Ристо Малчески
Алит Ибраими
Алекса Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С10

(збирка нерешени задачи за натпревари за средно образиование – втор дел)

Скопје, 2020

Рецензенти

Даниел Велинов
Павел Димовски

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)(076)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Математички талент С10 : (збирка нерешени задачи за натпревари за средно образиование - втор дел) / Ристо Малчески, Алит Ибраими, Алекса Малчески. - Скопје : Армаганка, 2020. - 137 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 131-137

ISBN 978-608-4904-61-8

1. Ибраими, Алит [автор] 2. Малчески, Алекса [автор]
а) Математика -- Задачи за средно образование

COBISS.MK-ID 51228677

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Оваа книга на некој начин ја заокружува серијата збирки за работа со надарени ученици во средното образование. Самата книга е поделена на два дела и тоа Основно ниво и Напредно ниво. Во првиот дел се дадени 901 нерешени задачи кои се наменети за подготовка за натпревари до државно ниво. Како и збирката Математички талент С9 и во овој дел поголемиот дел од задачите се нови и не се содржани во првите девет збирки од серијата, но дел од задачите се повторуваат. Целта на разместувањето на исти задачи, но овој пат како нерешени е на извесен начин да се овозможи повторување на материјалот и подготовка за спешно решавање на останатите нерешени задачи.

Во вториот дел од збирката, се содржани 197 нерешени задачи кои се задавани на различни меѓународни натпревари, но и на некои национални олимпијади. Намената на овие задачи е подготовка на учениците кои учествуваат на меѓународните натпрвари по математика, како што се Европскиот математички куп, Турнирот на градовие, Иравнската геометрсика олимпијада, Мадитеранската математичка олимпијада, Азиско-пацифичката математичка олимпијада и слично.

Рецензентите прод. д-р Даниел Велинов и проф. д-р Павел Димовски со своите сугестии придонесоа како да се подобрат формулациите на избраните задачи, така и да се подбри изборот на задаачите, особено во вториот дел на оваа збирка.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Авторите
мај, 2020 г.

I ПРВ ДЕЛ: ОСНОВНО НИВО

1. МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И ИГРИ

1. Во едно одделение има 30 ученици. Меѓу нив 13 играат фудбал, 12 играат кошаркаи 17 одбојка. Фудбал и одбојка играат 5 ученици, фудбал и кошарка 5 ученици, одбојка и кошарка исто така 5 ученици. Колку ученици ги играат сите три спортови? Колку ученици играат само одбојка?

2. Во еден град кој има 40000 жители во добротворни цели се организираат различни активности. Градоначалникот на крајот на годината се пофалил дека се одржани два концерти и лотарија и дека секој втор граѓанин учествувал во добротворните активности. Познато е дека на концертот со озбилна музика имало 2000 посетители, на рок-концетот биле 8000 посетители и дека по една срećка за лотарија купиле 12000 жители. Понатаму, познато е дека 500 жители биле на двата концерти, дека 50 жители кои биле на концертот озбилна музика учествувале во лотаријата и дека 3000 посетители на рок-концертот учествувале во лотаријата. Никој не купил повеќе од една срećка.
Дали изјавата на градоначалникот е точна?

3. Дадени се множествата $A=\{8r-1,5r\}$ и $B=\{3r+4,6r+3,6r+1\}$. Определи го множеството $A\cap B$ ако:
а) r е природен број,
б) r е рационален број.

4. Докажи дека за секои множества A,B,C важи
а) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$,
б) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

5. Нека A и B се множества и
$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$
Докажи дека:
а) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$,
б) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

6. Нека S е множество од 6 позитивни броеви такво што
$$(a,b\in S)(a>b)\Rightarrow a+b\in S \text{ или } a-b\in S.$$
Докажи дека ако овие броеви ги наредиме во растечки редослед, тогаш разликата меѓу секои два соседни броја е константна.

7. Определи ги сите тројки реални броеви (a,b,c) за кои множествата
$$\{a^2-4c,b^2-2a,c^2-2b\} \text{ и } \{a-c,b-4c,a+b\}$$
се еднакви и важи $2a+2b+6=5c$. Во секое од множествата елементите се меѓусебно различни.

8. Дадено е множеството $S=\{1,2,3,...,3n\}, n\in\mathbb{N}$ и било кое негово подмножество T кое има најмалку $n+1$ елемент. Докажи дека постојат елементи $a,b\in T$ такви што барем еден од броевите $ab+1$ или $4ab+1$ е точен квадрат.

9. Множеството $\{1,2,...,9\}$ е поделено на две дисјунктни подмножества A и B. Докажи дека барем во едно од нив постојат три различни броеви x,y,z за кои важи $x+y=z$.
Докажи дека тврдењето не важи за множеството $\{1,2,...,8\}$.

10. Докажи дека за $n>1$ множеството $\{1,2,3,...,3n|$ може да се разбие на 3 дисјунктни подмножества со по n елементи и еднакви збирови на елементите.

11. Определи ги сите броеви k за кои множеството $\{1,2,3,...,100\}$ може да се разбие на k дисјунктни подмножества така што збирот на елементите во секое подмножество ќе биде еднаков.

12. Дадени се 2000 тегови со маси $1^3,2^3,3^3,....,2000^3$ грама. Докажи дека тие може да се разбијат во две групи од по 1000 тегови, така што збирот на масите во двете групи е еднаков.

13. Нека $A=\{1,2,3,...,2n-1\}$. Од множеството A отстрануваме $n-1$ броеви така што важи:
а) ако е отстранет бројот $a\in A$ и ако $2a\in A$, тогаш мора да се отстрани и $2a$,
б) ако се отстранети броевите $a,b\in A$ и ако $a+b\in A$, тогаш мора да се отстрани и $a+b$.
Кои броеви мора да се отстранат така што збирот на броевите кои останале во множеството ќе биде максимален?

14. Множеството $S=\{1,2,...,n\}$ прво е разбиено на m непразни подмножества, а потоа на m^2 непразни подмножества. Докажи дека некои m елементи на множеството S во првото разбивање биле сите во едно множество, а во второто разбивање биле сите во различни множества.

15. Нека n е природен број. Докажи дека множеството $\{1,2,3,4,...,2^{n+1}\}$ може да се разбие на две дисјунктни подмножества така што збировите на $k-$тите степени н елементите на двете подмножества се еднакви, за $k=0,1,2,...,n$.

16. Множеството природни броеви е поделено на две множества A и B. Докажи дека постојат природни броеви x и y поголеми од 2011 така што x,y и xy припаѓаат во едно од тие множества.

17. Студент во текот на петгодишното школување положил 31 испит. Секоја година тој полагал повеќе испити отколку претходната, а во петата година положил петпати повеќе испити отколку во првата година. Колку испити положил студентото во четвртата година на студирање?

18. На шаховски турнир првите четири места ги освоиле Темелко, Филип, Иван и Хари. На прашањето на новинарите како се пласирале, добиени се следниве изјави:
Темелко: Филип и втор, а Иван е трет.
Филип: Иван е втор, а Темелко е четврт.
Иван: Темелко е трет, а Хари е втор.
Незадоволен од својот пласман Хари не сакал да даде изјава. Останатите, со намера да ги збунат новинарите, дали по еден точен и по еден неточен податок, што им го кажале на новинарите. Кој е точниот редослед на првите четворица пласирани на турнирот?

19. Шест ученици A, B, C, D, E, F решавале некоја задача. Задачата ја решиле двајца. На прашањето кој ја решил задачата добиени се следниве пет одговори:
1) A и C,
2) B и E,
3) F и A,
4) B и F,
5) D и A.
Во четири од овие пет одговори еден дел е точен, а другиот не е точен, додека во еден од одговорите двата дела не се точни. Кои ученици ја решиле задачата?

20. Околу тркалезна маса седат десет ученици. Секој ученик замислил еден број и тој број им го кажал на своите соседи (лево и десно) така што другите ученици не слушаат. Потоа, секој од учениците, одејќи во круг, јавно ја кажува аритметичката средина на двата броја кои ги дознал од своите соседи. Ако последователно се соопштени броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, кој број го замислил ученикот кој јавно го кажал бројот 6.

21. Илија може да размени произволен број пати:
- 1 слива и 1 круша за 2 јаболка,
- 1 круша и 1 јаболко за 3 сливи,
- 1 јаболко и 1 слива за 4 круши.
На почетокот Илија имал по 2012 сливи, јаболка и круши. Илија направил определен број размени и дошол во ситуација во која имал 2012 јаболка, 2012 круши и повеќе од 2012 сливи. Кој е најмалиот број сливи кои може да ги има во ваква ситуација?

22. Пет семејства имаа заеднички бунар. За да се досегне до површината на водата во бунарот потребни се две јажиња на семејството A и едно јаже на семејството B, или три јажиња на семејството B и едно јаже на семејството C, или четири јажиња на семејството C и едно јаже на семејството D, или

пет јажиња на семејството D и едно јаже на семејството E, или шест јажиња на семејството E и едно јаже на семејството A. Која е њјамалата длабочина на бунарот до површината на водата и колку се долги јажињата на одделните семејства ако е познато дека нивните должини се природни броеви? (Секое семејство има јажиња со еднаква должина.)

23. На еден тениски турнир секој тенисер игра по еден меч со секој друг тенисер. Во тенисот нема нерешени резултати. Докажи дека меѓу тенисерите постои тенисер кој ќе ги именува сите учесници, освен самиот себе, кога ги именува сите тенисери кои ги победил, а исто така и сите тенисери кои се победени од тенисерите кои тој ги победил. Дади барем еден пример со кој ќе го провериш тврдењето.

24. Околу тркалезна маса седат 2016 луѓе, од кои секој или е вистинољубец (секогаш ја говори вистината) или е лажливец (секогаш лаже). На секој од нив му е дадена по една картичка на која е напишан по еден природен број. Броевите запишани на картичките се различни. Откако ги погледнале своите броеви и броевите на своите соседи (по еден од лева и десна страна), секој од овие луѓе ркол: *Мојот број е поголем од двата броја на моите соседи.* Потоа k луѓе рекле: *Мојот број е помал од двата броја на моите соседи.* Определи ја најголемата можна вредност за k.

25. На натпревар по математика 200 ученици решавале 6 задачи. Секоја задача ја решиле најмалку 120 ученици.
Докажи дека постојат два ученика такви што секоја задача ја решил барем еден од нив.

26. Во еден парламент се поделени 200 мандати меѓу 8 политички партии така што никои 5 партии немаат двотретинско мнозинство. Докажи дека постојат две партии кои имаат еднаков број парламентарци.

27. На еден собир има n луѓе за кои за секои тројца важи: или сите тројца меѓусебно се познаваат или само двајца од нив се познаваат. Докажи дека ако меѓу учесниците на собирот постојат двајца кои не се познаваат, тога постои учесник кој има повеќе непознати од познати.

28. Меѓу девет мускетари некои се скарале и се предизвикале на двобој. Докажи дека или постојат тројца од кои секои двајца се скарани или постојат четворица од кои никои двајца не се скарани. Дали тврдењето важи за 8 мускетари?

29. Во затвор се доведени 100 затвореници. Надзорникот им рекол:
Ќе ви дадам една вечер да поразговарате меѓусебно, потоа ќе ве распоредам во одвоени ќелии па повеќе не ќе можете да комуницирате. Понекогаш некој од вас ќе го носам во просторија во која се наоѓа сијалица (на почетокот сијалицата е исклучена). Одејќи од собата вие можете да ја оставите сијалицата вклучена или исклучена, како сакате. Ако во некој момент некој од вас ми каже дека дека сите веќе сте биле во собата и ако биде во право,

тогаш ќе продолжам да ве доведувам во собата се додека уште некој друг не каже дека сите веќе биле во собата. Ако и тој биде во право, сите ќе ве ослободам. Ако било кој згреши сите ќе ве фрлам доживотно во самица. И немојте да се грижите дека некого ќе заборавам – ако ќутите, сите ќе бидете во собата со сијалица и никого ниту една посета нема да му биде последна.
Дали можат затворениците да смислат стратегија која им гарантира слобода?

30. Двајца играчи наизменично запишуваат произволни природни броеви во слободните полиња на табла 8×8. Кога таблата ќе се пополни се пресметуваат збировите на броевите по редови и колони. Бројот на поените на првиот играч е бројот на колоните со парен збир, а бројот на поените на вториот играч е бројот на редовите со парен збир.
а) Докажи дека вториот играч секогаш може да игра така што ќе освои поголем број поени.
б) Која е најголемата разлика на поени што може да ја оствари вториот играч?

31. Андреј и Горјан ја играат следнава игра. На почетокот Андреј разбива даден рамностран триаголник на конечно многу четираголници. Потоа Горјан и Андреј наизменично ги бојат темињата начетириаголникот во една од четири бои, при што прв почнува Горјан. Играта е завршена кога се обоени сите темиња. Победник е Андреј ако постои четириаголник кај кој сите темиња се обоени со различна бои. Во спротивно победник е Горјан. Кој играч има победничка стратегија?

32. Двајца играчи земаат топчиња од две кутии. Играчот кој е на потез избира кутија и од неа може да земе произволен број топчиња. Победник е играчот кој последен ќе земе топчиња. Како треба да игра првиот играч за да победи, ако во едната кутија има 76, а во другата има 976 топчиња?

33. Две момчиња играат игра со две кутии во кои има бонбони. Во првата кутија има 12 бонбони, а во втората 13 бонбони. Потез се состои од тоа да момчето земе две бонбони од една кутија или да премести една бонбона од првата во втората кутија. Момчето кое не може да одигра потез ја губи играта.
Докажи дека момчето кое игра второ по ред не може да изгуби. Дали може да победи?

34. Експерт на суд сака да докаже дека од 14 монети 7 се неисправни (тој знае кои се). Судијата знае дека неисправните монети се со еднаква тежина, а исто така и исправните и дека неисправните се полесни од исправните. Експертот сака со три мерења на вага без тегови да докаже на судијата кои монети се неисправни. Дали тоа може да го направи?

35. Дадено е колекција тегови со следниве својства:
а) постојат барем пет тегови со меѓусебно различни маси,
б) за било кои два тега постојат други два тега со еднаков збир на маси.
Определи го најмалио можен број тегови во оваа колекција.

36. На шаховски турнир се одиграни вкупно 100 партии. Двајца шахисти предвреме напуштиле турнирот. Секој од нив до напуштање на турнирот одиграл по 5 парти. Дали тие играле меѓусебно пред напуштање на турнирот?

37. На шаховски турнир секој шахист играл по една партија со секој друг шахист. Бодовите кои ги освоиле шахистите формираат аритметичка прогресија. Колку бода освоил победникот на турнирот, ако последнопласираниот освоил 2,5 бода.

38. На шаховско првенство учествуваат $4n$ шахисти и секој од нив игра по две партии со секој од преостанатите $4n-1$ шахисти, една со бели и една со црни фигури. Докажи дека на крајот на првенството збирот на освоените бодови на било кој n шахисти не може да биде поголем од збирот на освоените бодови на преостанатите $3n$ шахисти.
(Во шаховска партија играчот за победа добива по 1 бод, за нерeѓен резултат по 0,5 бодови и за пораз добива 0 бодови.)

39. На ракометен турнир секои две екипи играле само по еден натпревар. По завршувањето на турнирот првопласираната екипа освоила седум бодови, втопласираната пет, а третопласираната три бода. Колку екипи учествувале на овој турнир? (Во ракометот екипата за победа добива 2 бода, за пораз 0 бодови и за нерешен резултат 1 бод.)

40. На фудбалски турнир учествувале 4 екипи. Секоја екипа одиграла точно еден натпревар со секоја друга екипа. За победа победникот добива 3 бода, а поразениот 0 бодови, а за нерешен резултат двете екипи добиваат по 1 бод. На крајот на турнирот сите екипи освоиле различен број бодови, а првопласираната екипа освоила 6 бода. По колку бодови освоила секоја од преостанатите три екипи?

41. Во рамнината нацртај точка A и од неа повлечи седум различни отсечки. Избери некои од слободните крајни точки на отсечките (може и сите) и од секоја од нив конструирај седум нови отсечки. Дали во некој момент може да имаме
а) 35 слободни крајни точки,
б) 2010 слободни крајни точки.

42. Во таблица $m\times n$ е дозволено на сите броеви од еден ред или една колона да им се замени знакот. Докажи дека по неколку такви операции можеме да постигнеме збирот на броевите на произволен ред или колона да е негативен.

43. На таблата се запишани три позитивни броеви x, y и 1. Дозволено е на таблата да се допише збирот или разликата на некои два од веќе напишаните броеви, или да се напише реципрочната вредност на некој од веќе напишаните броеви. Дали секогаш може да се добие бројот:
а) x^2, б) xy.

44. На таблата на почетокот се запишани броевите $2,\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}$. Секои два од запишаните броја во даден момент може да се заменат со новниот збир и нивната разлика поделена со $\sqrt{2}$. Дали е можно со повторување на оваа постапка да се добие тројката броеви $1,\sqrt{2},1+\sqrt{2}$?

45. На почетокот на таблата се запишани броевите 1, 2, ..., 2019. Во еден чекор е дозволено да се заменат некои два броја a и b со бројот $ab+a+b$. Дали е можно на овој начин да се добие бројот $2^{2020}-1$.

46. На таблата се запишани неколку нули, единци и двојки. Бришиме две различни цифри и наместо нив ја запишуваме третата цифра (на пример, 2 наместо 1 и 0 итн.). Нека по неколку последователни повторување на постапката на таблата останала една цифра. Докажи дека ако сме ги бришеле и допишувале цифрите во некој друг редослед и ако на таблата останала една цифра, тогаш таа е еднаква на цифрата која останала во претходната постапка.

47. На таблата на почетокот се запишани броевите $0,1,\sqrt{2}$. Во еден чекор е дозволено на еден од овие броеви да се замени со збирот на тој број и разликата на другите два броја помножена со некој рационален број. Дали може по конечен број чекори да се добијат броевите $0,2,\sqrt{2}$.

48. Дадени се 34 цели броеви и операција која произволно избрани 23 од дадените броеви ги зголемува за 1. Докажи дека ако оваа операција ја примениме неколку пати, можеме да постигнеме сите броеви да се меѓусебно еднакви.

49. Да претпоставиме дека полжав ползи по маса со константна брзина и дека на секои 15 минути се врти за 90°, а во интервалите меѓу свртувањата се движи по права линија. Докажи дека полжавот може да се врати во почетната точка само по цел број часови.

2. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

1. Пресметај

$$||\dots|||2010-1|-2|-3|-\dots-99|-100|.$$

2. Ако за целите броеви a,b,c,d важи $ab-cd=12$ и $ad+bc=43$, докажи дека

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1994.$$

3. Докажи дека збирот на квадратите на пет последователни цели броеви не може да биде точен квадрат.

4. Докажи дека

$$a(a+b)(a+c)=abc,$$

ако $a+b+c=0$.

5. Ако $a+b=1$, докажи дека

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

6. Ако за позитивните броеви a,b,c е исполнето равенството

$$ab(\tfrac{a+b}{2}-c)+bc(\tfrac{b+c}{2}-a)+ca(\tfrac{c+a}{2}-b)=0,$$

докажи дека $a=b=c$.

7. Ако

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ и } \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$$

докажи дека

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1..$$

8. Ако $x+y+z=0$ и $x^2+y^2+z^2=1$, пресметај ја вредноста на изразот $x^4+y^4+z^4$.

9. Триаголни броеви се броевите од видот $\frac{k(k+1)}{2}, k\in\mathbb{N}$. Докажи дека за $n\in\mathbb{N}$ следниве тврдења се еквивалентни:
а) n може да се запише во облик на збир на два триаголни броја,
б) $4n+1$ може да се запише како збир на два квадрати.

10. Изразот

$$4x^4+16x^3+24x^2+16x+5$$

разложи го на множители.

11. Ако

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x},$$

докажи дека $x=y=z$ или $(xyz)^2=1$.

12. Нека за реалните броеви $x,y,z,(x\neq1, y\neq1, x\neq y)$ важи равенството

$$\frac{yz-x^2}{1-x}=\frac{xz-y^2}{1-y}.$$

Докажи дека

$$\frac{yz-x^2}{1-x}=x+y+z.$$

13. Нека a,b,c се различни реални броеви за кои важи

$$a+b+c=0.$$

Докажи дека

$$\frac{(a+672)^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b+672)^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c+672)^3}{(c-a)(c-b)}=2016.$$

14. Нека a,b,c се реални ненулти броеви такви што $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$. Докажи дека

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3.$$

15. Ако

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,$$

докажи дека

$$x^3+y^3+z^3=1.$$

16. Ако a,b,c се реални броеви такви што

$$(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0,$$

докажи дека

$$\frac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2a^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{a^2b^2}{(c-a)(c-b)}=ab+bc+ca.$$

17. Нека x,y,z се различни реални броеви такви што важи $x+y+z=2016$. Определи ја вредноста на изразот

$$\frac{x^2(x+1)}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2(y+1)}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2(z+1)}{(z-x)(z-y)}.$$

18. Определи ја релацијата која ја задоволуваат параметрите a,b,c во која не се наоѓаат x и y ако:

$$a=x+\frac{1}{x},\ b=y+\frac{1}{y},\ c=xy+\frac{1}{xy},\quad (xy\neq 0).$$

19. Упростиго изразот

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

20. Нека ненултите реални броеви a,b,c,d ги задоволуваат равенствата

$$a+b+c+d=0 \text{ и } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd}=0.$$

Определи кои вредности може да ги прима изразот

$$(ab-cd)(c+d).$$

21. Нека a,b,c се ненулти реални броеви такви што

$$\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{b}{ca}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)\neq 0.$$

Докажи дека

$$\frac{a^2(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})+b^2(\frac{1}{c}-\frac{1}{a})+c^2(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}{\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{b}{ca}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)}=a+b+c\,.$$

22. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека од $a^2+b^2=c^2$ следува

$$\frac{a^2+(c-b)^2}{b^2+(c-a)^2}=\frac{c-b}{c-a}\,.$$

Дали важи обратното тврдење?

23. Упрости го изразот

$$(a^{2^0}+1)(a^{2^1}+1)(a^{2^2}+1)...(a^{2^n}+1),\ a>1\,.$$

24. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A=(1+\tfrac{1}{1\cdot3})(1+\tfrac{1}{2\cdot4})(1+\tfrac{1}{3\cdot5})...(1+\tfrac{1}{2015\cdot2017})(1+\tfrac{1}{2016\cdot2018})\,.$$

25. Определи го најголемиот природен број n за кој постојат различни реални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ такви што

$$x_1^2-x_1x_2+x_2^2=x_2^2-x_2x_3+x_3^2=...=x_{n-1}^2-x_{n-1}x_n+x_n^2\,.$$

26. Ако за реалните броеви x,y,z важи

$$\sqrt{x}-\frac{1}{y}=\sqrt{y}-\frac{1}{z}=\sqrt{z}-\frac{1}{x}\,,$$

докажи дека $x=y=z$.

27. Определи ја вредноста на изразот

$$(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1},$$

за

$$a=(2+\sqrt{3})^{-1} \text{ и } b=(2-\sqrt{3})^{-1}\,.$$

28. Упрости го изразот

$$\sqrt{\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}}+\sqrt{\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}}\,,$$

каде $x=2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$ и $k>1$.

29. Докажи дека ако

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\,,$$

тогаш за секој непарен природен број n важи

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^n=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}\,.$$

30. Пресметај ја вредноста на изразот

$$S=[(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$$

каде

$$a=(2+\sqrt{3})^{-1},\ b=(2-\sqrt{3})^{-1}.$$

31. Докажи дека изразот

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

е цел број.

32. Докажи го равенството

$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}=2.$$

33. Докажи дека

$$\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1.$$

34. Упрости го изразот

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-2}(x^{-1}+y^{-1})+2(\sqrt{x}^{-1}+\sqrt{y}^{-1})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-3}.$$

35. Докажи дека:

$$32(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})^2-31(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2})=2017.$$

36. Ако за реалните броеви x и y важи

$$(x+\sqrt{1+y^2})(y+\sqrt{1+x^2})=1,$$

докажи дека важи

$$(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=1.$$

37. Нека a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи

$$ab+bc+ca=abc.$$

Определи ги сите можни вредности на изразот

$$\frac{1}{a}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b+c})+\frac{1}{b}(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c+a})+\frac{1}{c}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b})-$$
$$-\frac{1}{a+b+c}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c^2}.$$

38. Запишани се броевите 2, 3, 4, ..., 2011 и сите нивни можни производи од по два броја, од по три броја итн. се до производот на сите 2010 броеви. Докажи дека збирот на реципрочните вредности на сите запишани броеви е еднаков на 1005.

3. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ за кои важи
$$\overline{acb}+\overline{bca}+\overline{bac}+\overline{cab}+\overline{cba}=2870\ .$$

2. На местата на знакот * стави цифри така што множењето ќе биде точно:
$$*3** \cdot 45 = 37*15* .$$

3. Определи ги меѓусебно различните цифри a,b,c,d $(a\neq 0, b\neq 0)$ така што
$$\overline{abc}\cdot\overline{bac}=\overline{adabc}\ .$$

4. Реши го бројниот ребус
$$\overline{ab}\cdot\overline{ab}\cdot\overline{cdc}=\overline{ababcc},\ \ a\neq 0$$
во кој буквите означуваат цифри.

5. Докажи дека бројниот ребус
$$\overline{DVA}\cdot\overline{PET}=\overline{DESET}\ ,$$
каде $D,P\neq 0$, во кој на различните букви им соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри, нема решение.

6. Датата на раѓање на малата Јаглика е запишана во видот $J.\overline{AG}.\overline{LIKA}$, при што на секоја буква соодветствува некоја цифра. Определи ја оваа дата ако
$$\overline{JA}\cdot\overline{GL}\cdot\overline{IAK}=\overline{JAGLIK}\cdot A\ .$$

7. Определи го четирицифрениот број $\overline{abcd}$ за кој важи
$$\begin{cases}\overline{cda}-\overline{abc}=297,\\ a+b+c=23.\end{cases}$$

8. Определи ги сите тројки цифри x,y,z за кои важи
$$\tfrac{1}{x+y+z}=0,xyz\ .$$

9. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека:
а) ако ab е парен број, тогаш постојат природни броеви c и d такви што
$$a^2+b^2+c^2=d^2\ , \qquad (1)$$
б) ако ab е непарен број, тогаш не постојат природни броеви c и d такви што ќе важи (1).

10. Ако за природните броеви a и b важи
$$(a-1)^2+(b+1)^2=6ab+1$$
докажи дека $a,b,2a-1$ и $2b+1$ се точни квадрати.

11. Нека $A=\overline{abcd}$ е природен број, а $B=\overline{bcda}$ е природен број делив со 7.
а) Ако $a=0$ или $a=7$, докажи дека бројот A е делив со 7.
б) Докажи дека природниот број $10A-3a$ е делив со 7, па оттука заклучи дека бројот A еделив со 7, ако и само ако $a=0$ или $a=7$.
в) Нека $a=7, b=d, c0$. Определи го бројот A така што тој ќе биде делив и со 3.

12. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ точно еден од броевите

$$A_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1,$$
$$B_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 2$$

е делив со бројот 5.

13. Ако е $\frac{-2+2^n}{n}$ цел број, тогаш и $\frac{2^{2^n}-2}{2^n-1}$ е цел број. Докажи!

14. Нека x и y се природни броеви за кои $\frac{x^2-1}{y+1}+\frac{y^2-1}{x+1}$ е цел број. Докажи дека $\frac{x^2-1}{y+1}$ и $\frac{y^2-1}{x+1}$ се цели броеви.

15. Определи ги сите природни броеви кои се еднакви на збирот на своите цифри помножен со 224.

16. Определи го најмалиот природен број n таков што во децималниот запис на бројот $\sqrt{n^2+4}$ првите три цифри по децималната запирка се нули.

17. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ е квадрат на природен број.

18. Докажи дека кубот на секој природен број поголем од 1 може да се претстави како разлика на квадрати на два природни броја.

19. Природните броеви a,b,c се такви што $a+c$ и $b+c$ се квадрати на последователни природни броеви. Докажи дека $ab+c$ и $ab+a+b+c$ се исто така квадрати на последователни природни броеви.

20. Нека p е прост број поголем од 3. Докажи дека неговиот квадрат при делење со 12 дава остаток 1.

21. Ако за природните броеви a,b,c важи

$$a^2+b^2=c^2,$$

докажи дека производот abc е делив со 6.

22. Докажи дека бројот n^2+n+1 не е делив со бројот 59 за ниту еден природен број n.

23. Докажи дека за секој цел непарен број разликата на кубот на тој број и самиот тој број е делива со 24.

24. Докажи дека за непарен природен број n бројот n^3+3n^2-n-3 е делив со бројот 48.

25. Докажи дека не постои природен број n таков што бројот 2^n+n^2 е делив со 2002.

26. Ако n е природен број, докажи дека бројот 2^n+1 не е делив со 247.

27. Нека S е множество од10 природни броеви чиј знир е еднаков на 62. Докажи дека производот на сите елементи на множеството S е делив со 60.

28. Дадени се 99 природни броеви помали од 100. Докажи дека ако збирот на било кои три од овие броеви не е делив со 100, тогаш дадени броеви се меѓусебно еднакви.

29. Колку најмногу бреви може да се изберат од множеството $\{1,2,3,...,1000\}$ така што нема да постојат два броја меѓу избраните чиј збир е делив со нивната разлика.

30. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот
$$n!(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n!})$$
е делив со n.

31. Нека $2^n+n^2, n>1$ е прост број. Докажи дека тогаш бројот $n-3$ е делив со 6.

32. Природниот број n има непарен број делители ако и само ако е точен квадрат. Докажи!

33. Докажи дека деветцифрен број во чиј запи учествуваат сите цифри освен нулата и кај кој последната цифра е 5 не може да биде точен квадрат на природен број.

34. Определи ги сите природни броеви n за кои 43^n+6^n е точен квадрат.

35. Определи ја цифрата на десетките на бројот 2011^{2010} (во декаден запис).

36. Определи ги сите трицифрени броеви n кои при делење со бројот 11 даваат остаток еднаков на збирот на цифрите на бројот n.

37. Определи го остатоот од делењето на

$$9\cdot 99\cdot 999\cdot\ldots\cdot\underbrace{999\ldots999}_{2019\text{ девет}}$$

со бројот 1000.

38. Докажи дека $120\,|\,k^{n+4}-k^{n}$ за секој природен број k и за секој природен број $n>2$.

39. Нека a,b,c се цели ненулти броеви такви што $a+b+c=0$. Докажи дека $a^4+b^4+c^4\,|\,a^7+b^7+c^7$.

40. Нека S е подмножество од множеството $\{1,2,...,2n\}$ кое има $n+1$ елемент.
а) Докажи дека постојат два заемно прости елементи на множеството S.
б) Докажи дека множеството S содржи два броја такви што едниот е делител на другиот.

41. За природниот број велиме дека е палиндром ако исто се чита од десно кон лево исто како од лево кон десно. Определи ги сите прости броеви кои се палиндроми и кои во декаден броен систем имаат парен број цифри.

42. Докажи дека за секој природен број n бројот $19\cdot 8^n+17$ е сложен број.

43. Да забележиме дека бројот $10001=73\cdot 137$ не е прост. Докажи дека ниту еден член на низата

10001, 100010001, 1000100010001, ...

не е прост број.

