}$ од патот. Колкав дел од патот Јане поминал вториот ден?

в) Должината на чекорот на таткото е $\frac{7}{10}m$, а на синот $\frac{5}{10}m$. За кој дел од метарот должината на чекорот на таткото е поголема од должината на чекорот на синот? Колку дециметри е тоа?

г) Во шише од литар има $\frac{7}{10}l$ сок. Дали можеш во него да дотуриш уште половина литар сок? Образложи го одговорот!

д) До училиште Ана патува $\frac{3}{11}$ од часот, а Вера патува $\frac{5}{12}$ од часот. Ако тие се движат со еднаква брзина, која од нив живее поблизу до училиштето?

ѓ) Раде трча $2km$ за 11 минути, а Миле трча $3km$ за 16 минути. Кој од нив трча побрзо?

е) Илија се подготвува за училиште. $\frac{13}{15}$ од часот учи математика, $\frac{7}{12}$ од часот учи мајчин јазик и $\frac{1}{3}$ од часот учи географија. Колку часа се подготвува Илија? Изрази ги во минути.

з) Еден базен се полни со две цевки. Едната го полни базенот за 6 часа, а другата за 4 часа. Колкав дел од базен ќе наполнат двете цевки за 1 час? А за 2 часа?

ж) Земјоделецот Киро $\frac{3}{4}$ од својата земја ја посеал со пченица, а на остатокот од земјата со пченка засадил $\frac{2}{5}$ од земјата која е посеана со пченица. Кокав дел од својата земја Киро засадил со пченка, а колкав дел останал за производство на други култутри?

з) Кога Методија поминал $\frac{4}{9}$ од патот, му останале уште $10km$. Колку километри е долг целиот пат?

ѕ) Во еден сончев ден Димитрија забележал дека неговата сенка е долга $\frac{2}{3}$ од неговата висина. Во тој момент сенката на дрвото била долга $3\frac{1}{3}m$. Колку е високо дрвото?

и) Од една ливада се добиени $3\frac{1}{2}$ тони сено. Колку тони трева се покосени, ако се знае дека тревата при сушење губи $\frac{7}{12}$ од својата тежина?

ј) Еден работник може да заврши една работа сам за 9 дена, друг работник истата работа може да ја заврши за 12 дена, а трет работник сам за 15 дена. Колкав дел од работата ќе остане незавршен, ако и тројцата работници работат заедно 3 дена? ♦

3.3. ДЕЦИМАЛНИ (ДЕСЕТИЧНИ) ДРОПКИ

Во суштина постојат две причини за изучувањето на децималните дропки и тоа:

- нивната примена во практиката и

- улогата кои ја имаат децималните броеви при воведувањето на поимот ирационален број, т.е. при усвојување на поимот реален број.

а) Подготовката на учениците за изучување на десетичните дропки, по правило, содржи неколку задачи со десетични дропки како, на пример, да се пресмета: $\frac{3}{10}+\frac{11}{1000}+2\frac{7}{100}$ и $\frac{3}{10}\cdot\frac{11}{100}+\frac{13}{100}$. При решавањето на овие примери учениците треба да согледаат дека извршувањето на наведените операции е поедноставно и дека тоа се должи на видот на именителот. Понатаму, пожелно е да се обрне внимание на практичната примена на десетичните дропки, односно да се спомне дека:

$$1dm=\frac{1}{10}m,\ 1cm=\frac{1}{10}dm=\frac{1}{100}m,$$

едно дени е стоти дел од денарот итн. Во следниот чекор веќе може да се даде следнава дефиниција:

*Дропките, чии именители се десетични единици, т.е. броеви од видот 10^k, k е природен број, ги нарекуваме **децимални (десетични) дропки**.*

Понатаму, треба да разгледаме пример од видот

$$\frac{58}{10}=\frac{50}{10}+\frac{8}{10}=5+\frac{8}{10}=5\frac{8}{10}$$

и на учениците да им објасниме дека наместо записите $5+\frac{8}{10}$ или $5\frac{8}{10}$ го прифаќаме попрактичниот запис на децималните дропки $5,8$ при што читаме: *пет цели и осум десетини*. Ваквиот запис го нарекуваме *децимален запис*, запирката меѓу броевите 5 и 8 *децимална запирка*, а бројот $5,8$ го нарекуваме *децимален број*. Понатаму, се разгледуваат уште неколку примери при што се воведуваат поимите *цел дел* и *децимален дел* на децимален број и на учениците им се соопштува табелата за запишување на децималните броеви. Природно, овие разгледувања треба да завршат со запишување на децимален број во вид на децимална дропка и основните својства на децималните броеви кои се однесуваат на допишувањето на нули од десната страна и бришењето на нулите на десната страна по последната ненулта цифра, како и на споредувањето на децималните броеви.

б) При усвојувањето на операцијата собирање на децимални броеви пожелно е, преку пример, прво да покажеме како два децимални броја може да се соберат со запишување на децималните броеви во вид на десетични дропки, а потоа на истиот пример да покажеме дека тоа може да се направи со користење на табелата за месни вредности. На пример, при собирањето на децималните броеви $2,62$ и $1,4$ прво имаме

$$2,62+1,4=\frac{262}{100}+\frac{14}{10}=\frac{262+14\cdot 10}{100}=\frac{402}{100}=4,02$$

а потоа

$$\begin{array}{r} 2,62 \\ +\,1,4 \\ \hline 4,02 \end{array},$$

после што може да изведеме заклучок дека за да собереме два децимални броја доволно е броевите да ги запишеме еден под друг, при што децималната запирка на првиот собирок е во иста колона со децималната запирка на вториот собирок, и потоа собирањето го реализираме како и во множеството природни броеви водејќи сметка децималната запирка на збирот да е запишана во иста колона како и децималните запирки на собирците. Аналогно постапуваме и при усвојувањето на операцијата одземање на децимални броеви.

в) Усвојувањето на операцијата множење на децимални броеви го започнуваме со множење на децимален со природен број. Притоа, прво ќе покажеме како броевите можат да се помножат запишувајќи го децималниот број како десетична дропка. На пример, при множењето на броевите $2,62$ и 7 имаме

$$2,62\cdot 7=\frac{262}{100}\cdot 7=\frac{262\cdot 7}{100}=\frac{1834}{100}=18,34.$$

Понатаму, ако ги помножиме дадените броеви како да се природни броеви добиваме $262\cdot 7=1834$. Сега, ако од добиениот производ одделиме толку децимали колку што има децималниот број го добиваме производот $18,34$ на дадените броеви. Разгледуваме уште еден до два примери со кои се уверуваме дека според двете постапки добиваме ист резултат и го формулираме правилото за множење децимален и природен број:

> *Децимален број со природен број множиме како што множиме два природни броја, а потоа во добиениот производ одделуваме толку децимали, колку што има во децималниот број.*

Сега, земаме два децимални броја $2,62$ и $1,4$ и нивниот производ го наоѓаме запишувајќи ги како десетични дропки:

$$2,62\cdot 1,4=\frac{262}{100}\cdot\frac{14}{10}=\frac{262\cdot 14}{100\cdot 10}=\frac{3668}{1000}=3,668,$$

а потоа ги множиме броевите 262 и 14 и во добиениот производ одделуваме три децимални места, со што добиваме $3,668$. Разгледуваме уште еден до два примери со кои се уверуваме дека според двете постапки добиваме ист резултат и го формулираме правилото за множење децимални броеви:

Децимални броеви множиме како да се природни броеви, не водејќи сметка за децималната запирка, а потоа во добиениот резултат одделуваме толку децимали, колку што заедно имаат двата множители.

Да напоменеме, дека од практични причини во овој дел добро е да се обрне внимание на множењето на децимален број со декадна единица.

г) Да ја разгледаме дропката

$$\frac{p}{q},\ q = 2^k 5^m$$

каде k и m се природни броеви. Можни се три случаи:

- Ако $k = m$, тогаш дадената дропка е десетична, па затоа истата може да се запише како децимален број со конечно децимални места.
- Понатаму, ако $k > m$, тогаш дадената дропка ја проширувате со 5^{k-m} и добиваме

$$\frac{p}{q} = \frac{5^{k-m} p}{2^k 5^k} = \frac{5^{k-m} p}{10^k}$$

што значи дека $\frac{p}{q}$ повторно може да се запише како децимален број со конечно децимални места.

- Аналогно се покажува дека и во случај кога $k < m$ дропката $\frac{p}{q}$ може да се запише како децимален број со конечно децимални места.

Јасно, ако дропката $\frac{p}{q}$ може да се запише како децимален број со конечно децимални места тогаш децималниот број има вид $a_1...a_k, b_1...b_n$, односно

$$\frac{p}{q} = a_1...a_k, b_1...b_n = \frac{a_1...a_k b_1...b_n}{10^n}.$$

Според тоа, ако дропката може да се запише како децимален број со конечно децимални места, тогаш $q = 2^k 5^m$ каде k и m се природни броеви.

д) Нека именителот на нескратливата дропка $\frac{p}{q}$ содржи барем еден прост множител различен од 2 и 5. Од претходно изнесеното заклучуваме дека дропката $\frac{p}{q}$ не може да се запише како децимален број со конечно децимални места. Понатаму, на конкретен пример ја објаснуваме постапката за запишување на $\frac{p}{q}$ како децимален број. На пример,

$$\begin{aligned}
\frac{16}{11} &= 1+\frac{5}{11} = 1+\frac{1}{10}\cdot\frac{50}{11} \\
&= 1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{11} \\
&= 1{,}4+\frac{1}{100}\cdot\frac{60}{11} \\
&= 1{,}4+\frac{5}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{5}{11} \\
&= 1{,}45+\frac{1}{100}[\frac{4}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{11}] \\
&= 1{,}45+\frac{4}{1000}+\frac{1}{1000}\cdot\frac{6}{11} \\
&= 1{,}454+\frac{1}{1000}[\frac{5}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{11}] \\
&= 1{,}454+\frac{5}{10000}+\frac{1}{10000}\cdot\frac{5}{11} \\
&= 1{,}4545+\frac{1}{10000}\cdot\frac{5}{11} = \ldots
\end{aligned}$$

Потоа, се дава забелешка дека во случајот дропките $\frac{5}{11}$ и $\frac{6}{11}$ наизменично се повторуваат, па затоа во децималниот запис на дропката $\frac{16}{11}$ групата цифри 45, која ја нарекуваме периода бесконечно ќе се повторува. Следно што треба да се направи е да се даде едноставниот алгоритам за запишување на дропката $\frac{16}{11}$ како децимален број, а тоа е:

$$\begin{array}{l}
16:11=1{,}454 \\
\underline{11} \\
\ \ 50 \\
\ \ \underline{44} \\
\ \ \ \ 60 \\
\ \ \ \ \underline{55} \\
\ \ \ \ \ \ 50 \\
\ \ \ \ \ \ \underline{44} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 6
\end{array}$$

со забелешка дека заради периодично повторување на остатоците 5 и 6 во децималниот запис периодично ќе се повторува групата цифри 45, т.е. двата алгоритми даваат ист резултат. Така се доаѓа до поимот периодичен децимален број. Понатаму, на учениците им се се соопштува дека секоја дропка $\frac{p}{q}$ од наведениот вид може да се запише како периодичен децимален број. Ова следува следува од фактот дека при делење со бројот q можни остатоци се $1,2,...,q-1$, а во првите q делења после децималната запирка имаме q остатоци, па според принципот на Дирихле мора да има два еднакви остатоци, со што всушност се добива периодата во *децималниот запис на дропката* $\frac{p}{q}$. Притоа, корисно е да се разгледаат примери на дропки во чиј периодичен децимален запис периодата содржи повеќе од три цифри, на пример $\frac{2}{7}, \frac{23}{101}$ и слично. Во натамошните разгледувања користејќи ја формулата

$$\overline{a_1...a_n,b_1...b_m p_1...p_k(p_1...p_k)} = \frac{\overline{a_1...a_n b_1...b_m}}{10^m} + \frac{1}{10^m}\cdot\frac{\overline{p_1...p_k}}{10^k-1} \qquad (1)$$

и погодно одбрани примери учениците треба да осознаат дека секој периодичен децимален број може да се запише како обична дропка. Понатаму, усвојувањето на оваа формула ќе овозможи учениците да согледаат дека броевите

$$\overline{a_1...a_n,b_1...b_{m-1}b_m 9(9)} = \overline{a_1...a_n,b_1...b_{m-1}c} \qquad (2)$$

каде

$$b_m < 9 \text{ и } c = b_m + 1,$$

на пример, децималните броеви $2,45$ и $2,449(9)$ се еднакви. Имено, од (1) следува дека

$$2,449(9) = \frac{244}{10^2} + \frac{1}{10^2}\cdot\frac{9}{10-1} = \frac{244}{10^2} + \frac{1}{10^2} = \frac{245}{10^2} = 2,45.$$

Според тоа, усвојувањето на формулата (1) допринесува учениците да ги збогатат своите структурни знаења за множеството рационални броеви, но како што понатаму ќе видиме претворањето на бесконечен периодичен децимален број во обична дропка е од суштинско значење за усвојувањето на поимот ирационален број.

ѓ) Откако ќе се усвојат периодичните децимални броеви природно е да се постави прашањето дали можеме да собереме два такви броја, без да ги претвораме во обични дропки. На учениците им објаснуваме дека тоа не е можно, па затоа вршиме заокружување на децималните броеви со всушност добиваме приближна вредност на дадениот број. Понатаму, ја објаснуваме постапката за заокружување на децималните броеви и реализираме неколку примери со кои ќе се види дека операциите собирање, одземање и множење над овие броеви ги реализираме со помош на нивните приближни вредности. Во следниот чекор, користејќи го индуктивниот метод, ја воведуваме операцијата делење на децимални броеви. Прво разгледуваме делење на децимален со природен број, на пример земаме децимален и природен број и нивниот количник го наоѓаме запишувајќи го децималниот број како десетична дропка

$$6{,}816:32=\frac{6816}{1000}:32=\frac{6816:32}{1000}=\frac{213}{1000}=0{,}213$$

а потоа ги делиме броевите 6816 и 32 и во добиениот количник одделуваме три децимални места со што повторно добиваме $0{,}213$. Откако ќе разгледаме уште еден до два примери го формулираме правилото за делење на децимален со природен број. Во следната фаза разгледуваме делење на два децимални броја, при што учениците прво сознателно да усвојат дека ако децималната запирка во деленикот и делителот во десно се помести за ист број децимални места, тогаш количникот не се менува. Тоа може да се постигне со разгледување на примери од видот:

$$\begin{aligned}3{,}72:0{,}6&=\frac{372}{100}:\frac{6}{10}=\frac{372}{100}\cdot\frac{10}{6}\\&=\frac{372}{10}\cdot\frac{1}{6}=\frac{372}{10}:6=37{,}2:6.\end{aligned}$$

Потоа, го формулираме правилото:

Децимален или природен број делиме со децимален број така што:

1) *во деленикот и делителот ја поместуваме децималната запирка на десно за онолку места, колку што децимали има делителот и*
2) *потоа вршиме делење со природен број.*

Конечно, за да сознателно се усвои операцијата делење на децимални броеви разгледуваме уште неколку примери, во кои е пожелно да има и пример во кој резултатот од делењето е периодичен децимален број. Јасно, и за операцијата делење на децимални броеви задолжително појаснуваме дека делењето на периодичните децимални броеви го реализираме со помош на нивните приближни вредности.

3.4. ЦЕЛИ И РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Со целите и рационалните броеви се модифицираат величини, кои се карактеризираат со големина и насока. На овие две карактеристики на величините соодветствуваат две компоненти на целиот и рационалниот број: апсолутна вредност и знак. Постојат повеќе причини зошто сите ученици не се во состојба претходно изнесеното сознателно да го усвојат, од кои овде ќе наведеме две:

1) Целите и рационалните броеви не произлегуваат од проблемска ситуација која е реална за учениците, туку проблемската ситуација најчесто е наметната за повеќето ученици.

2) При усвојувањето на целите и рационалните броеви не се посветува доволно внимание на усвојување на двете компоненти на овие броеви, при што најчесто многу рано се применува договорот дека знакот “+” пред позитивните рационални броеви се испушта, наместо пред позитивните броеви подолго време да се пишува знакот “+”.

За да се подобри сознателното усвојување на целите и рационалните броеви треба:

i) Воведувањето на целите броеви да се мотивира со наведување на практични примери од секојдневниот живот (усвојување на поимот насока, мерење температура, мерење водостој на реки и езера, мерење на висина на планина и длабочина на море итн.).

ii) Ва учениците да им се презентира шема од видот

$$\begin{array}{ccc} \text{рационален (цел) број} & \leftarrow & \text{цел број} \\ \uparrow & & \\ \text{апсолутна вредност} & & \end{array}$$

чија смисла е, дека секој рационален (цел) број се карактеризира со знак и апсолутна вредност.

iii) Секое правило, со чија примена како резултат се добива цел (рационален) број, треба да се искажува со два дела, при што едниот дел треба да се однесува на делот од правилото за добивање на знакот, а другиот на делот од правилото за добивање на апсолутната вредност на резултатот. Ако во учебникот правилото е искажано со сложена реченица, тогаш учителот треба да зададе неколку вежби со кои учениците сознателно ќе го усвојат правилото кое се однесува на знакот и правилото кое се однесува на апсолутната вредност.

Повеќето учебници, во делот на целите и рационалните броеви се на задоволително методско рамниште, па затоа во нашите разгледувања накратко ќе се осврнеме на два важни моменти и тоа:

- усвојувањето на поимот апсолутна вредност, и
- усвојувањето на операциите со рационалните броеви.

а) Непосредно пред воведувањето на поимот апсолутна вредност на цел (рационален) број треба да се усвои поимот *заемноспротивни броеви*. Кај целите броеви пожелно е да се разгледаат примери од видот

$$-(+1) = -1,\ -(-1) = +1,\ -(-4) = +4,\ -(+4) = -4 \text{ итн.}$$

кои задолжително треба да бидат прикажани на бројна оска. При претставувањето на целите броеви на бројната оска пожелно е учениците да сфатат дека само на означените точки им соодвествуваат цели броеви, со што ќе се оневозможи учениците нејавно да формираат претстава за непрекинатост на множеството цели броеви. Се разбира, последното треба сознателно да се усвои и за рационалните броеви, но тоа во случајот практично е невозможно. Имено, множеството рационални броеви е густо, па затоа подобро е при неговото усвојување да не се навлегува во прашањето за неговата непрекинатост, туку тоа да се остави да се разјасни при воведувањето на реалните броеви.

Значењето на поимот апсолутна вредност на цел (рационален) број, а покасно и на реален број, е добро познато и затоа воведувањето на овој поим треба добро методски да се осмисли. Во суштина при дефинирањето на модул на цел (рационален) број ние всушност со зборови дефинираме функција. Меѓутоа, најчесто при воведувањето на поимот модул на цел (рационален) број поимот функција не е воведен и затоа истиот не можеме да го користиме, туку треба да се обидеме да ја искористиме интуитивната претстава за придружување (соодветствие) на елементи на множества.

Најдобро е при воведувањето на поимот апсолутна вредност на цел број да започнеме со илустрација за начинот на придружување (соодветствието) на неколку броеви, како на пример: 3 на -3, 2 на -2, 1 на -1, 0 на 0, 1 на 1, 2 на 2 итн. Потоа се насочуваат учениците да се обидат со свои зборови да го искажат илустрираното соодветствие, при што треба да се дојде до исказот:

На секој позитивен број и на нулата му соодветствува истиот број, а додека на секој негативен број му соодветствува спротивниот број.

Понатаму, учителот соопштува, дека опишаното соодветствие е поврзано со поимот апсолутна вредност на цел (рационален) број, за кој е воведен посебен симбол. На крајот, пожелно е да се дадат двата записи за апсолутна вредност:

$$\begin{array}{l} \text{ако } a \geq 0, \text{ тогаш } |a| = a \\ \text{ако } a < 0, \text{ тогаш } |a| = -a \end{array} \quad \text{и}$$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geq 0 \\ -a, & \text{ако } a < 0 \end{cases}$$

Ваквиот метод на воведување на поимот апсолутна вредност овозможува сознателно да се усвои основното својство за ненегативност на апсолутната вредност на еден број. За што подобро усвојување на овој важен поим пожелно е учениците да осознаат дека апсолутната вредност на еден цел (рационален) број a всушност е еднаква на растојанието од координатниот почеток до точката M на координатната оска која соодвествува на бројот a. Понатаму, пред да преминеме на усвојување на споредувањето на целите (рационалните) броеви корисно е да се решат неколку равенки, како на пример:

$$|x|=3,\ |x|-1=\frac{1}{2} \text{ и } |x|+1=0.$$

Конечно, по усвојувањето на поимот апсолутна вредност на цел (рационален) број го усвојуваме споредувањето на целите (рационалните) броеви, при што во овие множества корисно е да се решат неколку елементарни неравенки, како на пример:

$$|x|\leq 4,\ |x|<2,\ |x|>3 \text{ и } |x|\geq 5.$$

б) Усвојувањето на операциите во множеството цели (рационални) броеви е пропратено со низа потешкотии, за кои постојат повеќе причини меѓу кои најважни се:

- Учениците немаат целосни сознанија за мерењето на негативни температури, за заемите, за читање на насока на движење итн., што значи дека не ја гледаат практичната вредност на изучувањето на множеството цели (рационални) броеви и операциите во истото.
- Правилата за операциите опфаќаат повеќе подслучаи, па затоа тие се гломазни. При воведувањето на самите операции, бројните подслучаи не се осмислуваат од учениците, па затоа учениците немаат чувство дека на почетокот на воведувањето на операцијата таа не е целосно осмислена или пак дека сме завршиле со воведувањето на операцијата.
- Дефинирањето на операциите е неминовно поврзано со поимот апсолутна вредност кој сам за себе е тежок и апстрактен, што ја зголемува апстрактноста на операциите во овие множества.

Сознателното усвојување на негативните броеви и на операциите со овие броеви е можно само ако истото е добро поткрепено со реални настани и поими како што се: приход и расход при реализирање на одредена активност сврзана со финансиски средства, мерење на водостој на реки и езера кои се наоѓаат во блиската околина, мерење на температури итн. Најчесто учебниците содржат вакви примери, па затоа е неопходно истите добро да се обработат на часовите сè со цел да се подобри сетилната основа за сознателно усвојување на поимот цел (рационален) број и операциите со целите (рационалните) броеви. Меѓутоа, ако учебниците не создаваат претпоставки за подобрување на сетилната основа за величините кои се моделираат со негативни броеви, слободно можеме да кажеме дека сознателното усвојување на целите (рационалните) броеви е практично невозможно.

Втората и третата причина за пречките во сознателното усвојување на целите (рационалните) броеви може лесно да се елиминира. Имено, доволно е пред усвојувањето на секоја операција да споменеме дека целиот (рационалниот) број може да биде: позитивен, негативен и еднаков на нула и да се даде таблица за случаите кои треба да ги разгледаме. Понатаму, при секоја операција редоследот на разгледувањето на случаите може да биде различен, но на крајот на лекцијата, во која се воведува определена операција, треба да се вратиме на почетната таблица и да го искажеме правилото во секој од случаите, за да потоа го искажеме во скратена форма.

в) На крајот од овој дел да споменеме дека усвојувањето на рационалните броеви задолжително треба да заврши со усвојување на поимот степен на рационален број. Притоа прво се усвојува степен со степенов показател природен број и неговите својства, а потоа посебно внимание обраќа на квадрат на рационален број и квадратен корен од рационален број. Ваквото стандардизирање најчесто е поврзано со воведувањето на поимот ирационален број, т.е. докажувањето дека бројот $\sqrt{2}$ не е рационален број. Меѓутоа, во следните разгледувања ќе покажеме дека воведувањето на ирационалните броеви може да се направи и на начин кој овозможува сознателно усвојување на овој важен поим. Секако, ова не значи дека поимот за степен не треба да се усвои, туку напротив неговото усвојување е задолжително и притоа треба да се има предвид дека учениците треба да се стекнат со одлични операциони и елементарни структурни знаења за степените на рационалните броеви.

3.5. РЕАЛНИ БРОЕВИ

Во универзитетските програми курсевите по Елементарна математика најчесто се во завршните години, кога студентите имаат стекнато солидни знаења, за да можат да ги сватат фундаменталните прашања кои се разгледуваат во овие курсеви. Едно такво прашање е прашањето за ирационален број. Меѓутоа, не е ништо ново ако кажеме дека при реализирањето на темата “Развој на поимот за број” најтешкиот и најсуптилниот момент е воведувањето на поимот ирационален број. Меѓу причините за тешкотиите кои се јавуваат се и следниве:

а) Учениците ги изучуваат бројните множества и операциите во овие множества во подолг временски период, при што акцент се става на операционите знаења, а не на својствата кои се поврзани со структурните знаења.

б) Неправилно формираната претстава за претставувањето на броевите врз бројната оска. Поточно, цртањето на непрекината бројна полуоска, а потоа и бројна оска и претставување прво на природните, а потоа на целите и рационалните броеви нејавно формира претстава за непрекинатост на бројните множества.

Претходно изнесеното укажува дека задоволително усвојување на идејата за ирационален број е можно само ако се направат суштествени корекции во претставите на учениците, поврзани со различните аспекти на бројните множества: да се потенцира дискретниот карактер на множествата природни и цели броеви, учениците да се убедат во потребата за проширување на множеството рационални броеви итн.

Вековната наставна практика довела до една стандардна методска постапка за овој проблем, која пред сè се должи на историскиот развој на поимот број. Во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на оваа постапка и ќе се обидеме истата да ја анализираме. За таа цел прво постапката детално ќе ја опишеме.

I чекор. Да разгледаме рамнокрак правоаголен триаголник со на катета $a=1cm$ и хипотенуза x. Од Питагоровата теорема следува

$$x^2=1^2+1^2=2\,. \tag{3}$$

Според тоа, хипотенузата на триаголникот има мерен број чиј квадрат е еднаков на 2. Бидејќи до овој момент се изучени рационалните броеви, природно е бројот x да го запишеме како нескратлива обична дропка, т.е. $x=\frac{p}{q},\ \ p,q\in\mathbf{N}$ и $\mathrm{NZD}(p,q)=1$. Понатаму, поттикнувајќи ја љубопитноста на учениците се обидуваме да ги најдеме броевите p и q. За таа цел во (3) заменуваме $x=\frac{p}{q}$ и добиваме $\frac{p^2}{q^2}=2$ односно $p^2=2q^2$. Сега, користејќи ја теоремата:

Нека $r,n\in\mathbf{N}$ и r е прост број. Ако $r\,|\,n^2$, тогаш $r\,|\,n$.

заклучуваме дека $2\,|\,p$ т.е. $p=2k,\,k\in\mathbf{N}$. Заменуваме во последното равенство и после средувањето на изразот добиваме $q^2=2k^2$. Сега од наведената теорема следува дека $2\,|\,q$, па затоа $\mathrm{NZD}(p,q)\geq 2$. Последното противречи на претпоставката дека $\mathrm{NZD}(p,q)=1$ и од добиената противречност следува дека мерниот број на хипотенузата на нашиот триаголник не е рационален број.

II чекор. За бројот x се бараат неколку приближни вредности и тоа се прави со помош на децимални броеви, т.е. се испишува низата неравенства

$$1 < x < 2$$
$$1,4 < x < 1,5$$
$$1,41 < x < 1,42$$
$$1,414 < x < 1,415$$

кои се изведуваат од неравенствата

$$1^2 < x^2 = 2 < 2^2$$
$$1,4^2 < x^2 = 2 < 1,5^2$$
$$1,41^2 < x^2 = 2 < 1,42^2$$
$$1,414^2 < x^2 = 2 < 1,415^2$$

Понатаму, се “заклучува” дека бројот x е бесконечен непериодичен децимален број, се дава дефиницијата:

> *Броевите кои ги запишуваме како бесконечни непериодични децимални броеви ги нарекуваме ирационални броеви.*

и се задава множеството реални броеви како унија на множествата рационални и ирационални броеви.

На прв поглед на претходно изнесената постапка не може да и се најде никаква методска забелешка. Меѓутоа тоа е само на прв поглед, што може да се види од следното:

- до поимот ирационален број се доаѓа дедуктивно со помош на индиректен доказ, што од методска гледна точка е неприфатливо за наставата во основното образование,
- од изложеното не може да се заклучи дека “бројот” x е бесконечен непериодичен децимален број, и
- поимот бесконечен непериодичен децимален број не е воопшто разјаснет, за да може истиот да се користи за воведување на поимот ирационален број што само по себе е недозволиво, па затоа за суштината на поимот ирационален број не може да се стекне ниту интуитивна претстава.

Претходните констатации сами за себе не значат ништо, но истите се доволен повод за да се побара друг методски пристап за воведување на ирационалните броеви. Во следните разгледувања ќе разработиме алтернативен пристап за воведување на поимот ирационален број. Појдовна основа за нашите натамошни разгледувања е дека при изучувањето на обичните дропки е покажана еквиваленцијата меѓу обичните дропки и конечните и бесконечните периодични рационални броеви. Јасно, притоа имаме предвид дека важи (2).

I.1 чекор. Го разгледуваме бесконечниот периодичен децимален број $0,3(3)$ и поаѓајќи од него ги конструираме, на пример, децимални броеви

0,3131131113...0,33131131113.... 0,333131131113...
0,3232232223...0,33232232223.... 0,333232232223...
0,3434434443...0,33434434443... 0,333434434443...

кои очигледно се бесконечни непериодични децимални броеви, во што учениците лесно се уверуваат. Притоа може да се напомене дека со претходно опишаната постапка од секој бесконечен периодичен децимал број може да се конструираат бесконечно многу бесконечни непериодични децимални броеви. Потоа учениците се потсетуваат на еквивалентноста на множеството рационални броеви и множеството конечни или бесконечни периодични децимални броеви и природно заклучуваат дека претходно конструираните бесконечни непериодични децимални броеви не се рационални. Со самото тоа, станува логично проширувањето на множеството рационални броеви и е јасна потребата од воведување нови броеви, во случајот ирационалните броеви. Потоа, се дава дефиницијата:

Бесконечниот непериодичен децимален број го нарекуваме ирационален број.

и се задава множеството реални броеви како унија на множествата рационални и ирационални броеви.

II.1 чекор. Прво илустрираме како на секоја точка од бројната оска може да и се придружи децимален број и обратно, дека на секој децимален број му соодвествува една и само една точка од бројната оска. Понатаму, на пример, користејќи ја Питагоровата теорема конструираме отсечки со должина $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ и истите ги нанесуваме на бројната оска, од што заклучуваме дека броевите $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ се реални броеви. Притоа забележуваме дека може да се докаже дека овие броеви се ирационални, т.е. дека истите имаат бесконечни непериодични децимални записи, со што практично ја илустрираме потребата од проширувањето на множеството рационални броеви, нешто што е неопходно повторно да го илустрираме при усвојувањето на формулите за должина на кружница и плоштина на круг. На крајот можеме да напоменеме дека за секој природен број n, кој не е полн квадрат, бројот $\sqrt{n}$ е ирационален.

Забелешка. Како при воведувањето на поимот реален број, така и при воведувањето на секоја релација и операција во множеството реални броеви пожелно е да се повторува дека под зборовите даден е реален број, се подразбира дека е даден конечен или бесконечен децимален број (т.е. правилото за запишување произволно многу децимални цифри од дадениот број) и дека кога се бара реален број всушност се бара споменатото правило.

При проучување на рационалните броеви учениците усвојуваат дека збир, разлика, производ и количник на рационални броеви е рационален број. Меѓутоа, скоро во сите учебници на прашањето за затвореноста на операциите собирање, одземање, множење и делење во множеството ирационални броеви не се обрнува внимание. Ваквата практика не оди во прилог на усвојувањето на елементарните структурни знаења за множеството ирационални броеви. Затоа, пожелно е при усвојување на операциите да се наведат примери од видот

$$\sqrt{2}-\sqrt{2}=0, -\sqrt{5}+\sqrt{5}=0, -2\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=-14 \text{ и } -3\sqrt{3}:2\sqrt{3}=-\tfrac{3}{2}.$$

со што учениците сознателно ќе усвојат дека множеството ирационални броеви не е затворено во однос на основните операции.

Коментар. Предложениот начин за воведување на поимот ирационален број, а со самото тоа и на поимот реален број има низа предности од кои ќе ги споменеме:

- поимот ирационален број се воведува индуктивно, по конструктивен пат,
- одбегнато е дедуктивното воведување на поимот ирационален број и индиректниот доказ за егзистенцијата на ирационалните броеви,
- при воведувањето на поимот ирационален број не се користат тврдења кои претходно не се детално усвоени и чија вистинитост е само интуитивно јасна, и
- учениците едноставно се оспособуваат да наоѓаат примери на бесконечните непериодични децимални броеви.

4. ДОПОЛНИТЕЛНИ СОДРЖИНИ КОИ МОЖАТ ДА СЕ УСВОЈУВААТ ВО РАМКИТЕ НА ТЕМАТА БРОЈНИ МНОЖЕСТВА

Во рамките на темата бројни множества природно е да се усвојат следниве содржини:

- проценти,
- размер, пропорција, продолжена пропорција,
- работа со податоци,
- елементарни комбинаторни принципи, и

- метод на инваријанти,

на кои подетално ќе се задржиме во натамошните разгледувања.

4.1. ПРОЦЕНТИ И ДИЈАГРАМИ

Современите наставни програми во основното образование предлагаат процентите да се изучуваат во две етапи, при што усвојувањето на поимот процент да се направи одма после усвојувањето на поимот десетична дропка, а потоа процентите да се изучат одделно во посебна тема.

Бидејќи поимот процент е непосредно сврзан со поимот десетична дропка, најдобро е истиот да се воведе одма после усвојувањето на поимот десетична дропка. Во најголем број случаи за овој поим ја имаме следнава дефиниција:

Една стотинка од едно цело се нарекува 1 ***процент*** *од целото и се означува со* 1%.

Практиката покажува дека после воведувањето на овој поим најдобро е да се премине на усвојување на содржини од темата работа со податоци. Притоа, откако учениците ќе се оспособат за прибирање и елементарна анализа на податоци, најдобро е да се премине на претставувањето на податоците со столбест и кружен дијаграм.

Усвојувањето на претставувањето на податоците со столбест дијаграм не претставува посебна потешкотија за учениците. Меѓутоа ова не е случај и со претставувањето на податоците со кружен дијаграм. Затоа, при усвојувањето на кружниот дијаграм пожелно е учениците сознателно да усвојат дека 1% од 360° е $3,6^\circ$, што значи дека 1% со кружен дијаграм се претставува како кружен исечок со централен агол од $3,6^\circ$, потоа да усвојат дека на $p\%$ во кружниот дијаграм им соодвествува агол од $p\cdot 3,6^\circ$, за да на крајот се премине на претставување на податоци со помош на кружен дијаграм. Притоа треба да се внимава примерите кои се разработуваат да бидат усогласени со знаењата кои учениците ги имаат од другите предмети. Имено, не смее во примерите кои се разработуваат да се користат поими кои учениците претходно не ги совладале. Така, на пример, во наставата по биологија до V одделение учениците не ги совладале поимите белковини, масти, јаглено хидрати и минерали, па затоа не смеат да се користат примери како што е следниот.

Пример 7. Составот на пржените компирчиња е 49% вода, 34% јагленохидрати, 12% масти, 4% белковини и 1% минерали.

a) Претстави го составот на кружен дијаграм.

b) Што најмногу содржат пржените компирчиња?

c) Колку пати има повеќе масти од белковини?

d) Дали во пржените компирчиња има многу минерали? ♦

Примерите кои треба да се користат мора да бидат достапни до учениците, т.е. тие да се однесуваат на содржините кои им се достапни од секојдневниот живот или ги имаат усвоено во другите наставни предмети. Ќе наведеме неколку примери од ваков вид.

Пример 8. При изработката на тестот по математика, 30-те ученици од V-а одделение го постигнале следниот успех: одличен 6 ученици, мн. добар 12 ученици, добар 6 ученици, доволен 3 ученици и недоволен 3 ученици. Претстави ги овие податоци на столбест и на кружен дијаграм. ♦

Пример 9. Анкетирани се 175 ученици за тоа, кој е нивниот најомилен спорт. По средувањето на податоците добиена е табелата десно.

Спортови	Број на ученици
фудбал	9
кошарка	24
пливање	48
скијање	59
ракомет	35
вкупно	175

- Претстави ги податоците прво на столбест, а потоа на кружен дијаграм.
- Кој спорт е најомилен меѓу учениците? ♦

Пред да се премине на решавање задачи со проценти потребно е да се усвои изразувањето на броевите во проценти и обратно. Потоа, низ погодно избрани примери се воведуваат поимите основна вредност и процентен износ, кои ги означуваме со K и i, за да на крајот се усвои формулата $i=\frac{Kp}{100}$. Најдобро е решавањето на задачи со проценти да се систематизира во три одделни целини и тоа:

- пресметување на процентниот износ,
- пресметување на основната вредност, и
- пресметување на процентот.

