XI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика '86-'95
подготвена од Илија Јанев, Никола Петрески и Милчо Аврамоски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Од десната страна на бројот 1986 допиши трицифрен број, така што добиениот седумцифрен број да биде делив со 7, со 8 и со 9.

2. Пресметај ја бројната вредност на изразот $a^4+b^4+c^4$, ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$.

3. Конструирај остроаголен триаголник ABC, ако се зададени: правата p на којашто лежи страната AB на триаголникот ABC и подножните точки M и N на висините спуштени од темињата A и B соодветно, при што точките M и N лежат од иста страна на правата p.

4. Триаголникот ABC е рамнокрак со основа AB. Низ темето C е повлечена правата p што ја сече основата AB во точка D, таква што триаголниците ADC и BCD се исто така рамнокраки, но не и складни меѓу себе. Најди ги аглите во триаголникот ABC.

XI (86.VII.1)

Прв начин. Бројот $\overline{1986xyz}$ ќе биде делив со 7, со 8 и со 9, ако е делив со нивниот НЗС, т.е. со $7\cdot 8\cdot 9=504$ (бидејќи 7, 8 и 9 се заемно прости броеви). За да го најдеме најмалиот седумцифрен број којшто започнува со цифрите 1, 9, 8 и 6 и е делив со 504, го делиме бројот 1986000 со 504 и го наоѓаме остатокот при тоа делење - тоа е бројот 240. Тогаш на бројот 1986000 му ја додаваме разликата $504-240=264$ и го добиваме бројот 1986264, којшто е делив со 504. Ако на бројот 1986264 му додадеме 504, ќе го добиеме бројот 1986768, којшто ги задоволува условите на задачата.

Следствено, постојат два трицифрени броја 264 и 768 кои треба да се допишат оддесно на бројот 1986 за добиениот седумцифрен број да биде делив со 7, со 8 и со 9.

Втор начин. Од условот $\overline{1986xyz}=7\cdot 8\cdot 9\cdot p$ добиваме:

$$1986000+\overline{xyz}=7\cdot 8\cdot 9\cdot p$$

$$3940\cdot 504+240+\overline{xyz}=504\cdot p.$$

Последното равенство е можно само ако збирот $240+\overline{xyz}$ е делив со 504, т.е.

$$(*)\qquad 240+\overline{xyz}=540\cdot k\ .$$

За $k=1$ добиваме $240+\overline{xyz}=504$, т.е. $\overline{xyz}=264$.

За $k=2$ добиваме $240+\overline{xyz}=1008$, т.е. $\overline{xyz}=768$.

За $k>2$ не постои трицифрен број што го задоволува равенството (*).

Значи, постојат само два трицифрени броја: 264 и 768 кои ги задоволуваат условите на задачата. Навистина:

$$1986264=504\cdot 3941 \quad \text{и} \quad 1986768=504\cdot 3942\ .$$

XI (86.VII.2)

За одредување вредноста на изразот $A=a^4+b^4+c^4$ ќе ја користиме формулата за трином на квадрат, т.е.

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

од каде што следува:

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx).$$

Сега за изразот A добиваме:

$$A=a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=$$
$$=1-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=1-2B$$

Со квадрирање на првиот услов наоѓаме:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$0=1+2(ab+bc+ca)$$
$$-\frac{1}{2}=ab+bc+ca.$$

Ако го квадрираме последното равенство добиваме:

$$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\left(ab^2c+bc^2a+ca^2b\right)$$
$$\frac{1}{4}=B+2abc(b+c+a)$$
$$\frac{1}{4}=B.$$

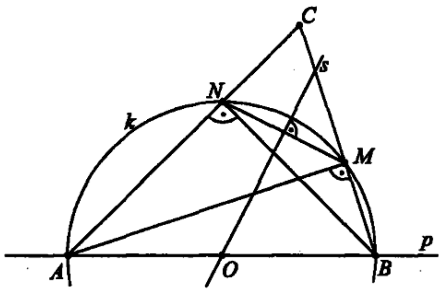
Конечно, за изразот A добиваме:

$$A=1-2B=1-2\cdot\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

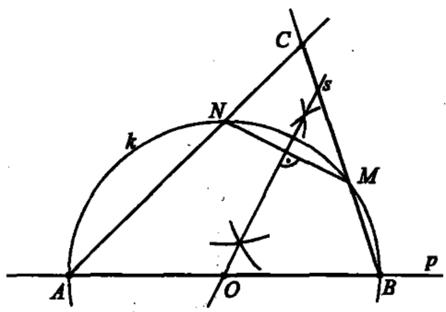
Значи, ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$, тогаш $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$.