44. Нека n е природен број.
а) Докажи дека броевите $n+1$ и $n(n+2)$ се заемно прости.
б) Докажи дека производот $n(n+1)(n+2)$ не е точен квадрат.

45. Нека a,b,c,d се цели броеви такви што броевите $ac,bd,bc+ad$ се деливи со еден ист природен број m. Докажи дека тогаш и броевите bc и ad се деливи со бројот m.

46. Нека a и b се цели броеви такви што $2ab$ е делител на a^2+b^2-a. Докажи дека a е точен квадрат на природен број.

47. Определи ги сите сложени броеви n за кои важи: ако

$$1=d_1<d_2<\ldots<d_k<d_{k+1}=n$$

се сите делители на бројот n, тогаш броевите

$$d_1+d_2,d_1+d_2+d_3,\ldots,d_1+d_2+\ldots+d_k$$

исто така се делители на n.

48. Определи ги сите сложени броеви n за кои важи: ако
$$1=d_1<d_2<...<d_k<d_{k+1}=n$$
се сите делители на бројот n, тогаш броевите d_1+d_2 и $d_1+d_2+...+d_k$ исто така се делители на n.

49. Нека n е природен број и $a_1,a_2,...,a_k$ се природните делители на n, освен n. Ако $k\geq 3$ и
$$a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_k-a_{k-1}>0$$
Докажи дека $n=p(2p-1)$, каде p и $2p-1$ се прости броеви.

50. Нека p и q се прости броеви такви што p^2+pq+q^2 е квадрат на природен број. Докажи дека бројот p^2-pq+q^2 е прост.

51. За природниот број n со $d(n)$ да го означиме најголемиот заеднички делител на броевите n^2+1 и $(n-1)^3+2$. Определи ги сите вредности на $d(n), n\in\mathbb{N}$.

52. Дадени се природните броеви
$$a, a+d, s+2d, ..., a+(n-1)d .$$
Ако ниту еден од овие броеви не е делив со природниот број n, докажи дека d и n не се заемно прости.

53. Докажи дека
$$\text{NZD}(13a+8b,5a+3b)=\text{NZD}(a,b),$$
за секои $a,b\in\mathbb{N}$.

54. Определи ги сите броеви со кои може да се скрати дропката $\frac{8k+7}{5k+6}, k\in\mathbb{N}$.

55. За кои природни броеви n може да се скрати дропката $\frac{n^3-2n^2+3n+1}{4n+2}$.

56. Ако m,n,p се природни броеви такви што
$$\frac{m}{n-p}+\frac{n}{p-m}+\frac{p}{n-m}=2008,$$
докажи дека барем една од дропките $\frac{m}{n-p},\frac{n}{p-m},\frac{p}{n-m}$ може да се скрати.

57. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што
$$ab=\text{NZD}(a,b)+\text{NZS}(a,b).$$

58. На таблата се запишани 5 природни броеви. Во еден чекор се избираат два од запишаните броеви a и b, такви што $a<b$ и a не е делител на b. Овие броеви се бришат и наместо нив на таблата се запишуваат броевите

$\mathrm{NZD}(a,b)$ и $\mathrm{NZS}(a,b)$. Кој е најголемиот број вакви чекори кои може да се направат?

59. Ако m и n се природни броеви за кои важи $7m^2+7m+8=7n^2$, докажи дека бројот $\frac{n}{5}+1$ е еднаков на збирот на квадратите на два последователни природни броја.

60. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што ако $p \mid n^2+3$, p е прост број, тогаш постои $k, k<n$ таков што $p \mid k^2+3$

61. Докажи дека постојат бесконечно многу тројки последователни природни броеви такви што секој од нив може да се запише како збир на квадрати на два природни броја.

62. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}_0$ бројот 2011^{2^n} може да се запише како збир на квадрати на три природни броја.

63. Нека n е природен број поголем од 1. Докажи дека бројот 9^n може да се претстави како збир на квадрати на три различни природни броја.

64. Определи го најмалиот број k за кој бројот 1996^{996} може да се претстави како збир на k точни петти степени на природни броеви.

65. Докажи дека не постојат природни броеви x и y такви x^2+y^2 и x^2+4y^2 се точни квадрати.

66. Докажи дека не постои природен број n таков што $2^{3n}+2^n+1$ е точен квадрат.

67. Ако n е природен број, докажи дека 2^n+3^n не е точен квадрат.

68. Дали постои природен број n за кој бројот 2012^n-3^n е точен квадрат.

69. Определи го најмалиот природен број $n>1$ таков што бројот
$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n}$$
е точен квадрат.

70. Нека
$$S_{2n}=1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots+(1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n)^2).$$
Докажи дека S_{2n} е точен квадрат ако и само ако $\frac{n}{3}$ и $n+1$ се точни квадрати.

71. Докажи дека не постои прост број p таков што $4p+1$ е петти степен на некој природен број.

72. Природниот број N е запишан со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и е таков што цифрата i во декадниот запис на N се појавува $4i$ пати, за $i=1,2,3,4,5,6,7$. Докажи дека N не е точен квадрат.

73. Ако m и n се природни броеви за кои важи $7m^2+7m+12=7n^2$ докажи дека бројот $n+1$ е еднаков на збирот на квадратите на два последователни природни броја.

74. Докажи дека бројот 15^5 не може да се запише како збир на четврти степени на шетнаесет различни природни броеви.

75. Определи го остатокот од делењето на бројот
$$A=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+2009\cdot 2010+2010\cdot 2011$$
со бројот 2012.

76. Докажи дека за секој природен број n поголем од 1 постојат n последователни природни броеви меѓу кои има точно два прости броја.

77. Определи ги сите прости броеви p такви што p^2+23 има точно 10 природни делители.

78. Определи ги сите прости броеви p за кои важи $43\,|\,7^p-6^p-1$.

79. Определи ги сите парови прости броеви (p,q) за кои важи $p\,|\,12q-1$ и $q\,|\,12p-1$.

80. Определи ги сите парови прости броеви (p,q) такви што $pq\,|\,p^2-q^2+1$.

81. Нека p е прост, а m и n се природни броеви. Ако $(p^m-1)\,|\,(n-1)$, докажи дека $p\,|\,(2^n-2)$.

82. Докажи дека за секој прост број $p>2$ броителот на дропката
$$\tfrac{m}{n}=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{p-1}\ \ (m,n\in\mathbb{Z},\ \ \mathrm{NZD}(m,n)=1),$$
е делив со p.

83. Определи ги сите прости броеви p такви што $2p^4-p^2+16$ е точен квадрат.

84. Определи ги сите природни броеви n за кои $2^n + n^2 + 1$ е точен квадрат.

85. Докажи дека не постојат цели броеви m и n такви што $m^3 + 3n^2 + 3$ е точен куб.

86. Нека m и n се цели броеви за кои
$$\frac{m^3 - n^3 + 1999m}{mn^2}$$
е исто така цел број. Докажи дека еден од броевите m или $1999m$ е точен куб.

87. Определи ги сите природни броеви n за кои $8^n - 3^{n+2} + 25$ е точен куб.

88. Докажи дека равенката
$$2x^2 - 11y^2 = 2001$$
нема целобројни решенија.

89. Докажи дека равенката
$$m^4 - n^4 = 7(m^3 + n^3)$$
нема решенија во множеството природни броеви.

90. Определи ги сите прости броеви p за кои дропката $\frac{p}{14}$ може да се претстави како збир на реципрочните вредности на два природни броја.

91. Определи ги сите тројки $p < q < r$ прости броеви такви што $p + q = r$ и $(r - p)(q - p) - 27p$ е точен квадрат.

92. Определи ги сите парови прости броеви (p, q) така што броевите
$$pa + p + q,\ pq + p - q,\ pq - p + q,\ pq - p - q$$
се исто така прости.

93. Определи ги сите природни броеви a, b, c такви што $ab + bc + ca$ е прост број и важи
$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a}.$$

94. Определи го најголемиот трицифрен прост број p за кој равенката
$$(1 + x^2 + xy)^2 + y^2 = p$$
има барем едно целобројно решение.

95. Реши ја равенката
$$p^2 + pq + q^2 = r^2,$$
каде p и q се прости броеви, а r е природен број.

96. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$5p+q=(p-q)^3.$$

97. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$p^2-qr=36100.$$

98. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$2p^3-q^2=2(p+q)^2.$$

99. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$p+q=(p-q)^3,$$

100. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$p^3-q^5=(p+q)^2.$$

101. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$p^2+q^2=r^3+2.$$

102. Во множеството прости броеви реши ја равебката
$$p^3+q^3-r^3=36r^2.$$

103. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$p_1^2=p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2.$$

104. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=p,$$
каде p е прост број поголем од 3.

105. Во множеството природни броеви реши а равенката
$$x^2+2xy-3y^2=1.$$

106. Дали постојат природни броеви m и n такви што
$$m^2+mn+n^2+m+n=2011.$$

107. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2+y^2=2017(x+y).$$

108. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2-xy+2x-3y=6.$$

109. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 - xy + y^2 = x + y .$$

110. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$xy(x^2 + y^2) = (x+2)(y+2)(x+y-2) .$$

111. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$ab^2 - a^2 - ab - b^2 + 2a - 2b = 0 .$$

112. Докажи дека равенката

$$x^2 - 7xy + y^2 + 11 = 0$$

има бесконечно многу решенија во множеството цели броеви.

113. За даден природен број n определи ги сите парови заемно прости пруиродни броеви p и q такви што

$$p + q^2 = (n^2 + 1)p^2 + q .$$

114. Дадена е равенката

$$p^3 + q^3 - r^3 = 49(p + q - r) .$$

а) Докажи дека оваа равенка има бесконечно многу решенија во множеството прости броеви.
б) Определи ги сите тројки (p,q,r) меѓусебно различнипрости броеви кои се решенија на дадената равенка.

115. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^2 + z^2 = 686 .$$

116. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^4 - y^4 = 5(x^3 + y^3) .$$

117. Определи ги сите цели броеви n за кои $n^4 - 8n + 15$ е производ на два соседни броја.

118. Збирот на реципрочните вредности на три природни броја е еднаков на 1. Кои се тие броеви?

119. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{z}{1997} .$$

120. Нека p и q се различни прости броеви. Докажи дека равенката $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{p}{q}$ има решение во множеството природни броеви ако и само ако $p \mid q+1$.

121. Нека p е прост број. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}=\frac{1}{p}.$$

122. Нека p е прост број. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{p}.$$

123. Ако n е природен број, докажи дека равенките

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{n}$$

во множеството природни броеви имаат еднаков број решенија ако и само ако n е непарен број.

124. Определи ги сите природни броеви a и b такви што за $x,y\in[a,b]$ важи

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\in[a,b].$$

125. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2-4y^2=246834.$$

126. Докажи дека не постојат цели броеви a и b такви што важи

$$a^2-3b^2=17.$$

127. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$3x^2+5y^2=4444.$$

128. Определи ги сите цифри $a\neq 0, b, c, d$ такви што дропката

$$\frac{a}{b+c+d}$$

има децимален запис $0,abc$.

129. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3-y^2=xy+61.$$

130. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^4+y^{2008}=2x^2-1.$$

131. Докажи дека равенката

$$x^3+10y^3=2001$$

нема целобројни решенија.

132. Докажи дека равенката $x^2+y^2=2$ има бесконечно многу решенија во множеството рационални броеви.

133. Определи ги природните броеви $x_1, x_2, ..., x_{2002}$ за кои важи

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{2002}^2 = 2019 .$$

134. Дали постојат различни природни броеви m и n такви што:

а) $m^3 - 201m = n^3 - 201n$,

б) $m^3 - 2010m = n^3 - 2010n$.

135. Дали постојат природни броеви a, b, c, d такви што

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1 .$$

136. Броевите $1, 2, ..., 10$ се разбиени во две групи така што производот на броевите во првата група е делив со производот на броевите во втората група. Определи ја најмалата можна вредност која може да ја има количникот од делењето на првиот со вториот производ.

137. Докажи дека секој позитивен рационален број може да се запише како конечен збир на меѓусебно различни броеви од видот $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, ...)$.

138. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$xyz + 1 = 2^{y^2+1} .$$

139. Докажи дека равенката

$$3^a + 1 = 5^b + 7^c$$

нема целобројни ненегативни решенија по a, b, c , освен $a = b = c = 0$.

140. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 = 3^y + 7 .$$

141. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$3^x + 7^y = 4^z .$$

142. Во множеството природни броеви реши ја равебката

$$3^{2x-1} - 2^{x-1} = y^2 .$$

143. Во множеството природни броеви определи ги сите решенија на равенката

$$1! + 2! + ... + x! = y^z$$

такви што $z \geq 2$.

144. Определи ги сите парови (m, n) природни броеви кои го задоволуваат равенството

$$2 \cdot n! = m! \cdot (m! + 2) .$$

145. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x!+y!=15\cdot 2^{z!}.$$

146. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$m^n-n^m=3.$$

147. Определи ги сите подредени тројки природни броеви (a,b,p) такви што $p=b\cdot\sqrt{\frac{a-8b}{a+8b}}$ е прост број.

148. Нека
$$S_n=\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{n^2+k}-2n^2.$$
Докажи дека $[S_n]=n$ и $[S_{2n}]=2n$.

149. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}}_{142\text{ корени}}=y.$$

150. Во множеството цели броеви реши го системот равенки
$$\begin{cases} x^2+yz=120,\\ y^2+xz=121.\end{cases}$$

151. Во множеството цели броеви реши го системот равенки
$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1,\\ x+2y+3z=\frac{50yz}{8+yz}.\end{cases}$$

152. Во множеството цели броеви реши го системот равенки:
$$\begin{cases} x+y-z=20\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}=10.\end{cases}$$

153. Природниот број $n>1$ е целосно практичен ако секој природен број кој е помал од n може на единствен начин да се претстави како збир на различни делители на бројот n. Докажи дека секој целосно практичен број е степен на бројот 2.

154. Нека p и q се различни прости броеви. Докажи дека
$$p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1(\text{mod }pq).$$

155. За природниот број n со $\varphi(n)$ да го означиме бројот на природни броеви кои се помали од n и се заемно прости со n. Определи ги сите природни броеви n за кои $\varphi(n)\,|\,n$.

156. Нека a и b се рационални броеви. Ако $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ е рационален број, тогаш и $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ се рационални броеви. Докажи.

157. Нека a,b,c се рационални броеви. Ако $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ е рационален број, тогаш $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ се рационални броеви. Докажи!

158. Дадени се n рационални броеви a_i, $i=1,2,...,n$. Ако $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}$ е рационален број, тогаш и броевите $\sqrt{a_i}$, $i=1,2,...,n$ се рационални. Докажи!

159. Определи ги рационалните броеви p и q за кои ажи равенството

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q}\ .$$

160. Определи ги цифрите x,y,z за кои важи

$$\sqrt{\overline{xyz}}=(x+y)\sqrt{z}\ .$$

161. Нека n е природен број поголем од 12. Во децималниот запис на бројот $\sqrt{n^2+n}$ определи ги првите две цифри по децималната запирка.

162. Докажи дека бројот $a=0,a_1a_2a_3...$ е ирационале, каде

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{ако бројот на прости делители на } n \text{ е непарен}\\ 0, & \text{во спротивен случај.}\end{cases}$$

163. Определи ја целобројната вредност на изразот

$$\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{16x^2+8x+3}}}$$

ако x е ненегативен цел број.

164. Определи ги сите цели броеви x за кои

$$\tfrac{1}{9}\left(x+\sqrt{x^2-90x+1998}\right)$$

исто така е цел број.

4. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

1. За кои реални броеви x и y важат равенствата:
   а) $2x+(y-1)i=4-3i$,
   б) $x+2-yi=3-i$,
   в) $x+3-2yi=4-6i$.

2. Најди ги реалните броеви x и y, ако:
   а) $3x+xi-2y=12-yi-i$,
   б) $5x-3yi+2i=6-xi-y$,
   в) $x+yi-2=4xi+3y+3i$.

3. Пресметај ја вредноста на изразот:
   а) $\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}}$ ако $z=1+i$,
   б) $\frac{z+\bar{z}}{2z+3}$ ако $z=\frac{i-1}{2}$.

4. Пресметај ја вредноста на изразот:
   а) z^2+2z-3, за $z=2\pm i$,
   б) $2z^2+z-1$, за $z=3\pm 5i$.

5. Пресметај: $\frac{(1+i)^3}{(2-3i)^2}\left(\frac{3-i}{2+i}-\frac{2-i}{3+i}\right)$.

6. Докажи дека $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4=1$.

7. Реши ја по z равенката:
   а) $2z(3-5i)+z-1=-30-65i$,
   б) $(z+i)(1+2i)+(1+zi)(3-4i)=1+7i$.

8. За кои природни броеви n е точно равенството $(1+i)^n=(1-i)^n$.

9. Даден е комплексен број z различен од ± 1. Докажи дека бројот $\frac{z-1}{z+1}$ е чисто имагинарен ако и само ако $|z|=1$.

10. Нека z е комплексен број таков што $|z+\frac{1}{z}|=\sqrt{5}$. Докажи дека важи
$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\leq|z|\leq\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2.$$
    Кога важи знак за равенство?

11. Определи ја најмалата вредност на изразот $|z-\frac{1}{z}|$, $z\in\mathbb{C}$, ако $|z|=2$.

5. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. Реши ја равенката
$$f(x)+f(1-x)=1,$$
каде
$$f(x)=\begin{cases}|x|, & x\le \frac{1}{2}\\ 1-x, & x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

2. Реши ја равенката
$$f(x-1)+f(2-x)=1,$$
каде
$$f(x)=\begin{cases}|x+1|, & x\le \frac{1}{2},\\ -x, & x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

3. Реши ја равенката
$$ax+b((f(x)^2+g(x)^2)+ax-bx+f(x)+g(x)=0,$$
ако $f(x)=\frac{x+|x|}{2}$, $g(x)=\frac{x-|x|}{2}$, a е реален и b ненегативен параметар.

4. а) Реши ја равенката $[x]=|x|$.
   б) Реши ја равенката $[a]\cdot[x]=0$, каде a е даден реален број.
   в) Реши ја равенката $[x]+x=k$, каде k е цел број.
   г) Реши ја равенката $[x]\cdot[y]=1$.

5. Нека $[x]$ е најголемиот цел број кој е помал или еднаков на x. Колку решенија има равенката
$$x^2-[x]=3.$$

6. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$x[x]+\{x\}=2018.$$

7. Докажи дека постои само една тројка реални броеви x,y,z која го задоволува равенството
$$(1-x)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

8. Решенијата на равенката $x^2+ax+b+1=0$ се природни броеви. Докажи дека a^2+b^2 е сложен број.

9. За кои вредности на параметарот m функцијата
   а) $f(x)=(3m+1)x^2-2x+2m-1$,

б) $f(x)=(m-3)x^2+2(m-1)x+m$,
има реални и разлини нули.

10. Определи ги сите цели броеви a за кои равенката $x^2-ax+5a=0$ има барем едно целобројно решение.

11. За кои реални вредности на параметарот m равенката
$$(m+2)x^2-2mx+m-1=0$$
има комплексни корени.

12. Определи ги вредностите на параметарот m за кои равенката
а) $(m-1)x^2+2(m-4)x+m-2=0$,
б) $(1-2m)x^2-4x-6=0$,
има комплексни корени.

13. За кои вредности на параметарот m решенијата на равенката
$$m^2x^2-2m^2x+m^2-2=0$$
ќе бидат позитивни.

14. За кои вредности на реалниот параметар k двете решенија на равенката
$$(k-1)x^2-2kx+(k+3)=0$$
се позитивни?

15. Во равенката
$$(m-2)x^2-2mx+2m-3=0$$
определи го параметарот m така што решенијата на равенката ќе бидат:
а) позитивни,
б) негативни,
в) со различен знак.

16. Докажи дека за произволни реални параметри a,b,c различни од нула, барем една од равенките
$$ax^2+2bx+c=0,\quad bx^2+2cx+a=0,\quad cx^2+2ax+b=0$$
има реални решенија.

17. Определи ги сите парови реални броеви (p,q) така што квадратните триноми x^2+px+q и px^2+qx+1 имаат заеднички реален корени збирот на другите два нивни корени е еднаков на $\frac{1}{2}$.

18. За која вредност на параметарот m еден од корените на равенката
$$2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$$

е еднаков на двократната вредност на другиот корен.За најдените вредности на m реши ја равенката.

19. Определи ги коефициентите на квадратната равенка
$$x^2+px+q=0,$$
така што нејзините решенија ќе бидат еднакви на p и q.

20. Определи ја вредноста на параметарот k така што решенијата x_1, x_2 на равенката
$$x^2+kx+12=0,$$
го задоволуваат условот $x_1-x_2=1$.

21. Во равенката
$$5x^2-kx+1=0,$$
определи го параметарот k така што разликата на корените на равенката ќе биде еднаква на 1.

22. Во равенката $x^2-x-m=0$ определи го параметарот m така што решенијата на равенката го задоволуваат условот:
$$x_1^3+x_2^3=2017.$$

23. Определи го коефициентот c така што за нулите x_1, x_2 на полиномот x^2+x+c важи:
$$\frac{2x_1^3}{2+x_2}+\frac{2x_2^3}{2+x_1}=-1.$$

24. Нека x_1 и x_2 се корени на равенката
$$x^2+px+q=0,\ q\neq 0.$$
Определи квадратната равека чии корени се
$$y_1=x_1^2+x_2^2,\quad y_2=x_1^3+x_2^3.$$

25. Нека x_1 и x_2 се корени на равенката
$$ax^2+bx+b=0,\quad ac\neq 0.$$
Без да ја решаваш равенката, со помош на нејзините коефициенти, определи ги вредностите на изразите
$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2},\ \ x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4.$$

26. Во равенката $x^2-2mx+m^2+1=0$ определи ја вредноста на реалниот параметар m така што решенијата на равебката ја задоволуваат релацијата
$$(3x_1-1)(3x_2-1)=10.$$

27. Нека x_1 и x_2 се корени на равенката

$$x^2-3ax+a^2=0.$$

Определи ја вредноста на параметарот a ако $x_1^2+x_2^2=\frac{7}{4}$.

28. Дадена е квадратната равенка

$$ax^2+bx+c=0,\ (b^2-4ac\geq 0).$$

Изрази го производот

$$P=(x_1-kx_2)(x_2-kx_1)$$

како функција од коефициентите a,b,c. Оттука изведи усков за коефициентите таков што односот на корените ќе биде еднаков на k. Докажи дека при овој услов решенијата на дадената равенка може да се изразат како рационални функции од a,b,k, освен за $b=0$.

29. Докажи дека решенијата x_1 и x_2 на квадратната равенка

$$x^2+px-\frac{1}{2p^2}=0,\ p\neq 0$$

го задоволуваат неравенството

$$x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}.$$

30. Решенијата x_1 и x_2 на квадратната равенка ги задоволуваат условите

$$x_1+x_2-2x_1x_2=0 \text{ и } mx_1x_2-(x_1+x_2)=2m-1.$$

а) Формирај ја оваа равенка.

б) За кои вредности на параметарот m равенката имареални решенија?

31. Нека a е реален број таков што x_1 и x_2 се реални и различни корени на равенката

$$x^2-x+a=0.$$

Докажи дека $|x_1^2-x_2^2|=1$ ако и само ако $|x_1^3-x_2^3|=1$.

32. а) Даден е триномот

$$f(x)=x^2-mx+2m-3,$$

каде m е реален број. Определи ја минималната вредност на триномот како функција од параметарот m и испитај ја оваа функција.

б) Реши ја равенката $f(x)=0$.

33. Определи ги сите парови реални броеви (a,b) за кои равенките

$$x^2+ax+b^2=0$$

$$x^2+bx+a^2=0$$

имаат барем еден заеднички реален корен.

34. Ако коефициентите на равенките

$$x^2+p_1x+q_1=0 \text{ и } x^2+p_2x+q_2=0$$

се реални и ја задоволуваат релацијата

$$p_1p_2=2(q_1+q_2),$$

докажи дека барем една од овие равенки има реални корени.

35. Докажи дека не постои природен број n за кој равеката

$$x^2+(n+3)x-n=0$$

има решенија во множеството рационални броеви.

36. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што сите корени на равенките

$$x^2-ax+a+b-3=0$$

$$x^2-bx+a+b-3=0$$

исто така се природни броеви.

37. Ако равенките $ax^2+bx+c=0$ и $a'x^2+b'x+c'=0$ имаат барем едно заедничко решение, тогаш важи

$$(ac'-ca')^2=(ab'-ba')(bc'-cb').$$

Докажи!

38. Природниот број k го нарекуваме добар ако постојат бесконечно многу подредени парови природни броеви (a,b) такви што триномот kx^2+ax+b има целобројни корени и постои природен број n таков што a и b се редоследно збир и производ на цифрите на бројот n. Докажи дека постојат бесконечно многу добри природни броеви.

39. За кои вредности на параметарот a равенката

$$|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=a$$

има повеќе од три решенија.

40. Равенката

$$x^4+ax^3+bx+c=0$$

има четири различни реални корени. Докажи дека $ab<0$.

41. Реши ја равенката

$$x=a-b(a-bx^2)^2,\ a,b\in\mathbb{R}.$$

42. Нека a и b се реални броеви. Докажи дека равенката

$$x^4+ax^3+3x^2+bx+1=0$$

има четири различни корени чиј одул е еднаков на 1 ако и само ако $a=b$ и $2<|a|<\frac{5}{2}$.

43. Даден е еден корен $x_1 = -2$ на равенката
$$x^6 + x^5 - 2x^4 - x^2 - x - 2 = 0 .$$
Определи ги останатите корени на оваа равенка.

44. Докажи дека за секој реален број a равенката
$$43x^3 - 19ax^2 + 2a^2x - 1 = 0$$
има барем едно решение во интервалот $[0,1]$.

45. Определи за кои природни броеви m равенката
$$x^3 - 2x^2 + x - m = 0$$
има два корена кои по модул се помали од 1.

46. Ако $a \neq 1$ е позитивен корен на равенката
$$x^n - 2x + 1 = 0 ,$$
докажи дека важи
$$a < \frac{1}{\sqrt[n]{(n-1)^2}} .$$

47. Нека претпоставиме дека равенката
$$x^3 - px + q = 0$$
има три реални решенија.
а) Докажи дека $p > 0$.
б) Ако $q > 0$, тогаш најмалиот по апсолутна вредност корен на оваа равебка е помал или еднаков на бројот $\min\{\sqrt{\frac{p}{3}}, \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\}$.

48. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$x^2 - \sqrt{a - x} = a ,$$
каде a е реален параметар.

49. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x ,$$
каде p е реален параметар.

50. Определи ги сите парови реални броеви (x, y) за кои важи
$$x + \sqrt{x^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 + 1} .$$

51. Реши ја равенката
$$x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3 .$$

52. Реши ја равенката

а) $\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{x}}-\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{28}$,

б) $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$.

53. Реши ја равенката:

а) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$,

б) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$.

54. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x-x^2}+\sqrt{2x^2-x-1}=1.$$

55. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{x-x^2}-\sqrt{3x-x^2}+\sqrt{1-4x+2x^2}=1.$$

56. Реши ја равенката

$$\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}=0.$$

57. Нека a и b се позитивни реални броеви. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{a(b+x)}-\sqrt{b(a-x)}=x\sqrt{2}.$$

58. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^2-k}=x-2\sqrt{x^2-1},$$

каде $k<0$ е параметар.

59. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt{25-x}=5.$$

60. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{3x+2}=\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4x-2}.$$

61. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{x+1}.$$

62. Реши ја равенката

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}.$$

63. Опрееli ги реалните решенија на равенката

$$\sqrt{x^2+2px-p^2}-\sqrt{x^2-2px-p^2}=1,$$

каде p е реален параметар.

64. Нека a,b,c,d се цели броеви. Докажи дека системот равенки

$$\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{cases}$$

за секои цели броеви m и n има целобројни решенија ако и само ако $ad-bc=\pm 1$.

65. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} |x+y|=5 \\ |xy|=6. \end{cases}$$

66. Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+b^2=a. \end{cases}$$

67. Реши го системот равеки

$$\begin{cases} (a+b)x+(a-b)y=a^2+b^2, \\ (a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2, \end{cases}$$

и дискутирај ги решенијата во зависност од вредностите на параметрите a и b.

68. Докажи дека системот равенки

$$\begin{cases} 2ab=6(a+b)-13 \\ a^2+b^2=4 \end{cases}$$

нема реални решенија.

69. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y^2=y^3 \\ y+x^2=x^3. \end{cases}$$

70. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3, \\ y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}=0. \end{cases}$$

71. Реши го системот

$$\begin{cases} x^2-yz=3, \\ y^2-zx=4, \\ z^2-xy=5. \end{cases}$$

72. Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x+y^2=z^3, \\ y+z^2=x^3, \\ z+x^2=y^3, \end{cases}$$

73. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^3+y^3=3y+3z+4, \\ y^3+z^3=3z+3x+4, \\ z^3+x^3=3x+3y+4. \end{cases}$$

74. Нека $n \geq 3$. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x_1^2-x_2x_3...x_n=0 \\ x_2^2-x_1x_3...x_n=0 \\ .... \\ x_n^2-x_2x_3...x_{n-1}=0. \end{cases}$$

75. Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x=\frac{2z^2}{1+z^2}, \\ y=\frac{2x^2}{1+x^2}, \\ z=\frac{2y^2}{1+y^2}. \end{cases}$$

76. Во множеството реални броеви реши ја неравенкаа

$$||x-1|-2x|>|x|.$$

77. Реши ја неравенката

$$\frac{1}{3x+2} \geq \frac{1}{2x-3}.$$

78. Реши ја неравенката

$$|x(1-x)|<0,05.$$

79. Реши ја неравенката

$$5|x| \leq x(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2})$$

80. Реши ја неравенката

$$\frac{1-\sqrt{1-9x^2}}{x}<1.$$

81. Во множеството реални броеви реши ја неравенката
$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\tfrac{1}{2}\ .$$

82. Реши го системот неравенки

а) $\begin{cases} 15x-2>2x+\frac{1}{3}, \\ 2(x-4)<\frac{1}{2}(3x-14), \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4-x<2x+3, \\ 6-x<8-2x, \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x+6>8-2x, \\ 8-2x>6-x. \end{cases}$

83. Во рамнината xOy графички прикажи го множеството точки $T(x,y)$ кое е решение на системот неравенки:
$$\begin{cases} |x-y|\leq 1, \\ |x+y|\leq 1, \\ x+|y|\leq 1. \end{cases}$$

84. Реши го системот неравенки
$$\begin{cases} |3x+2y+1|\leq 1, \\ x+y\geq -1, \\ |y|\leq 2. \end{cases}$$
и графички претстави го решението.

85. Реши го системот неравенки
$$\begin{cases} x^2>2, \\ |x-2|<|x+3|. \end{cases}$$

86. Определи ги паровите цели броеви x и y кои се решенија на системот неравенки:
$$\begin{cases} y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0, \\ y+|x-1|<2. \end{cases}$$

87. Мајката е трипати постара од синот. Пред пет години мајката била петпати постара од синот. Колку години има денес мајката, а колку синот?

88. Определи ги сите години до крајот на овој век кои го имаат следново својство: постои барем едно лице кое во таа година полни онолку години живо колку што е збирот на годината на раѓање на тоа лице.