Паралелно со решавањето на задачите, пожелно е од формулата за процентен износ $i=\frac{Kp}{100}$ да се изведат формулите за пресметување на основната вредност $K=\frac{100i}{p}$ и процентот $p=\frac{100i}{K}$. Ќе наведеме примери кои се карактеристични за споменатите типови задачи со проценти и за кои сметам дека секој ученик треба да биде во можност да ги реши.

Пример 10. а) Едно трговско претпријатие набавило некоја стока за 250000 денари. Стоката ја продало со печалба од 8%. Колку вкупно печалба е остварена од продажбата на оваа стока?

б) Во една библиотека имало 3600 книги, од кои 45% се белетристика, 25% се историски, а останатите се од областа на природните науки. По колку книги имала библиотеката од секоја област? ♦

Пример 11. а) Сливите при сушење губат од својата тежина 45%. Колку зрели сливи треба да купиш, за да добиеш 20 *kg* суви сливи?

б) Една стока е продадена со 6% загуба за 28200 денари. Колку пари е купена стоката и колку изнесува загубата на неа? ♦

Пример 12. а) Еден пар чевли кој чинел 3500 денари, при намалување на цената се продадени за 2800 денари. Колку проценти изнесува намалувањето?

б) Едно градежно претпријатие се обврзало да ја заврши градбата на еден објект за 240 дена, а ја завршило за 270 дена. За колку проценти претпријатието доцнело во извршување на обврската? ♦

4.2. АРИТМЕТИЧКА И ГЕОМЕТРИСКА СРЕДИНА

Откако ќе се усвојат поимите за столбест и кружен дијаграм, во делот работа со податоци погодно е да се усвои поимот *аритметичка средина*. Често пати, во практиката, овој поим се усвојува при изучување на природните броеви и истиот се воведува со задачи како што е следнава.

Пример 13. Во текот на 5 дена една продавница се снабдувала со различно количество шеќер и тоа: 69 *kg*, 34 *kg*, 60 *kg*, 42 *kg* и 50 *kg*, соодветно. Ако секој ден се носело исто количество шеќер, колку *kg* шеќер би било тоа?

Решение. За да ја решиме задачата, ќе ги собереме количините на шеќер што се носеле секој ден и добиениот збир ќе го поделиме со вкупниот број денови, односно $(69+34+60+42+50):5=255:5=51kg$.♦

Најчесто, откако ќе се решат уште еден до два едноставни примери се дава следната дефинција:

***Аритметичка средина** на два или повеќе броеви е број кој се добива кога нивниот збир ќе се подели со бројот на собирците.*

Оправдување за ваквиот методски пристап се бара во потребата колку е можно порано учениците да се оспособуваат за работа со податоци и да се здобиваат со практични знаења од оваа област. Меѓутоа, притоа како да се губи од вид дека на овој начин кај учениците може нејавно се формира претстава дека аритметичката средина се бара само на природни броеви, што е сериозна методска грешка. Затоа, првичното усвојување на поимот аритметичка средина не смее да се случи пред да се усвојат децималните броеви, а одма после усвојувањето на рационалните, односно реалните броеви треба повторно да се навратиме на овој поим.

Усвојувањето на поимот *геометриска средина* е тесно поврзано со усвојувањето на Евклидовите теореми, т.е. со поимот непрекината пропорција. Токму затоа, прво треба да се усвојат поимите *размер, пропорција и продолжена пропорција*, како и својствата на пропорцијата и продолжената пропорција. По правило овие поими се усвојуваат при изучувањето на поимот функција и тоа најчесто се оправдува со потребата графички да се прикажат правопропорционалните и обратнопропорционалните величини. Меѓутоа, дури и површна анализа ни дава за право поимите размер, пропорција и продолжена пропорција да ги изучуваме заедно со изучувањето на множествата броеви, а потоа на истите да се навратиме при изучувањето на функциите. Методиката за усвојување на поимите размер, пропорција и продолжена пропорција е стандардна и може да се најде во секој учебник, па затоа на истата нема да се задржуваме. Понатаму, се воведува поимот непрекината пропорција, кој се дефинира на следниов начин.

Пропорцијата $a:b=b:c$ *во која два члена се еднакви ја нарекуваме* ***непрекината пропорција.***

Откако ќе го воведеме поимот непрекината пропорција можеме да го воведеме поимот геометриска средина, кој се дефинира на следниов начин.

Членот b *на непрекинатата пропорција* $a:b=b:c$ *го нарекуваме средна геометриска пропорционала или* ***геометриска средина*** *на членовите* a *и* c.

Понатаму, од пропорцијата $a:b=b:c$ ја изразуваме геометриската средина со нејзината стандардна формула $b=\sqrt{ac}$.

Сметам, дека ваквиот пристап на воведување на наведените поими при изучување на бројните множества има неколку предности, и тоа:

- при изучувањето на полиномите непосредно може да се изведе неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, и

- со помош на Питагоровата теорема непосредно може да се изведе Евклидовата теорема: висината спуштена кон хипотенузата во правоаголен триаголник е геометриска средина од отсечките на кои ја дели хипотенузата.

Пожелно е усвојувањето на претходно наведените поими да биде со примена на индуктивниот метод. Исто така, треба да се решат доволен број примери и практични задачи, со што учениците сознателно ќе ги усвојат овие поими, но и ќе се оспособат истите да ги користат во секојдневниот живот.

4.3. НАСТАН, ВЕРОЈАТНОСТ НА СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ

Поимите настан, случаен настан и веројатност на случајни настани се апстрактни дури и за учениците од средното образование. Затоа нивното воведување и усвојување на основните својства на веројатноста мора да биде добро осмислено и мотивирано. Последното особено се однесува на поимите случаен настан и веројатност на случаен настан, за чие воведување може да се искористи со следниот пристап.

- На учениците за домашна им се задава врз рамна површина доволно високо $N_1 = 100$ пати да фрлат монета чија оска на ротација не е нормална на површината, да го забележат бројот $N_1(\text{p})$ на паѓањата на “писмо”, да набљудуваат дали при паѓањето на “писмо” имаме некоја законитост (на пример, трипати едноподруго паѓа “писмо”, па двапати едноподруго паѓа “грб” и слично), да да го најдат количникот $\frac{N_1(\text{p})}{N_1}$. Потоа постапката да ја повторат со $N_2 = 90$ и $N_3 = 140$ фрлања на монетата.
- Да ги споредат количници $\frac{N_1(\text{p})}{N_1}$, $\frac{N_2(\text{p})}{N_2}$ и $\frac{N_3(\text{p})}{N_3}$ и да заклучат дека
$$\frac{N_1(\text{p})}{N_1} \approx \frac{N_2(\text{p})}{N_2} \approx \frac{N_3(\text{p})}{N_3}.$$
- Да одговорат дали при паѓањето на “писмо” имаме законитост од бараниот вид или не?
- Се дискутира домашната работа и се споредуваат добиените одговори од неколку ученици и се извлекува заклучок за *стабилноста на релативната честота*, т.е. дека

$$\frac{N_1(\text{p})}{N_1} \approx \frac{N_2(\text{p})}{N_2} \approx \frac{N_3(\text{p})}{N_3} \approx \frac{1}{2}$$

и дека случајно паѓа писмо.

- Потоа, три групи ученици реализираат по една серија фрлања на хомогена коцка за играње, на пример со $N_1 = 60$, $N_2 = 66$ и $N_3 = 72$ и се бележи бројот на паднатите резултати: 1, 2, 3, 4, 5 и 6, како и законитоста на добивањето на овие резултати, после што се заклучува дека $\frac{N_1(1)}{N_1} \approx \frac{N_2(1)}{N_2} \approx \frac{N_3(1)}{N_3} \approx \frac{1}{6}$ и дека случајно паѓа бројот 1.
- Се воведуваат поимите *случаен настан* A и *веројатност* случаен настан $P(A) = \frac{m}{n}$, како количник на бројот поволни случувања и бројот на сите случувања. Потоа, се дискутираат двата експерименти и се заклучува дека $0 \le P(A) \le 1$. Конечно, се воведуваат поимите *невозможен* и *сигурен настан*.
- При фрлањето коцка за играње се разгледуваат настаните A: паднал бројот 3 и настанот B: паднал бројот 5. Се разгледува унијата (збирот) на настаните A и B и се објаснува дека тоа е настанот $A+B$: паднал бројот 3 или 5 и во добиените податоци од фрлањето коцка се добива дека

$$N_1(A+B) = N_1(A) + N_1(B),$$

т.е. дека

$$P(A+B) = \frac{N_1(A+B)}{N_1} = \frac{N_1(A)+N_1(B)}{N_1} = \frac{N_1(A)}{N_1} + \frac{N_1(B)}{N_1} = P(A) + P(B).$$

- Решаваме неколку елементарни примери, се со цел потполно и сознателно усвојување на формулите

$$P(A) = \frac{m}{n} \text{ и } P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Коментар. Во некои наставни програми во основното образование во рамките на темата “Работа со податоци” е предвидено да се усвојат поимите примерок и популација. Меѓутоа, практиката покажува дека ваквиот обид помалку или повеќе е неуспешен и тоа барем од две причини:

- поимите популација и примерок се претешки за учениците од основното образование, и
- учениците не можат да го согледаат практичното значење на овие поими, со што се создава илузија дека нешто научиле, а всушност не научиле ништо.

4.4. ЕЛЕМЕНТАРНИ КОМБИНАТОРНИ ПРИНЦИПИ

Тенденциите за воведување на основните комбинаторни принципи во редовната настава во основното образование воглавном се последица на значењето на комбинаториката кое таа го има како во информатиката, така и при решавање на практични проблеми. Најдобро е изучувањето на елементарните комбинаторни принципи да започне со принципот на Дирихле, кој може да изучува одма после воведувањето на природните броеви, а потоа да се усвојат правилата на еднаков број, збир и производ.

Воведувањето на елементарните комбинаторни принципи во наставата во основното образование датира последниве десетина години, па затоа и не може да се каже дека постои стандардизирана методска разработка за нивно изучување. Од овие причини ќе се обидеме во следните разгледувања да дадеме методски пристап за проучување на елементарните комбинаторни принципи во основното образование.

1) ***Принципи на Дирихле.*** Практиката покажува дека најдобро е принципот на Дирихле да се воведе по индуктивен пат. Имено, учителот тоа може да го направи со методот на беседа, на следниов начин.

“За роденден Данило од другарите добил како подарок три папагали. Но, тој имал само два празни кафези. Кога ставил по еден папагал во секој кафез, му останал еден папагал. Го ставил во еден од кафезите и во тој кафез имало 2 папагали. Без да знае за намерата на другарите на Данило, татко му купил два папагали, кои Данило ги ставил по еден во секој кафез. Така, сега во еден кафез имало три, а во другиот два папагали.

Се разбира, Данило можел да ги распредели папагалите така што во едниот кафез ќе стави четири, а во другиот еден папагал, или во едниот сите пет, а во другиот ниту еден.

Како може Данило да распредели пет папагали во 4 или 3 кафези? Не е тешко да се види дека при ставање на 5 папагали во четири кафези, сигурно во еден кафез ќе има најмалку 2 папагали, а ако се распределат пет папагали во три кафези, тогаш можни се два случаи: или во еден кафез ќе има најмалку три папагали или во два кафези ќе има најмалку по два папагали.

Воопшто, при распределувањето на некои предмети, животни и слично во клетки (кафези, кутии, фиоки и слично) се забележува определена зависност, на која може да и се даде математичка формулација, на пример во следниот облик:

Нека $m>n$. Ако распределиме m предмети во n клетки, тогаш барем во една клетка ќе имаме најмалку два предмети.”

Понатаму, учителот им соопштува на учениците дека ова е наједноставниот облик на познатиот *принцип на Дирихле*, кој го носи името на познатиот германски математичар Дирихле, кој прв укажал на можноста на негова примена во доста сложени задачи. Во натамошните разгледувања усвојувањето на принципот на Дирихле треба да се направи со решавање на задачи од типот.

Пример 14. Според наставниот план во VI одделение неделно има 4 часа математика. Наставничката Лилјана, во работен ден, секоја седмица одржува 2 часа со математичката секција. Докажи, дека посетителите на секцијата во еден ден имаат барем 2 часа математика. ♦

Пример 15. Во едно училиште има 367 ученици. Докажи, дека има барем двајца ученици кои имаат роденден во ист ден? ♦

Во следните разгледувања учителот треба да обрне внимание, дека при примената на принципот на Дирихле најважно е правилно да избереме кои од дадените објекти ќе бидат клетки, а кои предмети што ќе ги распоредуваме и потоа може да ја зададе следната задача.

Пример 16. Докажи, дека меѓу 4 произволни цели броеви постојат 2 чија разлика е делива со 3. ♦

Понатаму, повторно со методот на беседа учителот може да го објасни општиот облик на принципот на Дирихле и тоа може да се направи на следниот начин:

"Ако внимателно го разгледаме распоредувањето на петте папагали на Данило во два кафези, ќе забележиме дека бројот на папагалите е поголем од удвоениот број на кафези. Овој и сличните примери го даваат *обопштениот принцип на Дирихле*, чија формулација е следната.

Ако ставиме повеќе од kn предмети во n клетки, тогаш во една од клетките ќе има најмалку $k+1$ предмети."

и ова обопштување да го илустрира со следните две задачи.

Пример 17. Во VII^1 одделение има 37 ученици. Докажи, дека барем 4 од нив се родени во ист месец. ♦

Пример 18. За опремување на компјутерската училница се набавени 630 дискети, кои се спакувани во 25 кутии. Докажи, дека има кутија која содржи повеќе од 25 дискети. ♦

Постои мислење дека принципот на Дирихле треба да се усвои и во таканаречениот геометриски облик. Меѓутоа, имајќи го предвид дека во овој случај истиот треба да се поврзе со геометриските знаења пожелно е тоа да не се прави со сите ученици, односно усвојувањето на принципот на Дирихле во геометриски облик да се остави за работа со учениците надарени за математика.

2) ***Правила на еднаков број, збир и производ.*** Како и при принципот на Дирихле и при воведувањето на правилата на еднаков број, збир и производ најдобро е да се користи индуктивниот метод. Притоа е неопходно воведувањето на овие правила добро да се мотивира, што може да се направи на пример на следниот начин.

"Во математиката често пати се сретнуваме со задачи во кои треба да се најде бројот на елементите на некое конечно множество, на пример: бројот на шестцифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на зададен број или бројот на поделби на неколку книги на учениците од некое одделение итн. Овие задачи ги нарекуваме задачи на пребројување, а делот од математиката кој се занимава со методите на решавање на задачите на пребројување (и не само со нив) се нарекува комбинаторика."

Во следниот чекор треба едноставно да се објасни основната задача на пребројување, што може да се направи на следниот начин.

"При определување на бројот на елементите на некое множество A, на неговите елементи се придружуваат природните броеви 1,2,3,4,.... Ако при тоа придружувањето се заврши со бројот n (види цртеж), тогаш велиме дека множеството A има n елементи.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Фактот дека множеството A има n елементи го означуваме со $|A|=n$. "

Понатаму, правилата на еднаков број, збир и производ може да се усвојат преку примери, за да на крајот се дадат формулациите на истите. За таа цел може да се разгледаат следниве примери.

Пример 19. На колку различни начини 7 исти моливи може да се поделат на двајца ученици, но така што секој од нив да добие барем по еден молив?

Решение. Можни поделби се $1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2$ и $6+1$, при што првиот собирок го означува бројот на моливите кои ги добива првиот ученик. Според тоа, постојат 6 различни поделби. ♦

Пример 20. На колку начини на тројца ученици може да им се поделат 8 исти моливи, но така што секој од нив да добие барем по еден молив?

Решение. Прв начин. На следниот цртеж е дадена поделба на 8 исти моливи на тројца ученици, така што првиот ученик да добие два, вториот четири и третиот два молива:

●●|●●●●|●●

Сите можни поделби се дадени во следната табела (бројот x го означува бројот на поделбите):

Првиот добива	**Вториот и третиот добиваат**	x
1 молив	1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1	6
2 молива	1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1	5
3 моливи	1+4, 2+3, 3+2, 4+1	4
4 моливи	1+3, 2+2, 3+1	3
5 моливи	1+2, 2+1	2
6 моливи	1+1	1
	Вкупно	**21**

Втор начин. Осумте моливи ќе ги наредиме во редица и во празнините меѓу моливите, кои ги има 7, треба да поставиме две “прегради” како на следниот цртеж.

$\bullet^1 \bullet^2 | \bullet^3 \bullet^4 \bullet^5 \bullet^6 | \bullet^7 \bullet$

Овие празнини ги означуваме со броевите 1,2,3,4,5,6 и 7. Поделбата на цртежот е определена со празнините 2 и 6, т.е. бројот 26. Сите поделби се дадени со броевите

12	13	14	15	16	17
23	24	25	26	27	
34	35	36	37		
45	46	47			
56	57				
67					.

Вакви двоцифрени броеви има 21, па оттука следува дека и бројот на поделбите на 8 исти моливи на тројца ученици, така што секој ученик добива барем по еден молив, е еднаков на 21. ♦

Пример 21. Меѓу градовите A и B има три директни пата, меѓу градовите B и C има два директни пата, а меѓу градовите C и D има два директни пата.

a) На колку начини може да се стигне од градот A до градот C?

b) На колку начини може да се стигне од градот A до градот D?

Решение. Нека патиштата меѓу градовите A и B ги означиме со 1,2 и 3, патиштата меѓу градовите B и C со 4 и 5, а патиштата меѓу градовите C и D со 6 и 7.

а) Сега едноставно можеме да ги запишеме сите патишта меѓу A и C:

14, 15, 24, 25, 34, 35.

Такви патишта има $6 = 3 \cdot 2$, т.е. бројот на патиштата меѓу A и C е еднаков на производот на бројот на патиштата меѓу A и B и бројот на патиштата меѓу B и C.

б) Сите патишта меѓу A и D се:

146	147	156	157
246	247	256	257
346	347	356	357

Такви патишта има $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$, т.е. бројот на патиштата меѓу A и D е еднаков на производот на бројот на патиштата меѓу A и B, B и C, C и D. ♦

Понатаму, врз основа на разгледаните примери треба да се формулираат трите основни принципи (правила) на комбинаториката кои се користат при определувањето на бројот на елементите на конечно множество. Се разбира, при формулирањето на разгледуваните правила треба да објасниме кое правило во кој пример е применето. Последното може да се направи на слениот начин.

“**Правило на еднаков број.** Ако меѓу елементите на множествата A и B може да се воспостави заемно еднозначно соодветствие, тогаш множествата A и B имаат еднаков број елементи, т.е. важи $|A| = |B|$, каде со $|A|$ е означен бројот на елементите на множеството A, т.е. δA.

Илустрацијата на ова правило е дадена на следниот цртеж:

$$A: \bullet a_1 \quad \bullet a_2 \quad \bullet a_3 \quad ... \quad \bullet a_n$$
$$B: \bullet b_1 \quad \bullet b_2 \quad \bullet b_3 \quad ... \quad \bullet b_n$$

Правилото на еднаков број го користиме кога сакаме да го определиме бројот на елементите на некое множество B, при што воспоставуваме обратно еднозначно пресликување на неговите елементи со елементите на некое множество A, чиј број на елементи ни е познат.”

Во овој дел учителот треба да објасни, дека и покрај тоа што формулацијата на ова правило е едноставна, а тврдењето е интуитивно јасно, сепак неговата примена не е едноставна и дека основна причина за тоа е што за успешно применување на ова правило треба да се препознаат елементите кои ги пребројуваме. Со други зборови, при решавањето на конкретен комбинаторен проблем на пребројување на елементите треба да се занемарат неважните својства и факти од формулацијата на задачата и на елементите да им се придружат апстрактни елементи кои лесно ги пребројуваме, како што е тоа направено во пример 18 и при вториот начин на решавање на задачата од пример 19.

"**Правило на збир.** Ако елементите на некое множество A може-ме да ги распоредиме на неколку множества $A_1, A_2, ..., A_n$ кои по парови се дисјунктни, тогаш бројот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на броевите на елементите на множествата $A_1, A_2, ..., A_n$, т.е. важи равенството $|A|=|A_1|+|A_2|+...+|A_n|$."

Понатаму, учителот треба да објасни дека ова правило го примени-вме во првиот начин при решавањето на пример 20, при што сите сите поделби на 8 моливи на три ученика го формираат множеството A. Тоа множество го разбивме на подмножества $A_1, A_2, ..., A_6$ при што подмно-жеството A_1 ги содржи оние поделби при кои првиот ученик добива еден молив, подмножеството A_2 ги содржи оние поделби при кои првиот ученик добива два молива итн.

"**Правило на производ.** Ако првата постапка можеме да ја напра-виме на m различни начини, а втората постапка на n различни начини, тогаш првата и втората постапка заедно можеме да ги направиме на mn различни начини."

Како и во претходните случаи на учениците треба да им се објасни, дека правилото на производ го применивме во пример 21 и дека аналогно може да се формулира правилото на производ за повеќе од две постапки, секоја од кои може да се направи на повеќе од еден начин.

На крајот од овој дел да забележиме дека при усвојување на принципот на Дирихле и правилата на еднаков број, збир и производ треба да се решат што е можно поголем број елементарни задачи кои се карактеристични за оваа материја.

4.5. МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТИ

Постојат повеќе причини за усвојувањето на методот на инваријанти во основното образование, меѓу кои се:

- можноста за примена на методот на инваријанти во решавање на голем број практични проблеми,

- улогата на методот во интеграцијата на наставата и
- негување на квалитетите на мислењето на учениците, што е и една од основните задачи на наставата по математика.

Имајќи го предвид значењето на овој метод, овде ќе дадеме подетален методски пристап за негово усвојување, кое, на пример, со надарените ученици за математика може да се направи на следниов начин.

Во математиката често се среќаваме со задачи од следниов вид:

Дадени се некој математички објект A *и дозволени трансформации на истиот. Се поставува прашањето дали со повеќекратна примена на дозволените трансформации дадениот објект* A *може да се претвори* (*трансформира*) *во некој друг однапред зададен објект* B.

Решавањето на задачите од овој вид се сведува на следниве два случаја:

- ако одговорот на поставеното прашање е позитивен, тогаш доволно е да се наведе било кој пример кој покажува како може со помош на допустливите трансформации од објектот A да се добие објектот B и
- ако одговорот на поставеното прашање е негативен, тогаш е потребно да се докаже дека при произволно реализирање на допустливите трансформации од објектот A никогаш нема да се добие објектот B.

Очигледно, во првиот случај треба да го докажеме постоењето на низа допустливи трансформации која ја обезбедува трансформацијата на објектот A во објектот B, што не секогаш е едноставна задача. Како да постапиме во вториот случај? Иако одговорот на ова прашање не е еднозначен, а уште помалку едноставен, сепак во многу случаи го користиме следниов метод:

- наоѓаме својство кое го има објектот A и кое не се менува кога на A ќе се примени која било од допустливите трансформации,
- докажуваме дека објектот B го нема наведеното својство, и
- заклучуваме дека при произволно реализирање на допустливите трансформации од објектот A никогаш нема да се добие објектот B.

Својството кое го има објектот A и кое не се менува кога на A ќе се примени допустлива трансформација го нарекуваме *инваријанта* на допустливата трансфорација, а претходно опишаниот метод го нарекуваме *метод на инваријанти*. Ќе разгледаме неколку задачи кои се решаваат користејќи го споменатиот метод.

Пример 22. Правоаголник е поделен (расечен) на четири помали правоаголници. Потоа, се зема определен број од новодобиените правоаголници и секој од нив е поделен на четири правоаголници итн. Дали може со повторување на наведената операција да се добијат 2006 правоаголници?

Решение. Во случајот не интересира вкупниот број правоаголници кој се добива со наведената трансформација, т.е. со избирање определен број правоаголици и делење на секој од нив на четири нови правоаголници. Забележуваме, дека со делењето на еден од избраните правоаголници на четири нови, вкупниот број правоаголници се зголемува за 3 (од еден правоаголник добиваме четири нови). Според тоа, ако во некој чекор имаме n правоаголници и ако избереме k правоалници секој од кои го делиме на 4 нови, тогаш новодобиениот број правоаголници е еднаков на $n+3k$. Понатаму, броевите n и $n+3k$ при делење со бројот 3 даваат исти остатоци и како на почетокот имаме еден правоаголник заклучуваме дека вкупниот број правоаголници кој се добива со наведената трансформација е од видот $1+3k$ и истиот има својство (инваријанта) да при делење со бројот 3 дава остаток 1. Од друга страна, $2006 = 2 + 3 \cdot 668$, што значи дека тргнувајќи од еден правоаголник со наведениот начин на расекување не може да се добијат 2006 правоаголници. ♦

Пример 23. На таблата се запишани броевите $0, 1, 2, 1, 2$ и 1. Дозволено е да се изберат кои било три броеви и секој од нив да се зголеми за 1. Дали може, со повторување на оваа операција, да се добијат шест еднакви броеви?

Решение. После секој чекор, независно од тоа кои три броеви се зголемени, збирот на сите запишани броеви се зголемува за 3, т.е. остатокот при делење со 3 на збирот на сите шест броеви е инваријанта на опишаната трансформација. Бидејќи на почетокот збирот на броевите е еднаков 7 и овој број не е делив со 3, во секој нареден чекор ќе се добие збир кој не е делив со 3. Меѓутоа, збирот на шест еднакви броеви е делив со 6, па затоа тој е делив и со 3, па затоа на опишаниот начин не е можно да се добијат шест еднакви броеви. ♦

Пример 24. На таблата е запишана низа од броевите еден и два. Дозволено е да се избришат кои било два броја и наместо нив да се запише бројот еден ако избришаните броеви се еднакви, а два ако избришаните броеви не се еднакви. Дали последниот неизбришан број е еден или два?

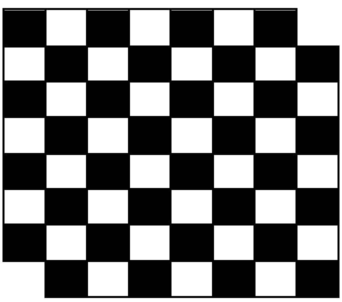
Решение. Во низата секој член кој е еднаков на бројот 2 ќе го замениме со бројот -1 и на новодобиената низа да ја примениме истата трансформација. Го разгледуваме производот на членовите на низата. Ако во дозволената операција избришеме два еднакви броја, 1 и 1 или -1 и

-1, тогаш го запишуваме бројот 1, а ако ги избришеме броеви 1 и -1, тогаш го запишуваме бројот -1. Според тоа, и во два случаја производот на членовите на низата останува непроменет, т.е. тој е инваријантен во однос на разгледуваната трансформација. Значи, во почетната задача, инваријанта е парен број на двојки, па затоа ако во почетната низа бројот на двојките е парен, тогаш последниот неизбришан број е 1, а во спротивно тоа е бројот 2. ♦

Пример 25. Вошебникот од Оз има градина со 101 каранфил. Се разбира градината е волшебна, па кога ќе се набере 1 одма израснуваат 6, кога ќе се наберат 13 одма израснуваат 8, кога ќе наберат 17 одма израснуваат 2 и кога ќе наберат 9 одма израснуваат 24 каранфили. Вештерот Гаргамел, знаел дека одеднаш може да се скинат само $1, 13, 17$ или 9 каранфили, и дека ако одеднаш скине друг број каранфили засекогаш ќе остане заробен во градината на Оз. Дали Гаргамел може да ги набере сите 101 каранфил?

Решение. После секое скинување на дозволениот број од $1, 13, 17$ или 9 каранфили и израснување на нови каранфили, бројот на каранфилите во градината на Оз се менува за $+5, -5, -15$ или $+15$. Последните броеви се деливи со 5, што значи бројот на каранфилите се менува за некој број кој е делив со бројот 5. Меѓутоа, бројот 101 не е делив со 5, па затоа во градината секогаш ќе има барем еден каранфил. ♦

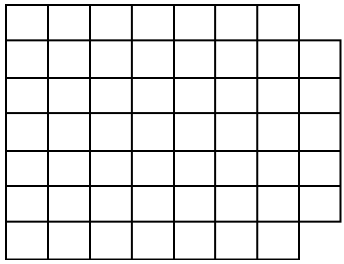
Откако ќе се решат неколку задачи од наведениот вид, потребно е на учениците да им се нагласи дека ова е само дел од можните примени на методот на инваријанти и да се наведат задачи за самостојна работа од истиот вид ([80]). Понатаму, при усвојување на наведениот метод, пожелно е да се илустрира неговата примена во решавањето на таканаречените проблеми на покривање, т.е. да се разгледаат примери од следниов вид.



Пример 26. Дали може шаховска табла од која се отстранети две дијагонални полиња да се покрие со 31 правоаголник составени од по два квадрати?

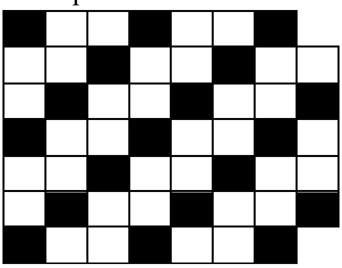
Решение. Две спротивни полиња на таблата се обоени со иста боја. На цртежот се отстранети две бели полиња. Значи, без тие две полиња имаме 32 црни и 30 бели полиња, т.е. разликата меѓу непокриените црни и бели полиња е $32-30=2$.

Понатаму, две соседни полиња на шаховската табла (полиња кои имаат заедничка страна) се обоени со различни бои, па затоа со ставањето на секој правоаголник на таблата се покрива по едно бело и едно црно поле, што значи дека разликата меѓу непокриените црни и бели полиња останува непроменета, т.е. таа е инваријантна во однос на ставањето на правоаголници на таблата. Конечно, при произволно распоредување на 30 правоаголници на таблата ќе останат две непокриени црни полиња кои не можат да се покријат со преостанатиот правоаголник. ♦

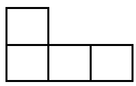


Пример 27. Докажи дека следнава фигура која е составена од 54 единечни квадрати (полиња), не може да се покрие со правоаголници составени од по 3 полиња.

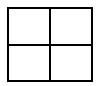
Решение. Таблата ќе ја обоиме на како на цртежот долу, при што на почетокот имаме 35 непокриени бели полиња, т.е. бројот на непокриените бели полиња е непарен. Понатаму меѓу секои 3 полиња на таблата кои можат да се покријат со правоаголник составен од 3 полиња имаме 2 бели полиња. Според тоа, со секое ставање на правоаголник со 3 полиња на таблата парноста на бројот на непокриените бели полиња не се менува, т.е. таа е инваријантна во однос на ставањето на правоаголници на таблата. Последното значи, дека после ставањето на претпоследниот правоаголник на таблата ќе останат едно бело и две црни полиња кои не можат да се покријат со последниот правоаголник. ♦



Пример 28. Докажи дека шаховска 8×8 табла не може да се покрие со 15 плочки од облик прикажан на цртеж 1 а) и една плочка од облик прикажан на цртеж 1 б).

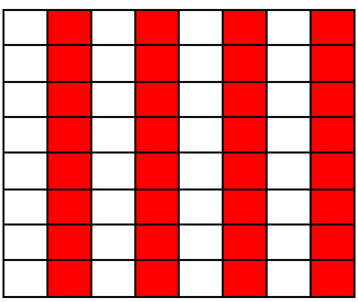


Црт. 1 а)



Црт. 1 б)

Решение. Таблата ќе ја обоиме како на цртеж 2. При вакво боење, ако произволно ја ставиме плочката од облик 1 б), тогаш таа покрива две бели и две црни полиња, што значи непокриени остануваат парен број бели и парен број црни полиња. Понатаму, секоја плочка од облик 1 а) покрива или три бели и едно црно поле или три црни и едно бело поле. Според тоа, со ставање на две плочки од облик 1 а) парноста на непокриените бели и црни полиња не се менува, т.е. непокриени остануваат парен број бели и парен број црни полиња. Конечно, ако ставиме 14 плочки од облик 1 а), т.е 7 парови плочки од облик 1 а), тогаш остануваат чети-



Цртеж 2

ри непокриени полиња кои можат да бидат: или сите бели или две бели и две црни или сите црни. Јасно, во ниту еден од овие случаи не е можно преостанатите полиња да се покријат со петнаесеттата плочка. ♦

Пример 29. Од шаховска 10×10 табла исечено е едно поле. Дали може преостанатиот дел од таблата да се покрие со 99 рамнокраки правоаголни триаголници со хипотенуза со должина 2, така што хипотенузите на триаголниците се поклопуваат со страните на полињата, а катетите на триаголниците се поклопуваат со дијагоналите на полињата?

Решение. Таблата ја обојуваме на вообичаен “шаховски” начин (направи цртеж). Бројот на црните и бројот на белите полиња се разликува за 1. Од друга страна, при дадените услови, црниот и белиот дел на таблата покриен со еден рамностран триаголник имаат иста плоштина, па затоа бараното покривање не е можно. ♦

Пример 30. Една 9×10 табла е покриена со 2×1 домина, а потоа домината се измешани. Докажи дека таблата не може повторно да се покрие со овие домина, така што секое домино кое во првото покривање било во хоризонтална положба во второто покривање е во вертикална положба и обратно.

Решение. Да претпоставиме дека таблата е поставена така што има 10 (хоризонтални) редици и 9 (вертикални) колони. Вертикалните домина од првата колона покриваат парен број полиња, па затоа и бројот на полињата покриени со хоризонталните домина е парен. Според тоа, хоризонталните домина покриваат парен број полиња од втората колона. Бидејќи и вертикалните домина од втората колона покриваат парен број полиња, добиваме дека остануваат парен број полиња кои се покриени од домина кои “преминуваат” и на третата колона. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека вкупниот број хоризонтални домина е парен. Но, вкупно имаме 45 домина, па затоа вкупниот број вертикални домина е непарен.

Од претходните разгледувања следува, дека при секое покривање парноста на вкупниот број хоризонтални домина и непарноста на вкупниот број вертикални домина се инваријанти, па затоа второто покривање во кое хоризонталните домина стануваат вертикални, а вертикалните хоризонтални не е можно. ♦

Откако ќе се решат неколку задачи од наведениот вид, потребно е да се наведат задачи за самостојна работа од истиот вид.

III ГЛАВА
АЛГЕБАРСКИТЕ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ ВО УЧИЛИШНИОТ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Изучувањето на агебарските рационалните изрази, како и на сите теми, вклучени во содржината на наставата по математика, има за цел да го озвозможи остварувањето на образовните, воспитните и практичните цели на наставата по математика.

Основни задачи при изучување на алгебарските рационални изрази се:

- учениците да го усвојат поимот алгебарски рационален израз и поимите, тврдењата и алгоритмите, кои се непосредно поврзани со овој поим,
- преку сознателното усвојување на пресметувањата и на идентичните трансформации да се развива логичкото мислење на учениците,
- преку пресметувањето на вредностите на алгебарските рационални изрази со променливи при различни вредности на променливите да се развива функционалното мислење на учениците,
- учениците да ги усвојат методите, пристапите и операциите, кои се неопходни за усвојување на структурните знаења за алгебарските рационални изрази и поимите поврзани со нив,
- кај учениците да се развиваат умеења за обработка на информации,
- учениците да ги усвојат основните интерпретации на поимот алгебарски рационален израз, задачите кои се сведуваат на алгебарски рационални изрази, некои од основните примени на алгебарските рационални изрази во математиката и другите наставни дисциплини, и
- учениците да се оспособат стекнатите математички знаења да се применуваат во практиката.

При изучување на алгебарските рационални изрази со учениците треба да се постигнат следниве цели:

- да се усвои буквената симболика, поврзана со алгебарските, аритметичките и геометриските објекти,
- да се разберат поимите алгебарски рационален израз и цел алгебарски израз,
- да се усвојат операциите со алгебарските рационални изрази и истите да се применуваат при идентичните трансформации на алгебарските рационални изрази, и
- да се усвои алгоритмот за пресметување на бројните вредности на алгебарските рационални изрази, при зададени вредности на променливите.

Успешното усвојување на операционите и структурните знаења за алгебарските рационални изрази е условено со знаења за:

- реален број, константа, променлива и допустлива вредност на променлива,
- броен израз и вредност на броен израз,
- операциите со рационални броеви и нивни својства,
- својствата на операциите собирање, одземање, множење и делење,
- степените (дефиниција, степенов показател и основа) и операциите со степени,
- равенките и нивното решавање,
- реална функција (линеарната функција), и
- плоштина на квадрат, правоаголник и други рамнински фигури.

Оваа тема по својата структура е една од посложените теми и истата опфаќа усвојување на повеќе поими и тврдења во врска со овие поими.

При реализирање на темата треба да се усвојат поимите: алгебарски рационален израз (цел и дробен), бројна вредност на алгебарски рационален израз, моном (нормален вид, коефициент на моном, степен на моном, слични и спротивни мономи), полином (нормален вид, степен на полином, коефициенти на полином), делител и содржател на полином, најголем заеднички делител и најмал заеднички содржател на два полиноми, дефинициона област на дробно рационален израз и еднакви алгебарски рационални изрази.

Покрај усвојувањето на наведените поими, во рамките на оваа тема треба да се усвојат: операциите со мономи и полиноми, формулите за скратено множење, разложувањето на полиноми на множители, наоѓањето на најголем заеднички делител и на најмал заеднички содржател на два полиноми, операциите со дробно рационални изрази.