XI (86.VII.3)

1⁰ Анализа. Да претпоставиме дека триаголникот ABC е бараниот, т.е. страната AB му лежи на дадената права p, а M и N се подножните точки на висините спуштени од темињата A и B (црт. 1). Бидејќи триаголниците ABM и ABN се правоаголни со заедничка хипотенуза AB, следува, според Талесовата теорема, дека точките M и N лежат на кружница k, чиј дијаметар е отсечката AB. Отсечката MN е тетива на кружницата k, па следува дека нејзината симетрала s минува низ центарот O на кружницата k, т.е. низ средината на отсечката AB.



Црт. 1



Црт. 2

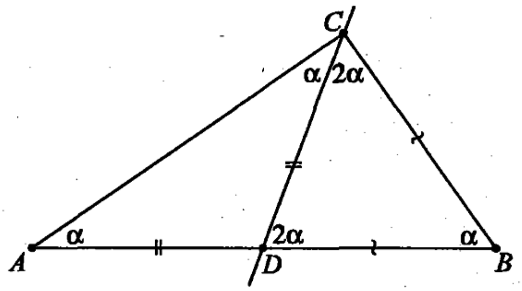
2⁰ Конструкција. Прво ја конструираме симетралата s на отсечката MN. Нејзиниот пресек со правата p е точката O - центарот на кружницата k; радиусот на кружницата е еднаков на должината на отсечката OM. Со конструкцијата на кружницата $k(O,\overline{OM})$ ги добиваме, во пресекот со правата p, темињата A и B на триаголникот ABC. Темето C е пресек на правите BM и AN (црт. 2).

3⁰ Доказ. Страната AB, очигледно, лежи на правата p. Бидејќи точките M и N лежат на кружницата $k(O,\overline{OA}=\overline{OB})$ следува, според Талесовата теорема, дека триаголниците ABM и ABN се правоаголни, со заедничка хипотенуза AB. Следствено $AM \perp BM$ и $BN \perp AN$, па AM и BN се висини на триаголникот ABC, т.е. M и N се подножни точки на висините спуштени од темињата A и B, соодветно.

4⁰ Дискусија. Задачата има единствено решение, ако правата MN не е нормална на правата p, а нема решение ако $MN \perp p$. (Зошто? Дали тогаш правата s је сече правата p?). Разгледај го случајот кога едната точка (M или N) лежи на правата p и случајот кога точките M и N лежат од различни страни на правата p. Каков триаголник се добива во овој случај?

XI (86.VII.4)

Очигледно, триаголникот ABC е тапоаголен. (Зошто?) Нека правата CD го дели ΔABC на два рамнокраки триаголници ADC и BCD. (црт. 3). Да ги означиме со α аглите при основата AB на ΔABC. Основа на рамнокракиот ΔACD е страната AC; тогаш $\measuredangle ACD = \alpha$. Аголот BDC е надворешен агол за ΔADC и е еднаков на збирот на двата внатрешни, со него несоседни агли, т.е. $\measuredangle BDC = 2\alpha$. Но, тогаш и $\measuredangle BCD = 2\alpha$, бидејќи ΔCDB е рамнокрак со основа CD.



Црт. 3

Збирот на внатрешните агли во ΔABC е $180°$, т.е.

$$\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°, \quad 5\alpha = 180°, \quad \alpha = 36°.$$

Значи, бараните агли во ΔABC се: $\alpha = \beta = 36°$, $\gamma = 108°$.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Најди права (чиста) дропка поголема од $\frac{1}{3}$, таква што при зголемување на броителот за некој број и множење на именителот со истиот број, вредноста на дропката не се менува.

2. Правите $p: 3x-4y=-9$ и $s: 3x+4y=15$ со x-оската образуваат триаголник. Најди го растојанието меѓу тежиштето на тој триаголник и центарот на неговата впишана кружница.

3. Средината S на една од основите на трапезот $ABCD$ е поврзана со крајните точки на другата основа. Тие отсечки со дијагоналите на трапезот се сечат во точките M и N. Докажи дека правата MN е паралелна со основите на трапезот и дека отсечката што лежи на правата MN и чии крајни точки лежат на краците на трапезот, со точките M и N е поделена на три еднакви делови.

4. Докажи дека кај секој правоаголен триаголник важи неравенството $R+r\geq\sqrt{2P}$, каде што R и r се радиусите на опишаната, односно впишаната кружница, а P е плоштината на триаголникот.