89. Првата цевка го полни базенот за 6 часа, а втората за 9 часа. За колку часа двете цевки заедно ќе го наполнат базенот ако се пуштат истовремено?

90. Производот на два природни броја е трицифрен број запишан со исти цифри, а нивниот збир е двоцифрен број чии цифри исто така се еднакви. Определи ги сите такви броеви.

91. Определи два двоцифрени броја кои го имаат следново својство: ако на поголемиот од бараните броеви од десно му допишеме нула и потоа го допишеме помалиот број, а на помалиот број од десно му го допишеме поголемиот број, а потоа допишеме нула, тогаш од така формираните броеви првиот го делиме со вториот и добиваме количник 2 и остаток 590. Освен тоа, познато е дека збирот чии собирци се двократниот поголем и трикратниот помал број е еднаков на 72.

92. Ако 175 топки чинат повеќе од 125, но помалку од 126 кукли, дали може со 100 евра да се купат 3 топки и 1 кукла? (Цената и на таопката и на куклата е цел број евра.)

93. Дадена е дропката $\frac{p}{p^2-1}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Ако броителот и именителот на оваа дропка се зголемат за 2, тогаш дропката ќе биде поголема од $\frac{1}{3}$, а ако се намалат за 3, тогаш дропката ќе биде позитивна и помала од $\frac{1}{10}$. Определи ја почетната дропка.

94. Дадена е дропката $\frac{\overline{2a27}}{\overline{7b22}}$, каде a и b се цифри за кои важи $b-a=2$. Ако на нејзиниот броител се додаде природниот број n , а од именителот се одземе истиот тој број n, се добива дропката $\frac{4}{5}$. Определи го бројот n.

95. Определи ги сите правоаголни триаголници чии дошжини на страни се целобројни и мерните броеви на плоштината и периметарот се еднакви.

96. Во фудбалското првенство на една држава учествуваат 18 тимови. По 6 одиграни кола сите тиови имале различен број освоени бодови. Определи колку натпревари завршиле нерешено.
(Во секое коло се играат по 9 натпревари. Секоја екипа за победа добива 3 бода, за нерешен резултат 1 бод и за пораз 0 бодови.)

97. Сестрите Маја и Ана имаат заедничка збирка од n значки. Тие ги продале сите значки и добиле по n евра за секоја значка и решиле да ги поделат парите по половина. Сите пари се во банкноти од по 10 евра, освен остатокот при делење со 10 кој е во монети од по 1 евро. Ос купчето банкноти наизменично земале по една банкнота. Бидејќи на Маја, која ја зела првата банкнота, и се паднала и последната банкнота, Ана сметала дека е оштетена. Тогаш Маја и рекла на Ана да ги земе сите монети, а остатокот од долгот таа ќе и го врати утредента. Колку Маја и должела на Ана?

6. ПЛАНИМЕТРИЈА

1. Во правоаголен триаголник симетралата на остриот агол ја дели спротивната катета на делови со должини m и n. Определи ги должините на другата катета и хипотенузата на триаголникот.

2. Нека M е точка на катетата BC на правоаголниот триаголник ABC за која важи $\overline{BM} = 2\overline{MC}$. Со K да ја означиме средината на хипотенузата AB. Докажи дека $\measuredangle BAM = \measuredangle MKC$.

3. Нека O е центар на опишаната кружница, S е центар на впишаната кружница и H е ортоцентар на правоаголниот триаголник ABC. ДОкажи дека $\measuredangle OSH > 135^\circ$.

4. Нека a,b се катетите и r е радиусот на впишаната кружница во правоаголниот триаголник ABC. Ако $a,b,\frac{a}{r}$ и $\frac{b}{r}$ се природни броеви, докажи дека триаголникот ABC е египетски, т.е. дека неговите страни се однесуваат како $3:4:5$.

5. Нека r_1 и r_2 се радиусите на кружници со центри на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC, при што првата кружница ја допира катетата AC и висината на триаголникот повлечена од темето C, а втората кружница ја допира катетата BC и истата висина. Докажи дека $r_1 + r_2 = 2r$, каде r е дијаметарот на кружницата впишана во триаголникот ABC.

6. Докажи дека во правоаголен триаголник збирот на должините на катетите е еднаков на збирот на должините на радиусите на опишаната и впишаната кружница.

7. На страната BC на рамнокракиот триаголник $ABC\,(\overline{AC} = \overline{BC})$ дадена е точка D ($D \neq C$) таква што $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$. Докажи дека $\overline{AD} = \overline{AB}$.

8. Даден е рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$). Симетралата на $\measuredangle ABC$ го сече кракот AC во точката D. Правата p минува низ точката D, нормална е на BD и ја сече правата AB во точката E. Докажи дека $\overline{BE} = \overline{AD}$.

9. Во триаголникот ABC дадени се должините на страните a и b. Ако $h_c = h_a + h_b$, определи ја должината на страната c.

10. Нека O е центар на опишаната кружница и H е ортоцентар на триаголникот ABC. Ако $\measuredangle ACB = 60^\circ$, докажи дека правата OH е симетрала на еден од аглите кои ги зафаќаат правите AH и BH.

11. За триаголникот ABC важи $\measuredangle BAC = 60^\circ, \measuredangle ABC = 45^\circ$ и $\overline{AB} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Определи ги должините на страните AC и BC.

12. Должините на страните на триаголникот ABC се $\overline{AB} = 48\,cm$, $\overline{AC} = 55\,cm$ и $\overline{BC} = 73\,cm$. На страната BC се избрани точки D и E такви што $\overline{BD} = 18\,cm$ и $\overline{CE} = 25\,cm$. Определи ја големината на $\measuredangle DAE$.

13. Триаголникот ABC има агли $\beta = 15^\circ$ и $\gamma = 30^\circ$. Права која ја содржи точката A и е нормална на AB ја сече отсечката BC во точката D. Докажи дека $2\overline{AC} = \overline{BD}$.

14. Во триаголникот ABC висината AD и симетралата BE на $\measuredangle ABC$ се сечат во точката S ($D \in BC, E \in AC$). Ако $\overline{AS} = 2\overline{SD}, \overline{BS} = \overline{SE}$, определи ги аглите на триаголникот ABC.

15. Нормалите од темињата A и B на остроаголниот триаголник ABC на неговите спротивни страни ја сечат кружницата опишана околу тој триаголник во точките D и E, соодветно. Ако $\measuredangle ACB = 60^\circ$, докажи дека четириаголникот $ABDE$ е рамнокрак трапез.

16. Докажи дека четири подножја на нормалите повлечени од подножјето на една висина на триаголникот кон неговите останати висини и неговите страни припаѓаат на иста права.

17. Нека D, E, F се подножјата на нормалите повлечени од центарот O на впишаната кружница во триаголникот ABC на неговите страници $BC, CA,$ AB, соодветно и нека AB е најкратката страна на овој триаголник. Ако правите AO и FD се сечат во точката M, а правите BO и FE во точката N, докажи дека $MN \parallel AB$.

18. Нека T е тежиште и S центар на впишаната кружница на триаголникот ABC. Докажи дека следниве тврдења се еквивалентни:
а) правата TS е паралелна со некоја страна на триаголникот ABC,
б) една од страните на триаголниот е еднаква на полузбирот на другите две страни.

19. Аглите при основата на рамнокракиот триаголник ABC се еднакви на 80°. Правата која минува низ темето B и центарот на опишаната круѓница околу триаголникот ABC ја сече страната AC во точка D. Докажи дека $\overline{AB} = \overline{CD}$.

20. Во правоаголен триаголник ABC точката D е подножје на визината повлечена од темето на правиот агол C и O_1, O_2 се центрите на впишаните круж-

ници во триаголниците ACD и BCD соодветно. Нека кружницата со центар C и радиус CD ги сече катетите AC и BC во точките M и N, соодветно.
а) Докажи дека точките O_1, O_2, M, N се колинеарни.
б) Докажи дека $\overline{MN} > 2\overline{O_1O_2}$.

21. Во триаголникот ABC аглите во темињата $A, B.C$ се $70^\circ, 60^\circ, 50^\circ$, последователно. Нека D и E се точки на страните BC и AC такви што $\measuredangle CAD = \measuredangle CBE = 20^\circ$. Нека F е пресечната точка на правите AD и BE, а G е подножјето на нормалата од E на BC. Докажи дека $FG \| AC$.

22. Нека D е точка на страната AB на рамностраниот триаголник ABC и E, F се соодветно точки на страните BC и AC такви што $DE \| AC$ и $DF \| BC$. Нека P е пресечната точка на правите AE и BF. ДОкажи дека:
а) $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CD}$,
б) четириаголниците $ADPF, BEPD, CFPE$ се тетивни.

23. Во триаголникот ABC со $\measuredangle BAC = 120^\circ$ симетралите на аглите во темињата A, B, C ги сечат страните BC, CA, AB во точките D, E, F, соодветно. Докажи дека $\measuredangle EDF = 90^\circ$.

24. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа BC, при што $\overline{BC} < \overline{AC}$. Нека k_1 е опишаната кружница околу триаголникот ABC, а кружницата k_2 од внатре ја допира кружницата k_1 во точката R и ги допира краците AC и AB во точките P и Q. Докажи дека средината M на отсечката PQ е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC.

25. Во триаголникот ABC се повлечени симетралите AD и BE на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$. Ако DE е симетрала на $\measuredangle ADC$, определи го $\measuredangle BAC$.

26. Нека D и E се точки на страните на триаголникот ABC такви што $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\overline{BE} = \overline{EC}$ (E е меѓу A и C). Нека F е средина на лакот BC на кружницата опишана околу триаголникот ABC. Докажи дека точките B, E, D, F се конциклични.

27. Нека O е центарот на кружницата опишана околу остроаголниот триаголник ABC и нека AH $(H \in BC)$ е висината на триаголникот ABC. Нека M, N, P, Q се последователно средините на отсечките AB, AC, BH, CH и нека k и k' се кружниците опишани околу триаголниците AMN и POQ, соодветно. Докажи дека една од пресечните точки на кружниците k и k' припаѓа на висината AH.

28. Нека ABC е остроаголен триаголник $(\overline{AC} < \overline{BC})$ со радиус на опишана кружница R. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A на страната BC. Со T да ја означиме точката на правата AD таква што $\overline{AT} = 2R$, при што точката D е меѓу точките A и T, а со S да ја означиме средината на лакот BC на кружницата опишана околу триаголникот ABC, кој не ја содржи точката A. Докажи дека $\measuredangle AST = 90^\circ$.

29. Дадени се триаголник ABC е точки K и N на страните AB и AC, соодветно, такви што $\overline{KB} = \overline{KN}$. Нека R е средина на лакот AB на опишаната кружница околу триаголникот AB кој не ја содржи точката C. Правата која минува низ точката R и е нормална на AB ја сече отсечката BN во точката D. Докажи дека точките A, K, D, N се конциклични.

30. Во триаголник ABC со прав агол во темето C е впишана кружница која неговите страни AB, BC, CA ги допира во точките M, N, L, соодветно. Нека K е точка на отсечката BN таква што $\overline{BK} = \overline{CL}$. Докажи дека $KL \perp MN$.

31. Нека M, N, P се средините на страните BC, CA, AB на триаголникот ABC, X е произволна точка во рамнината, а X', X'', X''' се точките симетрични на точката X во однос на точките M, N, P соодветно како центри на симетрии. Докажи дека постои централна симетрија која триаголникот ABC го пресликува на триаголникот $X'X''X'''$.

32. Даден е триаголник ABC. На полуправата BA дадена е точка D таква што $\overline{BD} = \overline{AC}$. Нека со M и N ги означиме средините на отсечките BC и AD, соодветно. Определи го аголот меѓу правите MN и AC.

33. Нека е даден триаголник ABC и нека A' и B' подножјата на висините повлечени од темињата A и B на правите кои ги содржат соодветните страни на триаголникот. Докажи дека симетралата на отсечката $A'B'$ ја полови страната AB.

34. Познати се должините на две страни a и b на триаголникот ABC. Каква треба да биде должината на третата страна за да најголемиот агол на триаголникот има најмала можна вредност?

35. На страните AB и CB на триаголникот ABC се нанесени еднакви отсечки AD и CE, кои се со произволна должина. Определи го множеството средини на отсечката DE.

36. Нека $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. На страните BC, CA, AB на триаголникот ABC се нанесени отсечки
$$\overline{BA'} = \lambda\overline{BC},\ \overline{CB'} = \lambda\overline{CA},\ \overline{AC'} = \lambda\overline{AB}.$$

Докажи дека периметарот на триаголникот $A'B'C'$ не е поголем од периметарот на триаголникот ABC помножен со λ.

37. Нека I е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Кружницата која минува низ точката B и ја допира правата AI во точката I ги сече страните AB и BC во точките P и Q, соодветно. Со R да го означиме пресекот на правата QI и страната AC. Докажи дека $\overline{CQ} = \overline{CR}$ и $\measuredangle RPQ = 90^\circ$.

38. Даден е остроаголен триаголник ABC со ортоцентар H. Точката M е средина на отсечката BC. Докажи дека тоќката K, која е симетрична на точката H во однос на точката M, лежи на кружницата опишана околу триаголникот ABC.

39. Во триаголникот ABC е дадена точка P таква што

$$\measuredangle PBC = \measuredangle PCB = 35^\circ, \measuredangle PBA = 30^\circ, \measuredangle PAC = 25^\circ.$$

Определи ги аглите на триаголникот ABC.

40. Во рамнокрак триаголник едниот агол е еднаков на 108°. Докажи дека односот на должините на основата и кракот на тој триаголник е еднаков на $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

41. Нека T е тежиште, а S центар на впишаната кружница во триаголникот ABC. Ако $\overrightarrow{AC} = 12\overrightarrow{TS}$ докажи дека страните на триаголникот ABC се однесуваат како $3:4:5$, т.е. триаголникот е египетски.

42. Точките D и E ги делат редоследно страните AB и CA на рамностраниот триаголник ABC во однос $1:2$. Нека F е пресекот на правите BE и CD. Докажи дека правите AF и BE се заемно нормални.

43. Нека ABC е правоаголен триаголник, а D е подножјето на висината повлечена од темето C на правиот агол. Во триаголниците ACD и BCD се впишани кружници со центри во точките R и S. Докажи дека симетралата на праиот агол ја сече правата RS под прав агол.

44. Нека D и E се средините на страните BC и AC на триаголникот ABC, T е неговото тежиште и a, b, c се должините на неговите страни. Докажи дека околу етириаголникот $CDTE$ може да се опише кружница ако и само ако

$$a^2 + b^2 = 2c^2.$$

45. Околу рамностран триаголник ABC со должина на страна 1 е опишана кружница. Нека M е средина на лакот AB, на кој не припаѓа точката C, и нека N е точка на правата CA таква што A е средина на отсечката CN.

Нека кружницата опишана околу триаголникот CMN ја сече страната AB во точката D. Определи ја должината на отсечката AD.

46. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB и агол при темето C помал од 60°. Нека O,S се соодветно центрите на опишаната и впишаната кружница на триаголникот ABC и D е пресечната точка на кружницата опишана околу триаголникот AOS со страната AC. Докажи дека $SD \parallel BC$ и $AS \perp OD$.

47. Ако плоштината на триаголник со целобројни должини на страни е рационален број, тогаш неговиот периметар е парен број. Докажи!

48. На страните AB и AC на триаголникот ABC дадени се произволни точки B' и C', соодветно. Опишаните кружници околу триаголниците ABC и $AB'C'$ се сечат во точките A и P. Подножјата на нормалите повлечени од точката P на правите AB и AC се точките M и N, соодветно. Докажи дека $MN \parallel HH'$ каде H и H' се ортоцентрите на триаголниците ABC и $AB'C'$.

49. Нека кружницата впишана во триаголникот ABC ги допира страните BC, CA, AB во точките K, L, M и нека P е точка на кружницата таква што MP е нејзин дијаметар. ДОкажи дека $\measuredangle APB = 90^\circ$ ако и само ако $\overline{AB} = 3\overline{CK}$.

50. Даден е триаголник ABC таков што $\measuredangle BAC = 120^\circ$. Нека симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точката D. Докажи дека
$$\frac{1}{\overline{AD}} = \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AC}}.$$

51. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB} = 5, \overline{CD} = 4$ и краци $\overline{BC} = \overline{AD} = 4$. На пократкиот лак CD на опишаната кружница околу трапезоте дадена точка M. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{\overline{MC}+\overline{MD}}{\overline{MA}+\overline{MB}}$ не зависи од положбата на точката M и определи ја оваа вредност.

52. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. Нека BK е симетралата на внатрешниот агол во темето $B\,(K \in AC)$. Кружницата опишана околу триаголникот AKB ја сече страната BC во точката L. Докажи дека $\overline{CB} + \overline{CL} = \overline{AB}$.

53. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето C на страната AB. Да препоставиме дека $\overline{AD} = 3\overline{BD}$. Нека M и N се средините на страните AB и AC, соодветно. Нека P е точка таква што $\overline{NP} = \overline{NC}$ и $\overline{CP} = \overline{CB}$, при што B и P лежат од различни страни на правата AC. Докажи дека $\measuredangle APM = \measuredangle PBA$.

54. Во рамнината се дадени две различни точки A и B и права a која не ги содржи точките A и B. Определи го геометрсикото место на тежиштата на триаголниците ABX, каде $X \in a$.

55. Даден е триаголник ABC. Нека O', O'', O''' се центрите на припишаните кружници на триаголникот ABC. Докажи дека триаголникот $O'O''O'''$ е остроаголен.

56. Даден е рамностран триаголник ABC со страна a. Од точка M на страната AC е повлечена нормала MN на страната AB, потоа нормала NP на страната BC и најпосле нормала PQ на страната AC.

    а) На кое растојание од точката A треба да се земе точката M за да конвексниот четириаголник $MNPQ$ има најголема плоштина?

    б) Кога четириаголникот $MNPQ$ ќе дегенерира во триаголник?

57. Во темињата A и B на рамностраниот триаголник ABC се подигнати нормали на отсечката AB. Низ точката C е повлечена произволна права која овие нормали ги сече во точките P и Q, а потоа е повлечена симетралата на отсечката PQ која ја сече правата AB во точката S.

    а) Докажи дека триаголникот PQS е рамностран.

    б) Определи ја положбата на правата PQ така што плоштината на триаголникот PQS ќе биде еднаква на $\frac{4}{3}$ од плоштината на триаголникот ABC.

58. Докажи дека тежишната линија CM повлечена од темето C на триаголникот ABC ја полови секоја отсечка XY ако $X \in AC, Y \in BC$ и $XY \| AB$, а потоа дека пресечната точка N на отсечките AY и BX припаша на CM.

59. Од средината M на основата AC на рамнокрак триаголник ABC повлечена е нормала MH кон страната BC. Точката P е средина на отсечката MH. Докажи дека $AH \perp BP$.

60. Ако во триаголникот важи
$$2R + r = s,$$
докажи дека овој триаголник е правоаголен.

61. Ако за правоаголниот триаголник важи
$$\frac{12}{a} + \frac{12}{b} = \frac{35}{c},$$
докажи дека тој е египетски, т.е. дека должините на неговите страници се однесуваат како $3:4:5$.

62. Нека D еподножјето на висината CD на триаголникот ABC која припаѓа на страната AB на овој триаголник и нека r, r_1, r_2 се радиусите на кружниците впишани во триаголниците ABC, ACD, BCD, соодветно. Докажи дека

$$r+r_1+r_2=\overline{CD}$$

ако и само $\gamma=90^\circ$.

63. Нека во триаголникот ABC $(\overline{AB}\neq\overline{AC})$ симетралата на $\measuredangle BAC$ исто така е симетрала меѓу висината AD и тежишната линија AE . Определи го $\measuredangle BAC$.

64. Нека темињата на триаголникот се целобројни точки во рамнината. Докажи дека неговата плоштина не е помала од $\frac{3}{2}$.

65. Рамностран триаголник ABC е впишан во кружница k . На страните AC и BC земени се точки M и N , соодветно, така што $\overline{AM}=2\overline{MC}$ и $\overline{AN}=\overline{NB}$. Полуправата MN ја сече кружницата k во точката P . Докажи дека
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}-\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\frac{1}{2}\,.$$

66. Даден е триаголник ABC . Нека r_1,r_2,r_3,r_4 се радиусите кои ги допираат правите CA и CB , така што првите два ја допираат страната и AB од внатре и од надвор, а третиот и четвртиот ја допираат и опишаната кружница на триаголникот ABC од внатре и од надвор, соодветно. Докажи дека
$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{r_3}{r_4}\,.$$

67. Даден е триаголник ABC со $\measuredangle A=120^\circ$, ортоцентар H и центар на опишана кружница O . Докажи дека $\overline{OH}=\overline{AB}+\overline{AC}$.

68. Даден е триаголник ABC во кој $\measuredangle BAC=40^\circ$ и $\measuredangle ABC=80^\circ$. Нека D е E се соодветно точки на страните AC и AB такви што $\measuredangle ABD=\measuredangle BCE=30^\circ$ и нека F е пресечната точка на правите CB и DE . Докажи дека $\overline{AB}=\overline{BF}$.

69. Во правоаголен триаголник ABC центарот S на впишаната кружница ја дели симетралата CE на правиот агол во однос $\overline{CS}:\overline{SE}=\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Предели ги острите агли на овој триаголник.

70. Нека H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC . Правата која минува низ точката A и е нормална на AC и правата која минува низ B и е нормална на BC се сечат во точката D . Кружницата со центар во точката C и радиус CH ја сече опишаната кружница на триаголникот ABC во точките E и F . Докажи дека $\overline{DE}=\overline{DF}=\overline{AB}$.

71. Нека H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC и D,E,F се подножјата на нормалите спуштени од темињата A,B,C , соодветно. Нека P е пресечната точка на отсечките DF и BE . Правата која минува низ P и е

нормална на BC ја сече страната AB во точката Q. Нека N е пресечната точка на отсечките AD и EQ. Докажи дека точката N е средина на отсечката AH.

72. Даден е триаголник ABC во кој $\measuredangle CAB = 15^\circ$ и $\measuredangle ABC = 30^\circ$. Со M да ја означиме средината на страната AB.

а) Докажи дека $\measuredangle ACM = 30^\circ$.

б) Докажи дека

$$\overline{CM} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2\overline{AC}}.$$

73. Нека M е средината на страната AB на триаголникот ABC. ДОкажи дека производот на должината на радиусот на кружницата опишана околу триаголникот AMC и висината од M повлечена на AC е еднаков на производот на должината на радиусот на кружницата опишана околу триаголникот BMC и висината повлечена од M на BC.

74. Нека точките D и E се подножјата на висините повлечени од темињата B и C на триаголникот ABC кон страните AC и AB, соодветно. Ако M е средина на отсечката BC, докажи дека MD и ME се тангенти на кружницата опишана околу триаголникот ADE.

75. Во триаголникот ABC симетралите BC и CD на аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCA$ се сечат во точката P. Определи ги аглите на триаголникот ABC ако е познато:

$$\overline{BP} = \overline{PF}\sqrt{3}, \ \overline{PD} = \overline{PC}(\sqrt{3}-1).$$

76. За висините h_a, h_b, h_c и радиусот r на впишаната кружница во триаголникот ABC важи

$$h_a + h_b + h_c = 9r.$$

Докажи дека триаголникот ABC е рамностран.

77. На страната BC на триаголникот ABC земена е произволна точка D, а на страната AB точка E таква што $DE \parallel CA$. Нека P, P_1, P_2 се последователно плоштините на триаголниците ABC, EBD, ABD. Докажи дека $P_2 = \sqrt{P \cdot P_1}$.

78. Ако во насока на движење на стрелките на часовникот се продолжат страните на триаголникот ABC за своите должини, а краевите се поврзат се добива триаголник кој има седум пати поголема плоштина. Докажи!

79. Даден е триаголник ABC таков што $\overline{AC} > \overline{AB} > \overline{BC}$, а точката O е центар на впишаната кружница. Патник кој тргнува од точката O треба да помине низ точките A, B, C (одејќи по страните на триаголникот) и повторно да се врати во точката O. Кој е најкраткиот можен пат?

80. Во кружницата ω е впишан триаголник ABC. Конструирана е кружница ω_1 која ги допира ω и страните CA и CB. Докажи дека важи $\overline{CA'} = \frac{ab}{p}$, каде A' е допирната точка на кружницата ω_1 и страната BC, а $2p = a+b+c$.

81. Меѓу триаголниците чии страни a,b,c ги задоволуваат условите
$$1 < a \leq 2 \leq b \leq 5 < c \leq 6$$
определи го триаголникот кој има најголема плоштина.

82. Нека AA_1, BB_1, CC_1 се висините на триаголникот ABC, а A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 се радиусите на Ојлеровата кружница за триаголникот ABC. Докажи дека правите AA_2, BB_2, CC_2 се сечат во иста точка.

83. Кружницата впишана во триаголникот ABC има центар во точката S и ги допира страните AC и AB во точките P и Q, соодветно. Правите BS и CS ја сечат правата PQ во точките M и N, соодветно. Докажи дека точките M, N, B, C припаѓаат на иста кружница и определи го центаро на оваа кружница.

84. Околу триаголникот ABC е опишана кружница со центар во точката O. Точката T е тежиште на триаголникот ABC, а точките D, E, F се центри на опишаните кружници околу триаголниците TBC, TCA, TAB, соодветно. Докажи дека точката O е тежиште на триаголникот DEF.

85. Приписаната кружница ја допира страната AB на триаголникот ABC во точката D. Определи го односот $\overline{AD} : \overline{BD}$ ако $\measuredangle CAB = 2\measuredangle ADC$.

86. Нека е даден триаголник ABC со центар на впишана кружница во точката I. Правата AI ја сече опишаната кружница k околу триаголникот ABC во точките A и D ($A \neq D$). Кружницата впишана во триаголникот ABC ја допира страната BC во точката E. Правата DE ја сеќе кружницата k во точките D и F ($D \neq F$). Докажи дека $\measuredangle AFI = 90^\circ$.

87. Нека F е пресечната точка на висината CD и симетралата AE на внатрешниот агол на правоаголен триаголнк ABC со прав агол во темето C. Нека G е пресекот на отсечките ED и BF. Докажи дека плоштината на четириаголникот $CEFG$ е еднаква на плоштината на триаголникот BDG.

88. Нека O и I се центрите на опишаната и впишаната кружница за триаголникот ABC, соодветно. Нека впишаната кружница ги допира страните BC, CA, AB во точките D, E, F, соодветно. Правите FD и CA се сечат во точката P, а правите DE и AB во точката Q. Понатаму, нека M и N се средините на отсечките PE и QF, соодветно. Докажи дека $OI \perp MN$.

89. Даден е триаголник ABC. Нека симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето A ја сечат правата BC во точките D и E, соодветно, а кружницата опишана околу триаголнкот ADE во точката E. Докажи дека FD е симетрала на $\measuredangle BFC$.

90. Нека H е ортоцентар на остроаголен триаголник ABC, а M е средина на страната BC. Ако D и E се подножјата на нормалите повлечени од точката H на симетралите на внатрешниот и недворешниот агол во темето A, докажи дека точките M, D, E се колинеарни.

91. Нека P е точка на лакот BC на кружницата опишана околу триаголникот ABC кој не ја содржи точката A. Нека правите AB и CP се сечат во точката E, а правите AC и BP се сечат во точката F. Ако симетралата на страната AB ја сече AC во точката K, а симетралата на страната AC ја сече AB во точката J, докажи дека

$$(\frac{\overline{CE}}{\overline{BF}})^2 = \frac{\overline{AJ}\cdot\overline{JE}}{\overline{AK}\cdot\overline{KF}}.$$

92. Во триаголник ABC дадена е точка P таква што

$$\measuredangle ACP = \measuredangle ABP = 10^\circ, \measuredangle CAP = 20^\circ, \measuredangle BAP = 30^\circ.$$

Докажи дека $\overline{AC} = \overline{BC}$.

93. Должините на страните на триаголникот се цели броеви a, b, c, а должината на една од висините е еднаква на збирот на должините на другите две висини. Докажи дека $a^2 + b^2 + c^2$ е точен квадрат.

94. Докажи дека постои единствен триаголник чии должини на страни се последователни природни броеви, а еден од неговите агли е два пати поголем од еден од преостанатите два агли.

95. Нека M е средина на страната AB, а N е средина на страната AC на рамностраниот триаголник ABC. На продолжението на отсечката MN преку точката N земена е точка P таква што $\overline{MN} = \overline{NP}$. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од точката N на правата AP, а Q е пресечната точка на правите ND и BC. Докажи:
а) $PA \perp AB$,
б) $\overline{DQ} = \frac{3}{4}\overline{BC}$.

96. Симетралата на аголот во темето A на триаголникот ABC ја сече страната BC во точката D. Ако е познато дека $\overline{CD}\cdot\overline{BD} = \overline{AD}^2$ и $\measuredangle ADB = 45^\circ$.
а) Докажи дека $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = 90^\circ$.
б) Пресметај го $\measuredangle BAC$.

97. Во триаголникот ABD важи: $\measuredangle ABD = 120^\circ$ и $\overline{AD} = 1$, а на страната AB се наоѓа точка C таква што $\measuredangle ADC = 90^\circ$ и $\overline{BC} = 1$. Докажи дека $\overline{AC} = \sqrt[3]{2}$.

98. Даден е триаголник ABC во кој BD е симетрала на $\measuredangle ABC$. Кружницата опишана околу триаголникот BCD ја сече правата AB во точката E така што точката E е меѓу точките A и B. Кружницата опишана оклу триаголникот ABC ја сече правата CE во точката $F \neq C$. Докажи дека
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}.$$

99. Нека D и E се средините на страните BC и AC на триаголникот ABC, соодветно и O и S се центрите на опишаната и вписаната кружница, соодветно. Докажи дека точките D, E, O, S се конциклични ако и само ако $\overline{AC} + \overline{BC} = 2\overline{AB}$.

100. Над висината BD на триаголникот ABC, како над дијаметар, е конструирана кружница која по втор пат ги сече страните AB и BC во точките K и L, соодветно. Тангентите на оваа кружница во точките K и L се сечат во точката M. Докажи дека правата BM ја полови отсечката AC.

101. Нека е даден остроаголен триаголник ABC со најкратка страна AB и центар I на кружницата впишана во него. Нека кружницата со центар I и радиус IC ја сече страната AB во точките P и Q, каде P е точка поблиску до точката B отколку до точката A. Нека припишаната кружница наспроти темето A ја допира страната BC во точката E и нека точката F е симетрична на точката C во однос на точката E. ДОкажи дека $EP \perp CQ$.

102. Нека ABC е остроаголен триаголнк, AD е симетрала на $\measuredangle BAC$ $(D \in BC)$, а E и F се ортогоналните проекции на точката D на AB и AC, соодветно. Нека $CE \cap BF = \{K\}$ и нека BF ја сече опишаната кружница околу триаголникот AEK во точката L $(L \neq K)$. Докажи дека $BF \perp DL$.

103. Нека H еортоцентар на остроаголниот триаголник ABC. На отсечките HB и HC соодветно се избрани точки K и L такви што $\measuredangle AKC = 90^\circ = \measuredangle ALB$. Докажи дека $\overline{AK} = \overline{AL}$.

104. Определи го оној правоаголен триаголник за кој аголот φ меѓу тежишните линии t_a и t_b повлечени кон катетите a и b, соодветно прима најголема вредност.