1. МЕТОДСКИ БЕЛЕШКИ ЗА ИЗУЧУВАЊЕ НА АЛГЕБАРСКИТЕ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Апстрактноста на поимот алгебарски израз е доволна причина неговото воведување добро да се мотивира. За таа цел можеме да ги искористиме веќе усвоените формули $i=\frac{Kp}{100}$ и $s=vt$, за процентен износ и за пресметување на патот во зависност од брзината и времето кај рамномерното движење. Притоа треба да ги коментираме десните страни на овие формули и учениците да ги согледаат заедничките карактеристики на $\frac{Kp}{100}$ и vt.

Појдовна основа за воведувањето на поимот алгебарски рационален израз се поимите реален број и променлива и операциите собирање, одземање, множење и делење, кои се извршуваат со броевите и променливите. Притоа поимот алгебарски рационален израз се определува на следниов начин.

*Секој реален број или променлива е **алгебарски рационален израз** и ако A и B се алгебарски рационални изрази, тогаш $A+B$, $A-B$, AB и $A:B$ се алгебарски рационални изрази.*

Понатаму, откако ќе се наведат примери за алгебарски рационални изрази, во зависност од тоа, дали делителот содржи променлива или не, алгебарските рационални изрази се делат на *цели* и *дробно рационални изрази*, соодветно. Практиката покажува дека со воведувањето на дробните рационални изрази треба да се воведе поимот *дефинициона област* на дробен рационален израз. Најдобро е овој поим да се воведе со конкретно индуктивен метод, т.е. да се разгледа пример како што е следниов.

Пример 1. Да го разгледаме дробно рационалниот израз $\frac{2a}{a+2}$. За $a=1$ изразот ја прима вредноста $\frac{2\cdot1}{1+2}=\frac{2}{3}$, за $a=2$ вредноста $\frac{2\cdot2}{2+2}=1$, но за $a=-2$ именителот $a+2$ прима вредност $-2+2=0$, што значи дека изразот $\frac{2a}{a+2}$ нема смисла. Понатаму, ако $a \neq -2$, тогаш $a+2 \neq 0$ што значи за $a \neq -2$ изразот $\frac{2a}{a+2}$ има смисла и во случајот велиме дека дефинициоината област на изразот $\frac{2a}{a+2}$ е множеството од сите реални броеви различни од -2. Последното симболички можеме да го запишеме $D = \{a \mid a \neq -2\}$. ♦

Понатаму, откако ќе разгледаме уште еден до два примери можеме да ја дадеме следната дефинција.

> ***Дефинициона област*** *на алгебарски рационален израз со една променлива е множеството вредности на променливата, за кои изразот има смисол.*

Пред да преминеме на следните разгледувања треба да го воведеме поимот бројна вредност на алгебарски разционален израз и користејќи го овој поим да ја дадеме дефиницијата за еднаквост на алгебарски рационални изрази. Последното може да се направи како што е покажано во следнив пример.

Пример 2. а) Најдобро е поимот бројна вредност на алгебарски рационален израз да се усвои интуитивно. На пример, ако во изразот $a^2 - 2ab$ за променливите ставиме $a = 3$ и $b = 2$ го добиваме бројниот израз $3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2$ чија вредност е -3. Слично, ставајќи $a = 5$ и $b = 1$ го добиваме бројниот израз $5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1$ чија вредност е 15. Потоа, на учениците им се објаснува дека бројот -3 го нарекуваме бројна вредност на алгебарскиот рационален израз $a^2 - 2ab$ за вредности на променливите $a = 3$ и $b = 2$, а бројот 15 е бројна вредност на истиот израз, но за вредности на променливите $a = 5$ и $b = 1$. Притоа важно е учениците да усвојат дека бројната вредност на алгебарскиот израз се менува во зависност од промената на променливите, што не е случај со бројните изрази.

б) Сега со учениците прво се разгледуваат бројните вредности на алгебарските изрази за $5x + 3$ и $3x - 1$ за вредност на променливата $x = -2$ и се добива дека тие се еднакви на -7, а потоа за вредност на променливата, на пример 0 и се добива дека првиот има бројна вредност 3, а вториот -1.

Во следниот чекор се пресметуваат бројните вредности на изразите $1 + \frac{1}{x^2+1}$ и $\frac{x^2+2}{x^2+1}$ за неколку вредности на променлата x, на пример, $-3, -2, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ и 4 и се заклучува дека за секоја вредност на променливата овие алгебарски рационални изрази имаат еднакви бројни вредности.

Понатаму, на учениците им се соопштува дека изразите $1+\frac{1}{x^2+1}$ и $\frac{x^2+2}{x^2+1}$ имаат еднакви бројни вредности за секоја вредност од променливата, која припаѓа на дефинициoната област, што како што видовме не е случај со изразите $5x+3$ и $3x-1$. Со тоа всушност сме подготвени да ја дадеме следнава дефинција.

*За два алгебарски рационални изрази ќе велиме дека се **еднакви**, ако тие имаат еднакви дефинициони области и ако примаат исти бројни вредности за секоја вредност на променливата која припаѓа на дефинициoната област.* ♦

Основните задачи, кои треба да се разгледаат со учениците со цел да се провери дали тие ги разбираат дефинициите на поимите алгебарски рационален израз, цел и дробен рационален израз се задачите од следните видови:

i) задачи во кои од дадено множество математички објекти треба да се одделат алгебарските изрази и задачи во кои треба самостојно да се запишат алгебарски изрази,

ii) задачи во кои треба да се најде дефинициона област и задачи во кои треба да се запише израз по дадена дефинициона област,

iii) задачи во кои треба да се пресмета бројна вредност на израз и задачи во кои треба да се состави израз кој има дадена вредност.

Пример 3. а) Кои од записите

$$\frac{4x+3}{2}, 3+x+y, \frac{x^2}{2x-3}, 3z+2=1, 12>2x+1 \text{ и } 2x-\frac{1}{3}$$

се алгебарски рационални изрази и кои се цели, а кои дробни?

б) Запиши по два цели и дробни рационални изрази! ♦

Пример 4. а) Најди ја дефинициoната област на секој од изразите

i) $\frac{1}{x-2}, \frac{3}{2a}, 4x-5, \frac{3x^2+1}{a(x-1)}$, и

ii) $x(x-2)(x-3)$, ако $x, x-2$ и $x-3$ се должини на рабови на паралелопипед.

б) Запиши израз кој е определен:

i) за секоја вредност на променливата x, и

ii) за вредности на променливата y за кои $y \neq 3$. ♦

Пример 5. а) Пресметај ја вредноста на изразот $2x^2-\frac{3}{2}x+1$ за $x=-\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$.

б) Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{1+4x+x^2}{2-x}$ за $x=1, 3, -2$ и 2.

в) Запиши израз кој има променлива x и од кој за $x=2$ се добива бројниот израз $3\cdot 2^3-4\cdot 2^2+\frac{1}{2^2+3}$.

г) Пресметај ја бројната вредност на изразот $2x-1$ за

$$x=1;\ 2;\ 3;\ 3,5;\ 4,2;\ 5,1$$

и добиените вредности внеси ги во табелата. ♦

x	1	2	3	3,5	4,2	5,1
$2x-1$						

Забелешка. Со задачите како оваа во пример 5 г) може да се постигнат повеќе цели, и тоа:

i) учениците да ги утврдат стекнатите знаења за пресметување на бројни вредности на алгебарски израз,

ii) со споредување на добиените резултати учениците да осознаат дека од еден ист алгебарски израз за различни вредности на променливите се добиваат различни бројни вредности, и

iii) со ваквото разгледување на прашањето за пресметување бројна вредност на алгебарски израз на учениците им ја доближуваме идејата за поимот функционална зависност, без да го спомнеме самиот поим, туку само ја предочуваме неговата суштина, која произлегува од конкретниот пример.

1.1. МОНОМИ

а) Поимите *моном* и *полином* се воведуваат како видови поими на поимот цел алгебарски израз. Притоа одделувањето на двата видови поими е во зависност од учеството на операциите собирање, одземање и множење. Така, на пример, за моном ја имаме следнава дефинција.

Моном *е израз формиран од константи (броеви), променливи и знакот на операцијата множење.*

Откако ќе се воведе поимот моном учениците се запознаваат со поимите: *нормален вид на моном, коефициент на моном, главна вредност на моном, степен на моном, слични мономи и спротивни мономи*, кои поими задолжително се илустрираат со примери. Притоа, примерите со кои се илустрираат овие поими мора да се одбрани така, што тие по најприроден пат ќе ја откриваат суштината на овие поими, со што ќе се овозможи учениците сознателно да ги усвојат наведените поими. Така, при воведувањето на поимот нормален вид на моном најдобро е да се искористи аналогијата која постои со броевите. Користењето на оваа аналогија може да се реализира на следниов начин.

"Се наведува дека производот $2\cdot5\cdot12\cdot25$ најчесто сакаме да го запишеме пократко, па затоа го пресметуваме и го запишуваме во видот

$$2\cdot5\cdot12\cdot25=2^3\cdot3\cdot5^3=3000.$$

Потоа, на учениците им се објаснува дека по аналогија на претходниот запис мономот $2\cdot4\cdot6\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$ можеме пократко да го запишеме на следниов начин

$$2\cdot4\cdot6\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=2^4\cdot3a^5=48a^5,$$

и дека во случајот дадениот моном сме го запишале во нормален вид. Притоа, пожелно е да се обрне внимание дека нормалниот вид на мономот е поприкладен ако, на пример, е дадена задача да се пресмета бројната вредност на мономот за $a=\frac{1}{2}$. Меѓутоа, на ова не смее особено да се инсистира, бидејќи ако, на пример, треба да се пресмета вредноста на мономот $24ababaab$ за $a=4$ и $b=\frac{1}{2}$, тогаш подобро е да се забележи дека $ab=2$ и да се продолжи со пресметувањето."

Наоѓањето коефициент на моном и главна вредност на моном е од суштествено значење, бидејќи воведувањето и осмислувањето на многу поими, поврзани со поимот моном, коефициентот и главната вредност имаат суштествено значење. Поими коефициент и главна вредност на моном можеме успешно да ги воведеме користејќи примери од видот.

Пример 6. а) Најди ги бројниот множител и производот на променливите на мономите

$$4ax,\ 4y,\ \tfrac{1}{3}x,\ -2x,\ x^2y,\ -x^2y,\ -0{,}532y^2zt.$$

б) Сведи го мономот во нормален вид и најди ги бројниот множител и производот на променливите:

$$3x^2\cdot(-4)x,\ 5abc\cdot7ab,\ \tfrac{4}{7}a^3bc\cdot0{,}7ax.\ \blacklozenge$$

Откако ќе се разгледа наведениот пример, веќе сме подготвени да ја дадеме следнава дефиниција.

Бројниот множител на мономот во нормален вид, го нарекуваме ***коефициент*** *на мономот, а производот на променливите во него -* ***главна вредност на мономот****.*

Пред да преминеме на усвојување на операциите со мономи треба да ги воведеме поимите слични и спротивни мономи. За таа цел можеме да го разгледаме примерот.

Пример 7. а) Најди ги коефициентите и главните вредности на мономите $4x^2,\ -3x^2,\ \frac{1}{3}x^2,\ -2,453x^2$.

б) Најди ги кофициентите и главните вредности на мономите $5xa^2$ и $-5xa^2$. ♦

Откако ќе го разгледаме наведениот пример, можеме да ја дадеме следнава дефиниција.

Два мономи кои имаат иста главна вредност ги нарекуваме ***слични мономи****. За два слични мономи ќе велиме дека се спротивни, ако нивните коефициенти се спротивни броеви.*

Пред да преминеме на усвојување на операциите со мономи, неопходно е да го усвоиме поимот *степен на моном*. На ова прашање нема детално да се задржуваме, туку само ќе споменеме дека учениците треба да осознаат дека за константите со исклучок на нулата, разгледувани како мономи, по договор прифаќаме дека имаат нулти степен, а степенот на останатите мономи е еднаков на збирот на степените на множителите во главната вредност.

б) За воведувањето на операциите со мономи целесообразно е суштествено да се искористи аналогијата со операциите со броевите. Притоа треба да се има предвид, дека и самите броеви се рационални изрази. Множењето на мономи се дефинира преку претставувањето на моном во нормален вид и ова е суштествен момент. Имено, самото множење не може да се дефинира како збир на еднакви собирци, туку тоа се прави со користење на алгоритмите за множење на броеви и правилата за множење на степени, т.е. својствата на степените. Така, врз основа на множењето на броевите и правилата за множење на степените добиваме:

Производ *на два мономи е моном чиј коефициент е еднаков на производот на коефициентите на множетелите, а главната вредност е еднаква на производот на главните вредности на множителите запишан во нормален вид.*

Пример 8. За производот на мономите $3a^2b$ и $-2abx^3$ имаме

$$3a^2b\cdot(-2abx^3)=3(-2)a^2babx^3=-6a^3b^2x^3. \ ♦$$

Природно е после множењето на мономи да се разгледа степенувањето на моном со степенов показател природен број. Постапката со која може сознателно да се усвои степенувањето на мономи ќе ја покажеме на следниов пример.

Пример 9. Како и кај степените на реални броеви производот

$$2x^2y^3\cdot 2x^2y^3\cdot 2x^2y^3$$

го запишуваме во видот $(2x^2y^3)^3$. За овој производ имаме

$$\begin{aligned}(2x^2y^3)^3&=2x^2y^3\cdot 2x^2y^3\cdot 2x^2y^3\\&=2\cdot 2\cdot 2\cdot x^2\cdot x^2\cdot x^2\cdot y^3\cdot y^3\cdot y^3\\&=2^3(x^2)^3(y^3)^3=8x^6y^9.\end{aligned}$$

Потоа разгледуваме уште еден до два примери и на учениците им го соопштуваме правилото:

Моном се степенува, кога секој негов множител се степенува со истиот степенов показател и добиените степени се множат. ♦

Целесообразно е при делењето на мономи, како појдовна основа, за воведување на оваа операција да се искористат делењето на броеви и делењето на степени. Усвојувањето на делењето на мономи не е пропратено се поголеми потешкотии, бидејќи правилото се изведува едноставно: наоѓаме количник на коефициентите на мономите и ги делиме степените со еднакви основи. Притоа треба да се ограничиме само на случајот, кога степеновиот показател на степените со иста основа во деленикот е поголем од степеновиот показател во делителот, бидејќи учениците се уште не се запознаени со степен чиј степенов показател е помал или еднаков на нула. Тоа значи, дека случаите од видот $a^{3m}:a^{5m}$ или $x^{k-2}:x^{k+2}$ не треба да се разгледуваат.

Потоа, со разгледување на погодни примери, треба да се покаже дека операцијата делење на мономи е обратна на множењето на мономи. Последното значи, дека паралелно со решавањето на примери во кои се наоѓа количник на два мономи треба да се решаваат и задачи дадени во следниов пример.

Пример 10. а) Провери дали е правилно извршено делењето

1) $12a^2x^3y:3ax=4ax^2y$, 2) $12a^3x^5y^2:4ax=3ax^3y$.

б) Ако $6,4\cdot 3,12a^3b=19,968a^3b$, без да пресметувате најдете:

1) $19,968a^3b:3,12a^3b$, 2) $19,968a^3b:6,4a^3b$, и

3) $19,968a^3b:6,4$.

в) Пресметај го мономот u ако

1) $6,4u=19,968x^2y$, 2) $3,12a^3bu=19,968a^4b^3x$, и

3) $6,4xu=19,968x$. ♦

Забелешка. Решавањето на типовите задачи дадени во пример 10 б) и в) придонесува да се осознаат и осмислат врските меѓу операциите множење и делење на мономи.

Аналогни размислувања можат да се направат и за операциите собирање и одземање на мономи. Притоа собирањето се сведува на наоѓање на израз, идентички еднаков на два или повеќе мономи, поврзани со знакот +, а одземањето се сведува на собирање на мономи при што намалителот се заменува со спротивниот моном.

При разгледувањето на операцијата собирање на мономи одделно се определува собирањето на слични мономи. Имено, збирот на два слични мономи е моном сличен на дадените, чиј коефициент е еднаков на збирот на коефициентите на собирците.

Пример 11. а) Збирот на мономите $3a^2b$ и $2b^2c$ може само да биде запишан како полином. Имено, тоа е изразот $3a^2b+2b^2c$.

б) Во збирот на мономите $2x^2y, 3xy$ и $-4x^2y$ два од мономите се слични, што значи дека

$$2x^2y+3xy+(-4x^2y)=(2-4)x^2y+3xy=-2x^2y+3xy.$$

в) За разликата на мономите $4x^2y$ и $-3xy$ имаме

$$4x^2y-(-3xy)=4x^2y+3xy. \ ♦$$

При разгледувањето на собирањето и одземањето на мономи целесообразно е да се коментира како може да се проверува собирањето со помош на одземањето и обратно, одземањето со помош на собирањето. Исто така, врската меѓу собирањето и одземањето, како и онаа меѓу множењето и делењето треба да се искористи и за наоѓање на непознати компоненти (намаленик, немалител, собирок, множител, деленик и делител).

1.2. ПОЛИНОМИ

а) Поимот полином се воведува како алгебарски збир на мономи, при што посебно се нагласуваат поимите бином и трином. Понатаму, преку примери учениците треба да го усвојат сведувањето на сличните членови на даден полином, а потоа треба да се воведат поимите нормален вид на полином и степен на полином.

Претходно изнесеното може да се реализира како што е покажано во следниов пример.

Пример 12. а) Да ги разгледаме алгебарските изрази

$$a+2bx+3c+5,\ x^2+y,$$
$$4a^3-3a^4+a^3+\tfrac{1}{2}a^2-5a+a-a\cdot a+5a^4 \text{ и}$$
$$\tfrac{1}{2}x^2-xy+3y^2.$$

Како што можеме да забележиме секој од овие изрази е алгебарски збир на неколку мономи. Притоа, изразот x^2+y е алгебарски збир на два неслични мономи и ваквите изрази ги нарекуваме биноми, а изразот $\frac{1}{2}x^2-xy+3y^2$ е алгебарски збир на три неслични мономи и ваквите изрази ги нарекуваме триноми. Воопшто, ја имаме следнава дефиниција.

За еден алгебарски израз ќе велиме дека е ***полином*** *ако тој е моном или е алгебарски збир на два или повеќе мономи, кои ги нарекуваме членови на полиномот.*

Од претходно изнесеното имаме дека биномите и триномите се специјални видови полиноми.

б) Забележуваме дека во полиномот

$$4a^3-3a^4+a^3+\tfrac{1}{2}a^2-5a+a-a\cdot a+5a^4 \qquad (1)$$

сите негови членови, освен членот $a\cdot a$ се запишани во нормален вид. Го запишуваме $a\cdot a$ и го добиваме полиномот:

$$4a^3-3a^4+a^3+\tfrac{1}{2}a^2-5a+a-a^2+5a^4. \qquad (2)$$

Во полиномот (2) имаме слични членови, па затоа ако нив ги групираме и потоа ги собереме сличните членови последователно добиваме

$$4a^3 + a^3 - 3a^4 + 5a^4 + \tfrac{1}{2}a^2 - a^2 - 5a + a\,,$$

$$5a^3 + 2a^4 - \tfrac{1}{2}a^2 - 5a\,. \qquad (3)$$

Оваа трансформацијата на полиномот (2) ја нарекуваме *сведување на слични членови на полином*. Забележуваме дека во полиномот (3), кој е идентичен на полиномот (1), сите негови членови се во нормален вид и тој не содржи слични членови. Така, ја имаме следнава дефиниција.

Даден полином е во ***нормален вид****, ако сите негови членови се во нормален вид и ако полиномот не содржи слични членови.*

в) Како што можеме да видиме највисокиот степен во полиномот (3) е 4. Слично во полиномот

$$7x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 12 \qquad (4)$$

највисокиот степен е 5, а во полиномот

$$x^3a + 4x^2a^4 - 2x^2a + 5xa - 7 \qquad (5)$$

мономот $4x^2a^4$ има највисок степен еднаков на 6. Според тоа, за секој полином можеме да го определиме највисокиот степен на неговите членови и овој степен го нарекуваме *степен на полиномот*. Притоа, кај полиномите со повеќе променливи разликуваме и степен на полином според секоја променлива. Така, на пример, за полиномот (5) степенот на полиномот по променливата x е еднаков на 3, а степенот на полиномот по променливата a е еднаков на 4.

Да се вратиме на полиномот (4). Како што гледаме неговите членови се подредени според опаѓачките степени на неговата променлива. Слично, полиномот (3) можеме да го запишеме во видот

$$2a^4 + 5a^3 - \tfrac{1}{2}a^2 - 5a\,.$$

Понатаму, полиномот (5) можеме да го запишеме во видот

$$4x^2a^4 + x^3a - 2x^2a + 5xa - 7\,,$$

при што опаѓаат степените на неговите членови. Според тоа, полиномите најчесто ги запишуваме во нормален вид така, што степените на нивните членови опаѓаат. ♦

б) Пред да се премине на усвојување на операциите со полиноми потребно е прво да се воведе поимот спротивен полином и правилата за ослободување од заграда, што може да се направи како што е покажано во следниов пример.

Пример 13. Го разгледуваме полиномот $P=3x^2-2x+4$, на кој му го придружуваме полиномот $-P$, кој го нарекуваме спротивен на полиномот P и чии членови се спротивни на членовите на полином P. Според тоа,

$$-P=-3x^2+2x-4. \tag{6}$$

Понатаму, во (6) го замениме полиномот P и го добиваме равенството

$$-(3x^2-2x+4)=-3x^2+2x-4. \tag{7}$$

Претходната постапка ја повторуваме со уште еден до два примери и го разгледуваме равенството (7). На учениците им објаснуваме дека со наоѓањето на спротивниот полином всушност сме го добиле правилото за ослободување од заградата, кога пред заградата имаме знак “-” и го формулираме следново правило.

Ако пред заградата имаме знак минус, тогаш заградата и знакот минус може да се изостават, а знаците на членовите во заградата се менуваат во спротивни.

Во следниот чекор правиме аналогија со реалните броеви, при што се потсетуваме дека за секој $a>0$ имаме $+a=a$ и на учениците им објаснуваме дека за секој полином P имаме $+P=P$. Во последното равенство го заменуваме полиномот P и добиваме

$$+(3x^2-2x+4)=3x^2-2x+4. \tag{8}$$

Претходната постапка ја повторуваме со уште еден до два примери и го разгледуваме равенството (8). На учениците им објаснуваме дека во случајот сме го добиле правилото за ослободување од заградата, кога пред заградата имаме знак “+” и го формулираме следново правило.

Ако пред заградата не стои никаков знак или стои знакот плус, тогаш заградата и знакот плус можат да се изостават и членовите во заградата ги задржуваат своите знаци.

Во следниот чекор, преку примери, учениците треба да ги усвојат постапките за вадење позитивен или негативен знак пред заграда. ♦

Сега операциите собирање и одземање на два полинома можеме да ги воведеме со тоа што, прво, со употреба на загради симболички го запишуваме бараниот збир, односно разлика на дадените полиноми, а потоа се ослободуваме од заградите и добиениот полином го сведуваме на нормален вид. Притоа, преку примери со учениците треба да се коментираат врските меѓу двете операции, меѓу компонентите на одделните дејства и да се воочи кога тие можат да бидат искористени. Исто така, овде треба да ја објасниме и смислата на воведувањето на поимот спротивен полином, што може да се направи како што е покажано во следниов пример.

Пример 14. Како што видовме полиномот $-P=-3x^2+2x-4$ е спротивен на полиномот $P=3x^2-2x+4$. Ако го побараме спротивниот полином на полиномот $-P$ го добиваме полиномот

$$-(-P)=-(-3x^2+2x-4)=3x^2-2x+4=P\,.$$

Откако ќе разгледаме уште еден до два примери, заедно со учениците заклучуваме дека за секој полином Q спротивниот полином на полиномот $-Q$ е самиот полином Q. Понатаму, го наоѓаме збирот

$$P+(-P)=3x^2-2x+4+(-3x^2+2x-4)=3x^2-2x+4-3x^2+2x-4=0$$

и откако ќе разгледаме уште еден до два примери, заедно со учениците, го изведуваме заклучокот: збирот на секој полином и неговиот спротивен полином е еднаков на нула. ♦

При усвојувањето на правилото за множење на полиноми, прво треба да се усвои множењето на полином со моном. Последното може да се направи како што е покажано во следниов пример.

Пример 15. Прво со учениците повторуваме дека, при изучувањето на бројните множества усвоивме дека, на пример,

$$9\cdot(40+7)=9\cdot 40+9+7; \qquad (20+3)\cdot 6=20\cdot 6+3\cdot 6;$$
$$9\cdot(40-7)=9\cdot 40-9\cdot 7; \qquad (20-3)\cdot 6=20\cdot 6-3\cdot 6.$$

Понатаму, учениците ги потсетуваме дека овие равенства ги запишеме со помош на буквена симболика добиваме:

$$\begin{aligned} a(b+c)&=ab+ac; \qquad (a+b)c=ac+bc\\ a(b-c)&=ab-ac; \qquad (a-b)c=ac-bc.\end{aligned} \tag{9}$$

Во следниот чекор објаснуваме зошто на местото на a,b и c можеме да ставиме мономи (поврзи со бројната вредност на моном). Сега, учениците ги потсетуваме дека равенствата (9) се точни и за произволен конечен број собирци во заградите и дека повторно на местото на буквите можеме да ставиме мономи и го формулираме правилото за множење на моном со полином.

Полином се множи со моном, кога секој член на полиномот се помножи со дадениот моном, а потоа добиените производи се собираат.

Понатаму, се разгледуваат примери од видот

$$4x^2(3x+5)=4x^2\cdot 3x+4x^2\cdot 5=12x^3+20x^2 \text{ и}$$

$$(2x^3-5x^2+3)\cdot(-3x^2)=2x^3\cdot(-3x^2)-5x^2\cdot(-3x^2)+3\cdot(-3x^2)$$

$$=-6x^5+15x^4-9x^2.$$

Притоа, учениците навистина да бидат убедени дека со алгоритмот за множење се добива полином кој е еднаков на производот на мономот и полиномот. Затоа, пожелно е за неколку вредности на променливата да ги пресметаме бројните вредности на множителите и бројните вредности на добиениот производ и да констатираме дека тие се еднакви за соодветните вредности на променливата, со што повикувајќи се на дефиницијата за еднаквост на алгебарски рационални изрази учениците ќе се убедат во исправноста на постапката. Така за првиот полином при $x=-2,0$ и 1 имаме:

$$4\cdot(-2)^2\cdot[3\cdot(-2)+5]=-16 \text{ и } 12\cdot(-2)^3+20\cdot(-2)^2=-16\,;$$

$$4\cdot 0^2\cdot[3\cdot +5]=0 \text{ и } 12\cdot 0^3+20\cdot 0^2=0\,; \text{ и}$$

$$4\cdot 1^2\cdot[3\cdot 1+5]=32 \text{ и } 12\cdot 1^3+20\cdot 1^2=-16\,. \blacklozenge$$

Производот на два полиноми можеме да го воведеме аналогно како и производот на моном со полином, но самата постапка на воведување може да се скрати, ако едниот од полиномите привремено го сметаме за моном. Во следниов пример ќе ја покажеме оваа постапка.

Пример 16. За да ги помножиме полиномите $x+y+z$ и $a+b$, секоја буква означува некој моном, ќе го замениме полиномот $x+y+z$ со мономот m. Тогаш, добиваме

$$m(a+b)=ma+mb=(x+y+z)a+(x+y+z)b=xa+ya+za+xb+yb+zb\,.$$

Понатаму, откако ќе разгледаме два до три примери, го формулираме правилото за множење на полиноми.

Полином се множи со полином, кога секој член од едниот полином одделно се помножи со секој член од другиот полином, а потоа добиените производи се соберат.

На крајот, како и при множењето на полином со моном, во исправноста на постапката се уверуваме со помош на пресметување на неколку бројни вредности на множителите и добиениот производ. ♦

Забелешка. При усвојувањето на множењето на полиноми корисно е на учениците да им се обрне внимание, дека прво со првиот член на првиот полином треба да ги помножат сите членови на вториот полином, потоа постапката да ја повторат со вториот член на првиот полином итн. Последното е од особена важност, бидејќи учениците често пати множењето го реализираат без некој редослед, од што како резултат се јавуваат грешки во множењето.

Како и при множењето, така и при усвојување на делењето на полиноми најдобро е прво да се усвои делењето на полином со моном, а потоа да се премине на општиот случај. Притоа, во првичните разгледувања пожелно е да се разгледуваат примери во кои резултатот од делењето е полином, т.е. кога не се добива дробно рационален израз. Во следниов пример ќе дадеме постапка за усвојување на делењето на полином со моном.

Пример 17. На почетокот, корисно е учениците да ги потсетиме како практично се дели повеќецифрен број на едноцифрен, на пример

$$\begin{aligned}375:5&=(300+70+5):5\\&=300:5+70:5+5:5\end{aligned}.$$

Потоа, по аналогија го формулираме правилот за делење на полином со моном:

Полином се дели со моном, кога секој член на полиномот се подели со мономот и добиените количници се соберат.

Понатаму, треба да се разгледаат два до три примери во кои секој член на полиномот е делив со мономот и да се заклучи дека, даден полином запишан во нормален вид е делив со даден моном ако и само ако секој член на полиномот се дели со мономот.

На крајот, треба да се разгледаат едноставни примери кога полиномот не се дели со мономот, т.е. кога резултатот од делењето е дробно рационален израз. ♦

Усвојувањето на делењето на полиноми можеме да го направиме по пат на аналогија на делењето на природни броеви кои се запишани во полиномна форма. Во следниов пример, во кратки црти, ќе покажеме како тоа може да го направиме.

Пример 18. На почетокот, учениците ги потсетуваме како практично делиме два повеќецифрени броја и постапката ја запишуваме и во полиномна форма, на пример,

$$\begin{array}{l}\;\;165:11=15\\-11\\\;\;\;\;55\\\;\;-55\\\;\;\;\;\;\;0\end{array}$$

и

$$
\begin{array}{l}
(1\cdot 10^2+6\cdot 10+5):(1\cdot 10+1)=1\cdot 10+5\\
\pm 1\cdot 10^2 \pm 1\cdot 10\\
\qquad 5\cdot 10+5\\
\qquad \pm 5\cdot 10+5\\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

при што за полиномниот запис напомнуваме дека прво $1\cdot 10^2:1\cdot 10=1\cdot 10$, а потоа $5\cdot 10:1\cdot 10=5$. Сега на учениците им предлагаме, формално во полиномниот запис, наместо степени на бројот 10 да запишат степени на променливата x и откако ќе добијат

$$
\begin{array}{l}
(1\cdot x^2+6\cdot x+5):(1\cdot x+1)=1\cdot x+5\\
\pm 1\cdot x^2 \pm 1\cdot x\\
\qquad 5\cdot x+5\\
\qquad \pm 5\cdot x+5\\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

да ги помножат полиномите $x+5$ и $x+1$. По извршеното множење на овие два полиноми, решаваме уште два до три примери и низ дискусија ја објаснуваме операцијата делење на полиноми.

На крајот, треба да се разгледаат едноставни примери кога полином не се дели со полином и да го воведеме делењето со остаток. Се разбира, и во овој случај пожелно е да ја користиме теоремата за делење со остаток во множеството природни броеви. Притоа, разгледувањата треба да завршат со следниов заклучок.

Делењето на два полинома со остаток е секогаш можно и притоа, да се подели полином $P(x)$ со полином $Q(x)$ значи да се најдат полиноми $q(x)$ и $r(x)$, степенот на полиномот $r(x)$ е помал од степенот на полиномот $Q(x)$, такви што

$$P(x)=Q(x)q(x)+r(x)\,. \ \blacklozenge$$

1.3. ФОРМУЛИ ЗА СКРАТЕНО МНОЖЕЊЕ

а) При изучувањето на оваа тема неодминлива содржина се формулите за скратено множење. Во основното образование најчесто се усвојуваат формулите за производ од збир и разлика на два монома, квадрат на бином и разложување на збир и разлика на трети степени на множители.

Наједноставно е овие две формули да се изведат директно, што во следниве разгледувања и ќе го направиме.

а1) Ги множиме биномите $a-b$ и $a+b$ и добиваме:

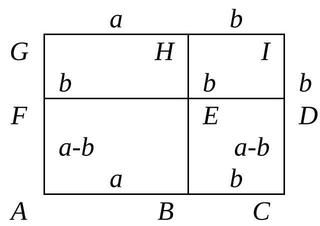
$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2 .$$

Потоа за изразот a^2-b^2 го воведуваме терминот *разлика на квадрати* и го формулираме правилото:

> *Производот од збирот и разликата на два монома е еднаков на* ***разликата*** *на нивните квадрати.*

и истото го усвојуваме со решавање на неколку примери. Притоа, пожелно е правилото да го искористиме и за поедноставни нумерички пресметувања, за што треба да разгледаме примери од видот:

$$\begin{aligned}187\cdot 213&=(200-13)\cdot(200+13)\\&=200^2-13^2=40000-169,\\&=39831\end{aligned}$$



а исто така и да го илустрираме, т.е. да дадеме геометриски “доказ”, со што ќе укажеме на корелацијата меѓу различните содржини во наставата по математика. Последното може да се направи со помош на цртежот десно. Притоа имаме:

$$\begin{aligned}a^2-b^2&=P_{ABHG}-P_{EDIH}\\&=P_{ABEF}+P_{FEHG}-P_{EDIH}\\&=P_{ABEF}+P_{BCIH}-P_{EDIH}\\&=P_{ABEF}+P_{BCDE}\\&=P_{ACDF}=(a-b)(a+b).\end{aligned}$$

а2) Откако за изразот $(a+b)^2$, каде a и b се два неслични монома ќе го воведеме поимот *квадрат на бином*, врз основа на претходно стекнатите знаења наоѓаме:

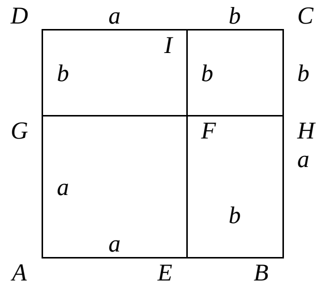
$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

и го формулираме правилото:

> ***Квадрат на бином*** *е еднаков на збирот од квадратот на првиот член, удвоениот производ на првиот и вториот член и квадратот на вториот член.*

Потоа, изкажаното правило го усвојуваме со решавање на неколку примери, при што треба да решиме и нумерички примери од видот:

$$213^2 = (200+13)^2 = 200^2 + 2\cdot 200\cdot 13 + 13^2 \\ = 40000 + 5200 + 169 = 45369$$,



а исто така и да го илустрираме, т.е. да дадеме геометриски “доказ”, со што уште еднаш ќе укажеме на корелацијата меѓу различните содржини во наставата по математика. Последното може да се направи со помош на цртежот десно. Притоа имаме:

$$(a+b)^2 = P_{ABCD} = P_{AEFG} + P_{GFID} + P_{EBHF} + P_{FHCI} \\ = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

а3) Практиката покажува дека, разложувањето на збир и разлика на трети степени на неслични мономи a и b треба да се воведе директно. Притоа, имаме

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3,$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3,$$

и за сознателно усвојување на претходните формули од страна на учениците потребно е да подготвиме соодветен систем на задачи, кој ќе овозможи прво формулите да се усвојат, а потоа истите и да се користат при решавање на посложени задачи. Да забележиме дека, како и во случаите на формулите од а1) и а2), така и овде постои соодветна геометриска илустрација на последните две формули. Така, на пример, во случај на претпоследната формула тоа може да се направи со помош на коцка со раб b, квадар со страни a,b и $a-b$ и квадар со страни a,a и $a-b$.

б) При изучување на оваа тема важно место зазема разложувањето на полиномите на множители. Притоа, за усвојување најчесто се предвидуваат три начини на разложување:

- вадење на заеднички множител пред загради,
- примена на формулите за скратено множење, и
- комбиниран начин на разложување.

При разгледувањето на прашањето за разложување на полиномите на множители добро е да се искористи аналогијата за разложување на природните броеви на множители, при што ќе се потенцира дека една од целите на разложувањето на полиномите на множители е скратувањето на дробно рационалните изрази. Овде треба да споменеме, дека иако скратувањето на дробно рационалните изрази се учи подоцна, целесообразно е, со намера од учениците да се осознае потребата од разложување на полиномите на множители, одма да се разгледаат неколку елементарни примери за такво скратување.

Во разложувањето на полиномите на множители учениците имаат бројни потешкотии, бидејќи при усвојувањето на овие содржини, за разлика од другите алгебарски теми, усвојувањето на теоријата не е гаранција за успешно решавање на повеќето задачи. Тешкотиите се должат на тоа, што за успешно разложување не само што треба да се знаат стандардните алгоритми, туку најчесто е потребно да се извршат претходни трансформации кои во поголемиот број случаи не се едноставни.

За да се надминат наведените тешкотии, при усвојувањето на операциите со полиноми, треба да се решаваат и задачи од видот.

Пример 19. а) Мономот $15x^3y^2$ претстави го на три начини како производ, при што еден од множителите е $5x$.

б) Даден е полиномот $6x^2y^3 - 2x^3y^2$. Најди ги сите претставувања на овој полином како производ на моном и полином.