XI (86.VIII.1)

Нека бараната дропка е $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{N}$ и нека $x \in \mathbb{N}$ е бројот со кој го зголемуваме броителот и го множиме именителот, тогаш по услов

$$\frac{a}{b} > \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{a+x}{bx} = \frac{a}{b}.$$

Од вториот ослов, бидејќи $b \neq 0$ и $x \neq 0$, добиваме:

$$b(a+x) = abx$$
$$a + x = ax$$
$$x = a(x-1)$$
$$a = \frac{x}{x-1}$$

За a да биде природен број, треба $x-1$ да е делител на x, а тоа е можно само ако $x-1=1$ (бидејќи $x-1$ и x се два последователни природни броја и се заемно прости). Оттука $x=2$. Но, тогаш и $a=2$.

Од условот $\frac{a}{b} > \frac{1}{3}$ добиваме $\frac{2}{b} > \frac{1}{3}$ или $6 > b$, па бидејќи $b \in \mathbb{N}$, следува $b \in \{1,2,3,4,5\}$. За $b=1$ и $b=2$ не добиваме права дропка, а за $b=3$, $b=4$ и $b=5$ ги добиваме дропките: $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}$ и $\frac{2}{5}$.

Следствено, постојат три дропки што ги исполнуваат условите на задачата: $\frac{2}{5}, \frac{2}{4}$ и $\frac{2}{3}$.

Забелешка. Равенката $a + x = ax$ можеме да ја трансформираме вака:

$$a + x - ax = 0$$
$$a - ax + x - 1 = -1$$
$$a(1-x) - (1-x) = -1$$
$$(1-x)(a-1) = -1$$

Последната равенка е можна ако во исто време е:

(1) $\qquad 1 - x = -1 \quad \text{и} \quad a - 1 = 1$

или

(2) $\qquad 1 - x = 1 \quad \text{и} \quad a - 1 = -1$

Во првиот случај $x=2$ и $a=2$, а во вториот $x=0$ и $a=0$, што не е можно.

Значи, единствена можност е: $a=2$ и $x=2$. Понатаму задачата се решава на сличен начин.

XI (86.VIII.2)

Ја запишуваме правата p во видот

$$3x+9=4y\,,\qquad 4y=3(x+3)\,,\qquad y=\frac{3}{4}(x+3)$$

од каде што лесно ја добиваме таблицата

x	-3	1	5
y	0	3	6

Аналогно, за правата s добиваме:

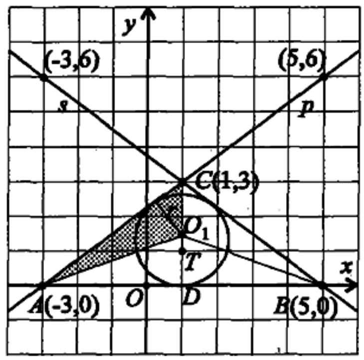
$$y=\frac{3}{4}(5-x)$$ и

x	5	1	-3
y	0	3	6

Користејќи ги подредените двојки од таблиците, ги цртаме правите p и s (црт. 4). Од цртежот лесно се забележува дека ΔABC е рамнокрак, со основа $\overline{AB}=8$, бидејќи:

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DC}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{DC}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$



Црт. 4

Според тоа, отсечката $\overline{CD}=3$ е висина, тежишна линија и симетрала на аголот кај темето C на ΔABC.

Значи, на оваа отсечка ќе лежат тежиштето T и центарот на опишаната кружница O_1 на ΔABC, од каде што следува дека нивните апсциси се еднакви на 1. За да го најдеме растојанието O_1T, треба да ги одредиме ординатите на точките O_1 и T.

Од условот дека тежиштето T ја дели висината $\overline{CD}=3$ во однос 2:1 следува дека ординатата на точката T е 1, т.е. $T(1,1)$.

За одредување ординатата на точката O_1, доволно е да го одредиме радиусот r на впишаната кружница, бидејќи $\overline{O_1D}=r$. Радиусот r го наоѓаме според формулата $r=P/S$, каде што P е плоштината, а S полупериметарот на ΔABC. Значи, имаме:

$$P=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=12$$

$$S=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}\right)=\frac{1}{2}(8+5+5)=9$$

$$r=\frac{P}{S}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

Конечно, за должината на отсечката O_1T добиваме:

$$\overline{O_1T} = \overline{O_1D} - \overline{TD} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Значи, растојанието меѓу тежиштето на ΔABC и центарот на неговата впишана кружница е 1/3 должински единици.