105. Конструирај триаголник ако се дадени центрите на квадратите конструирани над страните на тој триаголник, во надворешноста на триаголникот.

106. Конструирај триаголник ако се дадени $a+c, h_a+h_c$ и α.

107. Конструирај триаголник ABC таков што $a+b=12\,cm, \gamma=60^\circ$ и симетралата на аголот γ со спротивната страна формира агол од 45° .

108. Конструирај триаголник за кој се дадени пресечните точки на кружницата опишана околу тој триаголник со продолженијата на неговите висини.

109. Конструирај правоаголен тиаголник ако се дадени хипотенузата c и симетралата s на еден остар агол.

110. Даден е триаголник ABC во кој

$$\measuredangle CAB - \measuredangle ABC = 90^\circ .$$

а) Докажи дека висината CC' на триаголникот ABC повлечена во темето C е тангента на кружницата опишана околу триаголникот ABC .

б) Конструирај го триаголникот ако е дадено $\measuredangle CAB - \measuredangle ABC = 90^\circ$, c и R .

111. Во рамнината се дадени три неколинеарни точки A, M, N . Конструирај квадрат така што едно теме е точката A , а другите две страни кои не минуваат низ точката A лежат на прави кои минуваат низ точките M и N .

112. Конструирај квадрат таков што две спротивни темиња и припаѓаат на дадена права, а другите две темиња на две дадени кружници кои лежат на различни страни од дадената права.

113. Низ четири дадени точки на дадена права конструирај прави така што тие формираат ромб со даден остар агол α .

114. Ако дадена фигура има оска на симетрија и единствен центар на симетрија, тогаш центарот на симетрија припаѓа на оската на симетрија. Докажи!

115. Во рамнината се дадени n точки такви што меѓу секои четири од дадените точки три точки припаѓаат на иста права. Докажи дека најмалку $n-1$ од дадените точки припаѓаат на иста права.

116. Во кружница се дадени две тетиви AB и CD кои се сечат во точка P . Определи на кружницата точка M таква што тетивите MA и MB отсекуваат на тетивата CD чија средина е точката P .

117. Дадени се полукружница со центар O и дијаметар AB . Нека M е произволна точка на отсечката AO , а C и D се точки на поукруѓницата такви што $\measuredangle AMD = \measuredangle BMC$. Докажи дека точките O, C, D, M се конциклични.

118. а) Околу кружница со радиус $r = 2\,cm$ е опишан рамнокрак трапез со плоштина $20\,cm^2$. Определи го периметарот на овој трапез.

б) Околу кружница со радиус $r=8$ опишан е рамнокрак трапез со крак $b=8\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на трапезот.

119. Во исечок на круг со радиус R е впишана кружница со радиус r. Ако должината на тетивата на исечокот е еднаква на $2a$, докажи дека

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{a}.$$

120. Во рамнината се дадени кружниците k и k'. Нека p и q се нивните заеднички надворешни тангенти и нека P е допирната точка на тангентата p со кружницата k, а Q допирната точка на тангентата q со k'. ДОкажи дека дадените кружници отсекуваат на правата PQ складни тетиви.

121. Две кружници се сечат во точките A и B. Низ точка K на едната кружница се конструирани прави KA и KB кои ја сечат другата кружницапо втор пат во точките M и N, соодветно. Ако O е центарот на првата кружница, докажи дека правите MN и OK се заемно нормални.

122. Од точката M надвор од кружницата k се конструирани тангенти на k, кои ја допираат во точките A и B. Нека N е точка од круѓницата таква што $AM \parallel BN$. Нека C е втората пресечна точка на правата MN со кружницата k. Докажи дека $\overline{CN}=2\overline{BC}$.

123. Дадени се кружница k со дијаметар AB и произволна точка на кружницата. Нека MH е нормала на дијаметарот AB и нека C и D се пресечните точки на кружницата k со кружницата k_1 со центар е M и радиус MH. Докажи дека правата CD ја полови отсечката MH.

124. Нека тангентата од точката M ја допира кружницата k во точките A и B и нека BC е дијаметар на k. Нека D е подножјето на висината од A на BC. Докажи де$1,1,2,2,...,n,n$ка правата MC ја полови отсечката AD.

125. Дадена е кружница и нејзина тангента t во точката M. Од секоја точка A на правата a која е паралелна на t и не ја сече кружницата се повлекуваат тангенти на кружницата кои ја сечат правата t во точките X и Y. Докажи дека вредноста на производот $\overline{XM}\cdot\overline{YM}$ не зависи од положбата на точката A.

126. Во рамнината се дадени неколинеарни точки $A_1, A_2, ..., A_n$. Докажи дека постои права која минува низ точно две од овие точки.

127. Низ темето C на квадратот $ABCD$ со должина на страна еднаква на 1 повлечи права p која не го сече квадратот така што го сече продолжението на страната AB преку темето B во точката M, а продолжението на страната AD преку темето D во точката N. Да означиме $\overline{AM}=a$ и $\overline{AN}=b$.

а) Докажи дека важи $ab=a+b$.
б) Во кои граници лежи збирот $a+b$?
в) Определи ги a и b ако $a+b=\frac{9}{2}$.

128. Во квадрат со должина на страна a поврзани се средините на соседните страни со спротивното теме на квадратот. Определи ја плоштината на така добиениот триаголник.

129. Нека $ABCD$ е паралелограм и M е средина на страната DC. Ако M припаѓа на симетралата на $\measuredangle DAB$, определи го $\measuredangle AMB$.

130. Нека е даден паралелограм $ABCD$ и нека E е средина на отсечката AB. Правите CE и BD се сечат во точката F. ДОкажи дека $\overline{CF}=2\overline{EF}$.

131. Во ромбот $ABCD$ остриот агол е еднаков на 60°. Дадени се точки M на страната AB и N на страната BC такви што $\overline{MB}+\overline{BN}=\overline{AB}$. Докажи дека триаголникот MND е рамностран.

132. На страните AD и BC на конвексниот четириаголник $ABCD$ се дадени точки M и N, соодветно. Правата MN ги сече дијагоналите AC и BD соодветно во точките P и Q ($P\neq Q$). АКо опишаните кружници околу триаголниците AMP, BNQ, CNP, DMQ се сечат во една точка,докажи дека

$$\overline{AM}:\overline{MD}=\overline{CN}:\overline{NB}.$$

133. Точката K е средина на страната AB на квадратот $ABCD$, а точката L ја дели дијагоналата во однос $3:1$. Докажи дека $\measuredangle KLD=90^\circ$.

134. Даден е паралелограм $ABCD$. Над страните AB, BC, CD, DA се конструирани квадрати кои лежат надвор од паралелограмот. Центарот на паралелограмот, средината на било која негова страна и центарот на квадратот конструиран над таа страна се темиња на триаголник.
а) Докажи дека сите овие триаголници се складни.
б) Докажи дека четириаголникот чии темиња се темињата на квадратите е квадрат.

135. Во конвексен четириаголник $ABCD$ се повлечени дијагоналите. Докажи дека четириаголникот со темиња во тежиштата на триаголниците ABC, ABD, ACD и BCD е сличен на четириаголникот $ABCD$.

136. Во делтоид е впишан правоаголник чии страни се паралелни со дијагоналите на делтоисот. Определи ги должините на страните на правоаголникот ако се дадени неговиот периметар $2s=16\,cm$ и дијагоналите на делтоидот $d_1=10\,cm$ и $d_2=6\,cm$.

137. Определи ја должната на страната на најмалиот квадрат кој може да се впише во даден квадрат со должина на страна $10\ cm$.

138. Нека M е средина на страната DC на квадратот $ABCD$ и K е подножјето на нормалата повлечена од A на BM. Докажи дека $\measuredangle DAK = \measuredangle DKA$.

139. Нека L е произволна точка на пократкиот лак CD на кружницата опишана околу квадратот $ABCD$. Нека K е пресечната точка на правите AL и CD, M е пресечната точка на правите AD и CL, а N е пресечната точка на правите MK и BC.

а) Докажи дека точката K е ортоцентар на триаголникот MAC.

б) Докажи дека точките B, L, M, N се концикlични.

140. Дадени се должините на страните на трапез:

$$a = 30\ cm, b = 15\ cm, c = 16\ cm, d = 13\ cm,$$

каде $a \| c$. Определи ја:

а) плоштината на трапезот,

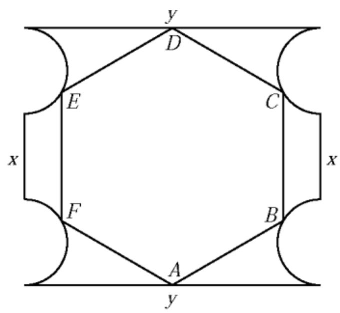
б) плоштината на деловите на трапезот на кои тој е поделен со средната линија.

141. Околу правоаголен трапез $ABCD$ со основи AB и CD $(\overline{AB} > \overline{CD})$ и висина BC, опиши квадрат така што низ секое теме на трапезот минува минува различна страна на квадратот о трпезот се наоѓа внатре во квадратот.

142. Нека Q е произволна точка на страната BC на рамностраниот триаголник ABC. Отсечката AQ ја продолжуваме до пресекот P со опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи дека

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}.$$

143. Дадена е билијардска маса како на цртежот десно, каде лаците се полукружници со радиус 1. Определи ги должините x и y така што играчот на билијард може од некоја точка на масата да упати топкакоја ќе помине пат на правилен шестаголник $ABCDEFA$, како на цртежот десно.



144. Нека O е пресечната точка на дијагоналитре на паралелограмот $ABCD$, $\measuredangle ABC > 90^\circ$ и K, L, M се подножјата на нормалите повлечени од точката D на правите AB, BC, AC, соодветно. Докажи дека точката O припаѓа на кружницата опишана околу триаголникот KLM.

145. Во остроаголен триаголник впишани се три квадрати така што две од темињата на секој квадрат лежат на една страна на триаголникот, а другите две темињалежат на другите две страни. Докажи дека квадратот чија страна лежи на најмалата страна на триаголникот има најголема плоштина.

146. Нека D и E се средините на страните AB и AC на триаголникот ABC и M е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle BAC$ со страната BC. Докажи дека:

а) Ако четириаголникот $ADME$ е тетивен, тогаш $\overline{AD}\cdot\overline{AE}=\overline{MD}\cdot\overline{ME}$.

б) Ако $\overline{AD}\cdot\overline{AE}=\overline{MD}\cdot\overline{ME}$, тогаш четириаголникот $ADME$ е тетивен или ромб.

147. Докажи дека ако во конвексен четириаголник важат било кои две две од следниве тврдења, тогаш важи и третото тврдење:
а) четириаголникот е тангентен,
б) дијагоналите на четириаголникот се заемно нормални,
в) една од дијагоналите на четириаголникот ја полови другата дијагонала.

148. Над страните на триаголникот ABC со плоштина P, однадвор се конструирани квадрати $ACC_2A_1, BAA_2B_2, CBB_1C_1$. Докажи дека од отсечките A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 може да се конструира триаголник и пресметај ја неговата пшлоштина.

149. Даден е четириаголник $ABCD$ кој е и тетивен и тангентен. Впишаната кружница ги допира страните AB, BC, CD, DA во точките K, L, M, N. Докажи дека средините на страните на четириаголникот $KLMN$ се темиња на тетивен шетириаголник.

150. Во паралелограм $ABCD$ точката M е средина на страната BC, а N е произволна точка на страната AD. Нека P е пресечната точка на отсечките MN и AC, а Q е пресечната точка на отсечките AM и BN. Докажи дека триаголниците BDQ и DMP имаат еднакви плоштини.

151. Нека K е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$. Ако $\overline{AK}=\overline{BC}$ и $\measuredangle CAB=\measuredangle CAD$, докажи дека точката K ја дели отсечката AC во златен пресек.

152. Во рамнината е дадена целобројна решетка. Докажи дека секој конвексен четириаголник со единична плоштина, чии темиња се јазли на мрежата е паралелограм.

153. Нека K, L, M, N се средините на страните AB, BC, CD, DA на конвексниот четириаголник $ABCD$. Во внатрешноста на овој четириаголник определи точка P таква што плоштините на четириаголниците $AKPN, BLPK, CMPL, DNPM$ се еднакви.

154. Даден е трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB}=2$ и $\overline{CD}=1$, крак $\overline{BC}=\sqrt{3}$ и $\measuredangle ABC =70^\circ$. Нека E е точка во внатрешноста на овој трапез таква што $\measuredangle ECB =10^\circ$ и $\measuredangle EBC=20^\circ$. Докажи дека триаголникот AED е рамностран.

155. Дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката S. Ако

$$\measuredangle SAB=15^\circ, \measuredangle SBC=45^\circ, \measuredangle SCD=45^\circ, \measuredangle SDA=75^\circ,$$

докажи дека четириаголникот е или тетивен или тангентен.

156. Нека M е пресекот на дијагоналите на квадратот $ABCD$. Точката E е симетрична на точката M во однос на точката C. Со S да ја означиме точката во која кружницата опишана околу триаголникот BDE ја сеќе дијагоналата AC и $S\neq E$. Докажи дека S е средина на отсечката AM.

157. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи

$$\measuredangle ABD=12^\circ, \measuredangle ACD=24^\circ, \measuredangle DBC=36^\circ, \measuredangle BCA=48^\circ.$$

Определи го $\measuredangle ADC$.

158. Во рамнокрак трапез $ABCD$ е впишана кружница со центар O која ги допира краците BC и AD на трапезот во точките M и N, соодветно.

а) Докажи дека

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{2}{MN}.$$

б) Ако точките A,O,M се колинеарни, определи ги аглите на овој трапез.

159. Нека $ABCD$ и $A'B'C'D'$ се два паралелограми и нека M,N,P,Q се точки от отсечките AA',BB',CC',DD' такви што

$$\overline{AM}:\overline{AA'}=\overline{BN}:\overline{BB'}=\overline{CP}:\overline{CC'}=\overline{DQ}:\overline{DD'}=\lambda.$$

а) Докажи дека $MNPQ$ е паралелограм.

б) Што е геометриското место на точки на пресекот на дијагоналите на четириаголникот $MNPQ$ кога бројот λ се менува.

160. Четириаголникот $ABCD$ тетивен. Права низ точката D паралелна со правата BC ја сече правата CA во точката P, правата AB ја сече во точката Q и кружницата опишана околу четириаголникот $ABCD$ ја сече во точката R. Права низ точката D паралелна со правата AB ја сече правата AC во точката S, правата BC ја сече во точката T и кружницата опишана околу четириаголникот $ABCD$ ја сече во точката U. АКо $\overline{PQ}=\overline{QR}$, докажи дека $\overline{ST}=\overline{TU}$.

161. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека k_1 и k_2 се кружниците вписани во триаголниците ABC и ABD. Докажи дека надворешната заедничка тангента на овие кружници(различна од AB) е паралелна со CD.

162. Нека $ABCD$ тетивен четириаголник. Правите AB и CD се сечат во точката E, а правите AD и BC во точката F. Тангентите на кружницата опишана околу четириаголникот $ABCD$ повлечени од точките E и F ја допираат кружницата во точките G и H, соодветно. Ако $a=\overline{GE}, b=\overline{HF}, c=\overline{EF}$, докажи дека
$$a^2+b^2=c^2.$$

163. Дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката S под прав агол. Докажи дека нормалата повлечена од точката S на правата BC ја полови страната AD.

164. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ со плоштина 1 чии дијагонали се сечат во точката M под агол α. Нека O_1, O_2, O_3, O_4 се центрите на опишаните кружници околу триаголниците ABM, BCM, CDM, DAM, соодветно. Определи ја плоштината на четириаголникот $O_1O_2O_3O_4$.

165. Нека K е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на конвексниот четириаголник $ABCD$. Ако
$$\overline{AK}=\overline{BC}, \overline{AC}:\overline{AK}=\overline{AK}:\overline{KC} \text{ и } \measuredangle CAB=\measuredangle CAD,$$
докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

166. Даден е рамнокрак трапез со основи AB и CD. Крижницата k која минува низ точките D и C по втор пат ја сече страната AD во точката X, а дијагоналата BD во точката Y. Тангентата на кружницата k во точката C ја сече правата AB во точката Z. Докажи дека точките X, Y, Z се колинеарни.

167. Од праволиниски канал со ширина a под прав агол се одделува праволиниски канал со ширина b. Определи ја најголемаа должина надрво кое нема да се заглави при вртењето пливајќи од едниот во другиот канал.

168. Даден е правилен осумаголник со должина на страна 1. Определи го збирот на должините на сите дијагонали на овој осумаголник.

169. Во рамнината е даден конвексен петаголник чии агли се тапи. Докажи дека може да се најдат две негови дијагонали такви што два круга конструирани над овие дијагонали како над дијаметри го покриваат целиот петаголник.

170. Правилен петаголник со страна a и дијагонала d впишан е во кружница со радиус 1. Докажи дека
$$a^2+d^2=1.$$

171. Должините на страната и дијагоналата на правилен петаголник се еднакви на a и b, соодветно. Докажи дека

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=3.$$

172. Темињата на правилен десетаголник се поврзани со затворена искршена линија која има 10 отсечки. Докажи дека меѓу овие отсечки најмалку две се паралелни.

173. Во рамнината со целобројна решетка е даден конвексен шестаголник чии темиња се јазлите на мрежата, а неговата плоштина е 3. Докажи дека шестаголникот е централносиметричен.

174. Докажи дека меѓу било кои пет темиња на правилен десетаголник постојат четири темиња кои формираат рамнокрак трапез.

175. Во внатрешноста на конвексен $n-$аголник $A_1A_2...A_n$ е дадена точка M која не припаѓа на ниту една негова дијагонала. За $i=1,2,...,n$ конструирани се полуправите A_iM. Секоја од овие полуправи сече некоја страна на многуаголникот во нејзина внатрешна точка. Воочени се сите пресечни точки на полуправите A_iM со страните на многуаголникот. Нека e_i, $(i=1,2,...,n)$ е бројот на воочените точки на страната A_iA_{i+1} ($A_{n+1}=A_1$). Докажи дека бројот $\sum_{i=1}^{n} ie_i$ е делив со n.

176. Коневексен многуаголник $A_1A_2...A_n$ со дијагоналите кои не се сечат е поделен на неколку триаголници така што од секое теме на тој $n-$аголник излегуваат парен број дијагонали (може и ниту една), освен од темињата $A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k}$, каде $1\le i_1<i_2<...<i_k\le n$. Докажи дека тогаш k е парен број и

$$n\equiv i_1-i_2+...+i_{k-1}-i_k \pmod 3), \text{ за } k>0$$
$$n\equiv 0 \pmod 3), \text{ за } k=0.$$

177. Даден е конвексен многуаголник $A_1A_2...A_n$. Нека B_i е пресечната точка на дијагоналите A_iA_{i+2} и $A_{i+1}A_{i+3}$, за $i=1,2,...,n$. Познато е дека симетралите на внатрешните агли на многуаголникот $A_1A_2...A_n$ истовремено се и симетрали на страните на многуаголникот $B_1B_2...B_n$ (симетралата на $\measuredangle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ е симетрала на страната $B_{i-1}B_i$).

а) Докажи дека многуаголникот $A_1A_2...A_n$ е тангентен, а многуаголникот $B_1B_2...B_n$ е тетивен.

б) Ако $n=2005$, докажи дека многуаголникот $A_1A_2...A_{2005}$ е правилен.

7. СТЕРЕОМЕТРИЈА

1. Конструирај го и пресметај го растојанието меѓу два разминувачки раба на правилен тетраедар, ако должината на работ на тетраедарот е a. Докажи ја конструкцијата.

2. Нека $ABCD$ е произволна тристрана пирамида. Ако повлечеме три прави од кои секоја ги содржи средините на два разминувачки раба на пирамидата, тогаш овие прави се сечат во една точка. Докажи!

3. Ако во тетраедар должината на еден и само еден раб е поголема од 1, тогаш неговиот волумен не е поголем од $\frac{1}{8}$. Докажи!

4. Четири точки M,N,P,Q кои не припаѓаат на иста рамнина се средини на рабови на тетраедарот T.
   а) Докажи дека три од четирите дадени точки припаѓаат на иста рамнннна на тетраедарот.
   б) Конструирај го тетраедарот и определи го бројот на решенијата.

5. На секоја страна на тетраедарот земена е по една точка така што секоја од шесте прави кои ги определуваат две од четирите земени точки е паралелна со некој раб на тетраедарот. Докажи дека земените точки се тежишта на ѕдовите на тетраедарот.

6. Даден е тетраедар $ABCD$ чии рабови DA, DB, DC се заемно нормални. Нека O е центарот на опишаната сфера околу тетраедарот, а R радиусот на таа сфера.
   а) Докажи дека постои триаголник чии должни на страни се еднакви на растојанијата од три темиња на тетраедарот, меѓу кои е и темето D, до дијаметарот на сферата кој минува низ четвртото теме.
   б) Докажи дека $abc = 4Rs$ каде s е плоштината на тој триаголник а a,b,c се должините на рабовите DA, DB, DC.

7. Даден е тетраедар $ABCD$. Со A' да го означиме центарот на кружницата опишана околу триаголникот BCD, а со π_A рамнината која ги содржи точките A и A' и е нормална нарамнината на триаголникот BCD. Аналогно ги добиваме рамнините π_B, π_C, π_D. ДОкажи дека овие четири рамнини се сечат во една точка.

8. Основата на пирамида е рамнокрак триаголник со раб a и агол при основата $\alpha > 45^\circ$. Бочниот раб на пирамидата е накломет кон рамнината на основата под агол β. Определи ја плоштината на пресекот на пирамидата со рамнината која минува низ висината на пирамидата и едно теме на основата на пирамидата.

9. Дадени се висината $h = 6\,cm$ и плоштините на бочните ѕидови
$$P_1 = 54\,cm^2,\;\; P_2 = 60\,cm^2 \text{ и } P_3 = 102\,cm^2$$
на права тристрана призма. Пресметај ги нејзините плоштина и волумен.

10. Рамнина ги сече бочните рабови на четиристрана пирамида во точките A, B, C, D кои се наоѓаат на оддалеченост a, b, c, d, соодветно од врвот на пирамидата. Докажи дека важи
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

11. Како се менува волуменот на правилна триастрана пирамида впишана во топка со радиус r кога се менува висината на пирамидата x.

12. Основата на права пирамида е правоаголник со дијагонали еднакви на b и агол α меѓу нив. Секој од бочните рабови со основата зафаќа агол β. Определи го волуменот на пирамидата.

13. Во правилен октаедар впишан е прав цилиндар така што неговата оска лежи на дијагонала на октаедарот и основите допираат ѕидови на октаедарот. Ако работ на октаедарот е a, определи го оној цилиндар кој има омотач со најголема плоштина.

14. Во просторот се дадени два триаголници ABC и DEF кои лежат во различни рамнини. Определи го геометриското место на точки M за кои волумените на тетраедрите $MABC$ и $MDEF$ се еднакви.

15. Докажи дека не постои полиедар кој има седум рабови.

16. Тапоаголен триаголник со остри агли α и β и најмала висина h ротира околу страната b. Определи ја плоштината на добиеното тело.

17. Во конус е впишана сфера со радиус r. Определи го волуменот на конусот ако е познато растојанието d од врвот на конусот до рамнината која ја допира топката и е нормална на една изводница на конусот.

18. Ако секоја страна на просторниот четириаголник ја допира сферата S, тогаш сите допирни точки припаѓаат на иста рамнина. Докажи!

8. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ЛОГАРИТАМСКИ ФУНКЦИИ, РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. а) Определи го интервалот $(0,x;x)$, каде x е решение на равенката

$$1+7+13+...+x=280\,.$$

б) Определи ги оние вредности y од интервалот $(0,x;x)$ за кои е дефинирана функцијата

$$f(y)=\log_{7y^2-4y}(y^4-4y^3+5y^2)\,.$$

2. Нека a,b,c,x се позитивни реални броеви различни од 1. Докажи дека од

$$\log_b x=\tfrac{1}{2}(\log_a x+\log_c x)$$

следува

$$\log_b \sqrt{ac}=\log_b a\cdot\log_b c\,.$$

3. Ако x,a,b,c се позитивни реални броеви различни од 1 и ако $b^2=ac$ докажи дека

$$\frac{\log_a x}{\log_c x}=\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}\,.$$

4. Во множеството реални броеви реши ја равенката $f(t)=t$, каде функцијата $f(t)$ е определена со:

$$f(x)=5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}-4^{x+\sqrt{x^2-2}}+6+x\,.$$

5. Реши ја равенката

$$(\,(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}})^x+(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}})^x=2^{x+1}$$

6. Реши ја равенката

а) $\frac{1}{2}\log(2x+5)+\frac{1}{2}\log(2x-4)=\log 2x$,

б) $\log(x-9)+2\log\sqrt{2x-1}=2$,

в) $\log x+\log(x-3)=2\log(6-x)$.

7. Дадена е равенката

$$\log kx=2\log(x+1)\,.$$

Определи ги сите вредности на параметарот k за кои равенката има еден и само еден корен.

8. Реши ја равенката

$$\frac{1}{5-\log x}+\frac{2}{1+\log x}=1\,.$$

9. Реши ја равенката

$$\log 10+\tfrac{1}{3}\log(271+3^{\sqrt{2x}})=2\,.$$

10. Реши ја равенката

$$\log_{\frac{1}{2}} x-(\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[6]{x})^{-1}=1\,.$$

11. Реши ја равенката

а) $\log_2(9-2^x)=3-x$,

б) $x^{\frac{7+\log x}{2}}=10^{1+\log x}$.

12. Реши ја равенката

$$5^{\log x}-3^{\log x-1}=3^{1+\log x}-5^{-1+\log x}\,.$$

13. Нека k е цел број. Докажи дека постојат природни броеви x и y такви што

$$2^x+x-y-[\log_2 y]=k$$

ако и само ако $k\neq 1$.

14. Реши ја равенката

$$x^{\log_3(x-1)}+2(x-1)^{\log_3 x}=3x^2\,.$$

15. Реши ја равенката

$$\log_a x=\tfrac{x}{a}\,,$$

каде a е параметар.

16. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}64^{2x}+62^{2y}=12\\ 64^{x+y}=4\sqrt{2}.\end{cases}$$

17. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\log_4 x+\log_2 y=0,\\ x^2-5y^2+4=0.\end{cases}$$

18. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}xy=2^{2\sqrt{2}}\\ \log_2 x\cdot\log_2 y=1.\end{cases}$$

19. Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$(x^2-3x-9)^{x^2-3x}\leq 1\,.$$

20. Во множеството реални броеви реши ја неравенката
$$25\cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25\,.$$

21. Реши ја неравенката
$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1\,.$$

22. Реши ја неравенката
$$2\log 2 + (1+\tfrac{1}{2x})\log 3 - \log(\sqrt[x]{3} + 27) > 0\,.$$

23. Во зависност од реалниот параметар a во множеството реални броеви реши ја неравенката
$$\log_a x + |\,a + \log_a x\,| \cdot \log_{\sqrt{x}} a \geq a \log_x a\,.$$

24. За кои реални броеви x и y е исполнето неравенството
$$\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos y \leq 0\,?$$

25. Докажи дека
$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$$
ако a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата на правоаголен траголник.

26. За должините на катетите a и b на правоаголниот триаголник важи
$$\log\tfrac{a-b}{2} = \tfrac{1}{2}(\log a + \log b - \log 2)\,.$$
Определи ги аглите на триаголникот.

9. ТРИГОНОМЕТРИЈА

1. Докажи дека $\cos 1^\circ$ е ирационален број.

2. Пресметај $\sin(2x - y)$ ако $\sin x = \frac{1}{3}$, $\sin y = \frac{1}{2}$, $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $y \in (0, \frac{\pi}{2})$.

3. Дадена е функцијата
$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\operatorname{ctg} x + \cos x}\,.$$
Определи ја дефинициона област D на функцијата $f(x)$, а потоа докажи дека $f(x) > 0$ за секој $x \in D$.

4. Докажи дека функцијата
$$f(x) = \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x$$

не може да има вредност во интервалот $(\frac{1}{9}, \frac{3}{2})$.

5. Испитај ја функцијата
$$y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$$
и нацртај го нејзиниот график.

6. За кои реални броеви a, x, y изразот
$$r = \frac{2\sqrt{xy}+1}{[\sqrt{2}(x\sin xy+\sqrt{a})]^2+x^2(1+\cos 2xy)}$$
е рационаен број.

7. Ако $f(x) = 3^x$ и $g(x) = \sin x$, пресметај ја вредноста на изразот
$$f(g(\tfrac{\pi}{6})) - g(f(\log_3 \pi)).$$

8. Докажи дека
$$\frac{\cos 13^\circ \sin 43^\circ \cos 73^\circ}{\sin(13^\circ+43^\circ+73^\circ)} = \frac{1}{4}.$$

9. Докажи го равенството
$$\cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{4\pi}{11} + \cos\frac{6\pi}{11} + \cos\frac{8\pi}{11} + \cos\frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2}.$$

10. Докажи го равенството:
$$\sin x + \sin(x+a) + \ldots + \sin(x+(n-1)a) = \frac{\sin(x+\frac{n-1}{2}a)\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

11. Нека a и b се реални броеви од инетрвалот $[0, \frac{\pi}{2}]$. Докажи дека
$$\sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 b + \cos^6 b = 1$$
ако и само ако $a = b$.

12. Определи ја вредноста $\alpha \in [0, 2\pi]$ за која квадратниот трином
$$y = (2\cos\alpha - 1)x^2 - 2x + \cos\alpha$$
е негативен за секој $x \in \mathbb{R}$.

13. За кои вредности на параметарот m равенката
$$\sin^2 x + 2(m-2)\cos x - (m+1) = 0$$
има реални решенија?

14. Дадена е равенката
$$2x^2\sin^2\alpha - 4x\sin\alpha + 4\sin^2\alpha - 1 = 0,$$
каде x е непозната, а α е параметар кој прима вредности од $[0, \pi]$. Кога равенката има реални корени и со каков предзнак се истите.

15. Определи ја вредноста на реалниот параметар λ за која равебката

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\lambda$$

има нула која се содржи во интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$.

16. Реши ја равенката

а) $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=1$,

б) $\sin^2 x+\cos^2 x+\mathrm{tg}^2\, x+\mathrm{ctg}^2\, x=3$,

в) $3\sin^4 x-4\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=0$.

17. Реши ја равенката

а) $\sin^3 x\cos x-\sin x\cos^3 x=\frac{1}{4}$,

б) $\frac{1-\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}\, x}=1+\sin 2x$,

в) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=2-\frac{\cos x}{\sin x}$.

18. Реши ја равенката:

а) $\frac{1-\cos 2x}{2\sin x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$,

б) $5\cos 2x=4\sin x$.

19. Реши ја равенката

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin x}.$$

20. Реши ја равенката

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{4}.$$

21. Реши ја равенката

$$\cos 2x=\frac{1}{2}+\cos x-\sqrt{3}\sin x.$$

22. Реши ја равенката

$$\sin^2 2x+\sin^2 x=\frac{3}{2}.$$

23. Реши ја равенката

$$\cos x+\cos 2x+\cos 4x+4\cos x\cos 2x\cos 4x=0.$$

Определи ги сите решенија кои припаѓаат на интервалот $(-\pi,\pi)$.

