ТЕОРИЈАТА НА БРОЕВИ ВО ЈУНИОРСКИ ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ

Самоил Малчески[1], Даниел Велинов[2]
[1]Меѓународен Славјански Универзитет во Свети Николе
[2]Градежен факултет Скопје, Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ во Скопје

Елементарната теорија на броеви е интересен дел од математиката, кој ги истражува својствата и врските на целите броеви. Во својата срж, таа ги истражува основните карактеристики на броевите, вклучувајќи ја деливост, факторизацијата и распределбата. За разлика од некои области во математиката кои се фокусираат на апстрактни концепции, теоријата на броеви работи со конкретни и опипливи елементи - цели броеви, што ја прави достапна и лесна за разбирање. Со долга историја која се простира во древни цивилизации, теоријата на броеви има важна улога во развојот на математичкото мислење. Секогаш воочувајќи ја нејзината елеганција и истовремено длабоките импликации, теоријата на броеви формира основа за различни математички дисциплини и наоѓа примена во области како криптографија и компјутерски науки.

Покрај историското значење, теоријата на броеви останува активно и динамично подрачје на истражување во современата математика. Современите истражувачи во теоријата на броеви продолжуваат да ја прошируваат оваа област, задавајќи и решавајќи комплексни проблемим поврзани со простите броеви и аритметичките функции. Во ова патување од областа на теоријата на броеви, откриваме богатство на концепции и прашања што не само што го зголемуваат нашето разбирање за броевите, туку и придонесуваат кон поширока слика на математичкото знаење.

Задача 1. Нека a и b се цели броеви такви што бројот $(a+b)(a+3b)$ е делив со 4, но не е делив со 8. Докажи дека тогаш бројот $(a+b)(a+3b)(a+5b)$ е делив со 8, но не е делив со 16.

Решение. Ако a и b се со различна парност, тогаш броевите $a+b$ и $a+3b$ се непарни, па и нивниот производ е непарен број, што е во контрадикција со условот на задачата дека $(a+b)(a+3b)$ е делив со 4.

Значи, броевите a и b се со иста парност, и броевите $a+b$, $a+3b$ и $a+5b$ се парни. Затоа $(a+b)(a+3b)(a+5b)$ е делив со 8.

Ако и двата броја a и b се непарни, тогаш не може да дадат различни остатоци при делење со 4 бидејќи $a+b$ би бил делив со 4 (и $a+3b$

би бил парен), а не можат да даваат ни исти остатоци пре делење со 4 бидејќи $a+3b$ ќе биде делив со 4 (и $a+b$ би бил парен). Па, затоа овој случај не е можен.

Значи, и двата броја a и b се парни. Не може да даваат ист остаток при делење со 4, бидејќи $a+b$ би бил делив со 4 и $a+3b$ би бил парен, па и $(a+b)(a+3b)$ би бил делив со 8. Но, ако a и b се парни и даваат различни остатоци при делење со 4, тогаш и броевите $a+b, a+3b$ и $a+5b$ се парни, но не се деливи со 4. Затоа, $(a+b)(a+3b)(a+5b)$ не е делив со 16.

Задача 2. Нека m и n се природни броеви со различна парност. Докажи дека бројот

$$\frac{3m^2+5mn}{3n^2+mn}$$

не е природен број.

Решение. Нека d е најголемиот заеднички делител на броевите m и n, т.е. $m=dm'$ и $n=dn'$, при што m' и n' се заемно прости природни броеви со различна парност.

Сега треба да докажеме дека

$$\frac{3d^2m'^2+5d^2m'n'}{3d^2n'^2+dm'n'}=\frac{m'(3m'+5n')}{n'(m'+3n')}$$

не е природен број.

Да забележиме дека броевите $3m'+5n'$ и $m'+3n'$ се непарни.

Ако m' е непарен, а n' е парен, парниот број $n'(m'+3n')$ очигледно не е делител на непарниот број $m'(3m'+5n')$. Тогаш имаме

$$k \mid 3\cdot(3m'+5n')-5\cdot(m'+3n'),\text{ т.е. } k \mid 4m',$$

$$k \mid 1\cdot(3m'+5n')-3\cdot(m'+3n'),\text{ т.е. } k \mid -4n',$$

од каде следува дека k ги дели m' и n', па $k=1$ и двата множители во изразот

$$\frac{m'}{n'}\cdot\frac{3m'+5n'}{m'+3n'}$$

се нескратливи дропки. Бидејќи $m'+3n'>m'$, доказот е завршен.

Задача 3. Најди ги сите природни броеви $n\geq 2$ за кои постојат непарни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ (не мора да бидат различни) така што

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$$

е квадрат на некој природен број.

Решение. На почетокот ќе дадеме две тврдења кои ќе ги користиме во решението.

1) Ако m е парен број, тогаш m^2 е делив со 4.