Забелешка. Радиусот r можеме да го одредиме на следниот начин. Триаголникот ABC со отсечките AO_1, BO_1 и CO_1 е поделен на три триаголника: ABO_1, BCO_1 и CAO_1, па затоа неговата плоштина е еднаква на збирот од плоштините на овие триаголници, т.е.

$$P_{ABC} = P_{ABO_1} + P_{BCO_1} + P_{CAO_1}$$

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot r + \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot r + \frac{1}{2}\overline{CA} \cdot r \qquad / \cdot 2$$

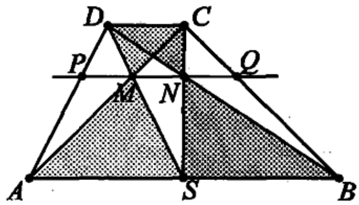
$$8 \cdot 3 = (8+5+5)r; \qquad r = \frac{4}{3}.$$

XI (86.VIII.3)

Нека S е средина на основата AB на трапезот $ABCD$ и нека M и N се пресечните точки на дијагоналите на трапезот со отсечките SD и SC, а P и Q пресеци на краците на трапезот со правата MN (црт. 5). Треба да докажеме дека $MN \parallel AB$ и дека $\overline{PM} = \overline{MN} = \overline{NQ}$.

За да докажеме дека $MN \parallel AB$, доволно е, според обратната теорема на Талес, да докажеме дека важи

$$\overline{CM} : \overline{CA} = \overline{CN} : \overline{CS} \quad \text{или} \quad \overline{CM} : \overline{MA} = \overline{CN} : \overline{NS}$$



Црт. 5

За таа цел воочуваме дека триаголниците ASM и CDM се слични (зошто?), а исто така и $\Delta SBN \sim \Delta CDN$, од каде што добиваме

$$\overline{CM} : \overline{MA} = \overline{CD} : \overline{AS} \quad \text{и} \quad \overline{CN} : \overline{NS} = \overline{CD} : \overline{SB}$$

Бидејќи $\overline{AS} = \overline{SB}$, следува дека десните страни на овие пропорции се еднакви, па имаме:

$$\overline{CM} : \overline{MA} = \overline{CN} : \overline{NS},$$

што значи дека $MN \parallel AS$, т.е. $MN \parallel AB$.

Бидејќи правата $MN \parallel AB$ следува дека:

$$\Delta ASD \sim \Delta PMD \quad \text{и} \quad \Delta ABD \sim \Delta PND$$

од каде што добиваме:

$$\overline{AS} : \overline{PM} = \overline{AD} : \overline{PD} \quad \text{и} \quad \overline{AB} : \overline{PN} = \overline{AD} : \overline{PD}.$$

Бидејќи десните страни на овие пропорции се еднакви, следува:

$$\overline{AS} : \overline{PM} = \overline{AB} : \overline{PN} \quad \text{или} \quad \overline{AS} : \overline{AB} = \overline{PM} : \overline{PN}$$

Но, $\overline{AS} : \overline{AB} = 1:2$, па имаме $\overline{PM} : \overline{PN} = 1:2$, т.е. $\overline{PM} = \overline{MN}$.

На сличен начин од сличноста на триаголниците ABC и MQC, односно SBC и NQC добиваме дека $\overline{MN} = \overline{NQ}$.

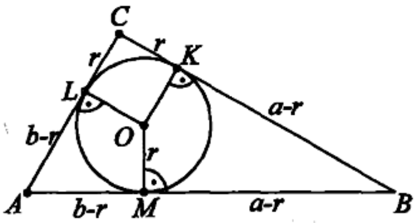
Следствено: $\overline{PM} = \overline{MN} = \overline{NQ}$.

XI (86.VIII.4)

Нека *K, L, M* се допирните точки на впишаната кружница во правоаголниот ΔABC со неговите страни, а r и R радиусите на впишаната и опишаната кружница (црт. 6), тогаш:

$$\overline{CK}=\overline{CL}=r\ ,\quad \overline{AM}=\overline{AL}=b-r\ ,$$

$$\overline{BM}=\overline{BK}=a-r$$



Црт. 6

Во правоаголниот триаголник $c=2R$, а од друга страна, пак,

$$c=b-r+a-r\ ,$$

па добиваме:

$$2R=b+a-2r\ ,\quad 2R+2r=a+b\ ,$$

односно $R+r=\frac{a+b}{2}$. Имајќи предвид дека $2P=ab$, неравенството $R+r\ge\sqrt{2P}$ го добива видот

(1) $$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ .$$

Ова неравенство е познато како неравенство помеѓу аритметичката и геометриската средина на два броја, кое важи за кои било ненегативни броеви a и b, а се докажува на повеќе начини. Ние ќе го докажеме на следниот начин. Тргнуваме од очигледното неравенство $(a-b)^2\ge 0$, па добиваме:

$$a^2+b^2-2ab\ge 0$$
$$a^2+b^2-2ab+4ab\ge 4ab$$
$$a^2+b^2+2ab\ge 4ab$$
$$(a+b)^2\ge 4ab$$
$$a+b\ge 2\sqrt{ab}$$
$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}.$$

Да забележиме дека равенството важи само ако $a=b$, т.е. ако ΔABC е рамнокрак правоаголен триаголник.