в) Запиши го полиномот кој е еднаков на полиномот $-2xyz + \frac{x}{3}$, кога во дадениот полином мономите ќе ги замениш со спротивни мономи. ♦

Овде ќе споменеме, дека успешното усвојување на разложувањето на полиномите на множители е можно само со добро осмислени системи задачи, кои учителот треба да ги подготви. Во нашите разгледувања нема да се задржиме на спомենатите начини за разложување на полиномите на множители, ниту пак ќе се задржиме на споменатите системи задачи, но ќе укажеме на можноста за корелација на разгледуваните содржини со теоријата на броеви. За таа цел ќе го искористиме добро познатиот идентитет на Софија Жермен. Имено, користејќи ги формулите а1) и а2) го докажуваме *идентитетот на Софија Жермен*:

$$a^4 + 4b^4 = (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4) - 4a^2b^2 = [(a^2)^2 + 2a^2 \bullet 2b^2 + (2b^2)^2] - (2ab)^2$$

$$= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab),$$

и потоа преминуваме на разгледување на следниов систем задачи:

Пример 20. а) Докажи дека за секој природен број $n > 1$ бројот $n^4 + 4$ е сложен.

б) Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви x такви што за секој $n \in \mathbf{N}$, бројот $z = n^4 + x$ е сложен.

в) Докажи, дека бројот $2^{10}+5^{12}$ е сложен.

г) Докажи, дека природниот број $2^{2006}+5^{2004}$ е сложен.

д) Докажи, дека бројот од видот $4n^4+1$, $n\in\mathbf{N}$ е прост само ако $n=1$.

ѓ) Докажи, дека за секој $n>1$ природниот број n^4+4^n е сложен.

е) Докажи, дека природниот број 2005^4+4^{2005} е сложен.

Решение. а) Ако во идентитетот на Софија Жермен ставиме $a=n$ и $b=1$, добиваме

$$n^4+4=a^4+4b^4=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$$
$$=(n^2+2\bullet1^2+2n\bullet1)(n^2+2\bullet1^2-2n\bullet1)=(n^2+2+2n)(n^2+2-2n).$$

Според тоа, за да докажеме дека за секој природен број $n>1$ бројот n^4+4 е сложен, доволно е да докажеме дека за секој природен број $n>1$ се исполнети неравенствата

$$n^2+2+2n>1 \text{ и } n^2+2-2n>1.$$

Навистина, бидејќи за секој природен број $n>1$ важи $(n+1)^2>0$ и $(n-1)^2>0$ добиваме

$$n^2+2+2n=(n^2+2n+1)+1=(n+1)^2+1>1 \text{ и}$$
$$n^2+2-2n=(n^2-2n+1)+1=(n-1)^2+1>1$$

од што следува дека природниот број n^4+4 е сложен. ♦

в) Идентичните трансформации се суштествена содржина на темата алгебарски рационални изрази. Во повеќето случаи потребата за идентични трансформации се оправдува со неопходноста за поедноставно претставување на сложените изрази, кое претставување се мотивира со едноставноста на наоѓањето на бројната вредност на алгебарските изрази. Меѓутоа, ако ученикот усвоил дека наједноставен вид на моном или полином е неговиот нормален вид, а потоа забележи, дека бројната вредност на изразот $\frac{1}{2}ab\cdot7ab^2$ при $a=\frac{1}{2}, b=2$ може многу поедноставно да ја пресмета директно, отколку истиот да го сведе на нормален вид, тогаш природно е да се посомнева во целесообразноста на она што го учи.

Идентичните трансформации може да се поврзат со претставувањето на еден ист број во различни форми, при што изборот на формата во повеќето случаи зависи од операциите кои треба да се извршат со тој број. На пример, ако го разгледуваме бројниот израз $\frac{72\cdot 25\cdot 61}{9}$, тогаш погодно е бројот 72 да го запишеме во видот $8\cdot 9$, но ако треба бројот 72 да го множиме со 13, тогаш погодно е истиот да го запишеме во вид на збирот $70+2$.

1.4. ДРОБНО - РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

а) Во основното образование изучувањето на дробно рационалните изрази се сведува на усвојување на операциите со овие изрази. Пред да преминеме на усвојување на операциите со дробно-рационални изрази најчесто се воведува поимот *еднакви* дробно-рационални изрази (*алгебарски дропки*) и се докажува следнава теорема.

Нека A,B,C и D се цели алгебарски изрази. Тогаш $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ако и само ако $AD=BC$ и дробно-рационалните изрази $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ имаат исти дефинициони области.

При усвојувањето на овој дел најдобро е да се искористи аналогијата со обичните дропки. Меѓутоа, на учениците треба да им се објасни дека сите усвоени поими кај обичните дропки по аналогија не се пренесуваат и кај дробно рационалните изрази. Последното е најдобро да се направи со погодно одбрани примери.

Пример 21. На учениците им ги задаваме алгебарските дропки $\frac{3a+20}{2a+20}$ и $\frac{a+b}{2a+b}$ и поставуваме прашање: Што може да се каже за овие алгебарски дропки? Многу често следува одговор дека алгебарската дропка $\frac{3a+20}{2a+20}$ е неправилна, а алгебарската дропка $\frac{a+b}{2a+b}$ е правилна. Оваа грешка наједноставно можеме да ја отстраниме ако во првата дропка ставиме прво $a=-4$, а потоа $a=-13$ и притоа учениците увидат дека во првиот случај ја добиваме правилната дропка $\frac{2}{3}$, а во вториот случај неправилната дропка $\frac{19}{6}$. Понатаму, за дропката $\frac{a+b}{2a+b}$ доволно е да извршиме пресметувања при $a=-3,b=10$, а потоа при $a=-4,b=2$ и да се убедиме дека се добиваат дропките $\frac{7}{4}$ и $\frac{1}{3}$. ♦

Во овој дел треба да го дадеме и основното својство на алгебарските дропки, кое се изведува од равенството $\frac{A}{B}=\frac{AP}{BP}$, каде A,B и P се цели алгебарски изрази, при што треба да обрнеме внимание дека притоа водиме сметка за дефиниционата област. Понатаму, запишувајќи го последното равенство во видот $\frac{AP}{BP}=\frac{A}{B}$ учениците треба да усвојат, дека во случај кога броителот и именителот на алгебарската дропка имаат заеднички множител, тогаш дропката може да се скрати и притоа нејзината вредност не се менува (се разбира притоа повторно следува неопходната забелешка за дефиниционата област).

На крајот од овој дел, користејќи го основното својство на дропките, учениците треба треба да ја усвојат промената на знакот пред дропката, т.е. треба ги усвојат равенствата

$$\frac{A}{B}=\frac{A(-1)}{B(-1)}=\frac{-A}{-B} \text{ и } \frac{-A}{B}=\frac{(-A)(-1)}{B(-1)}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}.$$

б) Собирањето и одземањето на дропките треба да го разгледуваме како идентична трансформација на збир на дропки во една дропка. Пред да преминеме на усвојување на собирањето и одземањето на алгебарските дропки, неопходно е со учениците да ги повториме правилата за собирање и одземање на обични дропки. Потоа, по аналогија лесно се воведуваат правилата за собирање и одземање на алгебарски дропки. Притоа, разгледувајќи ги збирот и разликата на две алгебарски дропки со различни именители, неминовно се поставува прашањето за нивна замена со дропки со еднакви именители. Во овој дел учениците ги потсетуваме на основното својство на алгебарските дропки и дропките $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ ги заменуваме со еднаквите дропки $\frac{AD}{BD}$ и $\frac{BC}{BD}$, соодветно, кои имаат еднакви именители и оттука добиваме $\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}\pm\frac{BC}{BD}=\frac{AD\pm BC}{BD}$.

Овде уште ќе спомнеме дека користејќи ја аналогијата со множењето и делењето на обичните дропки, на потполно ист начин се воведуваат операциите множење и делење на алгебарски дропки, па затоа на истите нема подетално да се задржуваме. Што се однесува до степенувањето на алгебарска дропка, со степенов показател природен број, ќе спомнеме само дека истото треба да се разгледува како парцијален случај на множење на неколку еднакви алгебарски дропки, од што лесно се докажува дека $(\frac{A}{B})^k=\frac{A^k}{B^k}$.

На крајот од овој дел да забележиме дека при усвојувањето на собирањето и одземањето на алгебарски дропки пожелно е прво да го усвоиме собирањето на алгебарски дропки кај кои именителите се мономи и притоа добро е да се придржуваме на следната шема:

- прво разгледуваме едноставни задачи кога именителите немаат заеднички множители, на пример, $\frac{3a}{5b}+\frac{2a}{3c}$,
- потоа разгледуваме задачи, кога именителот на една од дропките е содржател на именителите на другите дропки, на пример, $\frac{7a}{30b^3}+\frac{2a}{15b^2}+\frac{a}{10b}$, и
- на крајот разгледуваме задачи кога ниту еден од именителите не е заеднички содржател на именителите на другите дропки, но некои именители имаат заеднички множители, на пример, $\frac{2a}{15b^3c}+\frac{2a}{9b^2c^2}-\frac{4a}{12bc^3}$.

Пожелно е на предложената постапка да се придржуваме и при изучувањето на собирањето и одземањето на алгебарски дропки чии именители се полиноми. Така, во овој случај можат да се решат следниве задачи:

$$\frac{3a}{a+b}+\frac{2b}{a-b},\ \frac{1+7a}{1-7a}-\frac{1-7a}{1+7a}-\frac{4}{1-49a^2} \text{ и } \frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}.$$

Исто така, корисно е да се изведи определена шема за записите при собирање на сложени алгебарски дропки. Една таква шема е дадена во следниов пример.

Пример 22. Трансформирај го изразот $\frac{a-1}{a^2+2a+1}-\frac{a+1}{a^2-2a+1}-\frac{1}{a^2-1}$.

Решение. Ги разложуваме именителите на множители

$a^2+2a+1=(a+1)^2$ дополнителен множител е $(a-1)^2$,

$a^2-2a+1=(a-1)^2$ дополнителен множител е $(a+1)^2$,

$a^2-1=(a-1)(a+1)$ дополнителен множител е $(a-1)(a+1)$.

Заедничкиот именител е: $(a-1)^2(a+1)^2$, па затоа збирот на дропките после сведувањето на заеднички именител е:

$$\begin{aligned}\frac{a-1}{a^2+2a+1}-\frac{a+1}{a^2-2a+1}-\frac{1}{a^2-1}&=\frac{(a-1)(a-1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}-\frac{(a+1)(a+1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}-\frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2(a-1)^2}\\&=\frac{(a-1)^3-(a+1)^3-(a+1)(a-1)}{(a+1)^2(a-1)^2}\\&=\frac{a^3-3a^2+3a-1-(a^3+3a^2+3a+1)-(a^2-1)}{(a+1)^2(a-1)^2}\\&=\frac{a^3-3a^2+3a-1-a^3-3a^2-3a-1-a^2+1}{(a^2-1)^2}\\&=\frac{-7a^2-1}{a^4-2a^2+1}.\end{aligned}$$

При решавањето на задачи за собирање на сложени алгебарски дропки треба да разгледаме и задачи како што е следнава, во која при сведувањето на заеднички именител се менува знакот пред дропката.

Пример 23. Трансформира го изразот

$$\frac{3a}{2a-6}-\frac{a-2}{3a+9}+\frac{8a-6}{27-3a^2}.$$

Решение. Ги разложуваме именителите на множители

$2a-6=2(a-3)$ дополнителниот множител е $3(a+3)$

$3a+9=3(a+3)$ дополнителниот множител е $2(a-3)$

$27-3a^2=3(9-a^2)=3(3-a)(3+a)$ дополнителниот множител е (-2).

Заедничкиот именител е:

$$2\cdot 3(a-3)(a+3)=6(a-3)(a+3),$$

па затоа збирот на дропките после сведувањето на заеднички именител е:

$$\frac{3a}{2a-6}-\frac{a-2}{3a+9}+\frac{8a-6}{27-3a^2}=\frac{3a\cdot 3(a+3)}{2(a-3)\cdot 3(a+3)}-\frac{(a-2)\cdot 2(a-3)}{2(a-3)\cdot 3(a+3)}-\frac{(-2)(6a-6)}{(-2)\cdot 3(3-a)(3+a)}=\ldots \;\blacklozenge$$

Овде да забележиме дека, не треба да се инсистира учениците да се придржуваат на една или друга шема. Во поедноставни случаи дополнителните множители може и да не се пишуваат, а трансформациите усно да се изведуваат. Меѓутоа, при решавањето на задачите обавезно треба да се инсистира на определување на дефиниционите области, т.е. на наоѓање на вредностите за кои дропките имаат смисол.

2. КАРАКТЕРИСТИЧНИ ГРЕШКИ КОИ ГИ ПРАВАТ УЧЕНИЦИТЕ И НАЧИНИ ЗА ОТСТРАНУВАЊЕ НА ИСТИТЕ

а) Изучувањето на алгебарските рационални изрази, а посебно на алгебарските дропки е пропратено со бројни потешкотии, кои можат да се видат од грешките кои учениците ги прават при решавањето задачи од оваа тема. Овде ќе се осврнеме на некои типични грешки кои се среќаваат во практиката, но и ќе укажеме на постапки со кои грешките можат да се намалат и да се корегираат.

Грешките кои учениците ги прават при усвојувањето на полиномите се од најразличен карактер, па затоа истите ќе се обидеме да ги класифицираме.

а1) *Грешки поврзани со коефициент на моном и степен на моном*

Многу ученици не можат да разликуваат коефициент на моном и степенов показател. На пример, пишуваат $a \cdot a \cdot a \cdot a = 4a$ наместо a^4 или $a + a + a + a = a^4$ наместо $4a$ или $2x + x = 2x^2$ или $2x \cdot x = 3x$. Исто така, се прави и грешка сврзана со испуштање на знакот на коефициентот во моном или алгебарски израз, како на пример $(-3a)^3 = 27a^3$.

Најдобро е отстранувањето на овие грешки да се прави со барање исцрпни одговори од учениците, поврзани со наоѓање на коефициентите на мономите во алгебарски збир, но и со наоѓање на степеновиот показател кај производ на мономи.

а2) *Грешки поврзани со сведување на слични мономи*

При сведување на слични мономи грешките се од различна природа. Најчесто можат да се сретнат следниве грешки:

$7x^2 - 4x^2 = 3$ наместо $3x^2$,

$4x^3 + 5x^4 = 9x^7$, $2x^3 + x^2 = 3x^5$, $b^m + b^n = b^{m+n}$,

$x^2 - y^2 + x^2 - y^2 = x^4 - y^4$ наместо $x^2 - y^2 = 2x^2 - 2y^2$,

$1 - 0,5a^2 = 0,5a^2$ и слично.

За отстранување на овие видови грешки може да се постапи, на пример, на следниов начин. За да учениците се уверат при запишувањето $4x^3 + 5x^4 = 9x^7$ направиле грешка потребно е за x да се зададат вредностите $0, 1, 2, 3, -1$ при што ќе се забележи дека за 0 и 1 равенството е точно, но да кажеме за 2 левата страна е еднаква на 112, а десната на 1152, т.е. двете страни немаат еднакви бројни вредности. Следствено изразот $9x^7$ не е збир на изразите $4x^3$ и $5x^4$.

Се разбира, претходно наведената постапка за отстранување на грешките бара повеќе наставно време, отколку едноставното повторување на дефинициите е решавањето на голем број елементарни задачи. Меѓутоа, практиката покажува дека оваа постапка е поефикасна, што се должи на фактот дека учениците за направената грешка се уверуваат со конкретни бројни вредности, а како што знаеме конкретното мислење е поблиско до децата од апстрактното.

а3) *Грешки при множење на моном со полином*

Во овој дел практиката покажува дека учениците најчесто ги прават следниве грешки:

- $4x^2y^3 \cdot 3x^2y^3 = 12x^2y^3$ наместо $12x^4y^6$,
- $5a^3 \cdot 2c^2d \cdot 3b^2 = 15a^3b^2 \cdot 6b^2c^2d = 90a^3b^4c^2d$ наместо $30a^3b^2c^2d$, и
- $(2x+3y)(5a+4b) = 10ax+12by$ наместо $10ax+15ay+8bx+12by$.

За отстранување на наведените грешки пожелно е да се оддели доволно наставно време за решавање на едноставни задачи, што најчесто не е можно заради неусогласеноста на наставната програма и предвидениот фонд на часови за нејзина реализација.

а4) *Грешки при делење на полиноми*

Во овој дел најтипични грешки се:

- $8x^5y^4 : 2x^5y^4 = 4x^5y^4$ наместо 4, и
- $15x^9y^{12} : 3x^3y^4 = 5x^3y^3$ наместо $5x^6y^8$.

Една од причините за појавата на овие видови грешки е брзото реализирање на овој материјал, а алгоритмот тешко се усвојува од учениците. За надминување на овие грешки, пожелно е доследно да се почитува укажаниот метод за воведување на делењето на полиноми, но исто и сознателно да се усвои делењето на мономи. Доколку учителот забележи дека учениците ги прават наведените грешки, добро е на часовите за повторување и утврдување на материјалот дополнително да се разгледа систем задачи од следниов вид:

- $x^3 : x = \frac{x \cdot x \cdot x}{x} = x \cdot x = x^2$, при $x \neq 0$,
- $x^3y^2 : (xy) = \frac{x^3y^2}{xy} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{x \cdot y} = x \cdot x \cdot y = x^2y$, при $x \neq 0$, $y \neq 0$,
- $x^{11}y^6 : (x^5y^4) = x^{11-5}y^{6-4} = x^6y^2$, при $x \neq 0$, $y \neq 0$, и
- $8a^5 : (4a^3) = \frac{8a^5}{4a^3} = 2a^{5-3} = 2a^2$, при $a \neq 0$,

при што треба да се обрне внимание, дека за да учениците се сигурни во добиениот резултат неопходно е да се прават проверки, како на пример: $8a^5b^3 : (4a^2b^2) = 2a^3b$ бидејќи $2a^3b \cdot 4a^2b^2 = 8a^5b^3$.

а5) *Грешки при степенување на моном или полином*

Во овој дел најчести грешки се:

- $(2x^2y)^3 = 6x^6y^3$ наместо $(2x^2y)^3 = 8x^6y^3$,
- $(-2a^3b^4)^3 = -8a^3b^4$ наместо $(-2a^3b^4)^3 = -8a^9b^{12}$,
- $(3a)^3 = 3a^3$ наместо $(3a)^3 = 27a^3$,
- $(x^4y^2)^3 = x^7y^5$ наместо $(x^4y^2)^3 = x^{12}y^6$,
- $(2x^2y^3)^3 = 8x^8y^{27}$ наместо $(2x^2y^3)^3 = 8x^6y^9$,
- $(2x+3y)^2 = 4x^2 + (2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)xy + 9y^2 = 4x^2 + 24xy + 9y^2$ наместо $4x^2 + 12xy + 9y^2$,
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$ наместо $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3$ наместо $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3a^2b \pm b^3$,
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ наместо
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
- при $a \neq 0$: $a^0 = 0$ или $a^0 = a$ наместо $a^0 = 1$.

Како и во претходниот случај, така и овде корегирањето на првите четири видови грешки е можно со решавање на повеќе елементарни задачи, при што треба операциите постапно да се реализираат, како на пример:

- $(x^4y^2)^2 = \cdot(x^4y^2)\cdot(x^4y^2) = x^4x^4y^2y^2 = x^{4+4}y^{2+2} = x^8y^4$,
- $(2x^2y^3)^3 = 2^{1\cdot 3}x^{2\cdot 3}y^{3\cdot 3} = 2^3x^6y^9 = 8x^6y^9$

Причината за појавувањето на грешки од петтиот вид е погрешната аналогија за степенување на коефициентот на мономот, т.е. заедно со неговото степенување тие ги степенуваат и степеновите показатели во основата на мономот. За отстранување на овој вид грешки неопходно е една иста задача да се разгледува во следниве три етапи покажани на примеров:

I етапа: $(3a^2b^3)^3 = 3^3(a^2)^3(b^3)^3 = 27a^{2\cdot 3}b^{3\cdot 3} = 27a^6b^9$,

II етапа: $(3a^2b^3)^3 = 3^3a^{2\cdot 3}b^{3\cdot 3} = 27a^6b^9$, и

III етапа: $(3a^2b^3)^3 = 27a^6b^9$.

За да се одбегнат грешките при степенувањето на полином корисно е при предавањето на овој материјал на учениците да им се обрне внимание дека во сите случаи бројот на мономите во резултатот е поголем од бројот на мономите во полиномот кој се степенува. Јасно, и во овој случај потребно е да се решат доволен број елементарни задачи во кои само ќе се степенува бином на втор и трет степен.

Конечно, за отстранување на последната грешка треба често пати да се вклучува степенот a^0, $a \neq 0$, како составен дел на посложени задачи или да се задава како дополнително прашање при утврдување на материјалот.

а5) *Грешки при разложување на полином на множители*

Во овој дел најчесто се јавуваат грешки слични на наведениве:

- $x^3y^2 + x^2y + x = x(x^2y^2 + xy)$ наместо
$$x^3y^2 + x^2y + x = x(x^2y^2 + xy + 1),$$
- $x^4 - x^3y - y^3 + xy^2 = x^3(x-y) - y^2(y-x) = (x-y)(x^3 - y^2)$ наместо $x^4 - x^3y - y^3 + xy^2 = (x-y)(x^3 + y^2)$,
- $a^2 - b^2 = (a-b)^2$ наместо $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,
- $a^2 + b^2 = (a+b)^2$ или $a^2 + b^2 = (a-b)(a+b)$ наместо да се каже дека во множествата изучени броеви полиномот не се разложува, и
- $x^2 + 2x + 4 = (x+2)^2$ наместо да се каже дека во множествата изучени броеви полиномот не се разложува.

Првите три видови грешки се резултат на лошото усвојување на алгоритмите, а останитите два вида грешки се резултат на погрешна аналогија. Најдобро е овие видови грешки да се корегираат со систематско решавање задачи.

б1) *Грешки при делење и скратување на алгебарски дропки*

Ќе наведеме некои примери за грешките кои ги прават учениците при изучување на овој дел од наставниот материјал.

- $\frac{3a+b}{3c} = \frac{a+b}{c}$ наместо $\frac{3a+b}{3c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{3c}$, при $c \neq 0$,
- $\frac{a+b}{ac} = \frac{b}{c}$ или $\frac{1+b}{c}$ наместо $\frac{a+b}{ac} = \frac{1}{c} + \frac{b}{ac}$, при $a \neq 0$, $c \neq 0$,
- $\frac{2m+2(m+n)^3}{(m+n)^2(2m+n)} = \frac{2m+2(m+n)}{2m+n}$ наместо да се каже дека дропката не може да се скрати при $n \neq -m, n \neq 2m$,

- $\frac{x+y}{x} = y$ или $1 + y$ наместо $\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$ при $x \neq 0$,
- $\frac{3(4a+2b)-(4a-2b)}{4a-2b} = 3(4a + 2b)$ наместо
  $\frac{3(4a+2b)-(4a-2b)}{4a-2b} = \frac{3(4a+2b)}{4a-2b} - 1$ при $b \neq 2a$,
- $\frac{18x^2+12xy}{9x^2+12xy+4y^2} = \frac{18x^2}{9x^2+4y^2}$ или $\frac{2}{4y^2}$ наместо $\frac{18x^2+12xy}{9x^2+12xy+4y^2} = \frac{6x}{3x+2y}$
  при $3x \neq -2y$, и
- $\frac{m+n+m^3+n^3}{m+n} = m^3 + n^3$ или $1 + m^3 + n^3$ наместо
  $\frac{m+n+m^3+n^3}{m+n} = 1 + m^2 - mn + n^2$ при $m \neq -n$.

Наведените грешки се резултат на неправилната примена на својствата на дропките, како и на погрешните аналогии пренесени од скратувањето на дропки од видот $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$ на дропки од видот $\frac{a+b}{a+c}$.

Во овој дел спаѓаат и следниве грешки:

- $\frac{2a-c}{a+2c} = 1$ или 0 или $\frac{a}{c}$ наместо да се каже дека оваа дропка е нескратлива, при $a \neq -2c$,
- $\frac{x+y}{x-y} = 0$ или 2 или $\frac{2}{0}$ наместо да се каже дека оваа дропка е нескратлива при $x \neq y$,
- $\frac{x^{\cancel{2}}-y^{\cancel{2}}}{\cancel{x}-\cancel{y}} = x - y$ наместо $\frac{x^2-y^2}{x-y} = x + y$ при $x \neq y$,
- $\frac{a^{\cancel{2}}+1}{\cancel{a}+1} = a + 1$ или $\frac{a^{\cancel{2}}+\cancel{1}}{\cancel{a}+\cancel{1}} = a$ наместо да се каже дека оваа дропка е нескратлива при $a \neq -1$, и
- $\frac{x-y}{x-y} = 0$ наместо $\frac{x-y}{x-y} = 1$ при $x \neq y$.

Овие грешки се исклучително груби. Потребно е секој ученик да осознае, дека да се скрати една дропка, значи да се поделат броителот и именителот со еден ист број, или со еден ист моном, или со еден ист полином различен од нула, а не поништување на слични мономи. Исто така, за да се отстранат грешките од овој вид учениците треба да осознаат дека резултатот од скратувањето не може да биде нула кога дропката е различна од нула, т.е. броителот е различен од нула.

Во оваа група спаѓаат и грешки од следниве видови:

- $\frac{2a^{x+1}}{a^{2(x+1)}}=\frac{2}{a^2}$ наместо $\frac{2a^{x+1}}{a^{2(x+1)}}=\frac{2}{a^{x+1}}$, при $a\neq 0$, и
- $\frac{(a-b)^3}{(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^3}=\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$ наместо да се каже дека дропката е нескратлива при $a\neq -b$.

Овие грешки се должат на поистоветувањето на скратување на дропки со скратување на степеновите показатели во степените. Отстранувањето на овие грешки е можно само ако учителот обезбеди сознателно усвојување на операциите и решавање на доволен број елементарни примери. Притоа, за да учениците се убедат дека направиле грешка пожелно е во резултатите кои ги добиле да се заменуваат бројни вредности за променливите.

б2) *Грешки при собирање и одземање на алгебарски дропки*

Овие видови грешки можат да се поделат во следниве групи:

- $\frac{x+y}{z}+\frac{u+v}{t}=\frac{x+y+u+v}{z+t}$ наместо
  $\frac{x+y}{z}+\frac{u+v}{t}=\frac{xt+yt+uz+vz}{zt}$ при $zt\neq 0$,
- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{x+y+z}$ или $\frac{1}{xyz}$ или $\frac{1}{x+y+z}$ наместо
  $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{yz+zx+xz}{xyz}$ при $xzy\neq 0$,
- $\frac{5}{x+2}-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x+4}=\frac{4}{3x+7}$ наместо
  $$\frac{5}{x+2}-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x+4}=\frac{5(x+1)(x+4)-3(x+2)(x+4)+2(x+2)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+4)}$$
  при $x\notin\{-4,-2,-1\}$.

За отстранување на овие грешки треба да се искористат знаењата на учениците, стекнати при собирањето на дропки со различни именители. Секако, покорисно е пред да се усвојува собирањето и одземањето алгебарски дропки истото да се подготви со повторување на споменатите операции.

Други грешки кои се јавуваат во овој дел се од следниов вид:

- $\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}=\frac{a+b+a-b}{ab}=\frac{2a}{ab}=\frac{2}{b}$ наместо $\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}$, при $ab\neq 0$,
- $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=\frac{3+2-4}{xyz}=\frac{1}{xyz}$ наместо $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=\frac{3yz+2zx-4xy}{xyz}$ при $xyz\neq 0$

и истите можат да се отстранат на ист начин како и претходно разгледаните грешки.

Понатаму, учениците при собирањето и одземањето на алгебарските дропки прават и грешки како што се:

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{b+5}=\frac{5a+c}{b+5}$ наместо $\frac{a}{b}+\frac{c}{b+5}=\frac{a(b+5)+bc}{b(b+5)}$ при $b \neq 0,-5$, и
- $\frac{2x-3}{x^2+y}+\frac{2x+1}{x+y}=\frac{2x-3+(2x+1)x}{x^2+y}$ наместо

  $\frac{2x-3}{x^2+y}+\frac{2x+1}{x+y}=\frac{(2x-3)(x+y)+(2x+1)(x^2+y)}{(x+y)(x^2+y)}$ при $y \neq -x,-x^2$

кои се должат на грешките $b\,|\,(b+5)$ и $x+y\,|\,(x^2+y)$. Појавата на овие грешки може да се спречи ако сознателно се усвои делењето на полиноми, за што е потребен соодветен систем задачи.

Дел од грешките кои ги прават учениците се должат и на испуштање на именителот, што е последица од погрешната аналогија добиена од решавањето на дробнорационални равенки. Последното покажува дека учениците сознателно не ги усвоиле својствата на равенството. Примери за вакви грешки се:

- $\frac{3}{2a^2b}+\frac{4}{a^3b^3}=3ab^2+8$ наместо

  $$\frac{3}{2a^2b}+\frac{4}{a^3b^3}=\frac{3ab^2+8}{2a^3b^3} \text{ при } ab \neq 0,$$

- $\frac{x}{y}-\frac{z}{t}=xt-zy$ наместо

  $$\frac{x}{y}-\frac{z}{t}=\frac{xt-zy}{yt} \text{ при } yt \neq 0, \text{ и}$$

- $\frac{2m^2-2}{m^2+mn}+\frac{m-1}{m+n}=2(m^2-1)+m(m-1)$ наместо

  $$\frac{2m^2-2}{m^2+mn}+\frac{m-1}{m+n}=\frac{2(m^2-1)+m(m-1)}{m(m+n)} \text{ при } m \neq 0,-n.$$

Конечно, последната група грешки која се јавува во овој дел се должи на неправилното ослободување од заградите, што повторно е резултат од лошото усвојување на операциите со полиноми. Ќе наведеме два примера на ваков вид грешки:

- $1-\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{2ab-a^2+b^2}{2ab}$ наместо

  $$1-\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{2ab-a^2-b^2}{2ab}=\frac{-(a-b)^2}{2ab} \text{ при } ab \neq 0, \text{ и}$$

- $\frac{a+1}{2a-4}-\frac{a-1}{3a-6}=\frac{a+1}{2(a-2)}-\frac{a-1}{3(a-2)}=\frac{3a+3-2a-2}{6(a-2)}=\frac{a+1}{6(a-2)}$ наместо
  $\frac{a+1}{2a-4}-\frac{a-1}{3a-6}=\frac{a+1}{2(a-2)}-\frac{a-1}{3(a-2)}=\frac{3a+3-2a+2}{6(a-2)}=\frac{a+5}{6(a-2)}$ при $a\neq 2$.

б3) *Грешки при множење и делење на алгебарски дропки*

Во првата група грешки при множење и делење на алгебарски дропки се грешките од следниот вид:

- $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{bc}$ наместо

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b} \text{ при } b\neq 0 \text{, и}$$

- $x\cdot\frac{y}{z}=\frac{xy}{xz}$ наместо

$$x\cdot\frac{y}{z}=\frac{xy}{z} \text{ при } z\neq 0,$$

и овие грешки учениците можат самостојно да ги откријат, бидејќи ако го скратат добиениот резултат ќе добијат дропка која е еднаква на еднииот множител, што покажува дека операцијата не е добро извршена.

Во втората група грешки спаѓаат грешките од видот

- $x\cdot\frac{a}{b}=\frac{bx}{a}$ наместо

$$x\cdot\frac{a}{b}=\frac{ax}{b} \text{ при } b\neq 0 \text{, и}$$

- $\frac{x}{t}\cdot\frac{y}{z}=\frac{xz}{yt}$ наместо

$$\frac{x}{t}\cdot\frac{y}{z}=\frac{xy}{zt} \text{ при } zt\neq 0,$$

и овие грешки се должат на недоволно усвоените знаења за операции со дропки, што резултира со лошо обопштување на истите.

Конечно, учениците ги прават и следниве видови грешки:

- $\frac{a}{b}:c=\frac{ac}{b}$ наместо $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}$ при $bc\neq 0$, и
- $x:\frac{y}{z}=\frac{xy}{z}$ наместо

$$x:\frac{y}{z}=\frac{xz}{y} \text{ при } zy\neq 0,$$

кои повторно се должат на лошото усвојување на операциите со дропки.

IV ГЛАВА
РАВЕНКИТЕ ВО УЧИЛИШНИОТ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Темата “Равенки” секогаш имала централно место во училишниот курс по математика. Нејзиното изучување започнува (јавно или нејавно) во прво одделение од основното образование, а завршува во четврти клас од средното образование. Освен како цел на изучување, равенките во училишниот курс се користат и како средство при изучување на скоро сите останати теми: изрази, функции и нивни графици, плоштини и волумени, неравенства итн.

Општо познато е дека равенките се апарат, кој е во функција на практичната дејност на човекот и дека без користење на равенките практично е невозможно да се усвојуваат знаењата од геометријата, физиката, астрономијата, електротехниката, економијата и многу други науки. Поради сето ова равенките во наставата се користат, од една страна како средство за остварување врска со практиката, а од друга-служат за мотивирање на учениците и создавање на проблемски ситуации. Затоа, една од најважните цели на наставата по математика е формирањето на умеења за моделирање со помош на равенки.

Темата “Равенки” во предметната настава во основното образование најчесто е ги опфаќа следниве содржини:

a) знаења за поимот равенка со една и повеќе непознати, корен (решение) на равенка и еквивалентни равенки,
b) знаења за својствата на равенките и видовите равенки,
c) знаења за методите за решавање на равенките: непосредна проверка, аритметичко решавање, еквивалентни равенки, следственост, замена на непознати, графичко решавање итн.,
d) умеења (задолжителни за сите ученици) за решавање на равенки од видот $ax+b=0$ и $(ax+b)(cx+d)=0$,
e) моделирање со помош на линеарни равенки на едноставни проблеми.

1. ОСНОВНИ ПОИМИ ВО ТЕМАТА “РАВЕНКИ”

Основни поими на оваа тема се: равенка, корен (решение) на равенка, еквивалентност и следственост во множеството равенки.

На прашањето: “Што е равенка?”, во литературата можат да се сретнат повеќе одговори. Ќе разгледаме некои од нив.

Дефиниција 1'. *Равенка* е равенство, кое содржи променливи и е исполнето само за некои вредности на променливите. Ако равенството е исполнето за сите вредности на променливите, тогаш го нарекуваме *идентитет.*

Како што може да се види, родовиот поим во дефиниција 1' е *равенство*, а видовиот признак е конструкција од два искази и тоа, *равенството содржи променливи* и *равенството е исполнето само за некои вредности на променливите*. Основниот недостаток во оваа дефиниција, заради кој таа не смее да се користи, е, дека поимот равенка се дефинира со вредностите на променливите, кои го задоволуваат равенството. Имено, поимот равенка се дефинира во зависност од множеството нејзини решенија, а не се знае дали и колку решенија има равенката. Притоа, одговорот на прашањето дали и колку решенија има равенката се добива откако равенката ќе се реши, што значи дека учениците се во ситуација да користат поим без суштински да го усвојат. Освен тоа некои равенства, како на пример $ax+b=0$ се пројавуваат на различен начин: за $a\neq 0$ според дадената дефиниција тоа е равенка (исполнета е само за $x=-\frac{b}{a}$), а за $a=0$ не е равенка, бидејќи за $b=0$ е исполнето за секоја вредност на променливата и за $b\neq 0$ не е исполенто ниту за една вредност на променливата.

Во литературата може да се сретне и следнава дефиниција на равенка.

Дефиниција 1”. Равенството на две функции, разгледани во иста дефинициона област го нарекуваме *равенка.*

Оваа дефиниција е резултат на традиционалното сфаќање на поимот функција, т.е. на поврзувањето на поимот функција со поимот израз. Позитивна страна на дефиниција 1” е тоа што уште со самата дефиниција вниманието на учениците се насочува кон врската на равенките и функциите. Меѓутоа оваа дефиниција не е во согласност со современото сваќање на поимот функција (бинарна релација или вид на пресликување).

Описната дефиниција на А. Фуше:

“*Равенка е равенство, кое не е реално, но кое тежнееме да стане реално, без да сме сигурни дека тоа е можно*.”

всушност е добар показател за проблемите кои произлегуваат при дефинирањето на поимот равенка, за кои претходно говоревме. Отстранувањето на овие проблеми не е ниту малку едноставно, особено ако се имаат предвид дополнителните тешкотии кои произлегуваат од користењето на знакот “=“ при воведување на поимот равенка. Имено, пред да се користи овој знак за воведување на поимот равенка, тој се користи за да се изрази идентичност (совпаѓање) на еден објект претставен на различни начини, на пример

$$12 = 2 \cdot 6 = 2^2 \cdot 3,\ \overline{MN} = \overline{PQ},\ \overline{MN} = 12cm,\ \angle\beta = 12^\circ \text{ и } a(bc) = (ab)c,$$

т.е. за искажување на реално равенство. Затоа, учениците имаат фиксна претстава за улогата на овој знак, која може да биде пречка во осознавањето дека кај равенките знакот “=“ се користи во синтактичка смисла за формирање на одреден вид предикат (равенство), кој за некои вредности на променливата може да биде вистинит исказ, а за други невистинит исказ.