2) Ако m е непарен број, тогаш $m^2 \equiv 1 \pmod 8$.

Тврдењето 1), очигледно важи. Непарен број можеме да го запишеме во обликот $m = 2k+1$, каде $k \in \mathbb{Z}$. Тогаш $m^2 = (2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$, па бидејќи бројот $k(k+1)$ е парен, следува тврдењето 2).

Од 2), квадратот на секој непарен природен број при делење со 8 дава остаток 1, па остатокот при делењее на збирот $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$ со 8 е еднаков на остатокот при делење на бројот n со 8.

Од 1) и 2), квадратот на природен број при делење со 8 дава остаток број кој припаѓа на множеството $\{0,1,4\}$. За да збирот $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$ биде полн квадрат, потребно е да неговиот остаток при делење со 8 да биде 0,1 или 4, а тоа значи дека бројот n при делење со 8 мора да дава еден од трите наведени остатоци.

Со следниве примери, покажуваме дека сите такви бореви n го имаат опишаното својство во задачата:

а) За броеви n кои при делење со 8 даваат остаток 0 или 4, односно $n = 4t$, $t \in \mathbb{N}$, нека $a_1 = ... = a_{n-1} = 1$ и $a_n = 2t-1$, па навистина

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = (n-1)\cdot 1^2 + (2t-1)^2 = (4t-1) + (4t^2 - 4t + 1) = (2t)^2 .$$

б) За $n = 8t+1$, $t \in \mathbb{N}$, нека $a_1 = ... = a_{n-1} = 1$ и $a_n = 2t-1$, па навистина

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = (n-1)\cdot 1^2 + (2t-1)^2 = 8t + (4t^2 - 4t + 1) = (2t+1)^2 .$$

Задача 4. Докажи дека не постојат природни броеви a и b такви што

$$a^3 - 64a - 1 = 4b(b+1) .$$

Решение. Равенката

$$a^3 - 64a - 1 = 4b(b+1)$$

е еквивалентна со

$$a(a^2 - 64) = 4b^2 + 4b + 1$$

$$a(a-8)(a+8) = (2b+1)^2 .$$

Оттука, заклучуваме дека $a(a-8)(a+8)$ мора да биде квадрат на непарен природен број, а ова е можно само ако a е непарен.

Да забележиме дека a и $a-8$ се заемно прости. Имено, нека претпоставиме дека постои непарен прост број p, кој ги дели a и $a-8$. Тогаш p ги дели и $a-(a-8)=8$, што не е можно бидејќи p е непарен. Па, јасно a и $a+8$ се заемно прости.

Исто така, $a-8$ и $a+8$ се заемно прости бидејќи од претпоставката дека непарниот прост број p ги дели $a-8$ и $a+8$, следува дека p ги дели $a+8-(a-8)=16$, што повторно е контрадикција.

Затоа секој од броевите, $a-8$, a и $a+8$ мора да биде полн квадрат.

Но, ова не е можно, бидејќи разликата на квадратите на два последователни непарни броеви секогаш е делива со 8,

$$(2k+1)^2-(2k-1)^2=8k$$

и е еднаква на 8 само во случајот кога $k=1$, односно кога се работи за броевите 1 и 3.

Значи, не постојат три непарни броеви $a-8$, a и $a+8$ кои се полни квадрати, односно равенката $a^3-64a-1=4b(b+1)$, нема решение за a и b природни броеви.

Задача 5. Во множеството на природни броеви реши ја равенката

$$x^2=2^y+2021^z.$$

Решение. Да забележиме дека x е непарен број. Ако $y\geq 3$, тогаш по модул 8 имаме

$$1\equiv x^2\equiv 5^z \pmod 8),$$

па z е парен број. Запишуваме $z=2z_1$, за некој $z_1\in\mathbb{N}$. Тогаш имаме

$$(x-2021^{z_1})(x+2021^{z_1})=2^y.$$

Нека со d го означиме најголемиот заеднички делител на броевите $x-2021^{z_1}$ и $x+2021^{z_1}$. Тогаш $d\,|\,2\cdot 2021$ од каде $d\,|\,2$, а бидејќи и двата броја се непарни, следува $d=2$. Оттука заклучуваме дека мора да важи $x-2021^{z_1}=2$ и $x+2021^{z_1}=2^{y-1}$, па со одземање добиваме

$$2021^{z_1}=2^{y-2}-1.$$

Ако $y\geq 4$, тогаш добиваме контрадикција по модул 4:

$$1\equiv 2021^{z_1}=2^{y-2}-1\equiv -1 \pmod 4).$$

Но, $y\geq 13$, бидејќи $2^{10}-1<2021$, па во овој случај нема решение.

Ако $y=1$, тогаш 2021^z+2 не може да биде полн квадрат бидејќи дава остаток 3 при делење со 5, па и во овој случај равенката нема решенија.