24. Реши ја равенката

$$\mathrm{tg}\, x-\mathrm{ctg}\, x=\frac{4}{3}\sin 2x.$$

25. Реши ја равенката

$$\mathrm{ctg}\, x-\mathrm{tg}\, x=\sin x+\cos x.$$

26. Реши ја равенката

$$\cos 2x+\log_4(\tfrac{1}{2}\sin x)+2\cos x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\sin x=2\cos x+\sin^2 x\cdot\log_2\sin^2 x$$

27. Определи ја вредноста на параметарот a така што равенката

$$\cos a\cdot\log_a^2 x-2\operatorname{tg} a\cdot\log_a x+\tfrac{1-4\cos^2 a}{\cos^3 a}=0,\quad 0<a<1$$

има решение во интервалот $(0,1)$.

28. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$2\sin^4 x+\cos^4 x=a$$

има реални решенија.

29. Реши ја неравенката

$$\cos^2 x-\sin^2 x<\tfrac{1}{2}.$$

30. Колку решенија има системот

$$\begin{cases}\cos x_1=x_2,\\ \cos x_2=x_3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \cos x_{n-1}=x_n,\\ \cos x_n=x_1.\end{cases}$$

31. Колку решенија има системот

$$\begin{cases}\sin x_1=x_2,\\ \sin x_2=x_3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sin x_{n-1}=x_n,\\ \sin x_n=x_1.\end{cases}$$

32. Во множеството $[0,2\pi)$ реши го системот неравенки:

$$\begin{cases}2\cos x\le\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x},\\ \sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\le\sqrt{2}.\end{cases}$$

33. Докажи дека системот неравенки

$$\begin{cases}\sin x\ge\sqrt{3x^2-20x+32}\\ \cos x\ge x^2\end{cases}$$

нема решенија.

34. Ако во триаголникот ABC важи

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}=\sqrt{3},$$

докажи дека еден од аглите на овој триаголник е еднаков на 60°.

35. Ако за аглите на триаголникот важи равенството

$$\sin^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta,$$

докажи дека триагоникот е правоаголен.

36. Даден е триаголник со страни a,b,c, плоштина P и агол $\gamma=45^\circ$. Докажи дека

$$a^2+b^2-c^2=4P.$$

37. Ако во $\triangle ABC$ за страните a и b и соодветните спротивни агли α и β важи релацијата

$$(a^2+b^2)\sin(\alpha-\beta)=(a^2-b^2)\sin(\alpha+\beta),$$

докажи дека триаголникот е рамнокрак или правоаголен.

38. Нека за аглите α,β,γ и страните a,b на триаголникот ABC важи равенството

$$a+b=\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta).$$

Докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак. .

39. За триаголник со должини на страни a,b,c и плоштина P важи равенството

$$\sqrt{3}(b^2+c^2-a^2)=2bc-4P.$$

Определи ја големината на аголот наспроти страна a.

40. Докажи дека тежишните линии AA' и BB' на триаголникот ABC се заемно нормални ако и само ако

$$\operatorname{ctg}C=2(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B).$$

41. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа BC. Определи ги аглите на триаголникот ако

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=1+2\cos\frac{2\pi}{7}.$$

42. Нека тежишните линии AD и BE на триаголникот ABC се заемно нормални. Определи ги можни вредности на $\cos\measuredangle ACB$.

43. На страната BC на остроаголниот триаголник ABC земени се точки X и Y такви штоо важи $\overline{BX}=\overline{XY}=\overline{YC}$, при што точката X е поблиску до точката B отколку до точката C. Полукружниците со центри во X и Y кои ги допираат страните AB и AC, соодветно, се сечат во точката Z. АКо $\measuredangle XZY=\theta$ докажи дека важи равенството

$$\cos(2\measuredangle B) + \cos(2\measuredangle C) + 4\sin(\measuredangle B)\sin(\measuredangle C)\cos\theta = 0 .$$

44. Во трапез со основи a и b $(a > b)$, висина h, заемно нормални дијагонали о агол α меѓу краците важи

$$\tfrac{1}{h} = (\tfrac{1}{b} - \tfrac{1}{a})\operatorname{ctg}\alpha .$$

Докажи!

45. Ако производите на косинусите на спротивните агли на четириаголникот се еднакви, докажи дека тој четириаголник е трапез.

46. Фабриката во местото A е оддалечена од брегот на праволиниска река за $\overline{AB} = a\ km$, а суровината се набавува од низводното место C кое е на истиот брег на реката. Трошоците за речниот транспорт за t/km се два пати помали од трошоците за патниот транспорт. Ако $\overline{BC} = b\ km$, под кој агол кон реката треба да се направи пат така што трошоците за превоз на суровината ќе бидат најмали?

47. Нека α, β, γ се агли на триаголникот ABC.

а) Определи го максимумот на функцијата

$$f(\varphi)\sin\varphi\sin(\gamma - \varphi),\ \ (0 \le \varphi \le \tfrac{\gamma}{2}) .$$

б) Ако

$$0 < \sin\alpha\sin\beta \le \max f(v) ,$$

докажи дека постои точка D на страната AB за која CD е геометриска средина на отсечките AD и BD.

48. Даден е конвексен петаголник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Нека M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 се последователно средините на страните $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$. Ако

$$\frac{\overline{A_1M_3}}{\overline{A_3A_4}} = \frac{\overline{A_2M_4}}{\overline{A_4A_5}} = \frac{\overline{A_3M_5}}{\overline{A_5A_1}} = \frac{\overline{A_4M_1}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A_4M_2}}{\overline{A_2A_3}} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} ,$$

докажи дека петаголникот е правилен.

49. а) Ако

$$2\cos\varphi = z + \tfrac{1}{z} \ \text{ и } \ 2i\sin\varphi = z - \tfrac{1}{z} ,$$

каде z е комплексен број, докажи дека

$$2\cos(n\varphi) = z^n + \tfrac{1}{z^n} \ \text{ и } \ 2i\sin(n\varphi) = z^n - \tfrac{1}{z^n} .$$

б) Примени го тврдењето под а) за да пресметаш

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ .$$

10. АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

1. Дадена е права p со равенка $4x-y-2=0$. Определи ја равенката на правата q која е симетрична на правата p во однос на симетралата на првиот и третиот квадрант.

2. Дадена е права p со равенка
$$x-2y-6=0.$$
Определи ја равенката на правата q која е симетрична на правата p во однос на $y-$оската.

3. Дадена е права p со равенка
$$2x-3y+6=0.$$
Определи ја равенката на правата q која е симетрилна на правата p во однос на координатниот почеток O.

4. Докажи дека на секоја кружница со центар во точката $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ лежи најмногу една целобројна точка.

5. Во координатната рамнина е даден триаголник чии темиња се со целобројни координати. Кои од следниве точки во тој триаголник:
а) тежиштето,
б) ортоцентарот,
в) центарот на опишаната кружница,
г) центарот на впишаната кружница,
мора да имаа рационални координати?

6. Ако темињата на триаголникот се целобројни точки во правоаголен координатен систем, докажи дека сите негови агли се различни од 60°.

7. Во правоагоелн кординатен систем во рамнината е даден триаголник чии темиња се со целобројни координати и чија плоштина е $\frac{1}{2}$. Докажи дека центарот на неговата опишана кружница не е точка со целобројни координати.

8. Нека a е позитивен реален број. Докажи дека следните тврдења се еквивалентни:
а) Во правоаголен координатен систем постои квадрат со должина на страна a чии темиња се со целоброни координати.
б) Постојат цели броеви m и n со иста парност такви што
$$m^2+n^2=2a^2.$$

9. Нека пресликувањето $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е дадено со
$$f(x)=x^2+(a+1)x+1,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

а) Определи ги сите вредности на параметарот a за кои е точен исказот:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow |\tfrac{f(x)}{x^2+x+1}| < 3 .$$

б) Определи го множеството $A \cap B$ каде

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a\sqrt{a-2} \in \mathbb{R}\} ,$$

а B е множеството од сите вредности на параметарот a определени во а).

в) Докажи дека кривите линии кои го претставуваат графот на функцијата $y = |f(x)|$ во зависност од вредноста на параметарот a минуваат низ една фиксна точка.

г) Наведи ги оние вредности на параметарот a за кои кривата $y = |f(x)|$ е парабола и определи го геометриското место на темињата на овие параболи.

10. Определи ја равенката на кружницата која има радиус 2 и која во една точка ја допира кружницата

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

и чиј центар лежи на правата

$$x + y = 3 .$$

11. Нека точката $M(b)$ е еднакво оддалечена од правата $x = -2$ и кружниците

$$(x-3)^2 + y^2 = 1, (x-3)^2 + (y-b)^2 = 1 .$$

Определи ја кривата која ја опишува точката $M(b)$ кога параметарот b се менува во множеството реални броеви.

12. Во фигурата ограничена со лакот на кривата $2x^2 - y = 6$ и оската Ox вписан е правоаголник така што две негови темиња се на оската Ox. Определи ја максималната плоштина на вака вписан правоаголник.

13. Точката q е ортогонална проекција на произволна точка P на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ на оската Ox. Низ точката P е повлечена права l_1 паралелна со оската Ox, а низ точката Q права l_2 паралелна на отсечката OP. Определи ја равенката на кривата која ја опишува пресекот M на правите l_1 и l_2, кога P ја опишува дадената елипса.

14. Дадена е елипса

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 ,$$

која правата p паралелна со оската Oy ја сече во точките M и N, при што M има позитивна, а N има негативна ордината. Определи го геометриското место на пресечната точка P на правите AM и BN, како и геометриското место на пресечната точка Q на правите AN и BM, каде $A(-a,0)$ и $B(a,0)$ се темиња на елипсата, кога правата p се движи паралелно со оската Oy.

11. НЕРАВЕНСТВА

1. Природниот број a може да се запише во облик $a=10a_1+a_0$, каде a_1 е бројот на десетките, а a_0 цифрата на единиците. Нека c е број таков што
$$bc \le a < b(c+1) .$$
Докажи дека
$$bc_1 \le a < b(c_1+1) ,$$
каде c_1 е бројот на десетките на бројот c.

2. Нека $a,b,c \in (0,1)$. Докажи дека барем еден од производите
$$(1-a)b,\ (1-b)c,\ (1-c)a$$
не може да биде поголем од $\frac{1}{4}$.

3. Докажи дека
$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3} .$$

4. Нека a,b,c,A,B,C,r се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството
$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r}+\frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r} > \frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+r} .$$

5. Докажи дека за позитивните броеви a,b,c,d важи неравенството
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \ge 2 .$$

6. Докажи дека за секои природни броеви p и q важи неравенството
$$|\sqrt{2}-\frac{p}{q}| > \frac{1}{3q^2} .$$

7. Нека за реалните броеви a и b важи $|3a-2b|\le 1$ и $|2a-3b|\le 1$. Докажи дека $|a|\le 1$ и $|b|\le 1$.

8. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b и природен број $n>1$ важи
$$(a^n+b^n)^2 \ge 2(ab)^{n-1}(a^2+b^2) .$$

9. Докажи дека за реалните броеви x,y и природниот број n важи неравенството
$$(x^2+y^2)^n \ge (2xy)^n+(x^n-y^n)^2 .$$

10. Ако m,n,k се природни броеви и $m<n<k$ докажи дека
$$(1-\frac{m}{k})^n > (1-\frac{n}{k})^m .$$

11. Докажи дека за природните броеви m, n $(n > m)$ важи
$$(n-m)^{n-m} n^{n(m-1)} \geq (n-1)^{m(n-1)}.$$

12. Докажи дека за секој природен број $n > 1$ важи
$$n^{2n} < (n+1)^{n+1}(n-1)^{n-1}.$$

13. Докажи го неравенството
$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{2^2+1}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} > n-1.$$

14. Докажи дека за секој природен број n важи
$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}} < 2.$$

15. Докажи дека
$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}, \text{ за } n > 1.$$

16. а) Определи ги најмалиот број a и најголемиот број b такви што за секој природен број n важи
$$\sqrt{\frac{2n-1}{2n+a}} < \frac{2n}{2n+1} < \sqrt{\frac{2n}{2n+b}}.$$
б) Докажи дека
$$\frac{7}{41} < \frac{50}{51} \cdot \frac{52}{53} \cdot \frac{54}{55} \cdot \ldots \cdot \frac{1680}{1681} < \frac{5}{29}.$$

17. Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$ важи
$$n(\sqrt[n]{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) + 1.$$

18. Докажи го неравенството
$$\frac{13}{72} - \frac{1}{2(n+1)^2} \leq \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{24} - \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

19. Докажи, ако производот на n позитивни броеви е еднаков на 1, тогаш нивниот збир не е помал од n. Кога важи знак за равенство?

20. Нека a, b, c се реални броеви поголеми од $\sqrt{2}-1$ такви што $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажи дека
$$\frac{a}{b^2+2c-1} + \frac{b}{c^2+2a-1} + \frac{c}{a^2+2b-1} \geq \frac{3}{2}.$$

21. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека
$$2(a^2 + b^2 + c^2) + a + b + c \geq 6 + ab + bc + ca.$$
Кога важи знак за равенство?

22. Докажи дека за позитивните реални броеви a,b,c важи неравенството
$$(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2 \geq \frac{3}{2}(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}) .$$
Кога се достигнува знак за равенство?

23. Ако a,b,c се позитивни броеви такви што $abc=1$, докажи го неравенството
$$\frac{1}{a^3+bc}+\frac{1}{b^3+ca}+\frac{1}{c^3+ab} \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{6} .$$
Кога важи знак за равенство?

24. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^3+b^3+c^3=3$. Докажи дека
$$\frac{1}{2a+bc}+\frac{1}{2b+ca}+\frac{1}{2c+ab} \geq 1 .$$

25. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1a_2...a_n=1$. Докажи дека
$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \geq 2^n .$$

26. Ако $a_1,a_2,...,a_n$ и $b_1,b_2,...,b_n$ се позитивни реални броеви такви што
$$a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_n=1 ,$$
докажи дека
$$\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+...+\frac{b_n^2}{a_n} \geq 1 .$$

27. Докажи дека за позитивни броеви a,b,c кои го задоволуваат условот $a+b+c=1$ важи неравенството:
$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \leq 2 .$$

28. Нека x,y,z се ненегативни броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека
$$xy+yz+2zx \leq \frac{1}{2} .$$

29. Нека a,b,c се позитивни броеви такви што $ab+bc+ca=a+b+c$. Докажи дека $a+b+c \geq 3$.

30. За позитивните реални броеви x и y важи $x^2+y^2=8$. Докажи дека $x+y \leq 4$.

31. Ако $x-2y=1$, тогаш $x^2+y^2 \geq \frac{1}{5}$. Докажи!

32. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=6$. Докажи го неравенството $x^2+y^2+z^2 \geq 12$.

33. Ако за природните броеви a,b,c,d важи
$$2(ac+bd) \le a^2+b^2 \le c^2+d^2,$$
докажи дека
$$|ad-bc| \ge 15.$$

34. а) Ако $x+y=z$, докажи дека
$$x\sqrt{y^2-yz+z^2}+y\sqrt{z^2-zx+x^2}=z\sqrt{x^2+xy+y^2}.$$
б) Докажи дека за позитивните броеви x,y,z важи неравенството
$$x\sqrt{y^2-yz+z^2}+y\sqrt{z^2-zx+x^2} \ge z\sqrt{x^2+xy+y^2}.$$

35. Нека реалните броеви a,b,c ги задоволуваат условите
$$a+2b+3c=1,\ a \ge -\tfrac{1}{5}, b \ge -\tfrac{1}{2}, \in c \ge -1.$$
Определи ја најголемата можна вредност на изразот
$$\sqrt{5a+1}+\sqrt{4b+2}+\sqrt{3c+3}.$$

36. Нека x,y,z се ненегативни броеви такви што $x+y+z=3$. ДОкажи дека
$$xy+yz+zx-xyz \le \tfrac{9}{4}.$$

37. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека
$$\tfrac{a+b}{ab}+\tfrac{b+c}{bc}+\tfrac{c+a}{ca} \ge 18.$$

38. Нека a,b,c се позитивни реални броеви чиј збир е еднаков на 3. Докажи дека $3a+bc=(a+b)(a+c)$ и дека важи неравенството
$$\tfrac{a+3}{3a+bc}+\tfrac{b+3}{3b+ca}+\tfrac{c+3}{3c+ab} \ge 3.$$

39. Нека a,b,c се позитвини броеви такви што $abc \le 1$. Докажи дека
$$\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c} \ge 1+\tfrac{6}{a+b+c}.$$

40. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви. Докажи дека
$$a^6+b^6+c^6+d^6-6abcd \ge -1.$$
Кога важи знак за равенство?

41. Ако средниот по големина меѓу позитивните броеви a,b,c е помал или еднаков на геометриската средина на другите два броја, докажи дека
$$abc(a^3+b^3+c^3) \ge a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3.$$

42. Нека a и b се реални броеви такви што $a+b=1$. Докажи дека
$$a^4+b^4 \ge \tfrac{1}{8}.$$

43. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека важи неравенството
$$a^4+b^4+c^4\geq a+b+c\,.$$
Кога важи знак за равенство?

44. Нека x,yz се позитивни броеви такви што $x^2+y^2+z^2=3$. Докажи дека важи
$$x^4+y^4+z^4+x+y+z\geq 6\,.$$

45. Нека x,y,z се ненегативни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека
$$x^3+y^3+z^3+2(xy+yz+zx)\geq \tfrac{3}{4}\,.$$
Кога важи знак за равенство?

46. Нека x,y,z се позитивни броеви такви што $x^2+y^2+z^2=3$. Докажи дека важи
$$x^4+y^4+z^4+2x+2y+2z\geq 9\,.$$

47. Дадени се броевите $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$ и $b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ такви што $1\leq\frac{a_i}{b_i}\leq 2$, за $i=1,2,3$. Докажи го неравенството
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\leq 3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\,.$$
Кога важи знак за равенство?

48. Докажи дека за позитивните релани броеви x и y е точно неравенството
$$(x+\tfrac{2}{y})(\tfrac{y}{x}+1)\geq 8\,.$$
Кога важи знак за равенство?

49. Докажи дека за позитивните броеви a и b важи
$$\sqrt{ab}+\tfrac{a+b}{2}\leq\tfrac{2ab}{a+b}+\sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

50. Докажи дека за позитивните броеви x,y,z такви што $x+y+z=1$ важи
$$\sqrt{3xyz}\left(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{1-x}+\tfrac{1}{1-y}+\tfrac{1}{1-z}\right)\geq 4+\tfrac{4xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}\,.$$

51. Докажи дека за позитивните реални броеви a и b важи
$$\tfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}\leq\sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}\leq\tfrac{(a-b)^2}{4\sqrt{ab}}\,.$$

52. Нека x,y,z се позитивни броеви такви што $xyz=x+y+z+2$. Докажи дека

$$5(x+y+z)+18 \geq 8(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}) .$$

53. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $ab+bc+ca=1$. ДОкажи дека

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) .$$

54. Нека x,y,z се позитивни броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$\sqrt{xy(1-z)}+\sqrt{yz(1-x)}+\sqrt{zx(1-y)} \leq \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

55. Ако за реалните броеви x,y,z важи $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$, докажи дека

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{3}{4} .$$

56. Докажи дека за ненегативни броеви x и y важи:

$$(x+y)^2(x^2+27y^2) \geq 64x^2y^2 .$$

57. Докажи дека за реалните броеви x и y важи неравенството

$$(x^2+y^2)^5 \geq (2xy)^5+(x^5-y^5)^2 .$$

58. Ако a,b,c се должини на страни на триаголник, докажи дека

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3 .$$

Кога важи знак за равенство?

59. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b} \geq 0 .$$

60. Докажи дека за $a>0$ и $0<b<1$ важи

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1-b^2} \leq \frac{a}{b}+\frac{b}{a} .$$

61. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10$$

каде x е реален број, а потоа определи ги сите вредности на x за кои таа вредност се достгнува.

62. Во множеството цели броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x^2+3x+yz \\ y^2=3y+zx \\ z^2=3z+xy. \end{cases}$$

Докажи дека за секое реално решение на овој систем важи

$$-4 \le xyz \le 0.$$

63. Нека a, b, c се реални броеви такви што $a, b \ge 0$ и $0 < c < 1$. Докажи дека

$$a^c b^{1-c} \le ac + (1-c)b.$$

64. Ако $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви, докажи дека важи

$$(x_1 x_2 ... x_n)^{\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}} \le x_1^{x_1} x_2^{x_2} ... x_n^{x_n}.$$

65. Определи ја најголемата можна константа C таква што неравенството

$$(x_1 + x_2 + ... + x_6)^2 \ge C(x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + ... + x_6(x_1 + x_2))$$

важи за секои реални броеви $x_1, x_2, ..., x_6$. За добиената вредност на C определи ги сите вредности $x_1, x_2, ..., x_6$ за кои важи знак за равенство.

66. Нека $a_i, i = 1, 2, ..., n$ се реални броеви. Бројот a_k го нарекуваме $m-$лидер ако за некој p важи

$$a_k + a_{k+1} + ... + a_{k+p-1} \ge 0, \quad 1 \le p \le m.$$

Докажи дека збирот на сите $m-$лидери е ненегативен.

67. Докажи дека за секој реален број $x > 2$ важи $5^x > 3^x + 4^x$.

68. Докажи дека за $n \ge 2$ важи:

$$\log_{n!}^2 n + \log_{n!}^2 (n-1) + \log_{n!}^2 (n-2)! > \tfrac{1}{3}.$$

69. Докажи дека за броевите $a, b, c > 1$ е точно неравенството

$$\log_a \tfrac{b^2+c^2}{b+c} + \log_b \tfrac{a^2+c^2}{a+c} + \log_c \tfrac{b^2+v^2}{b+a} \ge 3.$$

70. Докажи дека неравенството

$$x^2(4 + \log_2^2 y) + 2x \log_2 y + \log_2^2 y + 1 \ge 0$$

важи за секој реален број x и за секој $y > 0$. Кога важи знак за равенство?

71. Ако броевите $x_1, x_2, ... x_n$ припаѓаат на интервалот $(\frac{1}{4}, 1)$ докажи дека важи неравенството

$$\log_{x_1}(x_2 - \tfrac{1}{4}) + \log_{x_2}(x_3 - \tfrac{1}{4}) + ... + \log_{x_{n-1}}(x_n - \tfrac{1}{4}) + \log_{x_n}(x_1 - \tfrac{1}{4}) \ge 2n.$$

72. Нека

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n < \tfrac{\pi}{2}.$$

Докажи дека

$$\operatorname{ctg} \alpha_n < \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + ... + \cos\alpha_n}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + ... + \sin\alpha_n} < \operatorname{ctg} \alpha_1.$$

73. Докажи дека за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2 + \sqrt{2}.$$

74. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви такви што за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$1 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx \geq 0.$$

Докажи дека

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq n.$$

75. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се броеви од интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$ такви што

$$\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + ... + \operatorname{tg} x_n \leq n.$$

Докажи дека

$$\sin x_1 \sin x_2 ... \sin x_n \leq (\sqrt{2})^{-n}.$$

76. Дадени се различни позитивни реални броеви $x_1, x_2, ..., x_{2012}$. Докажи дека меѓу нив постојат два броја x_i и x_k такви што важи

$$0 < \frac{x_k - x_i}{(1+x_k)(1+x_i)} < \frac{1}{2011}.$$

77. Докажи го неравенството

$$\frac{\sin^{n+2} x}{\sin^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\cos^n x} \geq 1,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ n \in \mathbb{N}.$$

78. Без користење на логаритамска таблица докажи дека

$$\operatorname{tg} 11^\circ < 0,2.$$

79. Докажи дека за секој $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи

$$\sin x \operatorname{tg} x > x^2.$$

80. Докажи дека за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи неравенството

$$\sin x > \frac{4x}{x^2+4}.$$

81. Ако $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ докажи дека

а) $\alpha - \sin\alpha \leq \frac{\alpha^3}{4}$,

б) $1 - \frac{\alpha^2}{2} \leq \cos\alpha \leq 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16}$.

82. Нека a, b, c, d се броеви од интервалот $[200, 300]$, а K, L, M се точките на бројната оска кои редоследно соодветствуваат на броевите

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}$$

и N е средина на отсечката KL. Докажи дека $\overline{MN} \le \frac{\overline{KL}}{10}$.

83. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < \frac{1}{8}.$$

84. Дадени се 11 различни природни броеви такви што збирот на било кои 7 броја е поголем од збирот на преостанатите 4 броја. Определи го најмалиот можен збир на овие 11 броја.

85. Определи ја најголемата можна вредност на количникот на четирицифрен природен број и збирот на неговите цифри.

86. Нека $a_1, a_2, ..., a_{2018}$ е низа броеви чии членови се елементи на множеството $\{-1,1\}$. Збирот

$$S = \sum_{1 \le i < j \le 2018} a_i a_j$$

може да прими и позитивни и негативни вредности. Определи ја најмалата можна позитивна вредност на дадениот збир.

87. Нека x и y се позитивни броеви, S е најмалиот меѓу броевите $x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$. Определи ја најголемата можна вредност на S. За кои вредности на x и y таа се достигнува?

88. Нека D е точка на страната AB на рамностраниот триаголник ABC и E, F се соодветно точки од страните BC и AC такви што $DE \,||\, AC$ и $DE \,||\, BC$. Нека P е пресечната точка на правите AE и BF. Докажи дека

$$\overline{PC} \ge \overline{PE} + \overline{PF} \ge 2\overline{PD}.$$

89. Нека D е точка на страната AB на рамностраниот триаголник ABC и E, F се соодветно точки од страните BC и AC такви што $DE \,||\, AC$ и $DE \,||\, BC$. Нека P е пресечната точка на правите AE и BF. Докажи дека

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \ge 2(\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF}).$$

90. Даден е триаголник ABC во кој $\measuredangle ACB = 60^\circ$ и D, E се точките во кои впишаната кружница ги допира страните BC и AC, соодветно. Докажи дека

$$\frac{ab}{c} \le 2\overline{DE} \le c.$$

91. Докажи дека тежините линии кои соодветствуваат на катетите на правоаголен триаголник ABC формираат агол x таков што $\sin x \le \frac{3}{5}$.

92. Докажи дека тежишните лиии кои соодветствуваат на катетите на правоаголен триаголник формираат агол φ таков што

$$\cos\varphi \ge \tfrac{4}{5}.$$

93. Докажи дека во остроаголен триаголн важи

$$\sin\tfrac{\alpha}{2} \le \tfrac{a}{b+c} \le \operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}.$$

94. Ако α,β,γ се агли на триаголник, докажи дека

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \tfrac{3}{2}.$$

95. Ако α,β,γ се агли на триаголник, тогаш

$$\tfrac{6}{7} \le \tfrac{1}{3+\cos\alpha} + \tfrac{1}{3+\cos\beta} + \tfrac{1}{3+\cos\lambda} < 1.$$

Докажи!

96. Докажи дека за аглите α,β,γ на остроаголен триаголник важи

$$\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma} + \sqrt{\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma} + \sqrt{\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma} \le \tfrac{3\sqrt{6}}{4}.$$

97. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \le 3abc.$$

98. Докажи дека за радиусите r и R на впишаната и опишаната кружница околу правоаголен триаголник важи

$$(1+\sqrt{2})r \le R.$$

99. Докажи дека за произволен триаголник ABC важи:

а) $t_c < \tfrac{a+b}{2}$, каде t_c е тежишната линија на триагоникот повлечена од темето C.

б) $a > b$ ако и само ако s_c и t_c се симетралата и тежишната линија на триаголникот повлечени во темето C.

100. Во правоаголен триаголник ABC точката D е подножје на висината повлечена од темето на правиот агол C. Ако $\overline{CD} < 1$, докажи дека

$$\tfrac{1}{1+\overline{AD}} + \tfrac{1}{1+\overline{BD}} \le \tfrac{2}{1+\overline{CD}}.$$

Дали важи обратното?

101. Нека a,b се должини на страни на триаголник и P е неговата плоштина. Докажи дека

$$(4a+3b)^2 \ge 96P.$$

102. Нека r е дијаметарот на впишаната кружница во триаголникот ABC, D е средината на страната AB и S_1, S_2 се центрите на кружниците впишани во триаголниците CDA и CDB. Докажи дека

$$r < \overline{S_1S_2} < \frac{\overline{AB}}{2}.$$

103. Ако t_a и t_b се тежишни линии, а P плоштина на еден триаголник, докажи дека $t_a \cdot t_b \geq \frac{3}{2}P$.

104. Нека a, b, c, R, r се последователно должините на страните, радиусот на опишаната и радиусот на впишаната кружница на триаголникот ABC. Докажи гожи неравенствата

$$18Rr \leq ab + bc + ca \leq 9R^2.$$

Кога важи знак за равенство?

105. Во триаголникот ABC на страната AC се земени точки K, L, M такви што BK е симетрала на $\measuredangle ABL$, BL е симетрала на $\measuredangle KBM$ и BM е симетрала на $\measuredangle LBC$. Докажи дека ако $3\measuredangle BAC - \measuredangle ACB < 180^\circ$, тогаш $4\overline{LM} < \overline{AC}$.

106. Докажи дека во конвексен $n-$аолник $A_1A_2...A_n$ постои $i \in \{1, 2, ..., n\}$ таков што $\overline{A_iA_{i+3}} < 3\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ при што $A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2, A_{n+3} = A_3$.

107. Нека M е произволна точка која лежи во внатрешноста на правилен $n-$аголник. Докажи дека постојат две темиња A и B на овој многуаголник такви што

$$(1 - \tfrac{1}{n}) \cdot \pi \leq \measuredangle AMB \leq \pi.$$

108. Во рамнината се дадени n точки такви што растојанието меѓу било кои две од дадените точки не е поголемо од 1. Ако m е најмалото растојание меѓу некои две од дадените точки, докажи дека

$$m < \frac{2(\sqrt{n}+1)}{n-1}.$$

109. Рабовите OA, OB, OC на тетраедарот $OABC$ формираат правоаголен триедар. Нека P_1, P_2, P_3, P се плоштините на триаголниците OAB, OAC, OBC, ABC и h е висината на тетраедарот повлечена од темето O на ѕидот ABC. Докажи дека

а) $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = P^2$ и

б) $h^2 \leq \frac{2P}{3\sqrt{3}}$.

12. КОМБИНАТОРИКА

1. Нека $n \geq 3$ е непарен број. Докажи дека во множеството
$$A = \{\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{(n-1)/2}\}$$
има непарен број непарни броеви.

2. Во множеството природни броеви реши ги равенките:
а) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{10(n-1)!}{(n-3)!}$,
б) $\binom{n}{3} = 2\binom{n-1}{2}$.

3. Ако за пермутацијата $(a_1, a_2, ..., a_n)$ на броевите $1, 2, ..., n$ важи
$$\frac{1+a_k}{a_{k+1}} < 1 + \frac{2}{k},\ k \in \{1, 2, ..., n-1\},$$
докажи дека таа е идентична.

4. Дали постои пермутација $(a_1, a_2, ..., a_n)$ на броевите $1, 2, 3, ..., n$ така што за секој $k = 2, 3, ..., n$ важи $k \mid a_k + a_{k+1}$, ако
а) $n = 10$, б) $n = 11$.

5. Кои шестцифрени броеви се повеќе: оние кои можат да се запишат како производ на два трицифрени броја или оние кои не може да се запишат во тој облик?

6. Броевите 1, 2, ..., 9 распореди ги на кружница така што збирот на било кои два соседни броја не биде делив ниту со 3, ниту со 5 и ниту со 7. Колку такви распореди постојат?