Во следните разгледувања ќе се обидеме да дадеме доволно прифатлива дефиниција за поимот равенка, во која се отстранети споменатите недостатоци.

Дефиниција 2. Нека $f(x)$ и $g(x)$ се два изрази со променлива x и дефинициони области D_1 и D_2, соодветно и $D \subseteq D_1 \cap D_2$. Записот

$$f(x) = g(x),\ x \in D \tag{1}$$

го нарекуваме *равенство со една променлива и со дефинициона област* D.

Како што можеме да видиме, земаме дека дефиниционата област D или е вистинско подмножество на $D_1 \cap D_2$ или $D = D_1 \cap D_2$. Притоа, во првиот случај со задавањето на равенството (1) мора да се зададе и дефиниционата област D, а во вториот случај D може и да не се задава, бидејќи пресекот $D_1 \cap D_2$ е еднозначно определен и може да се определи дефиниционата област D на равенството (1). Јасно, во овој случај дефиниционата област се совпаѓа со множеството допустливи вредности на променливата во даденото равенство.

Сега да го разгледаме равенството $\frac{2x}{x+1} = 3$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Бројот -3 го задоволува ова равенство (се добива 3=3), а бројот 1 не го задоволува равенството (се добива 1=3). Според тоа, во општ случај за некои вредности на променливата x равенството (1) преминува во точно бројно равенство и притоа велиме дека тие вредности го задоволуваат равенството, а за други вредности на променливата x- во неточно бројно равенство. Последното е причина за воведување на следниве дефиниции.

Дефиниција 3. Ако равенството (1) е исполнето за секоја вредност на променливата x од D, ќе велиме дека изразите $f(x)$ и $g(x)$ се *идентични* во множеството D, или дека равенството $f(x)=g(x)$ е *идентитет* во D.

Дефиниција 4. Равенството (1) го нарекуваме *равенка со една непозната*, ако е зададена задача да се најдат сите вредности на променливата x, кои припаѓаат на D и кои го задоволуваат равенството (1).

Дефиниција 5. За бројот x_0 ќе велиме дека е *корен* (*решение*) *на равенката* $f(x)=g(x)$, $x \in D$ ако $x_0 \in D$ и $f(x_0)=g(x_0)$.

Множеството од сите корени го нарекуваме *множество решенија на равенката* и ќе го означуваме со M

Од дадените дефиниции следува, дека со секоја равенка непосредно се поврзани две множества: дефиниционата област D и множеството решенија M , каде $M \subseteq D$, а $D \subseteq D_1 \cap D_2$. Во однос на дефиниционата област D, множеството решенија M може да е нејзино вистинско подмножество, $M \subseteq D$ и $M \neq D$, или да се совпаѓа со D, $M=D$. Понатаму, множеството решенија M може да е празно (равенката нема решенија), да е конечно или бесконечно.

Дефиницијата 4 за равенка со една непозната, во која $D \subseteq D_1 \cap D_2$, има повеќе дидактички предности, и тоа:

a) користи релативно попознати поими за учениците, како израз со променлива, равенство со променлива (предикат), исполнување на равенство,

b) слободата да се избира D меѓу подмножествата на $D_1 \cap D_2$ се усогласува со нејавното користење на равенките во претходните одделенија каде често пати се решаваат задачи од видот: “За кој од броевите 2, 4, 121, 132, 254, кога ќе се замени x во равенството $x+315=436$ ќе се добие точно равенство?”, за која

$$D=\{2, 4, 121, 132, 254\}, \text{ а } M=\{121\},$$

c) задачите за чие решавање треба да се составуваат равенки се добро усогласени со ваквото барање за дефиниционата област

D, бидејќи изразите кои се составуваат во овие задачи, во зависност од реалните ситуации, кои овие изрази ги опишуваат, имаат дефинициони области, кои најчесто се подмножества од множеството допустливи вредности на изразите,

d) усвојувањето $D \subseteq D_1 \cap D_2$, дозволува да се составуваат достапни и ефективни задачи за усвојување на знаењата за еквивалентност и следственост и теоремите поврзани со овие поими, и

e) ги насочува учениците кон сознателно усвојување на поимите.

Во множеството равенки со една непозната се воведуваат две релации и тоа еквивалентност и следственост, кои лежат во основата на два методи за решавање на равенките.

Дефиниција 6. Нека се дадени равенките

$f(x) = g(x), x \in D$ и со множество решенија M , (1)

$f(x) = g(x), x \in D'$ и со множество решенија M'. (2)

Ќе велиме дека равенката (2) е *следство* од равенката (1) или дека од (1) *следува* (2), ако $D \subseteq D'$ и $M \subseteq M'$.

Последното значи дека сите корени на равенката (1) се корени и на равенката (2), меѓутоа равенката (2) може да има и други корени. Фактот дека (2) е следство од (1) најчесто го означуваме со $(1) \Rightarrow (2)$.

Дефиниција 7. Ако $D = D'$ и $M = M'$, тогаш ќе велиме дека равенките (1) и (2) се *еквивалентни* и ќе пишуваме $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Јасно еквивалентноста на равенките може да се зададе и со помош на поимот следство. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 7'. Ќе велиме дека равенката (1) е *еквивалентна* на равенката (2), ако (2) следува од (1) и (1) следува од (2).

Понатаму, пожелно е да се докаже дека дефинициите 7 и 7' се еквивалентни и дека релацијата еквивалентни равенки во множеството равенки е релација за еквиваленција. Во натамошните разгледувања на учениците треба да им се објасни дека оваа релација го разбива множеството равенки со една непозната на класи на еквиваленција, при што сите равенки кои припаѓаат на една иста класа се еквивалентни меѓу себе и имаат едно исто множество решенија. Притоа, за секоја класа еден од претставниците има вид $x = a$ или е дисјункција на вакви равенки и задачата да се реши дадена равенка всушност е да се најде претставникот на класата од овој вид.

Во литературата се среќаваат и други дефиниции за поимот еквивалентни равенки, како на пример: “Равенките (1) и (2) се еквивалентни во $D_0 = D \cap D'$ ако $M = M'$.” Меѓутоа, ако се примени претходната дефиниција, тогаш оваа релација нема да биде релација за еквиваленција, бидејќи може да е нарушена транзитивноста, како што е случај во следниов пример.

Пример 1. Имаме,

$$x(x-5)=0, D=\mathbf{R} \Leftrightarrow \frac{x(x-5)^2(x-7)^2}{(x-5)(x-7)}=0,\ D'=\mathbf{R}\setminus\{5,7\} \text{ во } D_0 = D\cap D'$$

$$\frac{x(x-5)^2(x-7)^2}{(x-5)(x-7)}=0,\ D'=\mathbf{R}\setminus\{5,7\} \Leftrightarrow x(x-7)=0, D''=\mathbf{R}$$

но, $x(x-5)=0, D=\mathbf{R} \not\Leftrightarrow x(x-7)=0, D''=\mathbf{R}$. ♦

Понатаму, други автори имаат различен пристап, кога множествата решенија на равенките се празни множества и кога тие не се празни множества. Имено, ако $M = M' \neq \varnothing$ ја прифаќаат дефиницијата 7, а ако $M = M' = \varnothing$, тогаш земаат дека равенките се еквивалентни независно од тоа какви се дефинициoните области. Меѓутоа, дефиницијата 7 има повеќе предности од логички и дидактички карактер, како што се:

a) релацијата еквивалентни равенки е релација за еквивалентност,

b) дефиницијата е една иста без разлика дали $M = \varnothing$ или $M \neq \varnothing$,

c) ги скратува и олеснува формулациите на теоремите за еквивалентни равенки, и

d) поврзувањето на поимот еквивалентни равенки со дефиниционата област D од учениците бара да ги следат промените на D при замена на една равенка со друга, при што во општ случај може да дојде до појава на нови корени или до загуба на корени, што значи дека оваа дефиниција на некој начин ја намалува можноста за грешки,

па затоа е пожелно истата да се користи во практиката.

2. ТЕОРЕМИ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНИ РАВЕНКИ И НИВНИ ПОСЛЕДИЦИ

Алгоритмите за решавање на равенките се засноваат на теоремите за еквивалентни равенки, па затоа ќе разгледаме некои од нив.

Теорема 1. Ако едната страна на равенката

$$f(x) = g(x),\ x \in D \tag{1}$$

на пример $f(x)$, се замени со изразот $\varphi(x)$, кој е идентичен на неа во дефиниционата област D, тогаш добиената равенка е еквивалентна на равенката (1). ♦

Барањето изразите $f(x)$ и $\varphi(x)$ да се еквивалентни во областа D е суштествено, што може да се види од следниов пример.

Пример 1. Равенките

$$x-3=2x+1 \text{ и } \frac{(x-3)(x+5)}{x+5}=2x+1$$

не се еквивалентни, бидејќи во **R** изразите $x-3$ и $\frac{(x-3)(x+5)}{x+5}$ не се еквивалентни. Имено, тие се еквивалентни во $\mathbf{R}\setminus\{5\}$. ♦

Теорема 2. Ако изразот $\varphi(x)$ е определен во дефиниционата област D на равенката (1), тогаш равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$f(x)+\varphi(x) = g(x)+\varphi(x),\ x \in D. \tag{2}$$

Доказ. а) Нека x_0 е корен на равенката (1). Тогаш $f(x_0) = g(x_0)$ е точно равенство и $\varphi(x_0)$ е број. Според тоа, броевите $f(x_0)+\varphi(x_0)$ и $g(x_0)+\varphi(x_0)$ се еднакви, па затоа x_0 е корен на равенката (2).

б) Обратно, ако x_1 е корен на равенката (2), тогаш

$$f(x_1)+\varphi(x_1) = g(x_1)+\varphi(x_1)$$

е точно бројно равенство и $\varphi(x_1)$ е број. Значи, $f(x_1) = g(x_1)$ е точно бројно равенство, па затоа x_1 е корен на равенката (1).

Конечно, од а) и б) следува тврдењето на теоремата. ♦

Без да користиме симболи, теорема 2 можеме да ја искажеме на следниов начин:

"*Ако на двете страни на една равенка додадеме еден ист израз, кој е дефиниран во дефиниционата област на равенката, тогаш добиената равенка е еквивалентна на дадената*."

Овде да забележиме дека често пати наместо теорема 2 се користи следнава нејзина последица.

Последица 1. Собирците од едната страна во равенството на равенката можат да се префрлат на другата страна со спротивен знак.

Теорема 3. Ако изразот $\varphi(x)$ е определен во дефиниционата област D на равенката (1), тогаш од равенката (1) следува равенката

$$f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x), x \in D. \tag{3}$$

Доказ. Нека x_0 е корен на равенката (1). Тогаш $f(x_0) = g(x_0)$ е точно равенство па затоа се точни и следниве равенства

$$f(x_0) - g(x_0) = 0, \quad [f(x_0) - g(x_0)]\varphi(x_0) = 0 \text{ и } f(x_0)\varphi(x_0) = g(x_0)\varphi(x_0).$$

Последното значи дека x_0 е корен на равенката (3), т.е. (1) $\Rightarrow$ (3). ♦

Теорема 4. Ако изразот $\varphi(x)$ е определен во дефиниционата област D на равенката (1) и тој не се анулира во D, тогаш равенката (1) е еквивалентна на равенката (3). ♦

Теоремите 1, 2 и 4 за еквивалентни равенки се теориска основа на методот на еквивалентност за решавање на равенките. Со нивна помош дадената равенка се заменува со еквивалентна на неа, се додека не се добие основна равенка. Затоа при користењето на овој метод проверката дали најдениот корен е навистина решение и на почетната равенка не е задолжителен елемент на решението.

3. ЕТАПИ ПРИ ИЗУЧУВАЊЕТО НА РАВЕНКИТЕ

Според целите на изучување на равенките, според содржината на темата и според логичкото рамниште на реализирање на училишниот курс по математика можат да се разграничат четири етапи при изучувањето на темата "Равенки": подготвителна етапа, етапа на усвојување на теоријата за еквивалентни равенки и линеарни равенки, етапа за усвојување на алгоритмите за решавање на нелинеарни алгебарски равенки и етапа за усвојување на трансцедентни равенки. Во основното образование се реализираат првите две етапи, па затоа во натамошните разгледувања ќе се осврнеме само на нив. Притоа во секое одделение изучувањето на темата "Равенки" се реализира на ниво соодветно на дадена етапа и се врши подготовка за преминување кон следната етапа.

3.1. ПОДГОТВИТЕЛНА ЕТАПА

Подготвителната етапа се реализира во почетното образование и дел од V и VI одделение во основното образование. Во оваа етапа равенките не се основна цел на наставата, туку имаат помошна улога и се средство при изучувањето на бројните множества, плоштините на рамнинските фигури, алгебарските изрази итн.

Во оваа етапа не се воведува поимот равенка, но сепак учениците се оспособуваат да ги препознаваат равенките и нивните корени. Практиката покажува дека во завршните разгледувања е допустливо да се користат термините равенка и корен (решение) на равенка и дека користењето на овие термини на учениците не им создава поголеми тешкотии. Во оваа етапа се решаваат само равенки од видовите:

i) $x+a=b$, *ii*$_1$) $x-a=b$, *ii*$_2$) $a-x=b$,

iii) $ax=b$, *iv*$_1$) $x:a=b$, *iv*$_2$) $a:x=b$.

Притоа овие равенки се решаваат последователно во множеството на природни броеви, на обичните дропки, на десетичните дропки, на целите броеви и на рационалните броеви. Во оваа етапа, најчесто се користат два начина за решавање на равенките и тоа:

- со непосредна проверка и
- аритметички.

При решавањето на равенки со непосредна проверка во условот се задава конечна дефинициона област D и со непосредна проверка се констатира кој од броевите во D е корен на равенката.

Пример 1. Со кој од броевите 6, 8, 11, 12, 14, 21, 23 или 25 треба да се замени x во $38-x=24$ за да се добие точно тврдење? ♦

Решавањето на задачи како во пример 1 овозможува остварување на следниве конкретни цели:

- усвојување на операциите во дадено бројно множество и
- нејавно усвојување на поимот корен на равенка.

Притоа, дефиниционата област D може и да не биде дадена и повторно да се постигнат истите цели, дури и на повисоко рамниште. Последново може да се реализира со задачи слични на задачите во следниов пример.

Пример 2. Дополни, за да добиеш точно равенство

а) $123+\square=145$, б) $81:\square=27$,

в) $123-\square=111$ и г) $\square\cdot 11=165$. ♦

Аритметичкиот начин подразбира користење на врската меѓу резултатот и компонентите при операциите. Постапката за решавање на задачи со помош на аритметичкиот начин ќе ја покажеме на следниов пример.

Пример 3. Реши ја равенката

$$44-7x=58.$$

Решение. Непозната се содржи во намалителот. Намаленикот и резултатот се дадени броеви. Од дефиницијата на операцијата одземање добиваме

$$44=58+7x.$$

Во збирот на десната страна на последната равенка вториот собирок е непознат, па од својствата на операцијата собирање имаме

$$7x=44-58 \text{ т.е. } 7x=-14.$$

Во последната равенка на десната страна имаме производ на два броја, при што едниот множител е непознат. Според тоа,

$$x=-14:7 \text{ т.е. } x=-2. \ ♦$$

Пред да преминеме на разгледување на втората етапа при изучувањето на равенките, да забележиме дека во задолжителниот минимум на првата етапа треба да се вклучи усвојувањето на равенките од видовите *i*)-*iv*). Притоа пожелно е да се вклучат и посложени задачи за составување равенки и некои равенки, во кои непознатата се содржи на неколку места, како што е покажано во следниов пример.

Пример 4. Реши ги равенките

а) $4x+6x-14=16$,

б) $13x-9x+113=461$ и

в) $0,3x-4=16-0,2x$.

Решение. Ќе покажеме како треба да се решава само последната равенка.

Левата страна на равенката е $0,3x-4$ и се разгледува како еден број (нејавно користење на замена), а во десната $0,2x$ е намалител. Од дефиницијата на разликата имаме

$$0,2x+0,3x-4=16$$

и ако за збирот $0,2x+0,3x$ го примениме дистрибутивното својство добиваме

$$0,2x+0,3x=(0,2+0,3)x=0,5x,$$

т.е. равенката го добива видот

$$0,5x-4=16.$$

Повторно од дефиницијата на разликата добиваме

$$0,5x=20,$$

па затоа

$$x=20:0,5=40. \ \blacklozenge$$

3.2. ЕТАПА ЗА УСВОЈУВАЊЕ НА ТЕОРИЈАТА ЗА ЕКВИВАЛЕНТНИ РАВЕНКИ И НА ЛИНЕАРНИТЕ РАВЕНКИ

Во оваа етапа усвојувањето на линеарните равенки е една од основните цели на наставата. Притоа се изучуваат линеарните равенки со една и повеќе непознати, параметарските равенки и евентуално рационалните равенки кои се еквивалентни на линеарни равенки. Меѓутоа, во оваа етапа равенките се користат и како средство за усвојување на операциите со реалните броеви и усвојување на алгебарските изрази.

Прво се дефинираат познати поими, како што се равенка и корен на равенка, и нови поими (еквивалентни равенки, решение на равенка со повеќе непознати), потоа се усвојуваат теоремите за еквивалентни равенки и со нивна помош се решаваат равенки, т.е. се усвојува методот на еквивалентност. Од претходно изнесеното следува, дека во оваа етапа се остварува повисок степен на апстрактност и на формализација при изучувањето на равенките. Затоа е неопходно да се одговори на прашањето: како да се постапи на почетокот од оваа етапа? Одговорот на ова прашање не е едноставен и еднозначен, но сепак, ако се земат предвид знаењата и умеењата со кои учениците располагаат и бројните експерименти во врска со овој проблем, најдобро е линеарните равенки со една непозната да се изучат непосредно после усвојувањето на операциите со цели изрази.

Во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на некои проблеми, кои се специфични за оваа етапа.

3.2.1. УСВОЈУВАЊЕ НА ТЕОРИЈАТА ЗА ЕКВИВАЛЕНТНИ РАВЕНКИ

Прв проблем со кој се среќаваме во овој дел е која дефиниција за еквивалентни равенки да се искористи 7 или 7'. Во дефиниција 7 се користат поимите множества, дефинициона област, корен, множество решенија и еднакви множества, а во дефиниција 7' освен овие поими се користат и поимите подмножество, следува и конјункција. Оттука е јасно дека дефиницијата 7' има посложена структура. Освен тоа, поимот следува во множеството равенки се користи дури при усвојувањето на ирационалните равенки или евентуално при некои начини на решавање на дробно-рационални равенки. Затоа, сметам дека во случајот предност треба да и се даде на дефиницијата 7.

Што се однесува до начинот на воведување на поимот еквивалентни равенки, ако се имаат предвид возраста на учениците и искуството, треба да се користи конкретно-индуктивниот метод. Притоа, бидејќи на почетокот се изучуваат линеарните равенки, може да се допушти при првото запознавање со поимот еквивалентни равенки да не се споменува заедничка дефинициона област на двете равенки. Меѓутоа, во работата на секција, со конкретни примери, вниманието на учениците треба да се насочи на усвојување на поимот еквивалентни равенки со помош на дефиниционата област D. Последното може да се направи со помош на примери од следниов вид.

Пример 5. Дали равенките $(x-1)(x+2,2)=0$ и $4x-4=0$ се еквивалентни во:

i) множеството цели броеви,
ii) множеството позитивни рационални броеви, и
iii) множеството рационални броеви. ♦

Што се однесува до теоремите за еквивалентни равенки, од истите причини тие не треба да се докажуваат, но нивната вистинитост треба да се констатира или индуктивно или со помош на карактеристични примери. Така, со помош на примери треба да се констатира, дека ако еден број е корен на дадена равенка, тогаш тој е корен и на друга равенка која се добива со додавање на еден ист израз на двете страни на дадената равенка.

Пример 6. Прво констатираме дека бројот 5 е корен на равенката $4x+7=3x+12$. Потоа, од двете страни на дадената равенка последователно ги додаваме изразите $3x, -3x, -3x-7$ и ги добиваме равенките

$$4x+7+3x=3x+12+3x,$$
$$4x+7-3x=3x+12-3x,$$
$$4x+7-3x-7=3x+12-x-7,$$

соодветно. Конечно, со проверка констатираме дека бројот 5 е корен на секоја од овие равенки. ♦

При разгледувањето на примерите од овој вид учениците треба да ја сфатат полезноста од ова својство, па затоа треба примерите да бидат одбрани во оваа насока. Имено, таков е случајот со додавање на изразот $-3x-7$ на равенката $4x+7=3x+12$ во пример 6, при што се добива равенката $x=5$.

Друг начин за усвојување на претходната теорема за еквивалентни равенки е даден во следниов пример.

Пример 7. Десната страна на равенката $4x=5+3x$ е збир на два собирци, а левата е нивниот збир. Тогаш, собирокот 5 е еднаков на разликата од збирот и другиот собирок, т.е. $4x-3x=5$. Затоа корените на равенките $4x=5+3x$ и $4x-3x=5$ се едни и исти. Меѓутоа, втората равенка можеме да ја добиеме и ако на правата од двете страни на равенството го додадеме изразот $-3x$, при што добиваме

$$4x-3x=5+3x-3x \text{ т.е. } 4x-3x=5. \ ♦$$

Откако ќе ја презентираме содржината на теоремите за еквивалентни равенки, потребно е со помош на погодно избрани примери да се формираат умеењата за користење на овие теореми. На пример, тоа може да се направи со следниов систем задачи.

Пример 8. *i*) Зошто се еквивалентни равенките:

$$2x-3=5 \text{ и } 2x=5+3;$$
$$12x-8x=6 \text{ и } 4x=6;$$
$$5x=22 \text{ и } x=4,4;$$
$$x+8=0 \text{ и } x=-8.$$

ii) Дали се еквивалентни равенките

$6x-2x=12$ и $4x=12$;
$4x-6=2x$ и $4x+2x=6$;
$3x=12$ и $0,3x=1,2$,
$2x-5=3$ и $2x-5+5=10$;
$3x+2=x-3$ и $4x=-5$.

iii) Со помош на теоремите за еквивалентни равенки од равенката

$$4-3x=12+2x$$

составете пет равенки еквивалентни на неа. ♦

Во првата етапа на непознатата x гледавме како на конкретен непознат број, а на равенката како на реално равенство. Меѓутоа, сега непозната x треба да се сфати како променлива, која може да прима различни вредности и за некои од нив може да се добие точно равенство, а за други неточно равенство. Затоа, освен умеењата да се извршат операции со реални броеви и изрази, да се пресметува бројна вредност на израз, потребно е да се решаваат и дополнителни системи задачи, као во следниов пример.

Пример 9. *i*) Последователно замени го x со 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, најди ги и спореди ги бројните вредности на изразите $x-3$ и $x+2$; $3x-2$ и $2x+1$; x и $4-x$.

ii) Дали е точно равенството $3x-4=4x-6$ ако

$$x=0, x=2, x=3, x=-5?$$

iii) За кои вредности на x од множеството $\{-2, 2, -1, 1, 0, 5, 6\}$ е точно равенството $3x+5=x+2$. ♦

Забелешка. Непосредно пред да се отпочне со усвојување на темата "Равенки" потребно е да се повторат и систематизираат својствата на бројните равенства, кои покасно треба да се искористат при усвојување на теоремите за еквивалентни равенки. Исто така, усвојувањето на оваа тема треба добро да се мотивира. Последното може да се направи со задавање на нетривијални практични задачи, слични на задачата од следниов пример.

Пример 10. Тодор влегувајќи во берберница, после 6 часот наутро забележал дека стрелките на часовникот зафаќаат агол од 90°, а при излегувањето, нешто пред 7 часот, за бележал дека стрелките зафаќаат агол од 75°. Колку време Тодор се задржал во берберницата? ♦

Теоријата за еквивалентни равенки не се усвојува лесно од учениците во основното образование. Меѓутоа, таа и не е во целост задолжителна за решавање на равенките, па затоа не треба прерано да се формализира и можно е равенките да се усвојуваат во една поблага варијанта, како на пример:

i) на почетокот описно се воведуваат поимите равенка и корен и се изучуваат следниве две својства на равенките:

- Ако двете страни на една равенка ги помножиме или поделиме со некој број, различен од нула, тогаш корените на равенката не се менуваат.
- Ако еден собирок на равенката префрлиме од едната на другата страна, но со спротивен знак, тогаш корените на равенката не се менуваат.

ii) Со помош на својствата разгледани во *i*) можат да се решаваат равенки еквивалентни на равенките

$$ax+b=0,\ a\neq 0;\ 0\cdot x=b \text{ и } (ax+b)(cx+d)=0$$

при што не се користи поимот еквивалентни равенки. Во овој дел се решаваат и задачи со составување равенки.

iii) Покасно, евентуално во осмо одделение, може да се воведе нова дефиниција за равенка и да се изучуваат параметарските равенки, еквивалентни на равенката $ax=b$ и равенка од видот $|ax+b|=c$.

iv) Теоријата за еквивалентни равенки да се воведе непосредно пред изучувањето на дробно-линеарните или ирационалните равенки, или при изучувањето на неравенствата.

3.2.2. УСВОЈУВАЊЕ НА ЛИНЕАРНИ ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ

Истражувањата покажуваат дека параметарските равенки имаат важна улога во развојот на истражувачките и творечките способности на учениците, потоа во корелацијата на наставата по математика со наставата по физика итн. Меѓутоа, при усвојувањето на параметарските равенки учениците имаат доста потешкотии, бидејќи:

i) за секоја параметарска равенка освен дефиниционата област на променливата, се определува и множеството допустливи вредности на параметрите,

ii) при решавањето на една иста равенка, најчесто можат да се искористат повеќе начини,

iii) при решавањето на параметарска равенка најчесто мора да се разгледаат голем број различни случаи,

iv) секоја параметарска равенка најчесто е обопштување на непребројливо многу конкретни равенки, и *v)* знаењата и умеењата, поврзани со решавањето на параметарските равенки, се со нагласен творечки карактер.

Имајќи го предвид претходно кажаното, пожелно е изучувањето на параметарските равенки да се отпочне со практична задача, како што е покажано во следниов пример.

Пример 11. Базен кој собира $1000m^3$ вода се полни од една цевка, од која за еден час можат да се вливаат $160m^3$ вода, а се празни од друга цевка со која може да се регулира истекувањето на водата од базенот. За колку време ќе се наполни празниот базен, ако се отворат истовремено и двете цевки и ако од втората цевка за еден час можат да истекуваат $p\,m^3$ вода, каде $p \in \{10, 20, 40, 60, 80, 100\}$.

Со вака зададената задача се постигнуваат две цели, и тоа:

i) се создава позитивна мотивација за изучување на параметарските равенки и

ii) со решавање на конкретната задача се открива суштината на поимот параметарска равенка.

Имено, за да се реши задачата, треба да се решат шест задачи од ист тип (табела 1).

Вредност на p	Равенка	x
10	$160x - 10x = 1000$	$x = \frac{1000}{160-10} = \frac{20}{3}$ часа
20	$160x - 20x = 1000$	$x = \frac{1000}{160-20} = \frac{50}{7}$ часа
40	$160x - 40x = 1000$	$x = \frac{1000}{160-40} = \frac{25}{3}$ часа
60	$160x - 60x = 1000$	$x = \frac{1000}{160-60} = 10$ часа
80	$160x - 80x = 1000$	$x = \frac{1000}{160-80} = 12,5$ часа
100	$160x - 100x = 1000$	$x = \frac{1000}{160-100} = \frac{50}{3}$ часа
p	$160x - px = 1000$ $(160 - p)x = 1000$	$x = \frac{1000}{160-p}$ часа, за $p \neq 160$ $0 \cdot x = 1000$ за $p = 160$ нема корен

Табела 1

Откако ќе се состават и ќе се решат шесте равенки, треба да се изврши споредување на истите и на учениците им се објаснува дека можеме да направиме обопштување, при кое сите равенки можат да се запишат со помош на равенката $160x - px = 1000$. Понатаму, учениците треба да осознаат дека секое решение на почетните шест равенки може да се добие од решението $x = \frac{1000}{160-p}$ на последната равенка, за што е доволно за параметарот p да се замени соодветната вредност.

Сега веќе можеме да ги дадеме новите термини и да го воведеме поимот линеарна параметарска равенка со една непозната. Понатаму, со решавање на конкретни задачи, како на пример

$$2x + p = 16,$$
$$(a-2)x = a(a-2)(a+2), \ ,$$
$$(a+1)x = b+5$$

се доаѓа до сознанието дека решавањето на една параметарска равенка всушност означува да се одговори на следниве прашања:

- За кои вредности на параметрите равенката има корени?
- За кои вредности на параметрите равенката има конечен број решенија и како тие се наоѓаат?
- За кои вредности на параметрите равенката има бесконечно многу решенија и како тие се наоѓаат?

Притоа, задачите кои ќе се обработуваат на часовите за усвојување на нови знаења мора да бидат систематизирани така, што ќе може во погоден момент да се задаваат претходно споменатите прашања. ♦

На крајот, доколку програмата предвидува и решавање на нелинеарни равенки, треба усвојувањето на нови знаења добро да се подготви. За таа цел пожелно е да се искористат равенките од видот $(x-a)(x-b)=0$ и $|x-a|=b$. Исто така, во подготовката за изучување на нелинеарните равенки може да се разгледаат и задачи дадени во следниов пример.

Пример 12. а) Состави равенка која има два корени.

б) Состави равенка чии корени се 3 и -2. ♦

4. ИЗУЧУВАЊЕТО НА СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Практиката покажува дека изучувањето на систем две линеарни равенки со две непознати треба да се реализира со конкретно-индуктивниот метод. За таа цел може да се искористи следниов пример.

Пример 1. Илија купил 16 тетратки и 9 моливи кои ги платил 590 денари, а Митре од истата продавница купил 18 тетратки и 10 моливи за кои платил 660 денари. Колку пари чини една тетратка, а колку еден молив?

На почетокот задачата треба да се реши со помош на една линеарна равенка. Од првиот услов на задачата имаме: ако една тетратка чини x денари, тогаш за 16 тетратки се платени $16x$ денари, па затоа за 9 моливи се платени $590-16x$ денари, што значи еден молив чини $\frac{590-16x}{9}$ денари. Аналогно, од вториот услов на задачата добиваме дека еден молив чини $\frac{660-18x}{10}$ денари, па затоа

$$\frac{590-16x}{9}=\frac{660-18x}{10}.$$

Решение на последнава равенка е $x=20$, што значи дека една тетратка чини 20 денари. Сега наоѓаме дека еден молив чини

$$\frac{590-16\cdot 20}{9}=30 \text{ денари.}$$

Следно што треба да се направи е да се покаже како оваа задача може да се реши ако се воведат две букви за двете непознати, т.е. ако цената на една тетратка ја означиме со x, а цената на еден молив ја означиме со y. Од условите на задачата ги добиваме равенките

$$16x+9y=590$$
$$18x+10y=660.$$

Според тоа, составивме две равенки. За да одговориме на поставеното прашање треба да ги определиме непознатите x и y, кои истовремено треба да ги задоволуваат двете равенки, или со други зборови треба да ги решиме двете равенки истовремено. На учениците им соопштуваме дека во ваков случај велиме дека имаме систем од две линеарни равенки со две непознати и дека притоа ја користиме ознаката

$$\begin{cases}16x+9y=590\\18x+10y=660.\end{cases}$$

На учениците им предлагаме самостојно да проверат, дали најдените вредности за цените на тетратката и моливот ги задоволуваат равенките, т.е. дали се тие решение на системот равенки. ♦

После разгледувањето на претходниот пример можеме да ги дадеме следниве описни дефиниции на систем равенки и решение на систем од две равенки со две непознати равенки:

1) Две или неколку равенки формираат систем, ако едноимените непознати во нив означуваат една иста големина.
2) Да се реши систем од две равенки, значи да се најдат такви вредности на непознатите, при кои секоја од равенките на системот преминува во точно равенство. Подредениот пар од такви вредности на непознатите го нарекуваме решение на системот.

Во натамошните разгледувања на учениците треба да им се соопшти општиот вид на систем од две линеарни равенки со две непознати:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

За да научиме да решаваме систем од две линеарни равенки со две непознати, прво треба да совладаме некои својства на една линеарна равенка со две непознати, т.е. на равенката од видот: $ax + by = c$. За таа цел можеме да ја разгледаме, на пример, следнава задача.

Пример 2. Разликата меѓу некој број и половина од друг број е еднаква на $\frac{1}{2}$. Најди ги тие броеви!

Со x да го означиме првиот број, а со y-вториот број. Од условот на задачата ја добиваме равенката $x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. равенката $y = 2x - 1$.

Понатаму, на учениците треба да им објасниме, дека да се реши оваа равенка значи да се најде таков пар вредности x и y со чија замена равенката преминува во точно равенство. Сега, ја составуваме таблицата

x	-0,1	0	0,1	0,5	1	2	6	10	...
$y = 2x - 1$	-1,2	-1	-0,8	0	1	3	11	19	...

од што заклучуваме дека линеарна равенка со две непознати има бесконечно многу решенија. ♦

Во натамошните разгледувања пожелно е да ја докажеме следнава теорема.

Теорема 1. Графикот на секоја линеарна равенка со две непознати е права. ♦

Во следниот чекор, користејќи ја теорема 1 заклучуваме дека секоја точка (x, y) од правата е решение на разгледуваната линеарна равенка со две непознати, па затоа секоја линеарна равенка со две непознати има бесконечно многу решенија.

Понатаму, ако во пример 2 воведеме уште еден услов, на пример: збирот на броевите е еднаков на 5, тогаш го добиваме следниов пример.

Пример 3. Разликата меѓу еден број и половината од друг број е еднаква на $\frac{1}{2}$, а нивниот збир е 5. Најди ги тие броеви!

При истите ознаки, како во пример 2 го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

кој е еквивалентен на системот равенки

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x - 5. \end{cases}$$

Да составиме таблица за некои вредности на x и соодветните вредности на y. Добиваме:

x	-0,1	0	0,1	0,5	1	2	3	6	7	10	...
$y = 2x - 1$	-1,2	-1	-0,8	0	1	3	5	11	13	19	...
$y = -x + 5$	5,1	5	4,9	4,5	4	3	2	-1	-2	-5	...

Од таблицата заклучуваме дека едно решение на системот е $x = 2, y = 3$. Овде може да се даде забелешка, дека натамошното пресметување на y, при други вредности на x нема смисла бидејќи со зголемувањето на x во едниот случај имаме зголемување на y, а во другиот случај намалување на y. ♦

Во натамошните разгледувања, треба да се усвојат следниве методи за решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати:

- графички метод,
- метод на замена, и
- метод на спротивни коефициенти,

при што најдобро е методите да се усвојуваат по наведениот редослед. Имено, заедно со теорема 1 графичкиот метод оформува природна целина, која содржински не е обемна, па затоа истиот треба да се усвои одма после наведената теорема. Понатаму, одвоено треба да се усвојат останатите два метода, на кои со оглед на стандардната методска постапка нема детално да се осврнеме.

Забелешка. Ако имаме доволно наставно време и предвидените содржини се усвоени од скоро сите ученици, тогаш пожелно е да се разгледаат примери на системи равенки со параметри и системи равенки кои се решаваат со воведување на нови непознати. Имено, добро е да се разгледаат системи од видовите разгледани во следниве два примера.

Пример 4. Реши го системот

$$\begin{cases} \frac{27}{x-y}+\frac{11}{2x-3}=20 \\ \frac{12}{x-y}-\frac{3}{2x-3}=1. \end{cases}$$

Воведуваме помошни непознати: $\frac{1}{x-y}=u, \frac{1}{2x-3}=v$, при што $x \neq y$ и $2x \neq 3$ и го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} 27u+11v=20 \\ 12u-3v=1 \end{cases}$$

чие решение е $u=\frac{1}{3}, v=1$. Понатаму, со замена за u и v го добиваме системот

$$\frac{1}{x-y}=u, \frac{1}{2x-3}=v$$

кој при $x \neq y$ и $2x \neq 3$ е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-3=1 \end{cases}$$

чие решение е $x=2, y=-1$. ♦

Пример 5. Решение на системот

$$\begin{cases} ax+by=\frac{a^2+b^2}{a+b} \\ bx+ay=\frac{2ab}{a+b} \end{cases}$$

е

$$x=\frac{a}{a+b},\ y=\frac{b}{a+b}$$

при услов $a^2-b^2 \neq 0$. ♦

5. ГРЕШКИ КОИ ГИ ПРАВАТ УЧЕНИЦИТЕ ПРИ ИЗУЧУВАЊЕ НА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА И СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Бидејќи многу прашања од материјалот по алгебра се сведуваат на решавање на линеарни равенки и системи линеарни равенки, потребно е навремено да се откријат пропустите во знаењата на учениците и истите да се корегираат. Притоа, пожелно е учителот да ги бележи пропустите кои учениците во претходните генерации ги правеле и да превзема превентивни активности овие грешки да не ги прават учениците од следните генерации.

Грешките кои ги прават учениците при изучување на овој материјал ќе ги поделиме во неколку групи.