Останува уште случајот $y=2$. Тогаш имаме разлика на квадрати

$$(x-2)(x+2)=2021^z.$$

Бидејќи $x-2$ и $x+2$ се непарни броеви кои се разликуваат за 4, и се заемно прости, ги разликуваме следните два случаи:

1) $x-2=1$, $x+2=2021^z$, па $x=3$, а ова е невозможно поради втората равенка.
2) $x-2=43^z$, $x+2=47^z$, од каде следува дека $47^z-43^z=4$. Ако $z>1$, тогаш

$$47^z-43^z=4(47^{z-1}+...+43^{z-1}),$$

па мора да е $z=1$, од каде се добива единственото решение на дадената равенка $x=45$, $y=2$, $z=1$.

Задача 6. Одреди ги сите природни броеви n кои ги задоволуваат следниве пет услови:

1) Бројот n не е делив со ниту еден квадрат на природен број поголем од 1.
2) Бројот n има само еден прост делител од облик $4k+3$, $k\in\mathbb{N}_0$.
3) Ако со $S(n)$ го означиме збирот од цифрите на бројот n, а со $d(n)$ бројот на природни делители на n, тогаш важи $S(n)+2=d(n)$.
4) Бројот n зголемен за 3 е квадрат на природен број.
5) Бројот n нема прости делители кои имаат 4 или повеќе цифри.

Решение. Од условот 1) имаме дека $n=p_1p_2\cdot...\cdot p_s$, т.е. е производ на $s\in\mathbb{N}$ различни прости броеви (n не може да биде еднаков на 1, што јасно се гледа од условите 2) и 3)). Тогаш важи $d(n)=2^s$, па

$$n\equiv S(n)\equiv 2^s-2\equiv 0,2 \pmod 3.$$

Од друга страна, од условот 4), важи $n+3=m^2$, за некое $m\in\mathbb{N}$, па

$$n\equiv n+3=m^2\equiv 0,1 \pmod 3.$$

Оттука, заклучуваме дека $3\mid n$, па $3\mid m$, па $n\equiv 6 \pmod 9$. Па, добиваме

$$2^s=S(n)+2\equiv 8 \pmod 9,$$

од каде следува дека $s \equiv 3 \pmod 6$.

Ако n е непарен, од условот 2), следува дека $n \equiv 3 \pmod 4$, па $m^2 \equiv 2 \pmod 4$, што не е можно. Следува, $2 \mid n$. Сега ќе го оцениме бројот s. Од условот 5), го имаме следното неравенство $n < 6 \cdot 10^{3(s-2)}$. Според тоа,

$$S(n) \le 5 + 9 \cdot 3(s-2) = 27s - 49,$$

што ни го дава неравенството

$$2^s \le 27s - 47.$$

Со помош на принципот на математичка индукција се проверува дека за $s \ge 8$ важи спротивното неравенство $2^s > 27s - 47$, од каде $s \le 7$, па бидејќи $s \equiv 3 \pmod 6$, мора да е $s = 3$, па $n = 6p$, за некој прост број $p < 1000$. Оттука, следува $d(n) = 8$, $S(n) = 6$.

Бидејќи $n > 6$ е парен број, заклучуваме дека последната цифра на бројот n мора да биде 0, 2 или 4, а бидејќи $n + 3 = m^2$, мора да важи $n \equiv 2 \pmod{10}$. Тогаш $5 \mid m$ и бидејќи m е непарен број, имаме

$$m^2 \equiv 25 \pmod{100}, \qquad n \equiv 22 \pmod{100}.$$

Бидејќи $n < 6000$ и $S(n) = 6$, ги имаме можностите $n \in \{222, 1122, 2022\}$, со директна проверка утврдуваме дека $n = 1122$ отпаѓа, а единствените решенија се $n = 222$ и $n = 2022$.

Задача 7. а) Нека n е природен број. Докажи дека меѓу било кои $n+2$ различни природни броеви можеме да избереме два различни броја чија разлика на нивните квадрати е делива со $2n+1$.

б) Одреди ги сите природни броеви n за кои постојат $n+1$ различни природни броеви меѓу кои не постојат два различни броеви чија разлика од нивните квадрати е делива со $2n+1$.

Решение. а) За дадениот природен број n, сите остатоци при делењето со $2n+1$ се некои од броевите $0, 1, 2, \ldots, 2n+1$. Овие остатоци ќе ги поделиме во $n+1$ група:

$$A_0 = \{0\},\ A_1 = \{1, 2n\},\ A_2 = \{2, 2n-1\}, \ldots, A_n = \{n, n+1\}.$$

Во групите кои имаат два елементи, збирот на елементите е еднаков на $2n+1$. Ако некои два броја a и b даваат остатоци кои припаѓаат во иста група, тогаш $2n+1$ го дели $a-b$ или $a+b$, па ги дели и $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Бидејќи имаме $n+1$ групи, од принципот на Дирихле следува дека меѓу било кои $n+2$ различни природни броеви можеме да избереме два различни броја кои припаѓаат во иста група. За тие два броја покажавме дека разликата од нивните квадрати е делива со $2n+1$.