7. Дадени се седумнаесет броеви такви што збирот на било кои пет броја е позитивен. Докажи дека збирот на сите седумнаесет броеви е позитивен.

8. Дали може да се поврзат 1983 телефон така што секој од нив е поврзан со точно 11 други телефони.

9. Дали може сите десетцифрени броеви, кои се запишуваат само со цифрите 1 и 2, да се поделат во две групи така што збирот на било кои два броја од иста група во својот декаден запис има најмалку две тројки?

10. Во рамнината се дадени неколку прави. Правата a сече точно 3 од останатите прави, правата b сече точно 4 од останатите прави. Правата c сече точно $n\ (n \neq 3, n \neq 4)$ од останатите прави. Колку прави се дадени во рамнината?

11. Определи го бројот на остроаголните триаголници чии темиња се меѓу темињата на правилен $(2n+1)-$аголник.

12. Докажи дека постојат најмалку 2018 тројки природни броеви (m,n,k) за кои важи
$$m^{15}+n^{15}=k^{16}.$$

13. Определи го бројот на решенијата на равенката
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{1995},$$
во множеството природни броеви.

14. Дадено е множестото $S=\{1,2,...,n\}$. Докажи дека вкупниот број подредени тројки (A,B,C) на подмножества од множеството S такви што
$$A\subseteq B\subseteq C \text{ и } |B|=\frac{|A|+|C|}{2}$$
е еднаков на $\binom{2n}{n}$.

15. На таблата се запишани n природни броеви. Во еден чекор се избираат некои два од запишаните броеви a и b такви што $a<b$ и a не е делител на b. Овие броеви се бришат и на нивно место се запишуваат броевите $\text{NZD}(a,b)$ и $\text{NZS}(a,b)$. Кој е најголемиот број вакви чекори кои може да се направат? Наведи пример на $n-$торка за која овој максимален број може да се достигне.

16. Управата на трговски центар во едно туристичко место забележала дека меѓу купувачите има странски туристи, па затоа решила персоналот да го прати на курсеви за странски јазици. Секој продавач треба да запише курс за еден јазик, а целта е за секој од деветте за тоа место важни јазици да постои продавач во трговскиот центар кој го говори тој јазик. На колку начини може да се испратат p продавачи од овој трговски центар на курсевите за странски јазици?

17. Дадена е фамилија $\mathcal{F}$ подмножества на множеството X кое се состои од n елементи, со својство за секое множестви A и за секое множество B од $\mathcal{F}$ важи $A\cap B\neq\varnothing$. Колку најмногу членови може да има фамилијата $\mathcal{F}$?

18. Дадено е множество X од 2^n елементи. Ако A е подмножество од X, да означиме
$$A^1=A \text{ и } A^{-1}=X\setminus A.$$
За подмножествата $A_1,A_2,...,A_k$ ќе велиме дека се во посебна положба ако за произволен избор на броевите $p_1,p_2,...,p_k$ каде или $p_i=1$ или $p_i=-1$ важи
$$A_1^{p_1}\cap A_2^{p_2}\cap...\cap A_k^{p_k}.$$
Колку најмногу подмножества на множеството X може да се наоѓаат во посебна положба?

19. Во таблица 7×7 се запишани реални броеви така што производот на броевите во кој било квадрат со димензии 3×3 е еднаков на производот на броевите во кој било квадрат со димензии 4×4. Дали е можно производот на сите броеви запишани во таблицата биде еднаков на 2016.

20. Шаховска 8×8 табла е покриена со домина. Некои од нив се поставени хоризонтално, а некои вертикално. Докажи дека и хоризонтални и вертикални домина има парен број.

21. Правоаголник со димензии 8×7 е покриен со домина 2×1. Докажи дека правоаголникот можеме да го поделиме на два правоаголника при што ќе расечеме најмногу едно домино.

22. Квадрат со должина на страна 9 е покриен со 27 правоаголници со димензии 3×1 (прави тримина). Докажи дека 3 од нив покриваат некој квадрат со должина на страна 3.

23. Од табла со димензии 2014×2014 се исечени четирите аголни полиња. Дали преостанатиот дел од таблата може да се покрие си прави тримина (правоаголнци 3×1).

24. Во табела 10×10 редоследно се запишани броевите од 1 до 100. Докажи дека ако во секој ред и во секоја колона точно на половината од броевите се стави знак минус, тогаш збирот на броевите во така добиената табела ќе биде еднаков на нула.

25. Нека m,n се природни броеви поголеми од 2. Во полињата на правоаголна $m\times n$ табла е запишан по еден број така што за секое поле важи: збирот на броевите запишани во тоа поле и во полињата кои му се соседни е еднаков на нула. Докажи дека меѓу запишаните броеви има два еднакви.
(Две полиња се соседни ако имаат барем едно заедничко теме.)

26. Правоаголник $a\times b,\ (a,b\in\mathbb{N})$ може да се разбие на правоаголници $1\times d$, $(d\in\mathbb{N})$ ако и само ако d е делител барем на еден од броевите a и b. Докажи!

27. Во единичните полиња на 4×4 табла се запишани броевите 1 и -1 така што во секое поле е запишан бројот кој е еднаков на производот на полињата кои му се соседни. Докажи дека сите запишани броеви се еднакви на 1.
(Две полиња се соседни ако нивните страни имаат заедничка точка.)

28. На полињата на шаховска 8×8 табла се запишани броеви од множеството $\{1,2,...,16\}$ така што секој број е запишан точно четири пати и во секое поле е запишан по еден број. Докажи дека постојат две соседни полиња во кои се запишани броеви чија разлика не е помала од 3. (Две полиња се соседни ако имаат заедничка точка.)

29. Во полињата на шаховска 8×8 табла се запишани броевите од 1 до 64 (последователно од долниот лев до гормиот десен агол). Ако на таблата се поставaт 8 топови така што меѓусебно нема да се напаѓаат, докажи дека збирот на броевите на кои топовите ќе се наоѓаат е секогаш еднаков.

30. Во полињата на шаховска 8×8 табла се запишани броевите 1, 2, ..., 64. Докажи дека постојат два соседни квадрати (полиња) кои содржат броеви чија разлика е поголема или еднаква на 5. (Полињата се соседни ако имаа заедничка страна.)

31. Определи ги сите броеви $n, n\geq 2$ за кои броевите $1,2,...,2n$ може да се запишат во таблица $2\times n$ така што збировите по редви и колони ги задоволуваат равенствата $v_1=v_2$, $k_1=k_2=...=k_n$.

32. Шаховска 8×8 табла е покриена со 2×1 домина. Докажи дека кралот може да ја обиколи таблата така што на секое поле ќе биде само еднаш и така што оди домино по домино, т.е. кога прв пат ќе застане на едно домино, кралот одма преминува на другото поле на тоа домино.

33. Дадена е табла со димензии $2\times n, n\in\mathbb{N}$. Пабло на произволен начин во полињата на таблата ги запишува броевите $1,2,3,...,2n$ (секој број по еднаш и во секое поле по еден број). Потоа Андреј на произволен начин ја дели таблата на домина 2×1 (меѓу кои може да има и хоризонтални и вертикални). Се пресметува производот на броевите запишани во полињата на секое домино, потоа тие производи се собираат и се добива бројот s. Докажи дека Пабло може броевите да ги распореди така што без разлика како Андреј ќе ја подели таблата ќе важи

$$s\leq\frac{n(4n^2+6n+5)}{6}.$$

34. Дали е можно со тринаесет прави, од кои ниту една не минува низ центарот на некое поле, да се подели шаховската 8×8 табла на делови така што секој дел содржи најмногу едно поле?

35. Шаховска 8×8 табла на произволен начин е разбиена на домина 2×1. Докажи дека во секое поле на таблата може да се запише по еден природен број така што во сите домина збирот ќе биде еднаков и така што броевите запишани во соседните полиња ќе бидат заемно прости ако и само ако припаѓаат на едно домино. Соседни се полињата кои имаат заедничка страна.

36. Шаховска табла 8×8 е покриена со16 $T-$тетрамина. Да ги разгледаме 14 прави кои ја сечат таблата, паралелни се со некој нејзин раб и се на целобројно растојание од тој раб. Докажи дека барем 10 од овие прави сечат точно по 4 $T-$тетрамина.

37. Во табела 10×10 се запишани броевите од 1 до 100. Во првиот ред од 1 до 10, од лево на десно, во вториот ред од 11 до 20 од лево на десно итн. Пабло

ја расекува табелата на правоаголници 1×2, потоа го определува производот на броевите запишани во секој правоаголник и ги собира добиените 50 производи. Како треба да се расече табелата за да добиениот збир биде најмал?

38. Квадрат со должина на страна 10 е покриен со тетрамина. Докажи дека меѓу нив има најмалку шест еднакви тетрамина.

39. Докажи дека секој природен број има содржател во чиј декаден запис се јавуваат сите десет цифри.

40. Од цифрите 1 и 2 се составени шест петцифрени броеви. Докажи дека меѓу овие шест броеви може да се изберат два кои се разликуваат во најмногу две места.

41. Од дванаесет различни двоцифрени броеви може да се изберат два чија разлика е двоцифрен број запишан со една иста цифра. Докажи!

42. Во некоја група од 20 луѓе секој од нив познава барем 10 од преостанатите. Докажи дека меѓу нив може да се изберат две тројки такви што било кој член на едната тројка ги познава сите три члена на другата тројка.

43. Нека темињата на рамностраниот триаголник, шесте точки кои неговите страни ги делат на три еднакви делови и тежиштето на триаголникот се обоени во две бои. Докажи дека постои рамностран триаголник чии темиња се истобојни.

44. Секое теме и центарот на правилен шестаголник се обоени во една од две дадени бои. Докажи дека постои рамностран триаголникили правоаголник чии темиња се обоени во иста боја.

45. Определи ги сите природни броеви n за кои сите страни и дијагонали на конвексен $n-$аголник можат да се обојат во две бои така што од секое негово теме излегуваат еднаков број отсечки обоени во секоја од двете бои.

46. На кружница се наоѓаат n сини и n црвени точки кои кружницата ја делат на $2n$ складни лаци. Секоја црвена точка е средина на некој лак чии крајни точки се сини. Докажи дека и секоја сина точка е срединана некој лак чии крајни точки се црвени.

47. Дадени се табла $m\times n$ и три бои. Сакаме да ја обоиме секоја отсечка на добиената мрежа во една од овие три бои така што секој единичен квадрат има две страни обоени во една боја и две страни обоени во некоја друга боја. Определи го бројот на ваквите боења.

48. Секое поле на табла 30×30 е обоено со црна или бела боја, при што има 450 црни и 450 бели полиња. Во потез е дозволено да се расече таблата на правоаголници 3×1, па од добиените правоаголници да се состави ноза

30×30 табла. Дали секогаш е можно по конечен број дозволени потези да се добие табла во којасите бели полиња ќе бидат на горната половина, а сите црни полиња во долната половина на таблата?

49. Помалку од $\frac{n}{m}$ темиња на даден правилен $n-$аголник се обоени со црвена боја, додека останатите темиња се обоени со сина боја. Нека M е произволен $m-$аголник чии темиња се некои од темињата на дадениот $n-$аголник. Докажи дека постои $m-$аголник чии темиња се сини и кој е складен со M.

50. Единичните полиња на квадратна $n \times n$ табла се обоени со бела и црна боја. Определи го бројот на различните боења на оваа табла кај кои во секој 2×2 квадрат кој припаѓа на оваа табла има еднаков број бели и црни полиња.

51. Единичните квадратчиња на табла $n \times n, n \geq 2$ се обоени со црна и бела боја така што секое црно квадратче има најмалку три бели соседи (соседни се квадратчињата кои имаат заедничка страна). Определи го најголемиот можен број црни квадратчиња.

52. Во рамнината се дадени $2n$ точки такви што меѓу нив никои три не се колинеарни. Точки се обоени така што n се црвени и n се сини. Докажи дека може да се повлечат n отсечки, секоја со по една црвена и една сина крајна точка, така што никои две отсечки немаат заедничка точка.

53. На кружница се распоредени црвени и сини броеви. Секој црвен број е еднаков на збирот на неговите соседи, а секој син број е еднаков на полузбирот на неговите соседи. Докажи дека збирот на сите црвени броеви е еднаков на нула.

54. За кои природни броеви n страните и дијагоналите на правилен $n-$аголник може да се обојат со n бои (секоја отсечка во една боја) така што за било кои три различни бои постои триаголник со темиња во темињата на дадениот $n-$аголник, чии страни се обоени со тие бои?

55. Дадени се n декадни цифри различни од нула од кои некои може да се еднакви. Од овие n цифри се формирани сите можни $n-$цифрени броеви. Докажи дека меѓу нив може да биде најмногу еден степен на бројот 2.

56. Дали броевите 1, 2, 3, ..., 10 може да се распоредат во некој редослед во низа така што секој од нив, почнувајќи од вториот, се разликува од претходниот број за цел број проценти на претходниот број?

57. Докажи дека меѓу 13 произволни точки со целобројни координати во рамнината, меѓу кои нема три колинеарни точки, може да се изберат 3 точки кои се темиња на триаголник чие тежиште има целобројни координати.

58. Табла со димензии 2018×2018 е поделена на единични 1×1 квадрати. Во некои полиња на таблата се поставени црни, а во некои бели жетони (во

секое поел на таблата е поставен најмногу по еден жетон). Прво ги отстрануваме сите црни жетони од колоние во кои има бели жетони, а потоа ги отстрануваме сите бели жетони од редовите во кои има црни жетони. Ако B е бројот на преостанатите бели жетони, C е бројот на преостанатите црни жетони, а $A=\min\{B,C\}$, определи ја најголемата можна вредност на A.

59. Нека $S=\{-2,-1,0,1,2\}$ и нека во правоаголен координатен систем произволно се означени 17 точки од множеството $S\times S$. Докажи дека постојат три означени точки A,B,C такви што B е средина на отсечката AB.

60. Во рамнината се дадени седум прави меѓу кои нема две паралелни. Докажи дека постојат две од дадените прави такви што аголот мешу нив е помал од 26°.

61. Во правилен 25-аголник се конструирани сите дијагонали. Докажи дека не постојат 9 дијагонали кои минуваат низ иста внатрешна точка на овој 25-аголник.

62. Во внатрешноста на единечен квадрат се наоѓаат 9 точки, такви што секои 3 се неколинеарни. Докажи дека 3 од дадените точки формираат триаголник со плоштина помала од $\frac{1}{8}$.

63. Во внатрешноста на квадрат со должина на страна 1 на произволен начин се сместени 101 точка. Докажи дека постои кружница со радиус помал од $\frac{1}{7}$ која содржи најмалку 5 од дадените точки?

64. Во рамностран триаголник со должина на страна 1 се дадени 1996 точки. Докажи дека постои круг со радиус $\frac{1}{24}$ во кој се наоѓаат најмалку 20 од овие точки.

65. Рамностран триаголник е поделен на конечно многу четириаголници. Докажи дека меѓу темињата на овие четириаголници секогаш постојат три колинеарни точки.

66. Дали може произволен триаголник со права да се расече на два складни триаголници?

67. Во рамнината се дадени 25 точки такви што меѓу било кои три точки може да се најдат две точки кои се на растојание помало од 1. Докажи дека меѓу дадените точки може да се најдат барем 13 точки кои може да се покријат со круг со радиус 1.

68. Докажи дека правилен шестаголник со должина на страна 1 може да се покрие со три круга со радиус $\frac{3}{4}$, а не може да се покрие со три квадрати со должина на страна 1.

69. Во рамнината се распоредени n точки такви што плоштината на било кој триаголник чии темиња се дадените точки е помала или еднаква на 1. Докажи дека дадените n точки може да се покријат со правоаголник чија плоштина е еднаква на 4.

70. Во рамнината се дадени 2018 точки. Докажи дека точките може да се покријат со неколку кругови кои ги задоволуваат условите:
а) Збирот на должините на дијаметрите на сите овие кругови не е поголем од 2018.
б) Растојанието меѓу било кои два круга е поголемо од 1.

71. Конечно многу рамнини го делат просторот на неколку области. Докажи дека може да се изберат две област кои се наоѓаат на различни страни од секоја од овие рамнини.

72. Докажи дека во секој триаголник со плоштина 1 може да се смести рамнокрак триаголник со плоштина $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

73. Во внатрешноста на квадрат со должина на страна 1 се наоѓа $n-$аголник. Докажи дека постојат три темиња A,B,C на $n-$аголникот такви што плоштината на триаголникот ABC е помала од $\frac{8}{n^2}$.

74. Неколку складни квадрати покриваат фигура со плоштина P. Докажи дека можеме да одделиме неколку квадрати кои не се сечат и кои покриваат површина со плоштина поголема од $\frac{P}{4}$.

75. Отсечка s со должина 50 е покриена со неколку отсечки со должина 1, такви што секоја од нив лежи на s. Ако било која од овие отсечки ја отстраниме, тогаш s нема да биде целосно покриена. Определи го најголемиот број единични отсечки кои го задоволуваат овој услов.

76. Нека $A_1, A_2, ..., A_{100}$ се меѓусебно различни точки во рамнината. Докажи дека на произволна кружница со радиус 1 постои точка M за која збирот на нејзините растојанија до сите точки $A_1, A_2, ..., A_{100}$ е поголем или еднаков на 100.

77. Конвексен $n-$аголник ($n>5$) со дијагонале кои не се сечат е поделен на триаголници. Докажи дека постои дијагонала која во тој $n-$аголни отсекува четириаголник или петаголник.

78. На две спротивни страни на коцка се наоѓа по една точка, на други две спротивни страни по две точки, а на преостанатите две спротивни страни по три точки. Од осум вакви коцки е направена коцка $2\times2\times2$ и се избројани точките на секоја страна. Дали на овој начин може да се добијат шест последователни природни броја?

13. НИЗИ

1. Нека $a, a \neq 0$ е цифра. Пресметај го збирот
$$S = a + \overline{aa} + \overline{aaa} + ... + \underbrace{\overline{aa...aa}}_{2020}.$$

2. Артиметичка и геометриска прогресија со позитивни членови имаат еднаков број членови и еднакви крајни членови ($a_1 = b_1, a_n = b_n$). Ако S_a е збирот на членовите на аритметичката, а S_b збирот на членовите на геометриската прогресија, докажи дека $S_a \geq S_b$.

3. Нека $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е аритметичка прогресија во која важи $\frac{a_{2386}}{a_{1648}} = -1$. Определи го членот a_{2017}.

4. Определи го реалниот број x така што броевите
$$\log 2,\ \log(2^x - 1),\ \log(2^x + 3),$$
во наведениот редослед формираат аритметичка прогресија.

5. Ако $\sin(y+z-x), \sin(z+x-y), \sin(x+y-z)$ три последователни членови на аритметичка прогресија докажи дека $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y, \operatorname{tg} z$ исто така се три последователни членови на аритметичка прогресија. Притоа претпостави дека $x, y, z \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

6. Ако бесконечната аритметичка низа природни броеви содржи еден член кој е куб на природен број, докажи дека таа содржи бесконечно многу такви членови.
Наведи пример на бесконечна аритметичка низа природни броеви кај која ниту еден член не е куб на природен број.

7. Дали може три броја земени во ист редослед истовремено да формираат и аритметичка и геометриска прогресија?

8. Четири броја формираат растечка аритметичка прогресија. Првите два од нив и четвртиот земени во тој редослед формираат геометриска прогресија. Определи ги сите членови на аритметичката прогресија, ако се знае дека нивната разлика е еднаква на количникот на геометриската прогресија.

9. Три броја чиј збир е 93 формираат геометриска прогресија. Овие броеви редоследно може да ги сметаме и како прв, втор и седми член на аритметичка прогресија. Кои се тие броеви?

10. Четири броеви формираат геометриска прогресија. Нивните логаритми со основа 3 формираат геометриска прогресија со разлика 1, а збир 18. Определи ги овие броеви.

11. Определи го x така што броевите $a+x, b+x, c+x$ формираат геометриска прогресија. Дискутирај за различни вредности на параметрите a,b,c .

12. Аглите на конвексниот многуаголник формираат аритметичка прогресија $x, \frac{4}{3}x, \frac{5}{3}x, \dots$. Колку најмногу страни може да има овој многуаголник?

13. Должините на страните на триаголникот ABC формираат аритметичка прогресија. Докажи дека вториот по големина агол е помал или еднаков на 60° .

14. Членовите на некоја растечка геометриска прогресијасе природни броеви. Докажи дека логаритмите на овие броеи формираат растечка аритметичка прогресија,

15. Нека a и d се заемно прости природни броеви и нека аритметичката прогресија

$$a, a+d, \dots, a+nd, \dots$$

содржи некој степен на бројот q . Докажи дека таа содржи бесконечна геометриска прогресија чии членови се степени на бројот q .

16. Ако сите прости делители на бројот n , освен бројот n , формираат аритметичка прогресија (со најмалку три члена), докажи дека $n = p(2p-1)$, каде p и $2p-1$ се прости броеви.

17. Дадена е низата 1, 2, 4, 8, 16, 23, ... во која секој член почнувајќи од вториот е еднаков на збирот на претходниот член и збирот на неговите цифри, т.е.

$$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + S(a_{n-1}), \text{ за } n > 1,$$

каде $S(x)$ е збирот на цифрите на бројот x . Дали во оваа низа некој член е еднаков на 2010?

18. Со $F(k)$ да го означиме бројот на цифрите во декадниот запис на природниот број k , кои се различни од 1. Низата $\{a_n\}$ е дефинирана со

$$a_{n+1} = a_n + F(a_n), n = 1, 2, \dots$$

при што почетниот член a_1 е произволен природен број. Дали низата $\{a_n\}$ е константна почнувајќи од некој нејзин член?

19. Нека претпоставиме дека за природниот број n важи:
Броевите $1,1,2,2,\dots,n,n$ *може да се наредат во низа така што за секој* $k = 1,2,\dots,n$ *меѓу две појавувања на* k *се наоѓаат точно* k *членови на низата.*
Докажи дека 4 е делител на $n^2 + n$.

20. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_1 = 1,\ a_n = \frac{4n-2}{n} a_{n-1}$, за $n \geq 2$. Докажи дека сите членови на оваа низа се природни броеви.

21. За низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ важи
$$a_0 = 0,\ a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n + 1},\ n = 0,1,2,... .$$
Докаи дека сите членови на оваа низа се природни броеви.

22. За низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ важи
$$a_0 = 0,\ a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 + 1},\ n = 0,1,2,3,... .$$
Докажи дека сите членови на низата се природни броеви.

23. Определи ги сите низи $a_0, a_1, a_2, ...$ позитивни броеви за кои важи $a_0 = 1$ и
$$a_n - a_{n+1} = a_{n+2}, \text{ за секој } n \geq 0 .$$

24. Определи го општиот член на низата зададена со
$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n},\ n = 0,1,2,3,... .$$

25. Нека $x_1 \in \mathbb{R}$ и нека бесконечната низа $\{x_n\}$ реални броеви е определена со рекурзијата
$$x_{n+1} = \sqrt{3} - \frac{1}{x_n},\ n \in \mathbb{N} .$$
Определи го членот x_{1999}.

26. Дадена е строго растечка низа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ природни броеви такви што
$$a_1 = 1,\ a_2 = 2 \text{ и } a_m a_n = a_{mn},$$
ако m и n се заемно прости броеви. Докажи дека

а) $a_3 = 3$,

б) $a_n = n$ за секој природен број n.

27. Нека x_1 е произволен реален број и
$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n} x_n - 1,\ n \in \mathbb{N} .$$
Докажи дека почнувајќи од некој член низата $\{x_n\}$ монотоно опаѓа и е неограничена.

28. Низата $\{x_n\}$ е определена со
$$x_0 = \frac{15}{4},\ x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^2 + x_n + 1),\ n \in \mathbb{N}_0 .$$
Докажи дека оваа низа е неограничена.

29. За низата позитивни броеви $a_0, a_1, ..., a_{1998}$ важи

$$a_0 = 1,\ a_{1998} = 2 \text{ и } a_k^2 \le a_{k-1}a_{k+1},\ k \in \{1, 2, ..., 1997\}.$$

Докажи дека ниту еден член на оваа низа не е поголем од 2 и дека $a_{999} \le \sqrt{2}$.

30. Низата $\{x_n\}$ е определена со

$$\tfrac{1}{2} < x_0 < 1 \text{ и } x_{n+1} = x_n(2 - x_n), \text{ за } n \ge 0.$$

Докажи дека за секој $n \ge 0$ важи

$$1 - 2^{-2^n} < x_n < x_{n+1}^2 < 1.$$

31. Низата $\{x_n\}$ е определена со $x_1 = 1$, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека за $n > 1$ важи

$$n + \tfrac{1}{4} \le x_n^2 \le n + \tfrac{1}{4} + \tfrac{\ln(n-1)}{4}.$$

32. Низата реални броеви $\{a_n\}$ ги задоволува условите

$$a_0 = 0,\quad |a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}| \le 1,\ (k \in \mathbb{N}).$$

Докажи дека

а) $|\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_k}{k}| \le \frac{1}{2}$, за секој $k \in \mathbb{N}$.

б) Ако $a_n = 0$ за некој природен број n, тогаш $|a_k| < \frac{k(n-k)}{2}$ за секој $k = 1, 2, ..., n-1$.

33. Низата реални броеви $\{a_n\}$ ги задоволува условите

$$a_0 = 0,\quad |a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}| \le \tfrac{1}{k},\ (k \in \mathbb{N}).$$

Докажи дека

а) $|\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_k}{k}| \le \frac{1}{k+1}$, за секој $k \in \mathbb{N}$.

б) Ако $a_n = 0$ за некој природен број n, тогаш $|a_k| < k \ln \frac{n}{k}$ за секој $k = 1, 2, ..., n-1$.

34. Низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се определени со:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1},\ n > 1$$
$$b_1 = 1,\ b_2 = 4,\ b_{n+1} = 7b_n - b_{n-1},\quad n > 1.$$

Докажи дека $b_b = a_n^2$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

35. Дадена е низа реални броеви $\{a_n\}$ со конечно множество вредности. Ако за секој $k > 1$ поднизата $\{a_{kn}\}$ е периодична, дали тогаш и низата $\{a_n\}$ мора да е периодична?

36. Нека a и x_1 се реални броеви и

$$x_{n+1}=\sqrt{\tfrac{n}{n+1}}x_n+\tfrac{a}{2n+1}\text{, за } n\in\mathbb{N}.$$

Докажи дека низата x_n конвергира и определи ја нејзината граница.

37. Дадени се две низи $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такви што

$$a_{n+1}=p_1a_n+q_1b_n,$$
$$b_{n+1}=p_2a_n+q_2b_n,$$

каде p_1,p_2,q_1,q_2 се дадени броеви такви што

$$|p_1|+|q_1|<1,\quad |p_2|+|q_2|<1.$$

Докажи дека

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

38. Дадена е низата $x_1,x_2,...,x_n,...$ за која важи

$$x_1=\tfrac{\alpha}{2},$$
$$x_2=\tfrac{\alpha}{2}-\tfrac{x_1^2}{2},$$
$$x_3=\tfrac{\alpha}{2}-\tfrac{x_2^2}{2},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n=\tfrac{\alpha}{2}-\tfrac{x_{n-1}^2}{2},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

и $0<\alpha<1$. Докажи дека оваа низа конвергира и дека нејзината граница е $-1+\sqrt{1+\alpha}$.

39. Нека

$$u\ \ =1+\tfrac{3n}{1+2n}i$$

е општ член на дадена низа комплексни броеви. Пресметај

$$\lim\left|\tfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|.$$

14. ПОЛИНОМИ

1. Определи го збирот на коефициентите на полиномот

$$P(x)=(x^{27}-5x^2+10x-5)^4(2x-3)^3(3x^2+4)^2+2066.$$

2. Нека $P(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. Определи го остатокот од делењето на $P(x^7)$ со $P(x)$.

3. Определи ги реалните броеви a и b така што полиномот
$$P(x)=x^3+ax^2+bx-5$$
ќе биде делив со полиномот $Q(x)=x^2+x+1$.

4. Дадени се полинмите
$$P(x)=x^3+x^2-9x-9,\quad Q(x)=(x-2)^2-(x-4)^2.$$
а) Упрости ја дропката $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ и определи ги нулите на функцијата $f(x)$.
б) Докажи дека ако x е непарен цел број, тогаш $f(x)$ е цел број.

5. Определи го реалниот број k така што полиномот $x^3+y^3+z^3+kxyz$ ќе биде делив со полиномот $x+y+z$.

6. Докажи дека за секој парен природен број k постои природен број n таков што кај остатокот при делењето на полиномот $(x+1)^n-1$ со полиномот $x^k+x^{k-1}+...+x^2+x+1$ сите коефициенти се парни броеви.

7. а) Низата реални броеви $\{a_n\}$ е определена со
$$a_1=1,\ a_2=p,\ a_{n+1}=3a_n-a_{n-1},\ (n>1).$$
Докажи дека за $n>1$ полиномот $x^n-a_nx+a_{n-1}$ е делив со полиномот x^2-px+1.
б) Користејќи го резултатот под а) реши ја равенката $x^4-56x+15=0$.

8. Определи ги сите полиноми $P(x)$ за кои важи
$$xP(x-1)=(x-26)P(x).$$

9. Определи ги сите полиноми $P(x)$ за кои важи
$$P(x^2-2x)=P^2(x-2).$$

10. Нека $P(x)$ е полином од $n-$ти степен и
$$P(m)=\frac{m}{m+1},\text{ за } m=0,1,2,...,n.$$
Определи го $P(n+1)$.

11. Квадратен полином p е таков што равенката $p(x)=x$ нема реални решенија. Докажи дека и равенката $p(p(x))=x$ нема реални решенија.

12. Нека P е полином со целобројни коефициенти. Докажи дека множествата целоброни решенија на равенките

$$P(x)=x \text{ и } P(P(P(x)))=x$$

се еднакви.

13. Ако сите решенија на равенката
$$x^n+nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+a_3x^{n-3}+....+a_n=0, \ (n>2)$$
се цели броеви докажи дека
$$a_k=\binom{n}{k}, k=3,4,...,n .$$

14. Даден е полином со целобројни коефициенти
$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n .$$
Ако полиномот $P(x)$ за четири целобројни вrености на x прима вредност 7, тогаш тој не може за ниту една целобројна вредност на x да има вредност 14. Докажи!

15. Докажи дека условот
$$acf+2bde-cd^2-ae^2-fb^2=0$$
е потребен и доволен за да изразот
$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$$
може да се разложи во производ на два линеарни фактори по x и y .

16. Определи го бројот на коефициентите различни од нула во развиениот облик на полиномот:
$$(1+x^2+x^5)^{20} .$$

17. Докажи дека изразот $x^{200}y^{200}+1$ не може да се претстави како производ на полиноми само по x и само по y .

18. На почетокот на таблата се запишани полиномите
$$P_1(x)=x^2+x-2 , \ P_2(x)=x^3-x^2-x+2 \text{ и } P_1(x)=x^4+x^3-x^2-x-2 .$$
Секоја минута се бришат некои два полинома $P(x)$ и $Q(x)$ и на нивно место се запишуваат полиномите $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$. Дали е можно по извесно време на таблата да се најде полином во кој се појавуваат само парни степени на x ?