а) Прва група

- од $\frac{y-3}{4}-\frac{2y+4}{2}=2$ се добива $y-3-2(2y+4)=2$ наместо

$$y-3-2(2y+4)=2\cdot 4$$

- од

$$\begin{cases} 3y-4x=1, & |\cdot(-2) \\ 2y+3x=18, & |\cdot 3 \end{cases}$$

се добива

$$\begin{cases} -6y+8x=1, \\ 6y+9x=18, \end{cases} \text{ наместо } \begin{cases} -6y+8x=-2, \\ 6y+9x=54. \end{cases}$$

Грешките од овој вид се резултат на површното усвојување на теоремите за еквивалентни равенки. Притоа, кога учениците извршуваат еквивалентни трансформации, од нив не се бара да ги искажуваат теоремите кои ги применуваат. Во случајот учениците треба да знаат дека се множат и двете страни на равенството, а не само едната страна. Оваа грешка почесто се среќава, ако учениците решавале повеќе равенки кај кои десната страна е еднаква на нула. За да се избегне овој вид грешки, добро е учениците да се навикнуваат дополнителниот множител да го запишуваат на двете страни од равенството и тоа посебно треба да го прават кога десната страна е еднаква на нула.

б) Втора група

- од $21x=7$ се добива $x=3$, наместо $x=\frac{1}{3}$, и

- од $x:2=7$ се добива $x=\frac{1}{14}$ наместо $x=14$.

За да се избегне овој вид грешки потребно е од учениците да се бара да прават проверка. Освен тоа, неопходно е да се решаваат равенки чии решенија се дропки од видот $\frac{m}{n}$ или мешани броеви, бидејќи решавањето само на примери чии решенија се цели броеви кај учениците може да формира фиксна претстава дека решението на секоја равенка е цел број.

в) Трета група

- од $5x=8$ се добива $x=8-5$ наместо $x=\frac{8}{5}$,
- од $mx=n$ се добива $x=n-m$ наместо $x=\frac{n}{m}$, при $m\neq 0$ и
- од $(a-b)x=c$ се добива $x=c-a+b$ наместо $x=\frac{c}{a-b}$, при $a\neq b$.

Отстранувањето на овој вид грешка е можно ако учителот во својата работа често пати задава задачи од видот: “Да се најде x, ако $ax=b$, $a\neq 0$.”

г) Четврта група

- од $-4x=12$ се добива $x=\frac{12}{4}=3$ наместо $x=\frac{12}{-4}=-3$,
- од $-ax=bc$ се добива $x=\frac{bc}{a}$ наместо $x=\frac{bc}{-a}=-\frac{bc}{a}$, при $a\neq 0$,
- од $15-x=23$ се добива $x=23-15=8$ наместо $-x=8$ и $x=-8$, и
- од $a-y=b+c$ се добива $y=b+c-a$ наместо $y=a-b-c$.

Отстранувањето на овие грешки е можно со постапно решавање на равенките, при што од учениците треба да се бара да вршат проверка на решението на задачата.

д) Петта група

Исклучително груби грешки се прават при решавање на параметарските равенки. Најчести грешки кои ги прават учениците се следниве:

- од $1-\frac{2}{a}=\frac{3}{ax}$, при $a\neq 0$ и $x\neq 0$ последователно се добива:
  $ax-2x=3$, $(a-2)x=3$ и $x=\frac{3}{a-2}$,
- од $\frac{a-x}{x}+a=\frac{a}{x}$ при $x\neq 0$ последователно се добива:
  $a-x+ax=a$, $(a-1)x=0$ и $x=\frac{0}{a-1}=0$.

Овде учениците не го определуваат множеството допустливи вредности на непознатата и на параметарот, делат со израз за кој претходно не кажуваат дека треба да е различен од нула, не проверуваат дали најденото решение е решение на почетната равенка и слично. Отстранувањето на овие груби грешки е можно само ако учениците постапно, со помош на учителот, решат доволен број примери, со кои ќе го совладаат алгоритмот за решавање на параметарските равенки.

д) Шеста група

Чести се грешките кои се резултат од решавање на линеарни равенки во кои непознатата е и под знакот за апсолутна вредност. Имено, равенката $|x-3|+|x-4|-1=0, x\in\mathbf{R}$ некои ученици ја решаваат на следниов начин:

$|x-3|\geq 0, |x-4|\geq 0$, па затоа $x-3\geq 0, x-4\geq 0$ и заклучуваат дека $x\geq 4$. Понатаму, равенката $|x-3|+|x-4|-1=0$ ја запишуваат како $x-3+x-4-1=0$ и наоѓаат $x=4$.

Основна причина за овој вид грешки е лошото усвојување на поимот апсолутна вредност. Имено, тргнувајќи од дефинцијата на апсолутна вредност учениците треба да запишат

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & x\geq 3 \\ 3-x, & x<3 \end{cases} \text{ и } |x-4|=\begin{cases} x-4, & x\geq 4 \\ 4-x, & x<4 \end{cases}$$

и потоа множеството реални броеви да го поделат на интервалите $(-\infty,-3)$, $[3,4)$ и $[4,+\infty)$, за да конечно на секој од овие интервали ја трансформираат дадената равенка и ја решат. Отстранувањето на овој вид грешки е можно со решавање на доволен број примери во кои ќе се совлада алгоритмот за ослободување од знакот за апсолутната вредност.

6. СОСТАВУВАЊЕ МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ

Основно средство при оспособувањето на учениците за составување математички модели се задачите. За учениците да се оспособат да составуваат математички модели, потребно е системот задачи да ги содржи следниве подсистеми задачи за:

- формирање и усвојување нови поими,
- усвојување на теоремите за еквивалентни равенки,
- усвојување знаења и умеења за решавање линеарни и еквивалентни на нив равенки,

- усвојување знаења и умеења за решавање системи линеарни равенки,
- составување модели со помош на линеарни равенки и нивни системи,
- повторување и утврдување на знаењата од претходно изучениот материјал итн.

Во следниве разгледувања ќе се осврнеме на задачите за составување модели со помош на линеарни равенки и нивни системи. Овие задачи можат да бидат земени од различни научни дисциплини (физика, хемија, географија итн.) и од секојдневниот живот, па затоа истите се одликуваат со голема разнообразност, иако според својата структура се многу слични. Обично со говорниот јазик се опишуваат неколку множества $M_i, i=1,...,k$ броеви, подредени парови броеви, подредени тројки броеви итн. и се бара множествата броеви $M_i, i=1,...,k$ да се опишат со математички средства. Карактерот и бројот на множествата M_i, како и начинот на нивното задавање и составувањето на математичкиот модел можат да послужат за класификација на текстуалните задачи (задачи со равенства, задачи со неравенства, задачи со една непозната, задачи со две, со три итн. непознати и др.).

Најчесто поимот математички модел се воведува и во јавно се користи во средното образование при изучувањето на равенките, неравенките и нивните системи. Меѓутоа, текстуалните задачи во наставата по математика, а со самото тоа и математичките модели, се присутни уште од I одделение и подготовката за усвојување на поимот математички модел најчесто се реализира во сите одделенија на основното образование. Сепак, може да се каже дека текстуалните задачи (задачи со зборови) доволно не се користат во наставата по математика. Да разгледаме една задача.

Пример 1. Кракот на рамнокрак триаголник е 1,5 пати поголем од неговата основа. Пресметај ја обиколката на триаголникот, ако должината на основата е еднаква на:

а) $5,6cm$, б) $12,4cm$, в) $3,04m$ и д) $a\ m$.

Конкретна и основна цел на оваа задача е утврдување на знаењата за десетични дропки. Но, освен тоа се актуелизира и утврдување на поимите рамнокрак триаголник, крак, основа и обиколка.

Во подготвителна смисла оваа задача може да се искористи, ако пред да се најде одговорот на поставеното прашање, во решението на задачата под а) се состават изрази за: кракот $1,5\cdot 5,6$; обиколката

$$5,6+1,5\cdot 5,6+1,5\cdot 5,6 \text{ или } 5,6+1,5\cdot 5,6\cdot 2 \text{ или } 5,6(1+2\cdot 1,5) \text{ или } 5,6\cdot 4,$$

со што всушност се откриваат и порационални решенија. ♦

Математичкото моделирање, како дејност, е доста сложено, па затоа и умеењето да се решаваат задачи со математички модели се формира доста тешко. Тоа се состои од неколку поедноставни умееја:

a) разбирање на практичната задача,
b) преведување на описот на практичната задача од нематематички во математички јазик,
c) решавање на составените равенки или нивни системи, и
d) толкување на решението на математичката задача во областа на практичната задача, т.е. дополнителна работа врз задачата.

Секое од претходните четири умееја, особено првите две, е доста сложено, па затоа истите одделно ќе ги разгледаме.

Ученикот сознателно ја разбрал задачата, кога може да одговори на следниве прашања:

- Какви објекти се разгледуваат во задачата (движење, смеси, купување итн.)?
- Од кои големини се определени овие објекти (брзина, време и пат, количество материја, цена, количество стока, вредност итн.)?
- Какви се врските меѓу овие големини?
- Колку случаи се разгледуваат (три движења, две купувања итн.)?
- Какви зависности има меѓу вредностите на големините при различните случаи?
- Кои големини се дадени, а кои се бараат?

Во многу задачи дел од зависностите се дадени нејавно, т.е. произлегуваат од текстот на задачата и се содржат во другите науки, како што е случајот со физиката кога станува збор за рамномерните и рамномерно забрзаните движења. Затоа, при разгледувањето на вакви задачи учителот треба да ги запознае учениците со зависностите кои произлегуваат од другите науки или од секојдневниот живот.

Во многу задачи пожелно е информациите во задачата да се систематизираат и да се запишат во соодветна таблица. Последното помага при составување на математичкиот модел, особено ако станува збор за задача која содржи повеќе големини и голем број врски меѓу нив.

По правило, преведувањето на описот на практичната задача од нематематички во математички јазик е пропратено со бројни тешкотии. Тешкотиите најчесто се состојат во:

- избор на непознатите големини,
- составувањето на изразите,
- определувањето на дефиниционите множества на изразите и
- составувањето на равенките.

При составувањето на равенките учениците прават груби грешки, како што е изедначување на мерки на разнородни величини, кои воопшто не можат да се споредуваат. За да се избегнат ваквите грешки потребно е, пред да се состават равенките, учениците да се потсетат дека може да се срамнуваат само еднородни мерки, а во случај кога мерките не се еднородни, меѓу нив не може да се стави знак за равенство. Понатаму, учениците треба да согледаат дали единиците со кои се измерени величините се еднакви и во случај кога имаме различни единици да утврдат која единица е поголема и сите големини да ги изразат во една од мерните единици.

Во постапката на составување на равенките учениците треба да си го постават и прашањето дали сите податоци дадени во условот се искористени и ако не се, тогаш како можат да се искористат. Ова е од посебна важност, бидејќи токму целосната анализа на расположивите податоци е основа за определеноста на дадена задача, т.е дали задачата е определена, неопределена, преопределена или противречна.

Преведувањето на описот на практична задача од нематематички во математички јазик ќе го илустрираме со следниов пример.

Пример 2. Илија требало да стаса од местото A во местото B за определено време. За еден час тој поминал $4km$ и пресметал, дека ако се движи со истата брзина, ќе задоцни $45\min$. Затоа, тој ја зголемил брзината на одење за $1km/h$ и пристигнал во местото B пет минути пред определеното време. Колку време патувал Илија од местото A до местото B?

Разбирање на задачата. Задачата е од движење. Колку тела се движат? Едно-Илија. Колку движења се разгледуваат? Три: прво движење од A до C (местото до кое Илија стигнал после еден час), второ движење од C до B со брзина од $4km/h$ и трето движење од C до B со брзина од $5km/h$. Какви се движењата? Тие се рамномерни. Кои величини учествуваат во рамномерни движења? Брзина-V, време-t и пат s, па затоа за трите движења има девет вредности (мерки) на овие величини. Кои од овие мерки се дадени? Брзината на трите движења, патот и времето на првото движење. Кои не се дадени? Патот и времето на второто и третото движење. Што се бара? Времето за кое Илија ќе го помине патот од A до B, кое е за 1 час поголемо од времето x за кое Илија ќе го помине патот од C до B при третото движење. Податоците ги внесуваме во следнава табела:

	$V, \quad km/h$	$t, \quad h$	$s, \quad km$
прво движење од A до C	$4,$ [1]	$1,$ [2]	$4,$ [3]
второ движење од C до B	$4,$ [4]	$x+\frac{5}{6},$ [7]	$4(x+\frac{5}{6}),$ [9]
трето движење од C до B	$5,$ [5]	$x,$ [6]	$5x,$ [8]

Во досегашните разгледувања одговоривме на прашањата, кои од вредностите на величините во задачата се познати, кои се непознати и кои се бараат. Сега треба да ги најдеме зависностите меѓу познатите и непознатите величини.

Составување на моделот. Движењето е рамномерно, па затоа за секое движење важи $s=Vt$. При третото движење Илија пристигнал 5 минути порано во местото B, а при второто ќе пристигнел 45 минути подоцна, па затоа времето при второто движење е за 50 минути подолго отколку времето при третото движење. Сега останува да пополниме полињата 7, 8 и 9 во табелата, т.е. да ги изразиме останатите непознати.

Решавање на равенките. Патиштата при второто и третото движење се еднакви, па затоа $5x=4(x+\frac{5}{6})$, $x>0$. Решение на последната равенка е $x=\frac{10}{3}$, што значи дека бараното време е $(1+\frac{10}{3})h=4h\,20\min$. ♦

Како што видовме, задачата во претходниот пример доведе до составување линеарна равенка со една непозната. Воопшто говорено, задачите кои доведуваат до составување линеарна равенка со една непозната во општ случај можат да се решат и со составување систем линеарни равенки со повеќе непознати. Понатаму, кога во математичкиот модел учествуваат само равенки, можни се следниве ситуации:

a) бројот на независните равенки, кои можат да се состават е еднаков на бројот на непознатите,

b) бројот на равенките е помал од бројот на непознатите, и

c) бројот на независните равенки е поголем од бројот на непознатите и во овој случај со сигурност можеме да кажеме дека системот нема решение.

Во случајот а) можат да се најдат сите непознати и затоа е сеедно од која непозната и од која равенка ќе го започнеме решавањето. Притоа влијанието може да биде само во тоа дали решението ќе биде пократко или подолго.

Во случајот b), кога бројот на равенките е помал од бројот на непознатите и нема други ограничувања за непознатите, тогаш системот е противречен или неопределен, т.е. нема или има бесконечно многу решенија. Во училишната практика од оваа група обично се решаваат такви задачи, при кои можат да се најдат само некои непознати или дел од непознатите, кои не зависат од другите непознати или пак постојат дополнителни услови со чија помош од бесконечно многуте решенија треба да се изберат конечно многу решенија. Овие задачи се потешки за учениците, па затоа во општ случај при решавањето за непознати се сметаат само бараните величини, а останатите непознати величини најчесто ги земаме како параметри. Типични претставници на оваа група задачи се задачите со работа, во кои количеството работа не е дадено и не се бара. Притоа, количеството работа најчесто се јавува како множител (делител) од двете страни на равенката и како истото е различно од нула, можеме да земеме дека е еднакво на 1. Меѓутоа, постојат задачи во кои количеството работа не може да се земе дека е еднакво на 1, и ова ја усложнува ситуацијата, бидејќи се покажува дека е доста тешко на учениците да им се објасни кога количеството работа може да се земе дека е еднакво на 1, а кога не. Затоа, најдобро е ако количеството работа е непознато, тогаш да го означиме со некоја буква-параметар. Така, добиваме параметарска работа, која ја решаваме по бараната непозната и чие решение најчесто не зависи од параметарот.

V ГЛАВА
НЕРАВЕНСТВАТА И НЕРАВЕНКИТЕ ВО УЧИЛИШНИОТ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Темата “Неравенства и неравенки” е една од потешките теми во училишниот курс по математика. Практиката покажува дека за оваа тема не се постигнати стандарди во обемот на материјалот кој се изучува, а со самото тоа и расположливото наставно време. Секако ова е една од причините за честото менување како на обемот, така и на структурата на темата.

1. ЗНАЧЕЊЕ, СОДРЖИНА И МЕСТО НА ТЕМАТА ВО УЧИЛИШНИОТ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Како што може да се види и од самото име на темата, таа во училишниот курс по математика има два аспекти: изучување на релациите на неравенства и изучување на неравенствата со непознати. Со првиот аспект се поврзани бројните неравенства, нивните својства и задачите за докажување неравенства, а со вториот аспект се поврзани неравенствата со непознати (неравенките) и методите за нивно решавање.

Во основното образование се формираат поимите за различните релации на неравенства $(\neq, <, >, \leq, \geq)$, при што обично се изучуваат и дел од својствата на точните неравенства и нивните примени. Овде исто така се изучуваат и линеарните неравенки со една непозната и нивните системи, при што неминовно се усвојува релацијата еквивалентни неравенки и теоремите поврзани со оваа релација. Темата “Неравенства и неравенки” е погодна за работа со надарените ученици за математика, при што не само што се негуваат нивните творечки способности, туку има можност на завидно ниво, нејавно, да се усвојат дел од структурните знаења за множеството реални броеви, за што подоцна ќе стане збор.

При изучувањето на оваа тема, освен со наведените знаења учениците треба да се здобијат и со следниве умеења:

- примена на својствата на бројните неравенства при докажување на елементарни неравенства и споредување на бројни изрази,
- препознавање на видот на неравенка со непознати,
- проверка дали даден број е решение на дадена неравенка и правилно запишување на множеството решенија на неравенка,
- наоѓање на пресек и унија на интервали,
- примена на теоремите за еквивалентни неравенки за наоѓање на основна неравенка, еквивалентна на дадена неравенка,
- проверка дали даден број е решение на дадена неравенка или систем неравенки,
- решавање систем линеарни неравенки со една непозната и правилно запишување на множеството решенија,
- решавање на елементарни текстуални задачи со помош на неравенки, и
- неравенства меѓу средините и примена на истите при докажување на елементарни неравенства.

2. ТЕШКОТИИ ПРИ ИЗУЧУВАЊЕ НА ТЕМАТА

Природно, секое учење е пропратено со бројни тешкотии, од кои не е исклучок и изучувањето на темата “Неравенства и неравенки”. Притоа, тешкотиите можат да бидат објективни и субјективни. Во нашите разгледувања ќе се осврнеме на објективните тешкотии, бидејќи со превземање на соодветни активности истите можат да се ублажат, а во некои случаи и да се надминат.

За да ги согледаме објективните тешкотии кои се јавуваат при изучување на оваа тема ќе направиме споредба со веќе разработената тема “Равенки”. Објективно, темата “Неравенства и неравенки” е значително потешка од темата “Равенки”, од следниве причини:

a) за равенство постои само една релација, додека за неравенство имаме пет релации $(\neq, <, >, \leq, \geq)$,

b) множеството решенија на една равенка најчесто е конечно, а додека множеството решенија на една неравенка по правило е бесконечно, и во записите на решенијата на неравенките, на пример,

$$x > 2, \; x < -1 \text{ или } x > 3,$$

броевите $2, -1, 3$ не се решенија на неравенките, што не е случај кај равенките,

c) учениците во другите теми ги усвојуваат релациите за еднаквост, паралелност, сличност итн. и сите овие се рефлексивни, транзитивни и симетрични, што не е случај кај релациите за неравенства, меѓу кои рефлексивни се само три $(\leq, \geq, \neq)$,

d) во множеството неравенки постојат повеќе теореми за еквивалентност отколку во множеството равенки, и

e) алгоритмите за решавање, како на линеарните, така и на нелинеарните равенки се значително посложени отколку алгоритмите за решавање на равенките.

Постои мислење дека аналогијата, која важи меѓу равенките и неравенките, е доволна за успешно изучување на неравенките. Застапниците на ова мислење најчесто се повикуваат на фактот дека основните поими како неравенка, множество решенија, еквивалентност во множеството неравенки, како и теоремите за еквивалентни неравенки се дефинираат на сличен начин како и соодветните поими и теореми при изучување на темата “Равенки”. Имајќи го предвид претходно изнесеното нема да се задржуваме на изборот на дефинициите на споменатите поими и методиката на нивното изучување. Меѓутоа, треба да се има предвид, дека молчаливото прифаќање на така наречениот принцип на “паралелност”, што значи дека изучувањето на неравенствата и неравенките да следува одма после изучувањето на равенките и тоа во значително помало учебно време, има и свои негативни моменти. Имено, аналогијата со равенките има и свое негативно влијание, бидејќи после изучувањето на равенките и нивните системи кај учениците се формира траен затворен систем на врски кои се непосреден одраз на соодветната теорија. Непосредното преминување кон изучување на неравенките претпочита брзо и ефикасно да се трансформира овој систем, што само по себе често пати е непремостлива тешкотија за учениците. Освен тоа, проблемот е и психолошки. Имено, вака стекнатите знаења и умеења најчесто не се трајни и тие после извесен временски интервал бледнеат, при што му отстапуваат место на знаењата за равенките на чие изучување е посветено поголемо внимание.

3. ЕТАПИ ПРИ ИЗУЧУВАЊЕ НА ТЕМАТА

Слично, како при изучување на равенките, и оваа тема се изучува во неколку етапи.

Прва етапа (подготвителна). Оваа етапа го опфаќа периодот од I до VI-VII одделение и во неа неравенствата не се основна цел на обучувањето, туку се јавуваат како средство за усвојување на основните теми, т.е. формулирање и решавање задачи поврзани со основните теми. Во оваа етапа нејавно се формираат поимите за релациите помало и поголемо во изучуваните бројни множества, во множеството отсечки, во множеството агли итн. Во IV-VII одделение паралелно со равенките, во ограничен обем, треба да се отпочне со воведување на неравенките, без да се користи специјалната симболика и терминологија. Во овој дел пожелно е да се задаваат задачи како во следниов пример.

Пример 1. *i*) Со кој од броевите 0, 4, 8, 12, 16 или 20 треба да се замени x, за да се добие точно тврдење:

а) $x<15$, б) $x>5$, в) $x>5$ и $x<15$?

ii) Со кој од броевите 0,6; 0,8; 2,4 или 4,8 треба да се замени x за да се добие точно тврдење $1{,}2:x<0{,}5$?

iii) Најди три броја, такви што кога ќе се замени x во $2+x>6$ ќе се добие точно тврдење. Дали може да се најдат пет вакви броеви? ♦

Во оваа етапа се воведуваат реалните броеви, со што всушност се врши подготовка за изучување на функциите. Затоа, овде е пожелно да се усвојат записите од видот $1<x\le 3$, $2\le x<5$ и $-1\le x\le\sqrt{2}$, кои се кратки и едноставни. Сметам дека истите најлесно можат да се усвојат со погоден систем задачи, слични на задачите од следниов пример.

Пример 2. *i*) Дадено е $x\ge -2$.

а) Со кои од броевите -4; -3,3, -3; -1,5; 0,3, 1; 5; 12; 45, кога ќе се замени x ќе се добие точно тврдење?

b) Најди пет негативни броеви, со кои, кога ќе се замени x, ќе се добие точно тврдење?

c) Најди седум цели броеви, со кои, кога ќе се замени x, ќе се добие точно тврдење? Колку такви броеви можеш да најдеш?

ii) Кој од броевите 0; 0,9; -0,92; -2,1; -2,4; 0,33 се:

а) поголеми или еднакви на -2,

b) помали или еднакви на 1;

c) поголеми или еднакви на -2 и помали или еднакви на 1?

iii) Запиши ги сите цели броеви кои се поголеми од -5 и помали од 1. Запиши осум рационални броеви, кои се поголеми од -5 и помали од 1. Дали можеш да запишеш 100 такви рационални броеви?

iv) Дадено е $-2,7 \leq x < 3,9$.

a) Со кои од броевите -4; -3,3, -3; -1,5; 0,3, 1; 5; 12; 45, кога ќе се замени x ќе се добие точно тврдење?

b) Запиши ги сите цели броеви, со кои, кога ќе се замени x ќе се добие точно тврдење.

c) Запиши пет негативни и пет позитивни броеви, со кои, кога ќе се замени x ќе се добие точно тврдење.

d) Дали можеш да ги запишеш сите рационални броеви, со кои, кога ќе се замени x ќе се добие точно тврдење? ♦

Разгледувањето на овие и слични на нив системи задачи треба да заврши со воведување на поимот интервал, да се усвојат видовите интервали и начините на нивното запишување.

Втората етапа се состои во почетно систематско запознавање на учениците со теоријата на неравенствата и со решавање на линеарните неравенки со една непозната и нивните системи. Во споредба со првата етапа, оваа етапа се карактеризира со низа особености, и тоа:

a) неравенствата и неравенките се самостојна цел на обучувањето,

b) темата се усвојува на повисоко логичко ниво: поимите се дефинираат, се оперира со дефинициите, се формулираат теореми и истите се применуваат при решавање на задачи,

c) неравенките се решаваат во бесконечните множества: $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ $\mathbf{Q}^+$ и др.

d) основен метод за решавање на неравенките е методот на еквивалентност,

e) се заокружува изучувањето на поимот еквивалентни неравенки и на решавањето на линеарните неравенки и нивните системи и се врши подготовка за усвојување на нови содржини (квадратна неравенка, линеарни неравенки со две непознати и нивни системи),

f) се усвојуваат поимите за аритметичка, геометриска и хармониска средина за два позитивни реални броја и неравенствата кои важат меѓу овие средини, и

g) наставните содржини се изложуваат компактно и со поголема примена на дедуктивниот метод, па затоа истите се поместени во VIII одделение од основното образование.

Во оваа етапа, најчесто се појавува проблем како да се отпочне со нејзиното реализирање? Имено, откако ќе се утврдат неопходните знаења и умееења за бројните неравенства, кои се потребни за изучување на неравенките, треба да се премине на изучување на неравенките. Затоа, изучувањето на неравенките временски треба да се помести одма после изучувањето на целите рационални изрази и да се доведе во корелација со изучувањето на равенките. Последното е непосредна причина неравенките да се изучуваат одма после равенките. Можно е, заради големата сличност во дефинициите на многу поими и во формулациите на многу теореми, изучувањето на линеарните равенки и линеарните неравенки да се организира паралелно, т.е. да се постапи на следниов начин:

a) во првата лекција да се усвојат поимите линеарна равенка, линеарна неравенка, решение на линеарна равенка и решение на линеарна неравенка,

b) во втората лекција да се усвојат поимите еквивалентни равенки и еквивалентни неравенки,

c) во третата лекција да се усвојат соодветните теореми за еквивалентност итн.

При ваквото усвојување на материјалот задолжително мора да се акцентираат разликите меѓу дефинициите и теоремите кои се усвојуваат. На пример, теоремата за множење на неравенка со негативен множител посебно се потенцира и задачите кои се решаваат мора да бидат одбрани така, што истата повеќекратно се применува.

Меѓутоа, во практиката најчесто темите "Равенки" и "Неравенства и неравенки" се усвојуваат една по друга. Како и во претходно разгледаниот начин, така и при последователното усвојување на овие две теми задолжително мора да се акцентираат разликите меѓу дефинициите и теоремите за неравенки со оние за равенки. Последното е особено важно, бидејќи при усвојувањето на неравенките обилно се користи аналогијата со равенките.

Како што рековме изучувањето на неравенките е тесно поврзано со изучувањето на равенките, кое пак е во непосредна врска со изучувањето на соодветните функции. Затоа, природно е што изучувањето на неравенките е во тесна врска со изучувањето на соодветните функции. Притоа, корелацијата меѓу овие три теми може да се оствари на еден од следниве начини:

a) користење на графикот и својствата на дадена функција за решавање на соодветна равенка или неравенка,

b) неравенките од видот $f(x) > g(x)$ да се решаваат со испитување на множествата вредности на функциите, и

c) почесто да се задаваат задачи од видот: Нацртај ги графиците на функциите $f(x) = 4-2(x-1)$ и $g(x) = x+1$, а потоа реши ги равенката $4-2(x-1) = x+1$ и неравенките $4-2(x-1) > x+1$ и $4-2(x-1) < x+1$.

Во втората етапа од усвојувањето на оваа тема, треба да се инсистира на нагласениот теориско-множествен карактер на содржините од темата. Притоа, треба да се земе во предвид дека тешкотиите кои се јавуваат при усвојување на содржините може значително да се отстранат доколку правилно се користат соодветните поими, термини и симболи. Се разбира, последново може да се постигне доколку учениците, дури и нејавно, се здобијат со соодветна подготовка од теоријата на множества, чија потреба може да се види од следниов пример.

Пример 3. Симболичкиот запис на неравенката $(2x-3)(x+1) > 0$ е:

$$(2x-3)(x+1) > 0 \Leftrightarrow (\, 2x-3 > 0 \text{ и } x+1 > 0 \,) \text{ или } (\, 2x-3 < 0 \text{ и } x+1 < 0 \,)$$
$$\Leftrightarrow (\, x > \tfrac{3}{2} \text{ и } x > -1 \,) \text{ или } (\, x < \tfrac{3}{2} \text{ и } x < -1 \,).$$

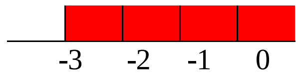
Ако со M_1, M_2, M_3 и M_4 ги означиме множествата решенија на првото, второто, третото и четвртото неравенство, соодветно после последната еквиваленција, тогаш множеството решенија на почетното неравенство е

$$M = (M_1 \cap M_2) \cup (M_3 \cap M_4)\,.$$

Оваа симболика точно го означува видот и последователноста на умствените операции кои се потребни за решавање на дадената неравенка, што ја објаснува потребата од соодветна подготовка од теоријата на множества. ♦

По правило, множеството решенија на дадена неравенка кое се решава во множествата на рационалните или реалните броеви е бесконечно. Меѓутоа, овој факт учениците тешко го усвојуваат. Затоа е неопходно прво да се формира поимот за интервал, при што посебно внимание треба да се обрне на интервалите од видот $x > a, x < a, x \geq a, x \leq a$. Понатаму, при усвојување на алгоритмот за решавање на линеарните неравенки, учителот треба да има предвид дека во различни ситуации пожелно е да се користат различни записи на решенијата на една иста неравенка, па затоа учениците треба да ги усвојат овие записи, што може да се постигне со разгледување на повеќе примери од следниов вид.

Пример 4. Множеството решенија на неравенката $x+5>2$ е $x>-3$ и истото учениците треба да се оспособат да го запишуваат и на следниве начини: $x \in (-3,+\infty)$, $M=(-3,+\infty)$, како и графички да го прикажат на бројна оска (цртеж десно). ♦



Недостатокот на задачи во кои се користат бројните неравенства и нивните својства е една од основните причини поради кои тие најчесто се изолиран дел од темата. Ова резултира со нецелосно усвојување на овие содржини, па затоа е пожелно на часовите периодично да се задаваат едноставни задачи за докажување на неравенства. Во следниов пример ќе наведеме еден таков систем задачи, за чие решавање се потребни знаења и умеења на повисоко ниво.

Пример 5. а) Докажете дека за секој реален број x точно е неравенството:

$$4x(x-1)+(5x-1)(x+1)+16>0.$$

б) Докажете дека за секој реален број x точно е неравенството:

$$(3x-4)(7x+8)-1{,}5x(24x+4)-5(1-2x)<0.$$

в) Докажете дека за секој реален број x важи:

$$4(x-3)+x(x+2)+26>0.$$

г) Докажете дека

$$\left(\frac{4a^2}{2a+1}-\frac{1}{2a+1}\right)-\left(\frac{8a^3}{2a-1}-\frac{1}{2a-1}\right)<0,$$

за секој реален број a, таков што $a \neq \pm\frac{1}{2}$. ♦

Исто така, при реализирањето на оваа тема пожелно е да се разгледаат и задачи слични на задачите од следниов пример.

Пример 6. а) Заради недоволна точност при мерењата на страните на еден триаголник добиено е дека

$$3,75 < a < 3,77;\ 4,22 < b < 4,28;\ 6,1 < c < 6,13\,.$$

Да се најде оценката за периметарот на триаголникот.

б) Страната на квадратот, измерена со точност до 0,05, има должина 12,3. Да се најде оценката на периметарот на квадратот. ♦

4. ЗАДАЧИ ВО ТЕМАТА

Во досегашните разгледувања наведовме некои задачи кои задолжително треба да се обработат во рамките на темата. Овде подетално ќе се осврнеме на системите задачи за кои сметам дека е пожелно да се разработат при изучувањето на оваа тема.

а) Задачи за усвојување на поимите и тврдењата. Оваа група задачи има нагласени дидактички функции и нивното нецелосно усвојување е една од причините за грешките кои учениците ги прават во рамките на оваа тема. Сепак, често пати задачите од оваа група се потценуваат и не се увежбуваат доволно многу вакви задачи или тие се еднострани или не се адекватни на поставената цел. Имено, ако се сака да се усвојат својствата за множење на бројно неравенство со број, тогаш се задаваат задачи слични на задачата во следниов пример.

Пример 1. Запиши ги неравенствата, кои се добиваат, ако двете страни на неравенството

а) $-4 < 2$, б) $-\frac{8}{9} < -\frac{1}{2}$, в) $3,4 < 4,3$

последователно се помножат со броевите $-1,2; -0,3; \frac{1}{2}$ и $2\frac{4}{5}$. ♦

При решавањето на задачите од овој вид учениците најчесто ги извршуваат конкретните пресметувања, а потоа го користат веќе усвоеното подредување на множеството реални броеви. Јасно, притоа воопшто не се користат својствата кои сакаме да бидат усвоени и кои всушност спаѓаат во операциони знаења. Затоа, во оваа група задачи мора да има и такви примери кои учениците ќе ги наведат да мислат на саканиот начин, т.е. да ги користат дефинициите и тврдењата кои сакаме да бидат усвоени. Во следниов пример ќе наведеме неколку такви задачи.

Пример 2. а) Запиши ги точните неравенства, кои ќе се добијат, ако двете страни на точните бројни неравенства

$$-8 < 3;\ a < 5;\ a^2 + 1 > 2;\ -3x > 8$$

последователно се помножат со броевите

$$-5;\ 0,4;\ -2;\ -4;\ c^2+1.$$

б) Без да пресметувате, запиши ги точните неравенства, кои ќе се добијат, ако со $-3,24$ и со $-1,43$ ги помножиш точните неравенства

$$(-2,345)^7 < 3,456 \text{ и } 3,5678^5 \cdot 1,2345 > 144,5678 \text{ . } \blacklozenge$$

б) Задачи за формирање умеења за решавање на линеарни неравенки со една непозната и нивни системи. Оваа група задачи е од посебен интерес, па затоа на истата се посветува особено внимание скоро во сите учебници. Имајќи го ова предвид, овде нема посебно да коментираме, меѓутоа во следниов пример ќе наведеме еден систем задачи, каков што треба задолжително да се реализира со сите ученици.

Пример 3. i) Реши ги неравенките:

а) $3x<2$, б) $4x+4>0$,

в) $3x+5<2x-7$, г) $x-(2-x)<3x+7$,

д) $\frac{x-3}{3}-1>\frac{x-1}{2}-2$, ѓ) $\frac{x+2}{3}+\frac{x}{6}<\frac{x+1}{2}-2$,

е) $(x-3)^2<x(x+1)$, ж) $(x-2)^2-3x<x(x-3)$.

ii) Реши ги системите линеарни неравенки:

а) $\begin{cases} 3x-5>7-x \\ -x+8>0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{2}<x+1 \\ 2x<2(x+1), \end{cases}$

в) $\begin{cases} 8-2x<3x-5 \\ 1-x>x+2, \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3(x-2)-5>3+x \\ 2(x-1)-3<2 \\ 4x>3(x-1). \end{cases}$ ♦

в) Задачи за формирање умеења за докажување на неравенства. Во пример 5 од точка 4.3 презентиравме една ваква група задачи, па затоа овде нема да наведуваме други примери. Задачите од овој вид се решаваат со непосредна примена на својствата на бројните неравенства. Притоа, ако треба, на пример, да докажеме дека $A>B$, каде A и B се некои изрази, тогаш најчесто постапуваме по следниов редослед:

а) ја формираме разликата $A-B$,

b) разликата $A-B$ ја трансформираме во вид погоден за наоѓање на нејзиниот знак (како производ на множители, чии знаци ги знаеме, или како збир на собирци со исти знаци), и истата ја споредуваме со нула,

c) ако добиеме $A - B > 0$, тогаш $A > B$, т.е. неравенството е докажано, а во спротивен случај неравенството не е точно.

Кога станува збор за задачите за формирање на умеења за докажување неравенства, да забележиме дека меѓу овие задачи посебна улога имаат задачите во кои се применуваат неравенствата меѓу средините. Затоа, имајќи го предвид значењето на средините и неравенствата меѓу нив, во следната точка посебно ќе се навратиме на ова прашање.

г) Задачи за составување математички модели со помош на неравенства. Значењето на овој вид задачи е определено со општите и специфичните цели на наставата по математика. Постојат многу фактори кои се јавуваат како ограничувачки во можноста за користење на овој вид задачи во основното образование, меѓу кои доминантни се:

а) учениците немаат доволно знаења и умеења од сродните наставни дисциплини во кои се јавуваат практични задачи од овој вид и

b) сложената структура на практичните задачи од овој вид.