19. Дадена е низата полиноми $P_0, P_1, P_2,...$ таква што
$$P_0(x)=1, \ P_1(x)=x,$$
$$P_{n+1}(x)=xP_n(x)-P_{n-1}(x), \ n\geq 1.$$
Докажи дека
$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}=P_n(2\cos\varphi), \ \varphi\neq k\pi, k\in\mathbb{Z} .$$

15. РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

1. Испитај ја функцијата
$$y=|x-1|+|x+1|+1$$
и нацртај го нејзиниот график.

1. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е определена со
$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2}.$$
Пресметај ја вредноста на изразот $f(1)+f(2)+...+f(2018)$.

2. Ако пресликувањето $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ е биекција таква што
$$f(1)<2f(2)<...<nf(n),$$
докажи дека f е идентитет.

3. Пресликувањата $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ се зададени со:
$$F(x)=x^4-2x^3-4x^2+Ax+B \text{ и } f(x)=x^2+px+q.$$
Определи ги коснтантите A и B ако важи
$$F(x)=f(f(x)), x\in\mathbb{R},$$
а потоа за најдените вредности на A и B реши ја неравенката
$$F(x)<0.$$

4. Определи го интервалот во кој припаѓа параметарот a така што функцијата
$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+4x+a}$$
може да ги прима сите реални вредности.

5. Нека f е реална функција определена за сите реални вредности на аргументот и нека за секои вредности важи
$$f(x+a)=\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2},$$
ааде a е реален позитивен параметар. Докажи дека f е периодична функција, т.е. дека постои позитивен реален број b таков што $f(x+b)=f(x)$ за секој $x\in\mathbb{R}$ и определи го b.

6. Нека f е непрекината функција која го пресликува $[a,b]$ на $[a,b]$. Докажи дека постои $c\in[a,b]$ таков што $f(c)=c$.

7. Дадена е функцијата $y=x^a\ln x$. Определи ја константата a така што графикот на оваа функција има превојна точка за $x=1$. Испитај го и скицирај го графикот на оваа функција.

8. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ такви што

$$f(mn)=f(m)f(n),$$
$$f(|m-n|)=|f(m)-f(n)|,$$

за секои $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

9. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои ја задоволуваат равенката

$$x^2 f(x)+f(1-x)=2x-x^4,$$

за секој $x\in\mathbb{R}$.

10. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x^2)+f(xy)=f(f(x+y)).$$

11. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x+y)f(y)=f(x+xf(y)).$$

12. Во кружен исечок со радиус r и централен агол γ впиши правоаголник со максимална плоштина. Определи го аголот под кој од центарот на кружницата се гледа страната на правоаголникот која е тетива на кружниот лак.

13. Од сите рамнокраки трапези чиј агол при основата е 60° и чија плоштина е еднаква на $6\sqrt{3}$ определи го оној кој има најмал периметар.

II ВТОР ДЕЛ: НАПРЕДНО НИВО

1. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Ако за целите броеви a,b,c,d важи
$$bc+ad=ac+2bd=1,$$
докажи дека тие го задоволуваат равенството
$$a^2+b^2=2b^2+2d^2.$$

2. Докажи дека збирот
$$S_n=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}\cdot 2005+\binom{n}{5}\cdot 2005^2+...=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}\cdot 2005^k$$
е делив со 2^{n-1}, за секој природен број n.

3. Докажи дека за било кои цели броеви $a_k, 1\le k\le 5$ постојат $\lambda_k\in\{-1,0,1\}$, $1\le k\le 5$ кои не се сите еднакви на нула и такви што
$$11\,|\,\lambda_1a_1^2+\lambda_2a_2^2+\lambda_3a_3^2+\lambda_4a_4^2+\lambda_5a_5^2.$$

4. Определи ги сите прости броеви p такви што $1+2^p p$ е точен квадрат.

5. Определи ги сите природни броеви за кои постојат n последователни природни броеви чиј збир е точен квадрат.

6. Во множеството природни броеви реши ја равебката
$$x^y-y^x=1.$$

7. Во множеството цели броеви реши ја равебката
$$x^5+y^5+z^5+t^5=93.$$

8. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се произволни n различни цели броеви и $(b_1,b_2,...,b_n)$ и $(c_1,c_2,...,c_n)$ се нивни пермутации различни од идентичната. Докажи дека
$$NZD(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,...,|a_n-b_n|,|a_1-c_1|,|a_2-c_2|,...,|a_n-c_n|)\ge 2.$$

9. Во множеството природни броеви реши ја равнбката:

а) $(5+11\sqrt{2})^p=(11+5\sqrt{2})^q$,

б) $1005^x+2011^y=1006^z$.

10. Докажи декамеѓу секои три различ и цели броеви постојат два, да кажеме a и b, такви што $a^5b^3-a^3b^5$ е делив со 10.

11. За секој природен број n го разгледуваме бројот $a_n = 4^{6^n} + 1943$. Докажи дека a_n е делив со 2013 за секој $n \geq 1$ и определи ги сите вредности n за кои $a_n - 207$ е куб на некој природен број.

12. Нека p и n се природни броеви, при што p е прост и $p < n$. Ако $p \mid n+1$ и $\text{NZD}([\frac{n}{p}], (p-1)!) = 1$, докажи дека $p[\frac{n}{p}]^2$ е делител на $\binom{n}{p} - [\frac{n}{p}]$.

13. Докажи дека равеката
$$2^x + 21^x = y^3$$
нема решенија во множеството природни броеви.

14. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равебката
$$2^x + 21^y = z^2.$$

15. Даден е прост број p. Природните броеви m и n во систем со основа p се запишуваат како $n = a_0 + a_1 p + ... + a_k p^k$ и $n = b_0 + b_1 p + ... + b_k p^k$. Докажи дека
$$\binom{n}{m} = \prod_{i=0}^{n} \binom{a_i}{b_i} \pmod{p}.$$

16. Нека m и n ($m \geq 2$) се природни броеви. Докажи дека $n \mid \varphi(m^n - 1)$, каде φ е Ојлеровата функција.

17. Ако n е природен број, докажи дека $(n+1)(n+2)...(n+10)$ не е точен квадрат.

18. Нека a, b, c се цели броеви такви што
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3,$$
докажи дека abc е точен куб на цел број.

19. Со $\sigma(S)$ и $\pi(S)$ да го означиме соодветно збирот и производот на елементите на непразно множество броеви S. Докажи дека:

а) $\sum \frac{1}{\pi(S)} = n$ и

б) $\sum \frac{\sigma(S)}{\pi(S)} = (n^2 + 2n) - (n+1)(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n})$

каде се собира по сите непразни подмножества S на множеството $\{1, 2, ..., n\}$.

20. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот 2^{n+1} се јавува во точно n различни Питагорови тројки.

21. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n за кои равенката
$$(x+y+z)^3 = n^2xyz$$
има бесконечно многу решенија (x,y,z) во множеството природни броеви.

22. Нека p и q се разлини прости броеви. Во множеството цели броеви реши го системот равенки
$$\begin{cases} \frac{z+p}{x}+\frac{z-p}{y}=q, \\ \frac{z+p}{y}-\frac{z-p}{x}=q. \end{cases}$$

23. а) Нека p и q се различни прости броеви такви што $p+q^2 \mid q+p^2$. Докажи дека $p+q^2 \mid pq-1$.
б) Определи ги сите прости броеви p такви што $p+121 \mid p^2+11$.

24. Определи ги сите парови природни броеви m и n за кои важи
$$m^2-n \mid m+n^2 \text{ и } n^2-m \mid n+m^2.$$

25. Простите броеви p,q,r и природниот број n се такви што броевите
$$\frac{p+n}{qr}, \frac{q+n}{rp}, \frac{r+n}{pq}$$
се природни. Докажи дека $p=q=r$.

26. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x(x+2)=y^2(y^2+1).$$

27. Докажи дека равенката
$$4x^3-3x+1=2y^2$$
има најмалку 31 решение такви што x и y се природни броеви и $x \le 2005$.

28. Определи го најголемиот природен број N за кој може да се изберат N различни броеви од множеството $\{1,2,...,100\}$ такви што ниту збирот ниту производот на било кои два различни избрани броја не е делив со 100.

29. Природните броеви x и y, поголеми од 1, се такви што
$$\mathrm{NZD}(x+2,y+2)-\mathrm{NZD}(x+1,y+1)=\mathrm{NZD}(x+1,y+1)-\mathrm{NZD}(x,y).$$
Докажи дека еден од броевите е делив со другиот број.

30. Природниот број k е таков што $p=8k+5$ е прост број. Целите броеви $r_1,r_2,...,r_{2k+1}$ се избрани така што броевите $0,r_1^4,r_2^4,...,r_{2k+1}^4$ даваат меѓусебно различни остатоци при делење со p. Докажи дека производот

$$\prod_{1\le i<j\le 2k+1}(r_i^4+r_j^4)$$

е конгруентен со $(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$ по модул p.

31. Нека $1=d_0<d_1<...<d_m=4k$ се сите позитивни делители на бројот $4k$, каде k е природен број. Докажи дека постои $i\in\{1,2,...,m\}$ таков што $d_i-d_{i-1}=2$.

32. Нека $a_1,a_2,...,a_{100}$ е пермутација на броевите $1,2,...,100$. Да означиме

$$S_1=a_1,\, S_2=a_1+a_2,\, ...,\, S_{100}=a_1+a_2+...+a_{100}.$$

Колку најмногу потполни квадрати може да има меѓу броевите $S_1,S_2,...,S_{100}$?

33. Определи го најголемиот природен број n таков што за секој природен број $k\le\frac{n}{2}$ постојат два позитивни делители на бројот n со разлика k.

34. Докажи дека постојат бесконечно многу парови природни броеви (m,n) за кои бројот $(m!)^n+(n!)^m+1$ еделив со $m+n$.

35. Заприродниот број q велиме дека е погоден именител за реалниот број α ако важи $|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{10q}$ за некој цел број p.

Докажи дека ако два ирационални броја α и β имаат еднакви множества погодни именители, тогаш еден од броевите $\alpha+\beta$ или $\alpha-\beta$ е цел.

36. За природниот број k со $C(k)$ да го означиме збирот на различните прости делители на бројот k. На пример, $C(1)=0, C(2)=2,$ и $C(45)=8$. Определи ги сите природни броеви n за кои важи $C(2^n+1)=C(n)$.

37. Природниот број n е таков што бројот 2^a3^b+1 не е делив со n за никои природни броеви a и b. Докажи дека ниту бројот 2^c+3^d не е делив со n за никои природни броеви c и d.

38. Нека n и d се природни броеви и $d\,|\,n$. Докажи дека бројот на членовите на низата $1,2,...,n$ чиј најголем заеднички делител со бројот n е еднаков на d, изнесува $\varphi(\frac{n}{d})$.

2. РАВЕНКИ, НИЗИ И ФУНКЦИИ

1. Определи ги сите цели броеви x и реални броеви a такви што важи

$$\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x-a}+a\,.$$

2. Нека a,b,c се реални броеви такви што $|a|\geq 2$ и $a^2+b^2+c^2=abc+4$. Докажи дека постојат реални броеви x и y такви ѓто

$$a=x+\tfrac{1}{x},\ \ b=y+\tfrac{1}{y},\ \ c=xy+\tfrac{1}{xy}\ .$$

3. Реалните броеви x,y,z ги задоволуваат равенствата

$$x+y+z=3, \quad xy+yz+zx=a\,,$$

каде a ее реален параметар.Определи ја вредноста на a за која разликата меѓу максималната и минималната вредност на променливата x е еднаква на 8.

4. Нека a,b,c се страни на триаголник. Докажи дека најмалку една од равенките

$$x^2-2bx+2ac=0, \quad x^2-2cx+2ab=0, \quad x^2-2ax+2bc=0$$

нема реални решенија.

5. Во множествотореални броеви реши го системот равебки

$$\begin{cases} 8(x^3+y^3+z^3)=73 \\ 2(x^2+y^2+z^2)=3(xy+yz+zx) \\ xyz=1. \end{cases}$$

6. Во множеството реални броеви реши го системот равеки

$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(z-1)=xyz-1, \\ (x-2)(y-2)(z-2)=xyz-2. \end{cases}$$

7. Низата на Фибоначи $\{f_n\}$ е определена со $f_0=0,\ f_1=1,\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, за $n\geq 0$. Нека $t_n=\binom{n+1}{2}$, за $n\geq 1$. Докажи дека

а) $f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2=f_n f_{n+1}$, за $n\geq 1$,

б) $\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{t_k}{f_k})^2\geq \frac{t_{n+1}^2}{9 f_n f_{n+1}}$, за $n\geq 1$.

8. Докажи дека бесконечна аритметичка прогресија од видот $a,a+d,a+2d,\ldots$ каде a и d се природни броеви, содржи бесконечна геометриска прогресија од видот $b,bq,bq^2,\ldots$, каде b и q се природни броеви и $q>1$.

9. Низата цели броеви $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определена со
$$u_0=1,\ u_{2n}=u_n,\ u_{2n+1}1-u_n\text{, за } n\in\mathbb{N}_0\,.$$
а) пресметај u_{1998},

б) ако p е природен број и $m=(2^p-1)^2$, определи го u_m.

10. Првите k членови на низата $a_1,a_2,...,a_k$ на низата $\{a_n\}$ се различни природни броеви, а за n, бројот a_n е најмалиот природен број кој не може да се претстави како збир на неколку (барем еден) од броевите $a_1,a_2,...,a_{n-1}$. Докажи дека за доволно големи броеви n важи $a_n=2a_{n-1}$.

11. Дали постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што
$$P(1+\sqrt{3})=2+\sqrt{3}\text{ и } P(3+\sqrt{5})=3+\sqrt{5}\,?$$

12. Даден е полиномот $P(x)=x^4+3x^3+3x+p$, каде p е реален параметар.

а) Определи ги вредностите на p за кои $P(x)$ има комплексен корен z таков што $|z|=1$ и $\operatorname{Re} z=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

б) За надената вредност на p определи ги останатите корени на $P(x)$.

в) Докажи дека за ниту еден $n\in\mathbb{N}$ не важи $z^n=1$.

13. Определи ги реалните корени x_1,x_2 на полиномот $P(x)=x^5-55x+21$ ако се знае дека $x_1x_2=1$

14. Нека n е природен број и нека $P(t)=1+t+t^2+...+t^{2n}$. Ако $x\in\mathbb{R}$ е таков што $P(x)$ и $P(x^2)$ се рационални броеви, докажи дека x е рационален број.

15. Нулите на полиномот $P(x)=x^3-2x^2+bx+c$ припаѓаат на интервалот $(0,1)$. Докажи дека
$$8b+9c\le 8\,.$$
Кога важи знак за равенство?

16. Даден е квадратен трином $Q(x)$ кој има две реални и различни нули. Докажи дека постои неконстантен полином $P(x)$ со водечки коефициент 1 таков што сите коефициенти на полиномот $Q(P(x))$, освен можда водечкиот, по апсолутна вредност се помали од 0,001.

17. Нека $r(x)$ е полином со непарен степен со реални коефициени. Докажи дека постојат само конечно мноу парови полиноми $p(x)$ и $q(x)$ со реални коефициенти такви што важи

$$(p(x))^3 = q(x^2) = r(x) .$$

18. Нека p е прост број, а $f(x)$, $\deg f = d$ е полином со целобројни коефициенти. Да претпоставиме дека броевите $f(1), f(2),..., f(p)$ даваат точно k различни остатоци при делење со p, каде $1 < k < p$. Докажи дека

$$\frac{p-1}{d} \le k-1 \le (p-1)(1-\frac{1}{d}) .$$

19. На полином од трет степен е дозволено неограничен број пати да се извршуваат следниве операции:
   1) Да се сврти редоследот на неговвите коефициенти, вклучувајќи ги и нулите (на пример, така од полиномот $x^3 - 2x^2 - 3$ се добива полиномот $-3x^3 - 2x + 1$).
   2) Полиномот $P(x)$ да се замени со полиномот $P(x+1)$.

   Дали може со помош на дозволените операции по конечен број чекори од полиномот $x^3 - 2$ да се добие полиномот $x^3 - 3x^2 + 3x - 3$.

20. Функцијата $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ се такви што $f(2) = 0,\ f(3 >,\ f(6042) = 2014$ и за секои $m, n \in \mathbb{N}$ важи $f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0,1\}$. Определи го $f(2014)$.

21. Определи ги сите функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ кои ги задоволуваат условите:
   а) $f(n) f(-n) = f(n^2)$, за секој $n \in \mathbb{Z}$,
   б) $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$, за секои $m, n \in \mathbb{Z}$.

22. Нека $n > 1$ е природен број. Дадена е функција $f : I \to \mathbb{Z}$ каде I е множеството цели броеви заемно прости со n. Природниот број k го нарекуваме периода на фнкцијата f ако важи $f(a) = f(b)$ за секои $a, b \in I$ такви што $a \equiv b (\operatorname{mod} k)$. Ако n е приода на функцијата f докажи дека најмалата периода на оваа функција е делител на сите нејзини периоди.

23. Определи ги сите функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такви што
$$f(4x+3y) = f(3x+y) + f(x+2y) ,$$
за секои $x, y \in \mathbb{Z}$.

24. Даден е природен број $n \ge 2$. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се произволни различни природни броеви и нека $S_i = \sum_{k=1}^{n} x_k - x_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$. Да означиме
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\mathrm{NZD}(x_1, S_1) + \mathrm{NZD}(x_2, S_2) + ... \mathrm{NZD}(x_n, S_n)}{x_1 + x_2 + ... + x_n} .$$
Определи ја максималната вредност на f по сите можни $n-$торки броеви $(x_1, x_2, ..., x_n)$

25. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to[0,+\infty)$ такви што $f(1000)=10$ и

$$f(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^2(k)+f(k)f(k+1)+f^2(k+1)},$$

за секој природен број n. ($f^2(k)$ означува $(f(k))^2$.)

26. Нека $m,n\in\mathbb{Z}, m\neq n, m\neq 0, n\neq 0$ се дадени броеви. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(mx+ny)=mf(x)+nf(y)\text{, за секои } x,y\in\mathbb{Z}.$$

27. Нека $A\subseteq\mathbb{R}$. Функцијата $f:A\to\mathbb{R}$ го задоволува условот

$$f(x+y)=f(x)f(y)-f(xy)+1\text{, за секој } x,y\in A.$$

а) Ако $\mathbb{N}\subseteq A$ и $c=f(1)-1$, докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$f(n)=\begin{cases}\frac{c^{n+1}-1}{c-1}, & c\neq 1\\ n+1, & c=1.\end{cases}$$

б) Определи ги сите вакви функции ако $A=\mathbb{Z}$.
в) Ако $A=\mathbb{Q}$, определи ги сите функции за кои $f(1997)\neq f(1998)$.

28. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{Q}^+$ важи

$$y=\tfrac{1}{2}(f(x+\tfrac{y}{x})-(f(x)+\tfrac{f(y)}{f(x)})).$$

29. Определи ги сите константи $k>0$ за кои постои строго опаѓачка функција $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ таква што важи

$$g(x)\geq kg(x+g(x))\text{, за секој } x\in(0,+\infty).$$

30. Дали постои функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ која ги задоволува условите:
а) за секој $y\in\mathbb{R}$ постои $x\in\mathbb{R}$ таков што $f(x)=y$, и
б) $f(f(x))=(x-1)f(x)+2$ за секој $x\in\mathbb{R}$?

31. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи

$$(x+y^2)f(yf(x))=xyf(y^2+f(x)).$$

32. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи

$$f(x-f(y))=f(x)+a[y],$$

a е даден реален број, а со $[y]$ е означен целиот дел од бројот y.

33. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што важи

$$f(x^3+y^3+xy)=x^2f(x)+y^2f(y)+f(xy),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

34. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои го задоволуваат условот

$$f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4f(x)y \text{, за секои } x,y\in\mathbb{R}.$$

35. Нека $a_1,a_2,...a_n$ се реални броеви и

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{\cos(a_2+x)}{2}+\frac{\cos(a_3+x)}{2^2}+...+\frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}.$$

Ако за реалните броеви x_1 и x_2 важи $f(x_1)=f(x_2)=0$, докажи дека $x_1-x_2=m\pi$, за некој цел број m.

36. Нека $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ е инјекција таква што $f(0)+f(1)=1$. Докажи дека постојат броеви $x_1,x_2\in[0,1], x_1\neq x_2$ такви што $2f(x_1)<f(x_2)+\frac{1}{2}$.

37. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(xy) \text{, за секои } x,y\in\mathbb{R}.$$

38. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои за секои x и y важи

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y.$$

3. ГЕОМЕТРИЈА

1. Во триаголникот ABC впишаната кружница *so* центар O ги допира страните AB,BC,CA во точките C_1,A_1,B_1, соодветно. Отсечките AO,BO,CO ја сечат впишаната кружница во точките A_2,B_2,C_2, соодветно. Докажи дека плоштината на триаголникот $A_2B_2C_2$ е два пати помала од плоштината на шестаголникот $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$.

2. Нека D е подножјето на висината од темето B во триаголникот ABC. Кружницата над дијаметар BD по втор пат ги сече страните AB и BC во точките K и L, соодветно. Тангентите на оваа кружница во точките K и L се сечат во точката M. Докажи дека BM ја полови страната AC.

3. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC,CA,AB во точките X,Y,Z, соодветно. Нека AA',BB',CC' се висините на триаголникот ABC и M,N,P се центрите на впишанитекружници во триаголниците $AB'C',BC'A',CA'B'$, соодветно.

а) Докажи дека точките M,N,P се ортоцентри на триаголниците AYZ, BZX,CXY , соодветно.
б) Докажи дека заедничките надворешни тангенти на овие вппишани кружници различни од страните на триаголникот ABC се сечат во ортоцентарот на триаголникот XYZ .

4. Нека ABC е триаголник во кој $\measuredangle ABC = 120^\circ$ и A',B',C' се последователно пресеците на симетралите на аглите во темињата A,B,C со спротивните страни. Точката F е подножје на нормалата повлечена од B' на $A'C'$. Нека R,I,S се центрите на впипаните кружници во триаголниците $C'B'F$, $C'B'A',A'B'F$, соодветно. Ако правите $B'S$ и $A'C'$ се сечат во Q , докажи дека точките R,I,S,Q се конциклични.

5. Триаголникот ABC е впишан во кружница k. Симетралите на $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ACB$ по втор пат ја сечат k во E и F, соодветно. Ако правата EF ја допира вписаната кружница k^* на триаголникот ABC, определи го $\measuredangle BAC$.

6. Во рамнокрак триаголник ABC со основа AB, точките O и S се неговите центри на опишаната и впишаната кружница, соодветно.Нека M е точка на страната BC . Докажи дека $SM \parallel AC$ ако и само ако $OM \perp BS$.

7. Симетралите на аглите во темињата A,B,C на триаголникот ABC ги сечат спротивните страни во точките A_1,B_1,C_1, соодветно. Нека M е произволна точка на една од отсечките A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, а M_1,M_2,M_3 се нејзините нормални прокции на правите BC,CA,AB. Докажи дека една од отсечките MM_1,MM_2,MM_3 е еднаква на збирот на другите две.

8. Во триаголник ABC симетралите на аглите во темињата A и B ги сечат спротивните страни во точките D и E, соодветно. Точките F и G се подножја на нормалите повлечени од точката C на правите AD и BE. Докажи дека правите FG и AB се паралелни.

9. Нека R и r се радиусите на опишаната и впишаната кружница за триаголникот ABC. Нека S е точка во внатрешноста на триаголникот ABC и нека правите AS,BS,CS ги сечат спротивните страни на триаголникот во точките X,Y,Z , соодветно. Докажи дека важи
$$\frac{\overline{BX}\cdot\overline{CX}}{\overline{AX}^2}+\frac{\overline{CY}\cdot\overline{AY}}{\overline{BY}^2}+\frac{\overline{AZ}\cdot\overline{BZ}}{\overline{CZ}^2}=\frac{R}{r}-1$$
ако и само ако S е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC .

10. Даден е триаголник ABC во кој $\measuredangle ABC = 3\measuredangle CAB$. Точките M и N се избрани на страната AC така што N е меѓу A и M и важи $\measuredangle CBM = \measuredangle MBN = \measuredangle NBA$. Нека L е произволна внатрешна точка на отсечката BN , а K

точка на отсечката BM таква што $LK \parallel AC$. Докажи дека правите $AL, NK,$ BC се сечат во една точка.

11. Даден е триаголник ABC. Ра разгледуваме правата која ги поврзува пресециите на симетралите на $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle ABC$ со спротивните страни. Потоа низ пресекот на оваа права со симетралата на $\measuredangle BAC$ повлекуваме права паралелна на правата BC. Нека оваа права ги сече правите AB и AC во точките M и N, соодветно. Докажи дека
$$2\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{CN}.$$

12. На страните AB и BC на триаголникот ABC надвор од него се конструирани квадратите ABB_1A_1 и BCC_1B_2. ДОкажи дека правите AC_1 и CA_1 се сечат на висината повлечена од темето B.

13. Нека AD и BE се висините на триаголникот ABC, а L е подножјето на нормалата повлечена од точката B на правата DE. Ако
$$\overline{LB}^2 = \overline{LD} \cdot \overline{LE},$$
докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

14. Точката H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC. Докажи дека средините на отсечките AB и CH и пресекот на симетралите на $\measuredangle CAH$ и $\measuredangle CBH$ се три колинеарни точки.

15. Даден е триаголник ABC. Определи го множеството центри на сите правоаголници впишани во триаголникот ABC така што едната страна на правоаголникот лежи на страната AB.

16. Остроаголниот триаголник ABC е впишан во кружница со центар O. Нека P е точка на пократкиот лак AB на опишаната кружница. Нормалата од точката P на правата BO ја сече страната AB во точката S, а страната BC во точката T. Слично, нормалата од точката P на правата AO ја сече страната AB во точката Q, а страната AC во точката R.

    а) Докажи дека триаголникот PQS е рамнокрак.

    б) Докажи дека $\overline{PQ}^2 = \overline{QR} \cdot \overline{ST}$.

17. Нека AD е висината на триаголникот ABC, а R е радиусот на опишаната кружница околу него. Со E и F да ги означиме подножјата на нормалите повлечени од точката D на правите AB и AC. Ако $\overline{AD} = R\sqrt{2}$, докажи дека правата EF минува низ центарот на опишаната кружница на триаголникот ABC.

18. Даден е триаголник ABC во кој $\measuredangle ACB = 90^\circ$ и $\overline{AC} = 2\overline{BC}$. Права паралелна на страната AC ги сече правите AB и BC во точките M и N, соодветно,

така што $\overline{CN} = 2\overline{BN}$. Правите CM и AN се сечат во точката O. На отсечката ON е избрана точка K така што $\overline{OM} + \overline{OK} = \overline{KN}$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ и нормалата од точката K на правата AN се сечат во точката T. Пресметај го $\measuredangle MTB$.

19. Во внатрешноста на триаголникот ABC е дадена точка M. Правата BM ја сече страната AC во точката N. Точката K е симетрична на точката M во однос на правата AC. Правата BK ја сече страната AC во точката P. Ако $\measuredangle AMP = \measuredangle CMN$, докажи дека $\measuredangle ABP = \measuredangle CBN$.

20. Разнокрак остроаголен триаголник ABC е впишан во кружница ω. Нека H е ортоцентар на триаголникот ABC, а M е средината на страната AB. На лакот AB на кружницата ω кој не ја содржи точката C се дадени точки P и Q такви што $\measuredangle ACP = \measuredangle BCQ < \measuredangle ACQ$. Нека R и S се подножјата на нормалите од точката H на правите CQ и CP, соодветно. Докажи дека точките P, Q, R, S припаѓаат на кружница со центар M.

21. На страните AB, BC, CA на триаголникот ABC редоследно се земени точки N, K, L такви што $\overline{AL} = \overline{BK}$ и CN е симетрака на аголот кај темето C. Отсечките AK и BL се сечат во точката P. Со I и J да ги означиме центрите на впишаните кружници на триаголниците APL и BPK. Нека правите CN и IJ се сечат во точката Q. Докажи дека $\overline{IP} = \overline{JQ}$.

22. Продолженивето на тежишната линија CM на триаголникот ABC ја сече опишаната кружница ω околу триаголникот ABC во точката N. Точките P и Q на полуправите CA и CB, соодветно, се такви што $PM \| BN$ и $QM \| AN$. Точките X и Y на отсечките PM и QM, соодветно, се такви што PY и QX се тангенти на кружницата ω. Отсечките PY и QX се сечат во точката Z. Докажи дека четириаголникот $MXZY$ е тетивен.

23. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB. На страната AC е земена точка D. Кружницата S_1 со центар O_1 и радиус R ги допира отсечката AD и продолженијата на отсечките BA и BD преку точките A и D, соодветно. Кружницата S_2 со центар O_2 и радиус $2R$ ги допира отсечката DC и продолженијата на отсечките BD и BC преку точките D и C, соодветно. Тангентата на опишаната кружница на триаголникот BO_1O_2 во точката O_2 ја сече правата BA во точката F. Докажи дека $\overline{O_1F} = \overline{O_1O_2}$.

24. Точката I е центар на впишаната кружница во разностраниот триаголник ABC. Симетралата на аголот во темето C ја сече страната AB во точката N и по втор пат ја сече опишаната кружница околу триаголник ABC во точката M. Правата l е тангента на впишаната кружница на триаголникот ABC паралелна со AB и различна од неа. Точката R на правата l е таква

што $CI \perp IR$. Опишаната кружница околу триаголникот MNR по втор пат ја сече правата IR во точката S. Докажи дека $\overline{AS} = \overline{BS}$.

25. Вписаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC и AC во точките D и E, соодветно. Нека P е точка на пократкиот лак DE на вписаната кружница таква што $\measuredangle APE = \measuredangle DPB$. Отсечките AP и BP ја сечат отсечката DE во точките K и L, соодветно. Докажи дека $2\overline{KL} = \overline{DE}$.

26. Даден е разностран триаголник ABC со центри I и O на вписаната и опишаната кружница. Правата s минува низ I и е нормална на IO. Правата l, симетрична на правата BC во однос на s, ги сече отсечките AB и AC во точките K и L, соодветно (различни од A). Докажи дека центарот на опишаната кружница околу триаголникот AKL лежи на правата IO.

27. На страните BC, CA, AB на триаголникот ABC се дадени точки M, N, K, соодветно, различни од темињата на триаголникот. Триаголникот MNK го нарекуваме убав ако $\measuredangle BAC = \measuredangle KMN$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle KNM$. Ако во триаголникот ABC постојат два убави триаголници со заедничко теме, докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.

28. Различните точки $A_1, A_2, ..., A_n$ во рамнината $(n \geq 3)$ се такви што триаголникот $A_i A_j A_k$ е тапоаголен за секои различни $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$. Докажи дека во рамнината постои точка A_{n+1} таква што триаголникот $A_i A_j A_{n+1}$ е тапоаголен за секои различни $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

29. Од точка A надвор од кружницата k со центар O се конструирани тангенти AS и AT на k, каде $S, T \in k$. На кружницата k е избрана точка M, различна од S и T. Правата MA ја сече нормалата од S на MO во точка P. Докажи дека точката симетрична на S во однос на P припаѓа на правата MT.