Сепак, постојат задачи, кои претежно се сврзани со елементарни знаења и кои можат да се искористат за оваа намена. Во следниов пример ќе дадеме три такви задачи.

Пример 4. i) Една од страните на триаголникот е за $3cm$ подолга од другата страна и за $4cm$ покуса од третата. Да се најдат множествата вредности на страните, ако периметарот на триаголникот не е поголем од $40cm$.

ii) Растојанието меѓу центрите на две кружници е $24cm$ и радиусот на едната кружница е $14cm$. Најди го радиусот на другата кружница ако двете кружници:

1. се сечат,
2. се допираат,
3. немаат заедничка точка.

iii) Една парцела на земјоделско стопанство има плоштина $120ha$ и треба да се наводнува, при што дневно се полеваат $5ha$. За колку хектари дневно треба да се зголеми површината која треба да се наводнува за да наводнувањето заврши најмалку 8 дена порано. ♦

д) Задачи за работа со надарените ученици, дел од кои можат да се искористат за индивидуална работа со некои ученици во редовната настава. За овие задачи нема посебно да говориме, туку само ќе споменеме дека нивниот избор зависи од индивидуалните способности на учениците во секоја паралелка одделно. Што се однесува до задачите за работа со надарените ученици, на истите одделно ќе се осврнеме во следните две точки.

Кога станува збор за составувањето на одделните системи задачи, треба да се има предвид дека позитивно влијание врз усвојувањето на знаењата за неравенствата и неравенките има споредувањето меѓу теоремите за еквивалентност на равенките и неравенките и меѓу решавањето на линеарните равенки и неравенки. Затоа, за часовите за вежбање, повторување и систематизирање на изучениот материјал треба да се подготват такви системи задачи со кои ќе се овозможи да се изврши наведеното споредување, а истото треба да се настојува да се постигне и преку домашните работи.

5. БЕЛЕШКА ЗА ИЗУЧУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВАТА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

Природно, аритметичката, геометриската и хармониската средина на два позитивни реални броја и неравенствата меѓу овие средини се составен дел на темата “Неравенства и неравенки”. Меѓутоа овие содржини најчесто или се малку или воопшто не се застапени во наставните програми и по правило нивното усвојување се реализира само со надарените ученици за математика.

Имајќи го предвид претходно изнесеното, а и можноста кои ја даваат неравенствата меѓу средините за усвојување на дел од структурните знаења за бројните множества, сметам дека на оваа содржина треба да се посвети поголемо внимание во наставата во основното образование. Притоа, пожелно е неравенството меѓу аритметичката и геометриската теорема нагледно да се илустрира со помош на Евклидовите теореми, што секако ќе придонесе за интеграција на наставата по математика. Затоа, во овој дел подетално ќе се осврнеме на неравенствата меѓу средините.

При воведувањето на средините најдобро е да се послужиме со дедуктивниот метод, за кој сметам дека е најприфатлив и при докажување на неравенствата меѓу средините. Ова можеме да го направиме на следниов начин.

Дефиниција. Нека $a,b \in \mathbf{R}$, $a,b>0$. Броевите

$$A=\frac{a+b}{2}, \quad G=\sqrt{ab}, \quad H=\frac{2ab}{a+b}$$

ги нарекуваме *аритметичка*, *геометриска* и *хармониска* средина на a и b, соодветно.

Во следниот чекор пожелно е да се разработат неколку нумерички примери, во кои за дадени броеви ќе се пресмета секоја од воведените средини и истите ќе се споредат. Притоа учениците оправдано ќе ги претпоставаат неравенствата меѓу средините и ќе согледаат дека важи следнава теорема.

Теорема. За аритметичката, геометриската и хармониската средина се точни неравенствата $H \le G \le A$, т.е. неравенствата

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b$.

Доказ. Од очигледното неравенство $(a-b)^2 \ge 0$ ја добиваме следнава низа еквивалентни неравенства

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab \\ &\Leftrightarrow \quad (a+b)^2 \ge 4ab \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}, \end{aligned}$$

т.е. точно е десното неравенство во (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b$.

Аналогно, од неравенството $(a+b)^2 \ge 4ab$ ја добиваме следната низа еквивалентни неравенства

$$\begin{aligned} ab(a+b)^2 \ge 4a^2b^2 \quad &\Leftrightarrow \quad ab \ge (\tfrac{2ab}{a+b})^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} \ge \tfrac{2ab}{a+b}, \end{aligned}$$

т.е. точно е левото неравенство во (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b$. ♦

Откако ќе ја докажеме претходната теорема, пожелно е да се решат неколку задачи во чие решавање се применуваат претходно докажаните неравенства. Во следниов пример е презентиран еден систем задачи од ваков вид, за чие решавање се потребни знаења и умеења на повисоко ниво.

Пример 1. Докажи ги неравенствата:

а) $\frac{4a}{4a^2+1} \le 1$, за секој $a \in \mathbf{R}$

б) $a^2 + \frac{1}{4}b^2 \ge ab$, за секои $a, b \in \mathbf{R}$.

в) $\frac{1+a^2}{2a} \geq 1$, ако $a > 0$,

г) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, ако $a > 0, b > 0$,

д) $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) > 4$, ако $a > 0, b > 0$ и $a \neq b$. ♦

Како што рековме, неравенствата меѓу средините се погодни за нејавно усвојување на дел од структурните знаења за ирационалните броеви. Во следниов пример ќе покажеме како може за ирационален број од видот $\sqrt{n}, n$ не е полн квадрат, да се конструира низа рационални броеви која конвергира кон бројот $\sqrt{n}.$ Се разбира, во основното образование примената на овој алгоритам може да биде предмет на разработка само со учениците надарени за математика, бидејќи само високото операционо ниво на знаења и умеења треба да е задолжително за сите ученици.

Пример 2. Нека A, G и H се аритметичката, геометриската и хармониската средина на позитивните реални броеви a и b. Притоа е исполнето равенството

$$AH = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab = G^2. \tag{2}$$

Понатаму од очигледното неравенство $(A^2 - G^2)^2 \geq 0$ и од равенството (2) последователно добиваме

$$2G^2 A^2 \leq A^4 + G^4$$

$$2G^2 \leq A^2 + (\frac{G^2}{A})^2$$

$$2G^2 \leq A^2 + H^2$$

$$4G^2 \leq A^2 + 2G^2 + H^2$$

$$4G^2 \leq A^2 + 2AH + H^2$$

$$4G^2 \leq (A+H)^2$$

$$G \leq \frac{A+H}{2} \tag{3}$$

што значи дека геометриската средина на броевите a и b е помала од аритметичката средина $A_1 = \frac{A+H}{2}$ на нивната аритметичка и геометриска средина. Од друга страна $A_1 \leq A$ (зошто?), при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b$.

Понатаму, ако во неравенството (3) помножиме со $G > 0$ и го искористиме равенството (2), последователно добиваме

$$G^2 \le G\frac{A+H}{2}$$
$$AH \le G\frac{A+H}{2}$$
$$\frac{2AH}{A+H} \le G \tag{4}$$

што значи дека геометриската средина на броевите a и b е поголема од хармониската средина $H_1 = \frac{2AH}{A+H}$ на нивната аритметичка и хармониска средина. Од друга страна, $H_1 \ge H$ (зошто?), при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b$.

Според тоа, за броевите A_1 и H_1 важи

$$A_1 H_1 = \frac{2AH}{A+H} \cdot \frac{A+H}{2} = AH = G^2, \quad H \le H_1 \le G \le A_1 \le A. \tag{5}$$

Постапката можеме да ја продолжиме и во $k-$от чекор да ги определиме аритметичката и хармониската средина на броевите

$$A_{k-1} \text{ и } H_{k-1}:\ A_k = \frac{A_{k-1}+H_{k-1}}{2} \text{ и } H_k = \frac{2A_{k-1}H_{k-1}}{A_{k-1}+H_{k-1}},$$

соодветно. Притоа важи:

$$A_k H_k = G^2,\ H_{k-1} \le H_k \le G \le A_k \le A_{k-1}$$

и знак за равенство во последните неравенства важи ако и само ако $a = b$.

Ако $a \ne b$, од досегашните разгледувања следува дека се исполнети равенствата

$$AH = A_1H_1 = A_2H_2 = ... = A_{k-1}H_{k-1} = A_kH_k = G^2$$

и неравенствата

$$H < H_1 < H_2 < ... < H_{k-1} < H_k < G < A_k < A_{k-1} < ... < A_2 < A_1 < A$$

што значи дека броевите H_i се зголемуваат, но се помали од G, а броевите A_i се намалуваат, но се поголеми од G.

Сега на учениците им се соопштува дека, може да се докаже дека за доволно голем број k приближните равенства $H_k \approx G$ и $A_k \approx G$ се исполнети со точност до однапред зададено децимално место и дека доказот на ова тврдење нема да го презентираме, бидејќи истиот излегува надвор од рамките на нашите разгледувања, т.е. за негово разбирање се потребни поголеми теориски знаења.

Во следниот чекор треба да се очекува учениците претходните разгледувања да ги искористат за определување на квадратен корен од позитивен број c, т.е. да го формулираат следниов алгоритам:

i) Бројот c го запишуваме како производ на два позитивни броја a и b.

ii) Последователно ги определуваме средините A и H, A_1 и H_1, A_2 и H_2 итн.

iii) Постапката ја продолжуваме се додека за некој k за броевите A_k и H_k приближното равенство $A_k \approx H_k$ е исполнето до саканото децимално место. Јасно, тогаш A_k и H_k ја даваат приближната вредност на $\sqrt{c}$, со точност до саканото децимално место.

На крајот усвојувањето на алгоритмот треба да заврши со решавање на неколку нумерички примери, как на пример, да се пресмета $\sqrt{18}$ со точност до четири децимални места.

Бидејќи $18 = 3 \cdot 6$, земаме $a = 3, b = 6$. Имаме

$$A = \frac{3+6}{2} = 4,5 \qquad H = \frac{2 \cdot 3 \cdot 6}{3+6} = 4$$

$$A_1 = \frac{4,5+4}{2} = 4,25 \qquad H_1 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4,5}{4+4,5} = 4,235294$$

$$A_2 = \frac{4,25+4,235295}{2} = 4,242647 \quad H_2 = \frac{2 \cdot 4,25 \cdot 4,235295}{4,25+4,235295} = 4,24263437$$

Според тоа, со точност до четвртото децимално место имаме $\sqrt{18} \approx 4,2426$.

При разгледувањето на конкретниот пример, пожелно е да се даде и следниов коментар. Бројот 18 како производ на два позитивни броја може да се претстави на произволно многу начини. На пример, $18 = 1 \cdot 18$, па затоа во вој случај $a = 1$ и $b = 18$. Ако за овие множители ја спроведеме претходната постапка, тогаш ќе го добиеме истиот резултат, но за тоа ќе биде потребен поголем број пресметувања. Провери! Што мислиш, зошто е тоа така? ♦

Усвојувањето на вакви и слични алгоритми е неопходно за усвојување на структурните знаења, кое е од посебна важност за напредување на надарените ученици. Притоа треба да се има предвид, дека вистинскиот развој на надарените ученици треба да го претпочита нивното оспособување за идното нивно научно ангажирање, а тоа е можно само доколку надарените ученици за математика:

- целосно и што е можно на помала возраст ги усвојат научните методи,
- паралелно со усвојувањето на операционите знаења, максимално можно ги усвојуваат и структурните знаења и

- се оспособат стекнатите знаења од една математичка дисциплина да ги користат за усвојување знаења и откривање тврдења во други математички дисциплини, т.е. на математиката да гледаат како на единствена наука.

Претходно разгледаната примена на неравенствата меѓу средините нема дополнително да ја коментираме. Сепак да забележиме дека ваквите и слични примери меѓу другото придонесуваат:

- континуирано да се работи на постигнување на целите во развојот на надарените ученици за математика,
- учениците да се стекнуваат со трајни операциони и структурни математички знаења, и
- да се усвојат елементарни нумерички алгоритми со кои учениците на само што ќе се воведат во нумеричката математика, туку и ќе бидат во можност од најрана возраст да го согледаат нејзиното значење.

6. БЕЛЕШКА ЗА ИЗУЧУВАЊЕ НА НЕРАВЕНКИТЕ ВО КОИ НЕПОЗНАТАТА Е И ПОД ЗНАКОТ НА АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ И НА НЕРАВЕНКИТЕ СО ПАРАМЕТАР

Изучувањето на линеарните неравенки во кои непозната се наоѓа и под знакот на апсолутна вредност овозможува учениците да се здобијат со продлабочени знаења и умеења, како и да ги подобрат своите структурни знаења за множеството реални броеви. Имајќи го предвид фактот дека само високото операционо ниво на знаења и умеења треба да е задолжително за сите ученици, овие неравенства во основното образование треба да се разработуваат само со надарените ученици за математика.

Покрај линеарните неравенки во кои непозната е и под знакот за апсолутна вредност, пожелно е при работата со надарените ученици да се усвојат: системите линеарни неравенки со една непозната, елементарните неравенки со параметар и пословени задачи за моделирање со помош на неравенки.

Најдобро е усвојувањето на овие содржини да се организира преку решавање на погодно избрани задачи, со што учениците ќе се здобијат со соодветни знаења и умеења, кои во натамошниот период ќе овозможат сознателно усвојување на знаењата и умеењата од други области, како на пример, поимите граница на низа, граница на функција и слично. Овде нема да наведуваме примери на системи задачи кои можат да се користат за постигнување на саканите цели, но ќе се обидеме да дадеме можен редослед на работа со надарените ученици во рамките на овие содржини:

- решавање пословжени неравенки кои се еквивалентни на линеарна неравенка со една непозната или на систем линеарни неравенки со една непозната како, на пример, реши ги неравенките:

$$(2x+1)(3-x)>0\,,\ \frac{x+4}{3-x}<0\,,\ \frac{2x+3}{x-1}>1 \text{ итн.}$$

- решавање пословжени задачи за моделирање со помош на неравенствата и изучените неравенки како, на пример, за кои вредности на параметарот p изразите

$$2p+3,\ 4p-5 \text{ и } p+13$$

  можат да бидат мерни броеви на страни на триаголник,

- решавање едноставни линеарни неравенки со една непозната, во кои непозната е и под знакот за апсолутна вредност како, на пример, реши ги неравенките:

$$|x|<5, |x|\geq 3, |x-2|>6, |x+2|\leq 4 \text{ итн,}$$

- решавање пословжени линеарни неравенки со една непозната, во кои непознатата е и под знакот за апсолутна вредност како, на пример, реши ги неравенките

$$|x+2|-|x|>x-1, |2x+1|+|x-3|<14-x \text{ итн.,}$$

- решавање едноставни задачи во кои треба да се состави неравенка по дадено множество решенија M како, на пример, состави барем две неравенки чие множество решенија е:

  а) $(2,+\infty)$; б) $(-3,3)$;

- решавање пословжени задачи во кои треба да се состави неравенка по дадено множество решенија M како, на пример, состави барем две неравенки чие множество решенија е:

  а) $[1,5]$, б) $(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$,

- решавање линеарни параметарски равенки како, на пример, за кои вредности на параметарот m решението на равенката

  а) $2x-m=m-2$, б) $5m=2x-m$ и в) $x+3m=9$,

  е поголемо од 3,

- решавање линеарни параметарски неравенки како, на пример,

$$2(m-x)<mx+5,\ \frac{a}{2}-\frac{2-x}{3}<a-1,\ cx+c^2<2x-6,\ \frac{x+2}{p}-3>x\ ,$$

каде m,a,c,p се параметри.

7. ГРЕШКИ КОИ ГИ ПРАВАТ УЧЕНИЦИТЕ ПРИ ИЗУЧУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВАТА И ЛИНЕАРНИТЕ НЕРАВЕНКИ

При изучувањето на оваа тема се појавуваат скоро сите грешки кои го пратат изучувањето на равенките, но имаме појава и на нови видови грешки. Ќе разгледаме неколку видови грешки кои се специфични за оваа тема.

а) Прва група. Ќе наведеме два примери:

- од $2,34<3,4$ наоѓаат $-2\cdot 2,34<-2\cdot 3,4$ наместо
$$-2\cdot 2,34>-2\cdot 3,4\ ,$$
- од $-1,731>-2,22$ наоѓаат $-1,1\cdot(-1,731)>-1,1\cdot(-2,21)$ наместо $-1,1\cdot(-1,731)<-1,1\cdot(-2,21)$.

Грешките од овој вид се јавуваат од две причини, и тоа:

- добиените фиксни претстави од оперирањето со равенствата и
- лошото усвојување на својствата на бројните неравенства.

Превенцијата од овие грешки се состои во решавање доволен број задачи за усвојување на поимите и тврдењата, за кои претходно говоревме.

б) Втора група. Ќе разгледаме два примери:

- од $\frac{2x+3}{x-1}>1$ наоѓаат $2x+3>x-1,\quad x>-4$ наместо
$$\frac{2x+3}{x-1}-1>0\ ,\ \frac{x+4}{x-1}>0\ ,$$
  односно
$$\begin{cases} x+4>0 \\ x-1>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+4<0 \\ x-1<0 \end{cases} \text{ итн.}$$
- од $\frac{x+3}{x-1}>1$ наоѓаат

$$\begin{cases} x+3>1 \\ 0<x-1<1 \end{cases} \text{ и } 1<x<2$$

наместо $\frac{x+3}{x-1}-1>0$, $\frac{4}{x-1}>0$, $x-1>0$ и $x>1$.

Првата грешка се должи на множење на неравенството со израз кој содржи променлива, што секако не е правилно, бидејќи не се знае дали именителот е позитивен или негативен. Во случајот, за да учениците се уверат дека направиле грешка доволно е во неравенката да ставиме $x=0$, при што ќе добиеме $\frac{2\cdot 0+3}{0-1}=-3$ и $-3<1$.

На учениците може да им се покаже и случај, кога при ослободувањето во линеарна неравенка од именителот се добива еквивалентна неравенка, како на пример

$$\frac{4x+1}{|x|+2}>1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x+1>|x|+2.$$

Втората грешка се должи на користење на обратното тврдење на добро познатото својство на реалните броеви: ако $a>1, 0<b<1$, тогаш $\frac{a}{b}>1$, кое се разбира не е точно бидејќи од $\frac{a}{b}>1$ не следува $a>1, 0<b<1$. На пример, $\frac{-2,1}{-1,2}>1$, но $-2,1<0$ и $-1,2<0$ или $\frac{4,3}{1,5}>1$, но $4,3>1$ и $1,5>1$.

в) Трета група. Ќе разгледаме еден пример:

- при решавање на неравенката

$$|4-3x|<2x$$

пишуваат

$$4-3x\geq 0,$$

т.е.

$$4\geq 3x \text{ и } x\leq \frac{4}{3},$$

па затоа

$$4-3x<2x,\ 5x>4,$$

т.е. $x>\frac{4}{5}$ и заклучуваат $x\in(\frac{4}{5},\frac{4}{3}]$, наместо да заклучат дека од

$$|4-3x|<2x$$

следува $x>0$ па даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$-2x<4-3x<2x \text{ т.е. } x\in(\frac{4}{5},4].$$

Грешките од оваа група се резултат на слабото усвојување на својствата на апсолутната вредност. Учениците ќе се уверат дека направиле грешка ако во неравенката ставиме $x=1$, при што ќе добиеме $|4-3\cdot 1|=1<2=2\cdot 1$ и $1\notin(\frac{4}{5},\frac{4}{3}]$.

г) Четврта група. Ќе разгледаме два примери:

- при решавање на неравенката

$$(x-2)(x-3)>0$$

пишуваат

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x-3>0 \end{cases}$$

т.е.

$$x>2, x>3,$$

од што заклучуваат $x>3$, при што го испуштаат подмножеството решенија на неравенката $x<2$ кое се добива од

$$\begin{cases} x-2<0 \\ x-3<0 \end{cases}.$$

- при решавањето на неравенката $x^2>4$ пишуваат $x>\pm 2$, наместо $x^2-4>0,\ (x-2)(x+2)>0$ итн.

Првата грешка се должи на лошото усвојување на операцијата множење на реални броеви, т.е. учениците забораваат дека и производ на два негативни броја може да биде позитивен број. Понатаму, втората грешка се должи на лошата аналогија со квадратните равенки и најчесто е последица од користењето на квадратните равенки при решавање на задачи во физиката иако истите не се усвоени во наставата по математика. Најдобро е корегирањето на овој вид грешки да се направи со помош на контрапримери, потсетување на својствата на реалните броеви и детално објаснување на алгоритмот за решавање на овој вид неравенки.

VI ГЛАВА
ФУНКЦИИТЕ ВО УЧИЛИШНИОТ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Постојаните промени се карактеристика на реалниот свет, а функциите се математички одраз на овие промени. Овој неспорен факт е и главна причина за изучување на функциите во училишниот курс по математика. Притоа, со современиот поим за функција непосредно се поврзани и многу други поими, како што се: број, константна големина, променлива големина, множество, подреден пар, график на функција итн.

Во различните историски периоди и во различните области на математиката и нејзините примени се среќаваат различни толкувања на поимот функција. Ваквото многубразие на толкување на поимот функција е основна причина и за различните пристапи кон поимот функција во училишниот курс по математика. Со текот на времето во методската литература се кристализира и најприроден пристап за изучување на поимот функција. Притоа, во почетните одделенија имаме подготвителна работа за формирање на поимите кои се непосредно поврзани со поимот функција, за да во одреден период се систематизираат знаењата и јавно се воведат основните термини. Понатаму, преку изучување на конкретни функции или општи својства на функциите (монотоност, парност итн.) се врши проширување и продлабочување на знаењата, умеењата и способностите на учениците.

1. ЕТАПИ ВО УСВОЈУВАЊЕ НА ПОИМОТ ФУНКЦИЈА

Усвојувањето на поимот функција во основното образование се одвива главно во две етапи, подготвителна и основна. Имајќи го предвид значењето на овој поим, во овој дел одделно ќе се осврнеме на етапите во усвојувањето на поимот функција.

1.1. ПОДГОТВИТЕЛНА ЕТАПА

Подготвителната етапа за усвојување на поимот функција има за цел учениците да се стекнат со потребните претстави, врз кои со помош на обопштување се формира основниот поим. Притоа, многуобразноста на самиот поим налага, кај учениците, да се формира и многуобразност на претстави за поимот функција. Формирањето на вакви претстави може да се потпомогне со наоѓање одговор на следниве прашања:

- Дали при дадени услови се менува определена величина?
- Од што зависи менувањето на разгледуваната величина?
- Дали промената на големината на една величина влијае врз промената на друга величина?
- Дали можете да ги определите најмалата и најголемата вредност на разгледуваната величина?
- Како можеме да ја изразиме зависноста меѓу две променливи величини и како тоа можеме да го запишиме?

Претходно изнесените прашања можеме да ги разгледуваме, на пример, кај операциите собирање и одземање, множење и делење на природните, целите и рационалните броеви. Во случајот треба да се задаваат задачи во кои се испитува дали и како се менува резултатот при менувањето на едната од двете компоненти на операцијата, кога другата компонента е фиксирана. Всушност со помош на вакви задачи се формира и претстава за константни и променливи величини. Кога станува збор за константните величини, задолжително треба да се воведе и една од најважните константи во математиката, а тоа е бројот π и истиот треба да се воведе уште во основното образование. Притоа, имајќи ја предвид возраста на учениците, како и предзнаењата кои истите ги имаат, најдобро е бројот π да се воведе на начин покажан во следниов пример.

Пример 1. На учениците им даваме две различни чаши со различни дијаметри при основите и им задаваме задача со конец прво да ги измерат должините на кружниците при основите $l_i, i=1,2,3,4$, а потоа и должините на дијаметрите $d_i, i=1,2,3,4$ на основите. Понатаму, треба да ги пресметаат количниците $\frac{l_i}{d_i}$ и да ги споредат добиените резултати. Јасно, како резултат од пресметувањата ќе добијат броеви кои се приближно еднакви на бројот π, после што им соопштуваме дека за секоја кружница количникот на нејзиниот периметар и нејзиниот дијаметар е константен и е еднаков на бројот $\pi = 3,14159265358979323846...$, кој го нарекуваме Лудолфув број. ♦

Јасно, на ваквата постапка на воведување на бројот π може да и се забележи дека отсуствува научноста и забелешката е на место. Меѓутоа, далеку поголема грешка се прави доколку бројот π се воведе на начин покажан во следниов пример.

Пример 2. Да разгледаме две кружници со должини l_1 и l_2 и радиуси r_1 и r_2. Познато е дека две кружници се слични меѓу себе, а коефициентот на сличноста е еднаков на односот на нивните радиуси. Тогаш, за периметрите l_1 и l_2 и радиуси r_1 и r_2 важи размерот $\frac{l_1}{l_2}=\frac{r_1}{r_2}$, т.е. размерот $\frac{l_1}{2r_1}=\frac{l_2}{2r_2}$. Од последното равенство се гледа дека односот на должината на кружницата и нејзиниот радиус е константен број, и овој број е таканаречениот Лудолфов број π. ♦

На прв поглед постапката за воведување на бројот π, дадена во пример 2 е коректна. Но, дали е тоа така? Одговорот на последното прашање е негативен, бидејќи во основното и средното образование најчесто се изучува сличност на триаголници и тоа многу покасно отколку што се изучува должина на кружница. Тоа значи, дека учениците не само што немаат поим што се тоа слични фигури, туку и воопшто не ја изучуваат хомотетијата, па не може да стане збор дека *е познато дека две кружници се слични меѓу себе.* Во случајот, од научна гледна точка проблематично е користењето на сличноста бидејќи истата се воведува како пресликување при кое се запазува односот на должината на една отсечка и нејзината слика, па не може да стане збор за должина на кружница. Кога сме кај воведувањето на бројот π, да забележиме дека со поголема научна заснованост истиот може да се воведе дури откако учениците ќе ги усвојат основните знаења за тригонометриските функции и формулите за пресметување периметар на впишан и опишан правилен многуаголник. Во следниов пример ќе покажеме како тоа може да се направи користејќи ги неравенствата меѓу средините.

Пример 3. Во кружница со радиус r впишуваме правилен $n-$аголник и околу неа се опишуваме правилен $n-$аголник. Со p_n и P_n ги означуваме периметрите на впишаниот и опишаниот правилен $n-$аголник, соодветно. На учениците им ги соопштуваме идентитетите

$$P_{2n}=H(P_n,p_n) \text{ и } p_{2n}=G(P_{2n},p_n), \tag{1}$$

кои самостојно треба да ги докажат и користејќи ги неравенствата меѓу средините и да заклучат дека

$$p_n < p_{2n} < P_{2n} < P_n, \qquad (2)$$

при што со зголемување на бројот k разликата $P_{2^k n} - p_{2^k n}$ може да се направи произволно мала.

Во натамошните разгледувања на учениците им се задава задача, доколку истите самостојно не си ја постават, да се пресметаат низите:

1. $P_4(r), P_8(r), P_{16}(r), P_{32}(r), P_{64}(r), P_{128}(r)$ и
   $p_4(r), p_8(r), p_{16}(r), p_{32}(r), p_{64}(r), p_{128}(r)$; и
2. $P_3(r), P_6(r), P_{12}(r), P_{24}(r), P_{48}(r), P_{96}(r), P_{192}(r)$ и
   $p_3(r), p_6(r), p_{12}(r), p_{24}(r), p_{48}(r), p_{96}(r), p_{192}(r)$,

при што за низите 1. ќе добијат

$$P_4(r) = 8r, \qquad p_4(r) = 4r\sqrt{2} = 5,656854249r\ .$$

$$P_8(r) = 6,627416998r, \quad p_8(r) = 6,122934918r\ ;$$

$$P_{16}(r) = 6,364156239r, \quad p_{16}(r) = 6,242380512r\ ;$$

$$P_{32}(r) = 6,302680216r, \quad p_{32}(r) = 6,272457904r\ ;$$

$$P_{64}(r) = 6,287532742r, \quad p_{64}(r) = 6,2799908r\ ;$$

$$P_{128}(r) = 6,283800908r, \quad p_{128}(r) = 6,281895565r\ ,$$

од што природно ќе заклучат дека количниците $\frac{P_{2^k n}}{r}$ и $\frac{p_{2^k n}}{r}$ не зависат од должината на радиусот на кружницата во која ги впишуваме правилните многуаголници и дека со удвојувањето на бројот на страните на впишаните и опишаните правилни многуаголници овие количници се приближуваат кон бројот

$$6,28318530717959647792 = 2 \cdot 3,14159265358979323846... = 2\pi\ ,$$

со што практично се воведува бројот π . ♦

Претходно опишаниот метод има низа предност, од кои ќе ги наведеме следниве:

- се одбегнува бројот π да се воведе почнувајќи со “знаењата” на учениците дека две кружници се слични, и
- сознателно се усвојува формулата за периметар на кружница.

Да се вратиме на подготвителната етапа при изучувањето на поимот функција. Со помош на задачите во кои една од компонентите на операциите собирање, одземање, множење и делење е фиксирана, а другата е означена со буква и се реализира операцијата, кога место буквата се стават последователно неколку однапред зададени вредности, всушност се врши подготовка за осмислувањето и усвојувањето на аналитичкиот начин на задавање на функција. Понатаму, со запишувањето во вид на формула на правилата за пресметување на периметрите и плоштините на квадрат, рамностран триаголник и круг исто така се прави подготовка за воведувањето на аналитичкото задавање на функциите. Сега, ако се има предвид дека задавањето на функција означува задавање на алгоритам, со кој на секоја вредност на една променлива од дадено множество и се придружува точна една и единствена вредност на друга променлива од друго множество, може да се каже дека усвојувањето на произволен алгоритам всушност е своевидна подготовка за воведување на поимот функција. Ова посебно се однесува на директната и обратната пропорционалност на величините, кои најчесто се непосредна подготовка за усвојување на поимот функција.

Конечно, воведувањето на координатен систем во рамнина е директна подготовка за графичкото задавање на функција и поимот график на функција.

1.2. ОСНОВНА ЕТАПА

Како што можевме да видиме, подготвителната етапа за воведување на поимот функција се реализира во релативно долг временски период, па затоа може да не наведе на заклучок дека таа има решавачко значење за осмислување на овој поим. Меѓутоа, практиката покажува дека каква и да е подготовката за воведување на еден поим, неговото првично јавно воведување има решавачко значење за осмислување на поимот.

Најчесто воведувањето на поимот функција започнува со пример од видот: во табелата

години на живот	0	1	2	3	4	5	6	7
висина во см	50	70	80	90	95	100	103	105

е прикажано како просечно се менува висината на детето по години, од денот на раѓање (нула години) до навршени седум години. Ова со други зборови може да се искаже: *висината на детето зависи од годините на живот*. Се разбира ова е само еден едноставен пример од следниот вид: *една големина е функција од друга големина*.

Меѓутоа, многу подобро е да се разгледа ситуација, која дозволува во дадениот момент во целост да се ангажираат учениците. На пример, тоа може да се направи со следнава задача.

Пример 4. На цртежот десно полуправата OM е паралелна со правата AB и растојанието меѓу нив е $4cm$. Да го разгледаме триаголникот ABC. Со овој триаголник се поврзани следните величини: должината на основата AB, должината на страната AC, должината на страната BC, должината на висината CD, плоштината P на ΔABC, $\angle ABC$, $\angle BAC$ и $\angle ACB$. Измери ги или пресметај ги вредностите на споменатите величини, кога точката C лежи на полуправата OM и е на растојание $x=\overline{OC}$, соодветно 1,2,3,4,5,6,7 од точката O и резултатите внеси ги во табела.

величи.\ x	1	2	3	4	5	6	7
$\overline{AB}$	6	6	6	6	6	6	6
$\overline{AC}$	4,9	4,4	4,1	4,1	4,3	4,7	5,3
$\overline{BC}$	9,6	8,7	7,9	7	6,3	5,5	4,9
$\overline{CD}$	4	4	4	4	4	4	4
P	12	12	12	12	12	12	12
$\angle BAC$	125°	113°	100°	86°	73°	61°	52°
$\angle ABC$	26°	29°	33°	36°	42°	48°	57°
$\angle ACB$	29°	48°	47°	58°	65°	71°	71°

Како што можеме да видиме, кога се менува растојанието OC, должината на основата $\overline{AB}$, висината на триаголникот $\overline{CD}$ и плоштината P не се менуваат, а додека должините на другите две страни и аглите при различни вредности на растојанието OC имаат различни вредности, т.е менувањето на OC е причина и за нивното менување. Важно е на учениците да им се потенцира дека менувањето на $\overline{OC}$ е причина за менување $\overline{AC}$, $\overline{BC},...$, бидејќи на овој начин нема да се стави акцент само на константните и променливите величини, туку ќе се разграничат и самите променливи. Имено, на учениците треба да им се објасни дека менувањето на $\overline{AC},\overline{BC},...$ е генерирано од менувањето на $\overline{OC}$ и затоа величините $\overline{AC},\overline{BC},...$ ги нарекуваме зависни променливи величини. Од друга страна величината $\overline{OC}$ исто така е променлива, но причина за нејзиното менување не е менувањето на некоја друга величина, туку нашата волја и истата ја нарекуваме независно променлива величина. ♦

Откако ќе се освојат поимите константа, зависна и независна променлива величина, може да се премине на усвојување на поимот функција (пресликување). Најдобро е усвојувањето на овој поим да се направи на што е можно поедноставен начин и притоа, да се разгледаат посебните пресликувања, како и начините на задавање на функциите: шематски, табеларно, графички и аналитички. Последното можеме да го направиме на следниов начин.

Дефиниција 1. Нека A и B се две непразни множества. Ако на секој елемент $x \in A$ му е придружен, по некое правило f, еднозначно определен елемент $y \in B$, тогаш велиме дека f е *пресликување* (*функција*) од A во B и пишуваме $f : A \to B$.

За елементот $y \in B$ велиме дека е *слика* на елементот $x \in A$ и пишуваме $y = f(x)$. Множеството A го нарекуваме *домен*, а множеството B - *кодомен* на пресликувањето f.

Потоа на учениците им објаснуваме дека од дефиницијата 1 можеме да заклучиме дека едно пресликување е зададено ако се зададени неговиот домен, кодомен и правилото со кое на секој елемент од доменот му се придружува единствен елемент од кодоменот. Во следниот чекор треба да преминеме на разгледување на неколку примери, како што е следниов.

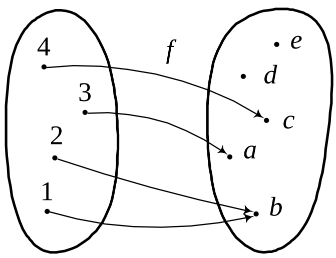
Пример 5. а) Ако

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{a, b, c, d, e\},$$

тогаш со

$$f(1) = b,\ f(2) = b,\ f(3) = a,\ f(4) = c \tag{1}$$

е зададено пресликување $f : A \to B$.



Исто така, наместо правилото на пресликувањето да го запишуваме во обликот (1), тоа можеме да го направиме со помош на следнава шема

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & b & a & c \end{pmatrix}, \tag{2}$$

во која во првиот ред ги запишуваме елементите на доменот A, а во вториот ред нивните слики кои му припаѓаат на кодоменот B.

Во многу случаи пожелно е шематски зададеното пресликување да се претстави со помош на граф, што во конкретниот случај е направено на цртежот лево горе.

Покрај наведените претставувања на пресликувањето f, можеме да го користиме и табеларното претставување. Имено, ако функцијата f е зададена со (1), тогаш истата можеме да ја претставиме со таблицата

x	1	2	3	4
$f(x)$	b	b	a	c

Притоа, на учениците треба да им се објасни дека во конкретниот случај симболот $f(x)$ нема смисла, ако наместо x, меѓу заградите не е еден од броевите 1,2,3 или 4. На овој начин, прво, го осмислуваме симболот $f(x)$ во случај на табеларно задавање на една функција и второ, превентивно укажуваме дека табелите не се добиваат кога во аналитичкото задавање на една функција се даваат вредности на независно променливата и добиените вредности на зависно променливата се внесуваат во табелата. Имено, добро е уште на самиот почеток учениците да осознаат дека табеларното задавање на функциите е самостоен независен начин на задавање на функциите, а друго прашање е што некои табели можат да бидат добиени и со користење на аналитички или графички зададени функции.

б) Ако $A=B=\mathbf{R}$, тогаш со $f(x)=\frac{4x+3}{x^2+1}$ е зададено пресликување $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

Понатаму, на учениците им објаснуваме дека ова е аналитичко задавање на функција и посебно внимание ќе посветиме на објаснување на ознаката $y=f(x)$, која најчесто не е целосно разбрана од поголемиот број ученици. Имено, учениците запомнуваат дека со x го означуваме аргументот, независно променливата, а со y зависно променливата, но не разбираат смислата на ознаката f, со која всушност го означуваме правилото на придружување. Во конкретниот случај на учениците треба да им се објасни дека со f е означена следнава низа операции, кои треба да се извршат со конкретни вредности на x и константите $1,3$ и 4:

i) избраната вредност на x се множи со 4,

ii) на добиената вредност од *i*) се додава 3,

iii) избраната вредност на x се множи сама со себе,

iv) на добиената вредност од *iii*) се додава 1,

v) добиената вредност од *ii*) се дели со добиената вредност од *iv*), и

vi) знакот за равенство означува, дека на избраната вредност за x и се придружува добиената вредност од *v*). ♦

Претходните објаснувања кои се направени за смислата на ознаката $y=f(x)$, по правило во учебниците се испуштаат од најмалку две причини: прво нема традиција, и второ, во учебниците се избегнуваат опширните објаснувања, иако за тоа нема посебна причина. Притоа се испушта од вид, дека испуштањето на објаснувањата го нарушува дидактичкиот принцип на сознателност, за што не може да се најде валидно објаснување.

Имајќи го предвид претходно кажаното, задолжително треба да се каже дека при графичкото задавање на функција $y = f(x)$ буквата f ги означува операциите:

i) се избира вредност на x од дефиниционото множество,

ii) се конструира права, паралелна на ординатата, низ сликата на избраната вредност на x на апцисата,

iii) се наоѓа пресекот на повлечената права и графикот на функцијата,

iv) низ најдената точка под *iii*) се повлекува права паралелна на апцисата,

v) се наоѓа пресечната точка на правата повлечена во *iv*) со ординатата, и

vi) се чита ординатата на добиената точка во *v*).

Во натамошните разгледувања, треба да се усвои поимот еднакви пресликувања, како и поимите инјекција, сурјекција и биекција. Последново може, на пример, да се направи на следниов начин.

Дефиниција 2. За две пресликувања $f: A \to B$ и $g: C \to D$ ќе велиме дека *се еднакви* ако $A = C,\ B = D$ и $f(x) = g(x)$ за секој $x \in A$.

Пример 6. а) Да ги разгледаме пресликувањата

$$f: A \to B \text{, каде што } A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{1, 2, 3, 4\},\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$g: C \to D \text{, кадешто } C = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ D = \{1, 2, 3\},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Како што забележуваме, $A = C$ и $f(x) = g(x)$ за секој $x \in A$, но бидејќи $B \neq D$ според дефиницијата 2 имаме дека овие пресликувања не се еднакви.

б) За пресликувањата

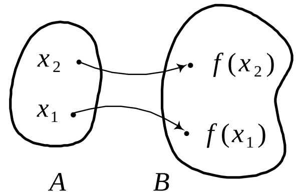
$$f: A \to B \text{, каде што } A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{1, 2, 3\},\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$g: C \to D \text{, каде што } C = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ D = \{1, 2, 3\},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

имаме $A = C,\ B = D$, но $f(2) = 1 \neq 2 = g(2)$, па затоа тие не се еднакви. ♦

Проучувањето на пресликувањата довело до поделба според нивните својства. Во овој дел ќе се осврнеме на изучување на три важни видови пресликувања, а тоа се инјективните, сурјективните и биективните пресликувања, кои заземаат важно место во математиката воопшто.

Дефиниција 3. За пресликувањето $f: A \to B$ ќе велиме дека е *инјекција* ако од $x_1 \neq x_2$ следува $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. различни елементи имаат различни слики (цртеж десно).



Пример 7. а) Нека $A = \{a, b, c, d\}$ и пресликувањата $f: A \to A$ и $g: A \to A$ се определени со $f = \binom{a\ b\ c\ d}{b\ a\ d\ c}$ и $g = \binom{a\ b\ c\ d}{c\ a\ a\ d}$. Јасно, пресликувањето f е инјекција, но пресликувањето g не е инјекција бидејќи $b \neq c$, но $g(b) = a = g(c)$.

б) Нека се дадени множествата $\mathbf{N}$ и $M = \{2n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ и нека пресликувањето $f: \mathbf{N} \to M$ е определено со $f(k) = 2k$, за секој $k \in \mathbf{N}$. Ќе докажеме дека ова пресликување е инјекција.

Навистина, за секои $k, n \in \mathbf{N}$ такви, што $k \neq n$ важи $2k \neq 2n$ што значи $f(k) \neq f(n)$ т.е. f е инјекција. ♦

Дефиниција 4. За пресликувањето $f: A \to B$ ќе велиме дека е *сурјекција* ако за секој $y \in B$ постои $x \in A$ таков, што $y = f(x)$, т.е. секој елемент на B е слика на барем еден елемент на A.

Пример 8. Нека $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$ и пресликувањата $f: A \to B$ и $g: B \to A$ се определени со $f = \binom{a\ b\ c\ d}{1\ 3\ 3\ 2}$ и $g = \binom{1\ 2\ 3}{c\ a\ b}$. Јасно, пресликувањето f е сурјекција, но пресликувањето g не е сурјекција бидејќи d не е слика на ниту еден елемент од множеството B. ♦

Дефиниција 5. За пресликувањето $f: A \to B$ ќе велиме дека е *биекција* ако тоа е и инјекција и сурјекција.

Според тоа, f е биекција ако секој елемент $y \in B$ е слика на барем еден елемент $x \in A$ и различни елементи од A со f се пресликуваат во различни елементи од B.

Пример 9. Нека $a, b \in \mathbf{R}$ и $a \neq 0$. Да го разгледаме пресликувањето $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определено со $f(x) = ax + b$.

Ако $x_1 \neq x_2$, тогаш од $a \neq 0$ следува $ax_1 \neq ax_2$, па затоа

$$f(x_1) = ax_1 + b \neq ax_2 + b = f(x_2),$$

што значи дека f е инјекција. Понатаму, за секој $y \in \mathbf{R}$ важи $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbf{R}$ и притоа

$$f(x) = f(\frac{y-b}{a}) = a \cdot \frac{y-b}{a} + b = y - b + b = y\ ,$$

т.е. f е сурјекција.

Конечно, f е сурјекција и инјекција, па значи е биекција. ♦

2. ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА

Поимот график на функција е фундаментален во математиката, па затоа колку е подобро усвоен овој поим, толку е поквалитетна математичката подготовка на учениците. На усвојувањето на поимот график на функција влијае како начинот на кој учениците првично ќе се запознаат со него, така и начинот на кој потоа истиот ќе се користи. Неопходен услов за повисока графичка култура на учениците е доброто усвојување на графиците на конкретни функции. Имено, ако при изучувањето на функциите не изучиме и некои конкретни функции, тогаш стекнати знаења не се полезни и тие најчесто брзо се заборавaaт. Затоа, паралелно со дефиницијата на график на функција, треба да се усвојат и графиците на функциите кои се предвидени со програмата (најчесто на права и хипербола).

При воведувањето на поимот график на функција, најчесто кај учениците се формира погрешна претстава, дека график имаат само аналитички зададените функции и дека истиот може да се конструира со помош на карактеристични точки. Во следниот пример ќе покажеме како може да се одбегне формирањето на ваквата погрешна претстава.

Пример 1. На милиметарска хартија се црта координатен систем и со “слободна рака” се црта произволна крива, при што треба да се запази само еден услов: секоја права, која е паралелна со ордината може да ја сече кривата во најмногу една точка (направи цртеж). Потоа се наоѓаат ортогоналните проекции (на учениците не им се соопштува специјалниот термин) на графикот врз апцисата и ординатата. Броевите на добиените интервали се означуваат со две букви, на пример D и M и на учениците им се објаснува како со помош на графикот на секоја точка $x \in D$ и соодветствува точно една точка $y \in M$. ♦

Во почетната етапа, при усвојувањето на поимот график на функција треба да се осмислат два факти:

- прво, со секоја бројна функција се задава и едно множество од подредени парови кај кои првата компонента е вредност на независно променливата, а втората компонента е соодветната вредност на зависно променливата и дека на ова множество од подредени парови соодветствува едно и единствено множество точки, наречено график на функција, чии што координати во однос на зададен координатен систем се подредените парови на предметното множество,
- второ, за некои графици на функции може да се најде аналитичка зависност меѓу координатите, т.е. зависност кој е задоволена само за точките кои припаѓаат на графикот на функцијата.

Притоа, првиот факт може да се воведе догматски и тоа може да се направи на следниов начин.

Дефиниција 1. Нека $f: A \to B$. *График* на пресликувањето (функцијата) f го нарекуваме множеството

$$G(f) = \{(x,y) \mid (x,y) \in A \times B, y = f(x)\}.$$

Пример 2. а) Графикот на пресликувањето $f: A \to B$, каде што

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \ B = \{1, 2, 3, 4\}, \ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

е множеството

$$G(f) = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,1), (5,3)\}$$

$G(f)$ се црта во координатен систем.

б) Графикот на пресликувањето $f: \mathbf{N} \to M$, $\mathbf{N}$ и $M = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$, $f(k) = 2k$, е множеството

$$G(f) = \{(k, 2k) \mid k \in \mathbf{N}\}$$

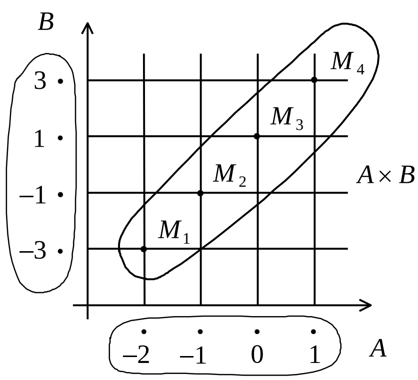
и $G(f)$ се црта во координатен систем.

в) Нека

$$A = \{-2, -1, 0, 1\}, \ B = \{-3, -1, 1, 3\}$$

и нека правилото f е дадено со формулата $f(x) = 2x + 1$, $x \in A$. Имаме

$$f(-2) = -3, \ f(-1) = -1,$$



$$f(0)=1 \text{ и } f(1)=3,$$

па затоа

$$G(f)=\{(-2,-3),(-1,-1),(0,1),(1,3)\}.$$

На цртежот десно е даден даден графикот на ова пресликување. ♦

Природно, вториот факт треба да следува од експеримент. Меѓутоа, на истиот во програмите воопшто не му се обрнува внимание, па затоа не се разгледува ниту во учебниците. Во следниов пример ќе дадеме едноставен експеримент со кој учениците ќе можат да осознаат дека за некои графици на функции може да се најде аналитичка зависност меѓу координатите, т.е. зависност кој е задоволена само за точките кои припаѓаат на графикот на функцијата.

Пример 3. Учениците на милиметарска хартија цртаат координатен систем, ги означуваат точките со целобројни координати и ги испишуваат нивните координати.

Во следниот чекор се организира набљудување на цртежот. Ако учениците ги прашаме какво својство имаат точките, кои лежат на апцисата, тогаш треба да се очекува тие брзо да одговорат дека сите ординати на овие точки се еднакви на нула. Сега на учениците треба да им соопштиме дека, бидејќи ординатата се бележи со y, равенката $y=0$ е карактеристична за сите точки на апцисната оска и се нарекува равенка на апцисната оска. Аналогно се воведува равенката на ординатната оска $x=0$. Понатаму, низ точките

$$(-4,-2);(-3,-2);(-2,-2);(-1,-2);(0,-2);(1,-2);(2,-2)$$

минува една права. Карактеристично за сите овие точки е што нивните ординати, како и ординатите на сите точки кои лежат на оваа права се еднакви на -2, па затоа $y=-2$ е равенката на оваа права. Аналогно се доаѓа до равенките

$$y=-1,\ y=1,\ y=2,\ y=3 \text{ итн.},$$

а исто така и до равенките $x=-2, x=-1, x=1, x=2$ итн.

Во следните разгледувања учениците треба да заклучат дека низ точките

$$(-2,-2);(-1,-1);(0,0);(1,1);(2,2);(3,3)$$

минува една и единствена права и дека зависноста меѓу координатите на точките од оваа права е $y=x$. Аналогно се доаѓа до правата $y=-x$. Во следните разгледувања учениците треба да забележат дека низ точките

$$(-2,-1);(-1,0);(0,1);(1,2);(2,3);(3,4)$$

минува една и единствена права и дека нејзината равенка е $y = x + 1$, (направи цртеж). ♦

Како што можеме да видиме, со пригодно индуктивна работа може да се оформи солидна сетилна подлога за равенка на права. Се разбира, во претходните разгледувања пожелно е изложувањето на материјалот да се поврзе со поимот правопропорционалност, неговите својства и график.

Понатаму, при усвојувањето на поимот график на функција природно е повторно да ја разгледаме обратната пропорционалност, нејзините својства и график. Последното може да се направи со помош на следниов пример.

Пример 4. Ги разгледуваме точките

$$(1,12); (2,6); (3,4); (4,3); (6,2); (12,1)$$

и точките

$$(-1,-12); (-2,-6); (-3,-4); (-4,-3); (-6,-2); (-12,-1)$$

и за секоја од нив бараме зависност меѓу координатите. Притоа повеќето ученици ќе согледаат дека производот на координатите на овие точки е еднаков на 12, со што всушност ќе заклучат дека овие точки ја задоволуваат функционалната зависнот $xy = 12$. Понатаму, во еден координатен систем ги цртаме овие точки (направи цртеж). Во следниот чекор на учениците им објаснуваме дека, ако земеме се поблиски вредности на променливата x, тогаш од функционалната зависност ќе добиеме ќе добиеме нови точки кои ја задоволуваат функционалната зависност $xy = 12$ и кои се погусто распоредени (направи цртеж)).

Од претходно изнесеното учениците природно ќе заклучат дека графикот на функцијата $y = \frac{12}{x}$ се состои од две гранки што се наоѓаат во првиот и третиот квадрант и тие се симетрични во однос на координатниот почеток. Понатаму, и двете гранки не ги сечат координатните оски, бидејќи на позитивна вредност на променливата x и соодветствува позитивна вредност на променливата y, а на негативна вредност на променливата x и соодветствува негативна вредност на променливата y и за $x = 0$ функцијата не е дефинирана.

Понатаму, ја разгледуваме функцијата $y = -\frac{12}{x}$. Притоа, прво треба да се забележи дека на позитивните вредности на x соодветствуваат негативни вредности на y и обратно, на негативни вредности на x соодветствуваат позитивни вредности на y. Според тоа, графикот на функцијата

$y=-\frac{12}{x}$ се состои од две гранки што се наоѓаат во вториот и четвртиот квадрант и тие се симетрични во овнос на координатниот почеток.

Конечно, разгледувајќи уште еден до два примери, доколку тоа е потребно учениците треба да усвојат дека, во општ случај, графикот на функцијата $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$ е крива која се состои од две гранки симетрични во однос на координатниот почеток. На крајот од овие разгледувања, на учениците им се соопштува дека кривата од ваков вид се нарекува *хипербола*. ♦

Ваквиот пристап може да се оцени како недоволно строг, но практиката покажува дека во споредба со догматското изложување на материјалот тој е далеку поцелисходен. Исто така, на претходните разгледувања може да им се забележи дека учениците нема сами да се сетат да разгледаат точки зададени во пример 4, што е точно. Меѓутоа, овде треба да се има предвид дека улогата на учителот, кој всушност треба да ја организира сознателната дејност на учениците.

3. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Најчесто линеарната функција се воведува со следнава дефиниција.

Дефиниција 1. Функцијата $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, од видот $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbf{R}$ ја нарекуваме *линеарна функција*. Променливата x ја нарекуваме *независно променлива*, а променливата $y=f(x)$ ја нарекуваме *зависно променлива*. Броевите a и b ги нарекуваме *параметри на линеарната функција*, при што за бројот a понекогаш велиме дека е *параметар пред аргументот* x, а за бројот b дека е *слободен член*.

Ова е прва конкретна функција која се воведува и повеќето ученици не го разбираат значењето на зборот “вид”. Затоа е пожелно прво да се покажат и други “видови” функции, а потоа да се премине кон разгледување на линеарната функција. Последното може да се направи со следниов пример.

Пример 1. Функциите

$$y=2x-3,\quad y=-2x+3,\quad y=4x-4,\quad y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$$

можат да се искажат со следнава општа формула

$$y = ax + b,\ a,b \in \mathbf{R}.$$

Функциите

$$y = x^2 + 3x - 1, \quad y = 3x^2 - 2x + 1, \quad y = -2x^2 - 3x + 5, \quad y = x^2 + 4x, \quad y = x^2$$

можат да се искажат со следнава општа формула

$$y = ax^2 + bx + c,\ a,b,c \in \mathbf{R}.$$

Функциите

$$y = \frac{12}{x}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = -\frac{6}{x}, \quad y = -\frac{12}{x}$$

можат да се искажат со следнава општа формула $y = \frac{c}{x},\ c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. ♦

На прв поглед предложениот пристап изгледа формален, но сметам дека истиот е доста корисен. Имено, со него се насочува сознанието на ученикот за неколку видови функции и за секој вид се даваат неколку конкретни примери. Исто така, со разгледување на примери слични на пример 1 се става акцент на усвојување на терминот "од видот", со што всушност од самиот почеток вршиме класификација на функциите.

Во натамошните разгледувања линеарната функција треба да се поврзе со правата пропорционалност. Тоа може да се направи на повеќе начини, но наједноставно е учениците да усвојат дека функцијата $y = ax$, $a \neq 0$ е *функција на права пропорционалност*. Понатаму, прво треба да се усвои графикот на функцијата $y = ax,\ a \neq 0$, а потоа графикот на функцијата $y = ax + b,\ a,b \neq 0$. Паралелно со усвојувањето на графиците на овие две функции треба да се усвојат и повеќе поими кои се непосредно поврзани со линеарната функција, како што се: *нула на функција, аглов коефициент, пресек со ординатната оска, растење и опаѓање на функција* и слично.

Осмислувањето на поимите аглов коефициент и пресек со ординатната оска може да се направи ако во ист координатен систем се нацртаат графиците на неколку линеарни функции кај кои пресеците со ординатната оска се константни, а се менува аглoвиот коефициент. На пример, такви се функциите:

$$y = \frac{2}{3}x + 3, \quad y = 3x + 3, \quad y = -3x + 3, \quad y = -\frac{2}{3}x + 3.$$

Во следниот чекор во ист координатен систем треба да се нацртаат графиците на неколку линеарни функции кај кои агловиот коефициент е константен, а се менуваат пресеците со ординатната оска. На пример, такви се функциите

$$y=\frac{2}{3}x+1,\quad y=\frac{2}{3}x,\quad y=\frac{2}{3}x-2,\quad y=\frac{2}{3}x+3,\quad y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\;.$$

Што се однесува до поимите *растење* и *опаѓање* на функција, сметаме дека кај линеарната функција и воопшто овие два поими без валидно образложение се отфрлени од основното образование. Имено, нивното усвојување не само што е можно, туку е и пожелно бидејќи:

- овозможува интеграција на темите “Неравенства и неравенки” и “Функции”,
- го развива дедуктивното заклучување и
- се одбегнува учениците со наведените поими да се сретнат дури при усвојување на квадратната функција, каде и техниката на докажување е далеку потешка.

Воведувањето на овие поими може да се направи на следниов начин.

Дефиниција 2. За функцијата $y=f(x)$ ќе велиме дека *расте* на интервалот (a,b) ако за секои $x_1,x_2\in(a,b)$ од $x_1<x_2$ следува $f(x_1)<f(x_2)$.

Дефинција 3. За функцијата $y=f(x)$ ќе велиме дека *опаѓа* на интервалот (a,b) ако за секои $x_1,x_2\in(a,b)$ од $x_1<x_2$ следува $f(x_1)>f(x_2)$.

Во следниот чекор пожелно е да на учениците да им се презентира график на функција која на еден интервал расте, на друг опаѓа итн. Последното е од особена важност за потполно осмислување на поимот и тоа може да се направи на графикот на функција преставена на соодветен цртеж.

Сега можеме да преминеме на разгледување на монотоноста на линеарната функција. Последното можеме да го направиме на следниов начин.

- докажуваме дека за $a>0$ линеарната функција расте: од $x_1<x_2$ следува $ax_1<ax_2$, па затоа

$$ax_1+b<ax_2+b\text{, т.е. } f(x_1)<f(x_2)\,;$$

- докажуваме дека за $a<0$ линеарната функција опаѓа: од $x_1<x_2$ следува $ax_1>ax_2$, па затоа

$$ax_1 + b > ax_2 + b \text{, т.е. } f(x_1) > f(x_2) \text{, и}$$

- разгледуваме конкретни линеарни функции, на пример
$$y = \frac{2}{3}x + 3, \quad y = 3x + 3, \quad y = -3x + 3, \quad y = -\frac{2}{3}x + 3$$

За да можат учениците сознателно аналитички да ги наоѓаат пресечните точки на два графици, потребно е преку решавање на доволен број примери да се осмислат термините "*координатите на точката ... ја задоволуваат равенката* $y = f(x)$ *и координатите на точката ... не ја задоволуваат равенката* $y = f(x)$". Специјално за пресечните точки на функцијата $y = f(x)$ и координатните оски, добро е учениците да се оспособат да ги наоѓаат користејќи ги ознаките во општ случај, т.е. за пресекот со оската OX да ја користат ознаката

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

а за пресекот со оската OY ознаката

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0. \end{cases}$$

На крајот од овој дел да забележиме дека, темата "Функции" е успешно усвоена ако учениците умеат:

- да ја определат дефинционата област на функцијата, кога таа е зададена шематски, табеларно, графички или аналитички
- да го определат множеството вредности на функцијата, кога таа е зададена табеларно или графички,
- да ги наоѓаат вредностите на функцијата за секоја допустлива вредност на аргументот, при секој начин на задавање на функцијата,
- ако функцијата е зададена графички, да ја отчитуваат вредноста на ординатата при дадена вредност на апцисата,
- да наоѓаат пресечни точки на графици на две функции,
- да утврдат дали функцијата расте или опаѓа на даден интервал и
- да го препознаваат графикот на линеарната функција и на хиперболата.

Исто така, ако функцијата е графички зададена, тогаш учениците треба да можат да одговорат на следниве прашања:

- Во кои точки графикот на функцијата ги сече координатните оски?
- За кои вредности на аргументот функцијата е позитивна, а за кои е негативна?
- За кои вредности на аргументот функцијата расте, за кои опаѓа, а за кои таа има една иста вредност?
- Во кои интервали функцијата расте, во кои опаѓа, а во кои ниту расте, ниту опаѓа?
- За кои вредности на аргументот функцијата има најголема или најмала вредност?

Последното е неопходно, за да се постигне минимално ниво на добивање информации од графикот на функцијата, што е особено важно за реализирањето на техничката насоченост на наставата по математика. Се разбира, само со задавање на наведените прашања, што е чест случај во учебниците, саканите резултати не се постигнуваат. Затоа во овој дел потребно е поголема застапеност на демострационите дидактички средства и решавање на што е можно поголем број задачи, за што најчесто немањето доволно учебно време е ограничувачки фактор.

ИНДЕКС НА ПОИМИ

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Ц

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd, 1988
2. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
3. Cofman, J.: What to Solve?, Clarendon Press, Oxford, 1990
4. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg, 1997
5. Feldman, D.: Naturus gambit. Child progies and the development of human potential, New York, Basic Books, Inc, 1987
6. Gardner, H.: Frames of mind, New York, Basic Books, Inc, 1983
7. Glavche, M., Anevska, K., Malčeski, R.: Learning the methodology of mathematical problem solving in elementary education, IJSR, Vol. 3, Iss. 9, pp. 809-813, 2014
8. Glavche, M., Malčeski, R., Anevska, K.: Errors in the mathematical education made by the students from the fifth grade, Математика и математическо образование, 2015, 44, pp. 265-274, 2015
9. Glavche, M., Malčeski, R., Anevska, K.: Errors related to the mathematical topics geometry and data representation and analysis made by the fifth grade students in the Republic of Macedonia, Mathematics and Informatics, Vol. 58, No. 6, 567-581, 2015
10. Glavche, M., Malčeski, R., Anevska, K.: The importance of the mathematical tasks for the development of the quality of thinking of the elememtary school students, Teacher Vol. 9, No. 1, 58-64, 2015
11. Glavche, M., Malčeski, R.: Errors in the mathematical education made by the students from the second grade, Teacherl, Bitola, 2013
12. Glavche, M., Malčeski, R.: Errors in the mathematics education made by third grade students, Conference Proceedings of International Conference “Innovations, Challenges and Tendencies in the Post Modern Education”, Stara Zagora, 2013
13. Glavche, M., Malčeski, R.: Omissions in Mathematical Knowledge of Students in Primary Education. Proceedings of 1th International Scientific Conference „Education in the Modern European Environment“, Opatija, 2012

14. Glavche, M., Malčeski, R.: The type of mathematical errors made by the students in the elementary education, Journal of Pedagogy, Skopje, 2013
15. Gogovska, V., Anevska, K., Malčeski, R.: Properties of Thinking and Adoption of Mathematical Knowledge, Proceedings of the 2014 International Conference on Education and Educational Technologies II (EET '14), Praga, 2014
16. Gogovska, V., Malčeski, R.: Counter-examples in lecturing mathematics, Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico, 2008
17. Gogovska, V., Malčeski, R.: Discovering errors while solving mathematical tasks, Proceedings Education of the 3th International Congress on Mathematics MICOM 2009, Ohrid, Macedonia, 2009
18. Gogovska, V., Malčeski, R.: Generalization – Challenge for Gitfed Students, Proceedings of the Tenth International Seminar of Mathematical Education on Creativity Developmnet, Daejeon, Korea, 2005
19. Gogovska, V., Malčeski, R.: Improvement intra-disciplinary integration of mathematics instruction, Elsevier, Procedia - Social and Behavioral Sciences, 46, 5420-5424, 2012
20. Gogovska, V., Malčeski, R.: Introducing textual tasks in mathematics curriculum, Shumen, Bulgaria, 2010
21. Gogovska, V., Malčeski, R.: Mathematical models in mathematics curriculum, Riga, Latvia, 2011
22. Gogovska, V., Malčeski, R.: The creative teacher, factor for improving mathematics instruction, Proceedings of the 7-th MCG Conference, Busan, Korea, 2012
23. Jordan, A.M.: Measurement in education, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York, 1953
24. Krutetskii, V. A.: The psychology of mathematical abilities in school children. Chicago, Il. University of Chicago Press, 1976
25. Malčeski, R., Anevska, K., Glavche, M.: The integration of mathematics instruction in elementary education, IJSR, Vol. 3, Iss. 9, pp. 2394-2398, 2014
26. Malčeski, R., Gogovska, V., Anevska, K.: Algebraic rational expressions in mathematics, IJSR, Vol. 3 Issue 10, pp. 420-428, 2014
27. Malčeski, R., Gogovska, V.: Proff and proving in mathematical classroom, Joint Meeting of AMS, DMV and OMG, June 16-19, 2005, Mainz, Germany, 2005

28. Malčeski, R., Gogovska, V.: The Role of Educational method in teaching of gifted and talented students, The 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, Denmark, 2004
29. Malčeski, R., Gogovska, V.: Using means inequality form getting structural mathematical knowledge, The Third International Conference "creativity in Mathematics Education end the Education of Gifted Students", Ruse, Bugaria, 2003
30. Malčeski,R.; Gogovska, V.: Integration of mathematics curriculum, a Challenge of the contemporary Mathematics, International Conference on Mathematics Education, 3–5 June 2005, Svishtov – Bulgaria, 2005
31. Michael, W. B.: Cognitive and affective components of creativity in mathematics and the psysical sciences, In J. C. Stanley, W. C. George & C. H. Solano, The gifted and the creative: A fifty-year perspective. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1977
32. Renzulli, J. S.; Reis, S. M.: The schoolwide enrishment model, Creative Learing Press, Inc. Mansfield Center, 1985
33. Šimleša, P.: Suvremena nastava, Pedagoško-književni zbor, Zagreb, 1965
34. Tošić, R.: Invarijante – varijacije na temu, ALEF, Novi Sad, 1996
35. Аневска, К., Малчески, Р.: Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје2012
36. Атанасова-Вангелова, Д.; Георгиева-Колева, З.: Задачи по математика за 7 клас, АЛМА, Варна, 1994
37. Валш, В.: Някои методически проблеми на доказателството в обучението по математика, София, 1980
38. Вьранова, М.; Ганчев, И.: Методика на обучението по математика (специјална част), Асарта, 2002
39. Ганчев, И., Кучинов, Й.: Организация и методика на урока по математика, Модул, София, 1987
40. Ганчев, И.: За математическите задачи, София, 1971
41. Ганчев, И.: Обучението по математика в системата на между-предметните връзки, София, 1985
42. Ганчев, И.: Основни учебни дейности в урока по математика, Модул, София, 1996
43. Ганчев, И.; Портев, Л.; Баев, Б.; Тодорова, П.: Методика на обучението по математика 5.-7. клас, Макрос, Пловдив, 1997
44. Гастева, С. А.; Крельштейн, Б. И.; Ляпин, С. Е.; Шидловская, М. М.: Методика преподавания математики в восьмилетней школе, Просвещение, Москва, 1965

45. Гнеденко, Б. В.: Възпитаване на научен мироглед в уроците по математика, София, 1980
46. Гнеденко, Б. В.: Върху развитието на мисленето и речта в уроците по математика, Математика в школе, 3/1976, Москва (превод на бугарски)
47. Гнеденко, Б. В.: Елементи от историята на науката в уроците по математика, София, 1980
48. Димовски, Д., Стојоски, С.: Равенки и неравенки со непозната и под Ilić, V.: Odabrani zadaci sa matematička takmičenja za učenike 5. i 6. razreda, DMS, Beograd, 1986
49. Димовски, Д.; Стојоска-Златков, Б.; Стојоски, С.; Кондинска, Л.: Математика за 5 одделение, Просветно дело, Скопје, 2000
50. Димоски, И., Малчески, Р., Малческа, Ц.: Следење, проверување и оценување на постигањата на учениците, ФОН, Скопје, 2010
51. Есипов, Б. П.: Сомостоятелната работа на учениците по време урока, Народна просвета, София, 1963
52. Занков, Л. В.: Обучение и развитие, Педагогика, Москва, 1982
53. знакот за апсолутна вредност, Нумерус, Скопје, 1991
54. Иванов, П.: Методика на обучението по математика, Наука и изкуство, София, 1965
55. Јанев, И.: Математика за V одделение, Табернакул, Скопје, 2001
56. Јанев, И.; Хаџи-Николова, С.: Математика за VI одделение, Табернакул, Скопје, 2001
57. Карчмарчик, Я. Е.: Формиране на понятието импликация в основното училище, София, 1980
58. Колосов, А. А.: Книга за извьнкласно четене по математика, Народна просвета, София, 1962
59. Крайзман, М. Л.: Векторният метод и приложението му при решаване на задачи, София, 1980
60. Крайзман, М. Л.: Решаване на задачи по геометрия чрез замяна на една фигура с друга, София, 1980
61. Кучинов, Й.: Методика на вьвеждане на някои математически понятия, София, 1980
62. Лазаревић, Б.: Припремни задаци за математичка такмичења за ученике IV разреда основне школе, ДМС, Београд, 1990
63. Лесов, Х.: Принцип на Дирихле, Нумерус, 3/2003
64. Лесов, Х.; Дойчев, С.: Теми за класна и извьнкласна работа по математика, Регалия, София, 1995

65. Лоповок, Л. М.: За някои геометрични задачи, София, 1980
66. Малческа, Ц., Малчески, Р.. Образовни крстопати на прагот на XXI век, Просветно дело, Скопје, 1999
67. Малческа, Ц., Малчески, Р.. Оспособеноста на наставникот за успешно следење, проверување и оценување на постигањата на учениците, Меѓународен симпозиум за оценување, БРО, Скопје, 1997
68. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика 2006-2013 (основно образование), СММ, Скопје, 2014
69. Малчески, Р., Аневска, К.: Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје2012
70. Малчески, Р., Димовски, Д., Јакимовиќ, С., Малчески, А.: Есенски математички турнир Црноризец Храбар, СММ, Скопје, 2001
71. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Вовед во теорија на броеви, МММ, Скопје, 1993
72. Малчески, Р., Малческа, Ц., Малческа, Ф.: Стратегии и техники на учење и подучување, ФОН, Скопје2010
73. Малчески, Р., Малческа, Ц., Тренчевски, К., Стојоски, С.: Некои сознанија за корелацијата на наставните програми во природно-математичкото подрачје во наставата од V до VIII одделение на основното образование, Зборник трудови од Симпозиум, Отешево, 1994
74. Малчески, Р., Малческа, Ц.: Работа со надарени ученици, ФОН, Скопје, 2010
75. Малчески, Р., Малчески, А. (1993). Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје
76. Малчески, Р., Малчески, А. Развојот на талентираните ученици за математика, Образовни рефлекси, 3-4, Скопје, 1997
77. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К., Манова-Ераковиќ, В., Маркоски, Ѓ., Стојковска, И.: Избрани задачи од елементарна алгебра (трето издание), СММ, Скопје, 2015
78. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
79. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: По патеките на шампионите за математика, СММ, Скопје, 2015
80. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Решавање на текстуални задачи (трето издание), СММ, Скопје, 2015

81. Малчески, Р., Малчески, А.: За златниот пресек, Нумерус, Скопје, 1995
82. Малчески, Р., Малчески, А.: За најмладите математичари, СММ, Скопје, 2000
83. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
84. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
85. Малчески, Р.: Ангелски принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
86. Малчески, Р.: Две задачи за правилен шестаголник, Нумерус, Скопје, 2015
87. Малчески, Р.: Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
88. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
89. Малчески, Р.: За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово, 1998
90. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од n-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
91. Малчески, Р.: И ова е лесно – алгоритам за решавање задачи со претурање, Нумерус (Математика+), Скопје (София), 2004 (2015)
92. Малчески, Р.: Идентитетот на Софија Жермен, Нумерус, Скопје, 2005
93. Малчески, Р.: Како да и помогнете на мува која не знае геометрија, Нумерус, Скопје, 1997
94. Малчески, Р.: Кралот Артур и тркалезната маса, Нумерус, Скопје, 2012
95. Малчески, Р.: Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје, 2012
96. Малчески, Р.: Математички игри 1, Нумерус, Скопје, 1994
97. Малчески, Р.: Математички игри 2, Нумерус, Скопје, 1994
98. Малчески, Р.: Метод на инваријанти 1, Нумерус, Скопје, 2005
99. Малчески, Р.: Методика на наставата по математика (трето издание), СММ, Скопје, 2016
100. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
101. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
102. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје, 2012

103. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
104. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
105. Малчески, Р.: Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
106. Малчески, Р.: Покривање рамностран триаголник со рамнострани триаголници, Математика+ (Нумерус), София (Скопје), 2015
107. Малчески, Р.: Пресметување на збирови од производи и степени, Нумерус, Скопје, 2014
108. Малчески, Р.: Семејно решавање на една "едноставна" задача, Сигма, Скопје, 1995
109. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
110. Малчески, Р.:. Математички игри 3, Нумерус, Скопје, 1995
111. Малчески, Р.:. Математички игри 4, Нумерус, Скопје, 1995
112. Малчески, Р.:. Метод на инваријанти 2, Нумерус, Скопје, 2005
113. Малчески, Р.:. Стрелките на часовникот се движат, па што, Нумерус, Скопје, 1995
114. Марков, Д.; Стамболов, П.; Ненчев, М.: Обучението по алгебра, Народна просвета, София, 1963
115. Младеновиќ, П.: Правила за еднаков број, збир и производ, Нумерус 2/2002
116. Петкова, С.: Ръководство за решаване на задачи по алгебра за 8. клас, Регалия 6, София, 1996
117. Петров, К.: 100 избрани задачи по математика, ЕСЛА, София, 1995
118. Пиперевски, Б.; Малчески, Р.; Малчески, А.; Трајковска И.: Избрани содржини од елементарна математика II, Сигма, Скопје, 2001
119. Пойа, Д.: Как да се решава задача, София, 1972
120. Пойа, Д.: Математиката и правдоподобните разсъждения, София, 1970
121. Пойа, Д.: Математическое открытие, Наука, Москва, 1976
122. Райков, Н.; Ганчев, Г.: Ръководство за решаване на задачи по геометрия за 8. клас, Регалия 6, София, 1995
123. Рангелова, П.; Бекриев, К.; Дилкина, Л.; Иванова, Н.: Математика 5. клас, Пловдив, 1996
124. Столяр, А. А.: Логические проблем препродавни математики, Минск, 1968
125. Столяр, А. А.: Педагогика на математиката, Народна просвета, София, 1976

126. Столяр, А. А.: Чему долино учить методика препродавания математики, Математика в школе, 6/1979, Москва
127. Стяжкин, Н. И.: Формирование математической логики, Наука, Москва, 1967
128. Тренчевски, Г.; Тренчевски, К.: Математика за VI одделение, Просветно дело, Скопје, 2001
129. Тренчевски, Г.; Тренчевски, К.: Математика за VII одделение, Просветно дело, Скопје, 2002
130. Тренчевски, Г.; Тренчевски, К.: Математика за VIII одделение, Просветно дело, Скопје, 2003
131. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д.: Занимлива математика, МММ, Скопје, 1994
132. Тренчевски, К.; Малчески, Р.: Магични квадрати, СИГМА 27, 1993
133. Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Димовски, Д.: Занимлива математика, МММ, Скопје, 1994
134. Христов, М.; Стоянова, С.: Сборник задачи по аритметика за началното училище, София, 1963
135. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч.: Клуб математика за всеки, 5. клас, Анубис, София, 1998
136. Целакоски, Н.: Дидактика на математиката, Нумерус, Скопје, 1993
137. Яглом, И.М.: Необыкновенная алгебра, Наука, Москва, 1968