30. Кружниците k и k' се сечат во точките B и C, при што BC е дијаметар на k. Тангентата на k во точката C по втор пат ја сече k' во точката A. Пресечната точка на правата AB и кружницата k, различна од B, да ја означиме со E, а пресечната точка на правата CE и кружницата k', различна од C, да ја означиме со F. Произволна права низ E ја сече отсечката AF во точката H и кружницата k по втор пат во точката G. Ако правите BG и AC се сечат во точката D, докажи дека $CH \parallel DF$.

31. Кружница со радиус r допира права p во точката A. Нека AB е дијаметар на кружницата и C е произволна точка на кружницата различна од A и B. Со D да го означиме подножјето на нормалата од C на правата AB. Нека E е точка на продолжението на отсечката CD по точката D таква што

$\overline{ED} = \overline{BC}$. Тангентите на кружницата повлечени од точката E ја сечат правата p во точките K и N. Докажи дека должината на отсечката KN не зависи од изборот на точката C.

32. На кружница се дадени точки A, B, C кои ја делат кружницата во однос $3:5:7$. Определи ги аглите ABC.

33. Во рамнината се дадени две кружници со радиуси r и r', една надвор од друга. Конструиран се двете надворешни и една внатрешна заедничка тангента на овие кружници.Внатрешната тангента ги сече надворешните тангенти во точките A и B и ја допира едната од дадените кружници во точката C. ДОкажи дека $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = rr'$.

34. Точката S е избрана на права која го содржи дијаметарот PQ на кружницата $k(S,r)$, надвор од кружницата. Тамгентата од точката A на кружницата k ја допира кружницата во точка T. Нека p и q се редоследно тангентите на k во точките P и Q, и нека $PT \cap q = \{N\}$ и $QT \cap p = \{M\}$. Докажи дека точките A, M, N се колинеарни.

35. Нека AB и FD се тетиви на кружница кои не се сечат, а P е точка на лакот AB кој не ја содржи тетивата FD. Правите PF и PD ја сечат тетивата AB во точките Q и R, соодветно. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{\overline{AQ} \cdot \overline{RB}}{\overline{QR}}$ е константна кога точката P се менува на лакот AB.

36. Нека $ABCD$ е паралелограм кој не е ромб. Полуправата симетрична на полуправата AD во однос на AC и полуправата симетрична на полуправата BC се сечат во точката P. Пресметај $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$ ако $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = q$.

37. Нека E е пресекот на дијагоналите на тетивниот четириаголник $ABCD$. Нека K и M се средините на страните AB и CD, соодветно, а L и N се подножјата на нормалите повлечени од E на страните BC и DA, соодветно. Докажи дека $KM \perp LN$.

38. Нека M и N се две точки на различни страници на квадратот $ABCD$. Да претпоставиме дека отсечката MN го дели квадратот на два тангентни многуаголници. Ако R и r се радиусите на впишаните кружници во овие многуаголници ($R > r$), определи ја должината на отсечката MN во функција од R и r.

39. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник впишан во кружница k. Со M и N да ги означиме AB и CD кои не ги содржат точките C и A, соодветно. Ако правата MN ја сече страната AB во точката P, докажи дека $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}+\overline{AD}}{\overline{BC}+\overline{BD}}$.

40. Конвексниот четириаголник $ABCD$ е впишан во кружница k. Нека претпоставиме дека на правата AC постои точка X таква што XB и XD се тангенти на k. Тангентата на k во C ја сече правата XD во точката Q. Нека $E\ (E \neq A)$ е пресек на правата AQ со k. Докажи дека правите AD, BE и CQ се сечат во една точка.

41. Нека M е точка во внатрешноста на конвексниот четириаголник $ABCD$ таква што четириаголникот $ABMD$ е паралелограм. Ако $\measuredangle CBM = \measuredangle ADM$, докажи дека $\measuredangle ACD = \measuredangle BCM$.

42. Нека P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 се различни точки во внатрешноста на фигура D или на нејзината граница. Со m да го означиме минималното растојание меѓу различните точки P_i. За каква конфигурација на точките P_i величината m достигнува максимална вредност ако D е:
а) единичен квадрат,
б) рамностран триаголник со страна 1,
в) круг со радиус 1?

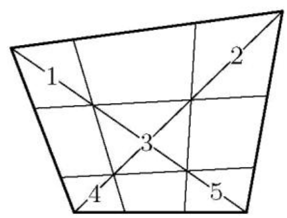
43. Конвексен четириаголник со дијагоналите е поделен на четири триаголници чии впишани кружници се складни. Докажи дека овој четириаголник е ромб.

44. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ аглите при темињата A и C се прави. Точката E лежи на продолжението на страната AD по темето D и е таква што $\measuredangle ABE = \measuredangle ADC$. Точката K е симетрична на точката C во однос на точката A. Докажи дека $\measuredangle ABD = \measuredangle AKE$.

45. Нека $ABCD$ е паралелограм со тап агол во темето B и $\overline{AD} > \overline{AB}$. На дијагоналата AC избран се точки K и L такви што $\measuredangle ABK = \measuredangle ADL$ (точките A, K, L и C се различни и K лежи меѓу A и L). Правата BK ја сече опишаната кружница ω на триаголникот ABC во точките B и E, а правата EL ја сече ω во точките E и F. Докажи дека $BF \parallel AC$.

46. Во конвексен четириаголник $ABCD$ е впишана кружница ω. Нека PQ е дијаметарот на кружницата ω кој е нормален на дијагоналата AC. Правите BP и DQ се сечат во точката X, а правите BQ и DP се сечат во точката Y. Докажи дека точките X и Y лежат на правата AC.

47. Конвексен четириаголник е поделен на девет четириаголници со помош на четири отсечки како на цртежот десно, при што точките на пресек на тие отсечки лежат на дијагоналите на почетниот четириаголник. Ако четириаголниците 1, 2, 3 и 4 се тангентни, докажи дека и четириаголникот 5 е тангентен.



48. Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ вписан во кружница со центар O се сечат во точката M. Опишаната кружница околу триаголникот ABM по втор пат ги сече страните AD и BC во точките N и K, соодветно. Докажи дека четириаголниците $NOMD$ и $KOMC$ имаат еднакви плоштини.

49. Нека $ABCD$ е произволен тетраедар. Нека E и F се средините на рабовите AB и CD, соодветно. Со α да го означиме аголот меѓу правите AD и BC. Определи го $\cos\alpha$ во зависност од должините на отсечките EF, AD и BC.

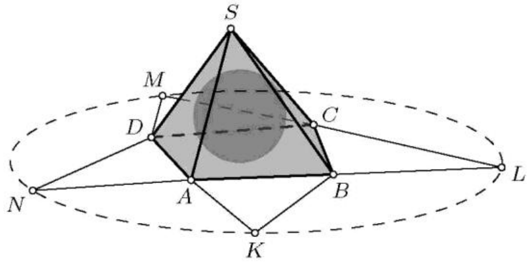
50. Нека $A_1A_2...A_n$ е многуаголник. Докажи дека постои конвексен многуаголник $B_1B_2...B_n$ таков што важи $\overline{B_iB_{i+1}} = \overline{A_iA_{i+1}}$ за $i = 1, 2, ..., n-1$, $\overline{B_nB_1} = \overline{A_nA_1}$ (некои од последователните темиња на многуаголникот $B_1B_2...B_n$ може да бидат колинеарни).

51. Во внатрешноста на конвексен многуаголник $A_1A_2...A_{2n}$ едадена точка M. Докажи дека барем една страна на многуаголникот нема заедничка внатрешна точка со правите $MA_i, 1 \le i \le 2n$.

52. Нека $ABCDEF$ е тетивен и тангентен конвексен шестаголник и нека ω_A, $\omega_B, \omega_C, \omega_D, \omega_E, \omega_F$ се кружниците впишани во триаголниците FAB, ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, соодветно. Со l_{AB} да ја означиме надворешната заедничка тангента на кружниците ω_A и ω_B, различна од правата AB. Аналогно ги воведуваме правите $l_{BC}, l_{CD}, l_{DE}, l_{EF}, l_{FA}$. Нека правите l_{AB} и l_{FA} се сечат во точката A_1. Аналогно се определени точките B_1, C_1, D_1, E_1, F_1. Да претпоставиме дека $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ е конвексен шестаголник. Докажи дека неговите дијагонали A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1 се сечат во една точка.

53. Даден е конвексен шестаголник $ABCDEF$ во кој важи $AB \parallel DE, BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$. Точките M, N, K се последователно пресеци на правите BD и AE, AC и DF, CE и BF. Докажи дека нормалите од точките M, N, K на правите AB, CD, EF, редоследно, се сечат во една точка.

54. Дадена е конвексна четиристрана пирамида со врв S и основа $ABCD$ во која е вписана сфера. Со сечење на рабовите SA, SB, SC, SD и ротирање на ѕидовите SAB, SBC, SCD, SDA кон надвореноста до рамнината $ABCD$ ја добиваме мрежата на пирамидата во форма



на многуаголникот $AKBLCMDN$. Докажи дека точките K, L, M, N се конциклични.

55. Нека $ABCD$ е тетраедар во кој $\overline{AB} = \overline{CD} = a,\ \overline{BC} = \overline{AD} = b$ и $\overline{AC} = \overline{BD} = c$. Определи ги висините на тетраедарот во функција од a, b, c.

4. НЕРАВЕНСТВА

1. Нека $n \in \mathbb{N}$ и $x, y \in \mathbb{R}$ се такви што $x^2 + y^2 \le 1$. Докажи дека
$$(x^n + y)^2 + y^2 \ge \tfrac{1}{n+2}(x^2 + y^2)^n .$$

2. Докажи дека за секој природен број n важат неравенствата
$$(n-1)^n + 2n^n \le (n+1)^n \le 2(n-1)^n + 2n^n .$$

3. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството
$$\{n\sqrt{7}\} > \tfrac{3\sqrt{7}}{14n} .$$

4. Нека a, b, c се ненегативни реални броеви такви што $a + b + c = 2$. Докажи дека
$$\tfrac{bc}{\sqrt[4]{3a^2+4}} + \tfrac{ca}{\sqrt[4]{3b^2+4}} + \tfrac{ab}{\sqrt[4]{3c^2+4}} \le \tfrac{2\sqrt[4]{3}}{3} .$$

5. Даден е непарен природен број p. Определи ги сите природни броеви $n \ge 2$ такви што неравенството
$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \ne i} (x_i - x_j)^p \ge 0$$
важи за секои реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$.

6. Ако a, b, c, d се произволни позитивни броеви, докажи дека
$$\sum_{cikl} \tfrac{a - \sqrt[3]{bcd}}{a + 3(b+c+d)} \ge 0 .$$

7. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи дека за секој природен број m важи неравенството
$$(a+b)^m + (b+c)^m + (c+a)^m \le 2^m (a^m + b^m + c^m) .$$

8. За позитивните реални броеви a, b, c важи $a + b + c = 1$. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{a}{a^3+b^2c+c^2a}+\frac{b}{b^3+c^2a+a^2c}+\frac{c}{c^3+a^2b+b^2a}\leq 1+\frac{8}{27abc}.$$

9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви кои го задоволуваат условот $a+b+c=1$. Докажи дека важи неравенството
$$\frac{a^{-3}+b}{1-a}+\frac{b^{-3}+c}{1-b}+\frac{c^{-3}-a}{1-c}\geq 123.$$

10. Природните x,y,z го задоволуваат равенството
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}.$$
Докажи дека $xyz\geq 3600$.

11. Докажи дека за позитивни броеви a,b,c важи неравенството
$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}\leq 1\leq \frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}.$$

12. Ако за позитивните реални броеви x,y,z важи $x^2+y^2+z^2=1$, докажи го неравенството
$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

13. Ако a,b,c се ненегативни реални броеви такви што $a+b+c=1$ докажи го неравенството
$$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}\leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
Кога важи знак за равенство?

14. Нека n е природен број поголем од 1 и нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни броеви такви што $x_1+x_2+...+x_n=1$. Испитај дали секогаш важи неравенството
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_1x_2...x_{i-1}x_{i+1}x_{i+2}...x_n}\leq \frac{1}{1-(\frac{1}{n})^{n-1}}.$$

15. Реалните броеви a,b,c се такви што $a^2+b^2+c^2=1$. Докажи го неравенство-то
$$\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab}\geq \frac{3}{5}.$$

16. Определи го најголемиот можен реален број C таков што за секои по парови различни реални броеви $a_1,a_2,...,a_{2019}$ важи неравенството
$$\frac{a_1}{|a_2-a_3|}+\frac{a_2}{|a_3-a_4|}+...+\frac{a_{2018}}{|a_{2019}-a_1|}+\frac{a_{2019}}{|a_1-a_2|}>C.$$

17. Докажи дека за должините a,b,c на страните на триаголникот ABC важи неравенството

$$\frac{a^3}{b+c-a}+\frac{b^3}{c+a-b}+\frac{c^3}{a+b-c}\geq a^2+b^2+c^2.$$

18. Во триаголникот ABC симетралата на внатрешниот агол во темето A ја сече страната BC во точката A_1, а кружницата опишана околу триаголникот ABC во точката A_2. Аналогно ги дефинираме точките B_1,B_2,C_1,C_2. Докажи дека

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{BA_2}+\overline{A_2C}}+\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{CB_2}+\overline{B_2A}}+\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{AC_2}+\overline{C_2B}}\geq\frac{3}{4}.$$

19. Ако $0\leq x\leq 2\pi$, докажи дека

$$\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}}+\sqrt{\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}}\geq 1.$$

20. Конвексен шестаголник $ABCDEF$ е вписан во кружница. Докажи го неравенството

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CE}\cdot\overline{DF}\cdot\overline{EA}\cdot\overline{FB}\geq 27\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{EF}\cdot\overline{FA}.$$

21. Плоштината на конвексниот петаголник $ABCDE$ е S, а радиусите на опишаните кружници околу триаголниците ABC, BCD, CDE, DEA, EAB се R_1,R_2,R_3,R_4,R_5. Докажи фо неравенството

$$R_1^4+R_2^4+R_3^4+R_4^4+R_5^4\geq\frac{4}{5\sin^2 108^\circ}S^2.$$

22. Во просторот се дадени правилен тетраедар $ABCD$ и произволни точки M и N. Докажи го неравенствити

$$\overline{MA}\cdot\overline{NA}+\overline{MB}\cdot\overline{NB}+\overline{MC}\cdot\overline{NC}\geq\overline{MD}\cdot\overline{ND}.$$

23. Нека α,β,γ се аглите на триаголникот наспроти страните a,b,c, соодветно. Докажи го неравенството

$$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\geq\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

24. Во кружница со радиус R е вписан конвексен шестаголник $ABCDEF$. Дијагоналите AD и BE, BE и CF, AD и CF на шестаголникот $ABCDEF$ се сечат во точките M,N,K, соодветно. Нека r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6 се радиусите на впишаните кружници во триаголниците ABM, BCN, CDK, DEM, EFN, AFK. Докажи дека важи неравенството

$$r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6\leq R\sqrt{3}.$$

25. Нека a,b,c се должините на страните на триаголник чиј периметар не е поголем од 2. Докажи дека

$$\left|\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}-\frac{a^3}{c}-\frac{c^3}{b}-\frac{b^3}{a}\right|<3.$$

26. Докажи дека во рамнокрак триаголник важи
$$b > \pi r,$$
каде b е кракот, а r радиусот на впишаната кружница.

27. Конвексниот многуаголник $A_1A_2...A_n$ е впишан во кружница чиј центар е во внатрешноста на многуаголникот. Нека $B_1, B_2, ..., B_n$ се произволни точки на страните $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$, различни од темињата на многуаголникот. Докажи дека важи
$$\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{A_1A_2}} + \frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{A_2A_4}} + ... + \frac{\overline{B_nB_1}}{\overline{A_nA_2}} > 1.$$

28. Темињата на конвексен четириаголник $ABCD$ и пресечната точка S на неговите дијагонали имаат целобројни координати во правоаголниот координатен систем xOy. Нека P е плоштината на четириаголникот $ABCD$, а P_1 е плоштината на триаголникот ABS. ДОкажи дека важи
$$\sqrt{P} \geq \sqrt{P_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

29. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC, CA, AB во точките A_1, B_1, C_1, соодветно. Нека се l_1, l_2, l_3 должините на лаците B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 на впишаната кружница кои не ги содржат точките A_1, B_1, C_1, соодветно. Ако a, b, c се должините на страните на триаголникот ABC, соодветно, докажи дека
$$\frac{a}{l_1} + \frac{b}{l_2} + \frac{c}{l_3} \geq \frac{9\sqrt{3}}{\pi}.$$

30. Ако a, b, c се должини на страни на триаголник ABC и R е радиусот на неговата опишана кружница, докажи дека
$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq 3R\sqrt{3}.$$

5. МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Дадено е множеството $U = \{1, 2, 3, ..., 6024\}$. АКо U е поделено на три подмножества со по 2008 елементи, докажи дека може да се изберат броеви a, b, c од различните подмножества такви што $a = b + c$.

2. Докажи дека за секој природен број n постои множество M_n од n природни броеви со следново својство:
а) аритметичката средина на елементите на секое непразно подмножество на M_n е цел број,

б) геометриската средина на елементите на секое непразно подмножество на M_n е цел број,

в) и аритметичката и геометриската средина на елементите на секое непразно подмножество на M_n се цели броеви.

3. Нека k,m,n се природни броеви такви што $1<n\leq m-1\leq k$. Определи го најголемиот можен број елементи на подмножеството S на множеството $\{1,2,...,k\}$ такво што не постојат n различни елементи од S со збир

   а) еднаков на m, б) поголем од m.

4. Нека A_n е множеството од сите поделби на низата $1,2,...,n$ на неколку поднизи (барем една) така што во секоја подниза секои два последователни члена се со различна парност, и нека B_n е множеството од сите поделби на низата $1,2,...,n$ на неколку поднизи така што во секоја подниза сите членови се со иста парност (на пример, поделбата $\{(1,4,5,8),(2,3),(6,9),(7)\}$ е елемент на множествот A_9, а поделбата $\{(1,3,5),\{2,4),(6)\}$ е елемент на множеството B_6).

   Докажи дека за секој природен број n множествата A_n и B_{n+1} имаат еднаков број елементи.

5. Нека $U=\{1,2,...,2014\}$.За $a,b,c\in\mathbb{N}$ со $f(a,b,c)$ да го означиме бројот на подредените шесторки множества $(X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3)$ со следниве својства:

   а) $Y_1\subseteq X_1\subseteq U$ и $|X_1|=a$,

   б) $Y_2\subseteq X_2\subseteq U\setminus Y_1$ и $|X_2|=b$,

   в) $Y_3\subseteq X_3\subseteq U\setminus(Y_1\cup Y_2)$ и $|X_3|=c$.

   Докажи дека $f(a,b,c)$ не се менува при пермутирање на a,b и c.

6. Определи го најголемиот природен број n за кој постои $n-$члено подмножество S на множството $\{1,2,...,2001\}$ такво што равенката $y=2x$ нема решение x,y во множеството S.

7. Дадено е множество A со точно $n>4$ елементи. Избрани се $n+1$ различни трочлени подмножества на множеството A. Докажи дека меѓу избраните подмножества постојат две чиј пресек е едноелементно множество.

8. Околу тркалеза маса седат 30 витези и штитоносци. На прашањето „Што е вашиот сосед од десно, витез или штитоносец“ секој витезите ја кажува вистината, а секој штитоносец може да ја каже вистината или да излаже. Познато е дека бројот на штитоносците на масата не е поголем од N. Колкава е најголемата можна вредност на N за да можеме, знаејќи ги сите одговори на луѓето на масата, со сигурност да определиме барме еден витез?

9. Осум ученици решавале осум задачи. Се покажало дека секоја задача ја решиле најмалку 5 ученици. Докажи дека секогаш може да се најдат два ученика така што секоја задача ја решил барем еден од нив.

10. Во земја со n градови некои градови се поврзани со еднонасочни летови со кои управваат две компании, при што меѓу два града во секоја насока може да постојат повеќе летови. За $AB-$зборот w ќе велиме дека е допустлив ако постои низа поврзани летови чии имиња на компаниите го формираат зборот w. Ако секој $AB-$збор со должина 2^n е допустлив, докажи дека секој конечен $AB-$збор е допустлив.

11. Во земјата Недојдија некои парови градови се поврзани со директни двонасочни авионски линии. Од секој град може да се дојде до секој друг град со низа од најмногу 100 летови. Исто така, од секој град до секој друг град може да се дојде со низа од парен број летови. Определи го најмалиот број d за кој со сигурност може да се тврди дека од секој град може да се стигне во секој друг град со низа со парен број летови помал или еднаков на d.
(Дозволено е да се користи иста линија или да се мине низ ист град повеќе пати.)

12. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ природни броеви кои го задоволуваат неравенството
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \le \frac{1}{2}.$$
Владата на државата Оптимистика секоја година објавува годишен извештај за n економски параметри. За $i = 1, 2, ..., n$ можни вредности на $i-$тиот параметар се $1, 2, 3, ..., a_i$. За годипниот извештај ќе велиме дека е оптимистички ако вредностите на барем $n = 1$ параметри се поголеми одколку во минатогодишниот извештај. Докажи дека владата вечно може да објавува оптимистички годишни извештаи.

13. Докажи дека вкупниот број единици кои се јавуваат во сите неподредени разбивања на природниот број n е еднаков на збирот на броевите на различните елементи на тие разбивања.
Напомена. За разбивањето $10 = 1+1+2+3+3$ бројот на различните елементи е еднаков на 3, бидејќи во него различни елементи се 1, 2 и 3.

14. Горјан замислил четири полиња на табла 2018×2018 кои пбразуваат правоаголник 1×4. Андреј може да одбере било кој 3×3 квадрат и да праѓа дали тој содржи барем едно од замислените полиња, на што добива точен одговор. Со колку најмалку прашања Андреј може да биде сигурен дека ќе добие барем еден потврден одговор?

15. Давид и Радан играат игра на табла 100×100. Прво Давид ги означува сите полиња на таблата со броевите од 1 до 10000, користејќи го секој број точно еднаш. Потоа Радан избира поле во крајната лева колона и на него поставува жетон. Тој треба со низа потези да стигне до крајната десна колона, при што

во секој потез го поместува жетонот на едно од соседните полиња по страна или теме. За секое посетено поле (вклучувајќи го и почетното), тој му плаќа на Давид износ еднаков на бројот кој е запишан на тоа поле.
Радан настојува да плати што е можно помалку, додека Давид ги означува полињата така што ќе обезбеди што е можно поголема заработувачка. Колку пари ќе му плати Радан на Давид ако и двајцата играчи ја следат својата оптимална странтегија?

16. Дадени се 100 различни природни броеви. Парот броеви го нарекуваме добар ако едниот број е поголем од другиот два или три пати. Определи го најголемиот можен број парови добри броеви меѓу дадените 100 броја.
(Еден број може да припаѓа во повеќе парови.)

17. Докажи дека постојат барем 100! начини бројот 100! да се претстави како збир на броеви од множеството $\{1!, 2!, 3!, ..., 99!\}$.
(Претставувањата кои се разликуваат само во редоследот на собирците ги сметаме за исти. Секој собирок може да се појави повеќе пати.)

18. На таблата се запишани броевите 5, 7 и 9. Во секој чекор избираме два од запишаните броеви a и b такви што $a > b$ и на таблата го допишуваме бројот $5a-4b$. Дали може по конечен број вакви чекори на таблата да се запише бројот 2003.

19. Од дадено 20-елементно множество се избрани $2k+1$ различни 7-елементни подмножества така што секое од нив има непразен пресек со точно k други избрани подмножества. Определи го најголемиот природен број k за кој е ова можно.

20. На фудбалски турнир секоја екипа игра со секоја од преостанатите екипи по еден натпревар и притоа за победа освојува 3 бода, за нерешен резултат 1 бод и за пораз 0 бодови. На крајот од трунирот се покажало дека збирот на освоените бодови од сите екипи бил 50.
а) Колку екипи учествувале на овој турнир?
б) Колкава е најголемата можна разлика меѓу екипата која освоила најмногу бодови и екипата која освоила најмалку бодови?

21. Десет луѓе отшле да купуваат книги. Познатое дека:
а) секој човек купил четири различни книги,
б) секои двајца купиле барем една иста книга.
Да ја разгледаме книгата која ја купиле најголем број од овие десет луѓе. Определи ја најмалата можна вредност на тој број.

22. Даден е природен број m. Во општествена мрежа со фиксен конечен број членови, секој член меѓу останатите членови има непроменлив број *следбеници*. На почетокот секој член има целоброен рејтинг (не задолжително еднаков за сите членови). Рејтингот на секој член секоја вечер на полноќ се зголемува за збирот на претполноќните рејтинзи на неговите следбеници.

Хакер, кој не е член на мрежата, сака рејтинзите на сите членови да бидат деливи со m. Тој секој ден може да избере еден член и да му го зголеми рејтингот за 1, или ништо да не менува. Докажи дека хакерот по конечен број денови може да ја постигна својата цел.

23. Испит полагаат 100 студенти. Професорот ги прозива еден по еден и им поставува само едно прашање: „Колку од овие 100 студенти ќе го положат испитот?“ Одговорот на студентот мора да биде цел број. штом ќе го добие одговорот, професорот пред сите на студентот му дава една оценка „положил“ или „не положил“.
Кога сите студенти ќе бидат оценети, ќе дојде инспекција да провери дали има студенти кои дале точен одговор, но не положиле. Ако постои некој таков студент, професорот ќе биде суспендиран, а сите студенти ќе добијат оценка „положил“. Во спротивно нема да има промени.
Дали може студентите да осмислат стратегијакоја на сите им гарантира оценка „положил“?

24. На кружница се дадени n точки и меѓу нив се повлечени сите можни тетиви. Ако никои три тетиви не се сечат во една точка, определи го бројот на дисјунктните области на кои тетивите го делат кругот.

25. Со T_m да го означиме бројот на нескладни триаголници со периметар m чии должини на страни се целобројни. Докажи дека
а) $T_{1999} > T_{2000}$ и
б) $T_{4n+1} = T_{4n-2} + n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

26. Даден е правилен $2n-$аголник ($n \geq 2$) со центар S. Ги разгледуваме сите четириаголници со темиња во темињата на овој $2n-$аголник. Со u да го означиме бројот на овие четириаголници кои во внатрешноста ја содржат точката S, а со v бројот на преостанатите четириаголници. Определи ја разликата $u = v$.

27. Ако за пермутацијата $(x_1, x_2, ..., x_n)$ на броевите $1, 2, ..., n$ важи
$$\frac{x_k^2}{x_{k+1}} \leq k + 2, \quad k = 1, 2, 3, ..., n-1,$$
докажи дека таа е идентична.

28. Во рамнината се дадени $3n$ точки ($n \geq 1$) такви што секои три е неколинеарни. Докажи дека постојат n меѓусебно дисјунктни триаголници со темиња во овие точки.

29. На кружница со периметар $6n$ се обоени $3n$ точки кои кружницата ја делат на $3n$ лаци, од кои n имаат должина 1, n имаат должина 2 и преостанатите n имаат должина 3. Докажи дека постојат две обоени точки кои лежат на ист дијаметар на кружницата.

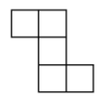
30. Дадена е табла со $2(2^N - 1)$ редови и k колони (k и n се природни броеви). Боењето на таблата со две бои е допустливо ако за секои две колони важи: полињата во тие две колони кои припаѓаат на ист ред се истобојни за помалку $2^n - 1$ редови.
За даден n определи ја максималната вредност на k за која постои допустливо боење.

31. Табла $n \times n$ е обоена шаховски црно-бело. Во еден чекор се избираат две соседни полиња (полиња кои имаат заедничка страна) и им семенува бојата на следниов начин:
- белото поле станува црно,
- црното поле станува црвено,
- црвеното поле станува бело.

За кои m и n со овие чекори може да се смени бојата на сите почетни полиња, белите во црни, а црните во бели.

32. Секоја точка во рамнината со целобројни координати е обоена со бела или сина боја. Докажи дека може да се избере боја така што за секој природен број n постои триаголник со плоштина n чии темиња се со избраната боја.

33. $Z-$пентамино е било која фигура која е складна со фигурата прикажана на цртежот десно. Определи го најмалиот број $Z-$ пентамина кои се потребни да се покрие табла со димензии 8×8, при услов секое поле на $Z-$пентаминотоили се поклошува со некое поле на таблата или е надвор од таблата? $Z-$пентамината може меѓусебно да се преклопуваат.



34. Во Недојдија има 60 градови, од кои секои два се поврзани со едносмерен автопат. Докажи дека може да се обојат четири града во црвено, а други четири града во зелено, така што секој автопат меѓу црвениот и зелениот град води од црвениот кон зелениот.

35. Правоаголник во единична квадратна мрежа е поделен на домина. Докажи дека сите јазли на мрежата внатре во правоаголникот и на неговата граница може да се обојат во три бои така што е исполнет условот: за секои два јазли на растојание 1, тие јазли се обоени во различна боја ако отсечката која ги поврзува припаѓа на границата на некое домино, а во спротивно се обоени во иста боја.

36. Даден е природен број $n > 2$. Некои полиња на квадратната табла $n \times n$ се црни, а останатите се бели. Во секое бело поле е запишан бројот на црните полиња кои со него имаат барем едно заедничко теме. Определи ја најголемата можна вредност на збирот на сите запишани броеви.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder, P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007

42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E., Rouseau, C.: Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
67. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
68. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
69. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
70. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
71. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
72. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
73. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
74. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
75. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
76. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
77. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
78. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
79. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
80. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
81. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
82. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
83. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
84. Арсеновић, М., Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
85. Арсланагић, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
86. Арсланагић, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје

87. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол на триаголник, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
97. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
98. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
108. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
109. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
110. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
111. Велинов, Д.: Полиномни равенки, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
113. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
114. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
115. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
116. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
117. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
118. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
121. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
122. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
123. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
124. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје
125. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
126. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
127. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
128. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015

129. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
130. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
131. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
132. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
134. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
135. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
136. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
137. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
138. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Полиноми по једној променљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
153. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
154. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
155. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
157. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
158. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
159. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
160. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
161. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
162. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиуħ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
167. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
168. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
169. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
170. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
171. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
172. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
173. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
174. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
175. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
176. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
177. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје

178. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
179. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
180. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
181. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика+, Софија, 1997
182. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
183. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
184. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
185. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
188. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
191. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
192. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
193. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
195. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
196. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
197. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
202. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
203. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
204. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
210. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
211. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
212. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
213. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
214. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
215. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
216. Малчески, Р.: Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
217. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
218. Малчески, Р., Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
219. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995

220. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
221. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
222. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
223. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
224. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
226. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
227. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
228. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
229. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
230. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
231. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
233. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
234. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
235. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
236. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
237. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
238. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
239. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
240. Малчески, Р:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
241. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
242. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
248. Маркоски, Ѓ.: Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
249. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
252. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
253. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013
254. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
255. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
256. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
257. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
258. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
259. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
260. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
261. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
262. Муминагић, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
263. Муминагић, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
264. Мушкаров, О., Гроздев, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
265. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
266. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
267. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
268. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
269. Поја, Г.: Математическое открìитие, Москва 1976
270. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
271. Поповска-Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
272. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988

273. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
274. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
275. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
276. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
277. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
278. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
279. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
280. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
281. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
282. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
283. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
284. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
285. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
286. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
287. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
288. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
291. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
292. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
293. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
294. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
295. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
296. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
297. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
299. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011