б) Ако $2n+1$ е прост број, тогаш разликата на квадратите на било кои два броја од множеството

$$S=\{2n+1, 2n+2, ..., 3n, 3n+1\}$$

не е делива со $2n+1$. Навистина, ако претпоставиме дека $2n+1$ го дели a^2-b^2, тогаш $2n+1$ (бидејќи е прост) мора да го дели $a-b$ или $a+b$. Но, ако a и b се два различни броеви од множеството S, тогаш важи

$$-n \le a-b \le n,\ a-b \ne 0, \qquad 4n+3 \le a+b \le 6n+1,$$

од каде е јасно дека ниту $a-b$ ниту $a+b$ не го содржат како делител $2n+1$ со кратност поголема од 1.

Нека претпоставиме дека постои некој сложен број $2n+1$ и $n+1$ броеви $a_0, a_1, ..., a_n$ такви што меѓу нив не постојат два броја чија разлика на нивните квадрати е делива со $2n+1$. Користејќи ги ознаките и начинот на заклучување од делот во задачата а), заклучуваме дека тие броеви мора да даваат остатоци кои припаѓаат во различни групи, па без губење на општоста можеме да ги подредиме броевите така што бројот a_k дава остаток од групата A_k, за $k=0,1,2,...,n$.

Ако $2n+1=cd$, за некои непарни релативно прости броеви c и d, тогаш $\frac{c-d}{2}$ и $\frac{c+d}{2}$ се природни броеви. Ставајќи

$$a=a_{\frac{c-d}{2}}, \qquad b=a_{\frac{c+d}{2}},$$

тогаш еден од броевите $a-b$ и $a+b$ ќе биде делив со c, а другиот со d, па затоа $2n+1=cd$ ќе го дели a^2-b^2, што е во контрадикција со претпоставката.

Слично, ако $2n+1=p^m$, за некој прост број p и природен број $m \ge 2$, тогаш можеме да земеме

$$a=a_0, \qquad b=a_{p^{m-1}},$$

па добиваме дека p^{m-1} ги дели и $a-b$ и $a+b$, па $2n+1=p^m$ го дели a^2-b^2.

Конечно, бараното својство го имаат оние природни броеви n, за кои $2n+1$ е прост број.

Задача 8. Најди ги сите подредени тројки (k,m,n) од природни броеви, при што m е прост, за кои важат следниве услови:

1) kn е квадрат на природен број.
2) $\frac{k(k-1)}{2}+n$ е четврти степен на некој прост број
3) $k-m^2=p$, каде p е прост број
4) $\frac{n+2}{m^2}=p^4$.

Решение. Очигледно е дека $m=p=2$, не е решение. Доколку $m=2$, $p>2$ или $m>2$, $p=2$, од третиот услов имаме дека k е непарен, а од четвртиот дека $n\equiv 2 \pmod 4$, па kn не може да биде полн квадрат. Според тоа, важи дека $m>2$ и $p>2$, па k е парен број, а n е непарен број.

Нека најголемиот заеднички делител на броевите k и n е еднаков на d и $k=dk_1$, $n=dn_1$, при што k_1 и n_1 се заемно прости. Од првиот услов следува дека k_1n_1 е исто така полн квадрат, што сега повлекува дека и двата броја k_1 и n_1 се полни квадрати. Бидејќи d го дели бројот $q^4=\frac{k(k-1)}{2}+n$, па $d\in\{1,q,q^2,q^3\}$. Случаите $d=1$ и $d=q^2$ отпаѓаат бидејќи тогаш n е полн квадрат, а од четвртиот услов и $n+2$ е полн квадрат, што очигледно не е можно. Исто така, за $d=q^3$, добиваме

$$q^4>\frac{k(k-1)}{2}\geq\frac{q^3(q^3-1)}{2},$$

што не е можно за $q\geq 2$. Според тоа, како единствена можност остануваат $d=q$ и $k=qk_2^2$, $n=qn_2^2$, за заемно простите броеви k_2 и n_2.

Ако m и p се и двата различни од 3, тогаш од четвртиот услов добиваме дека $n\equiv 2 \pmod 3$. Бидејќи секогаш важи

$$\frac{k(k-1)}{2}\equiv\begin{cases}0, & k\equiv 0,1 \pmod 3\\ 1, & k\equiv 2 \pmod 3),\end{cases}$$

од вториот услов добиваме дека $q^4\equiv 0,2 \pmod 3$, па единствена можност е $q=3$. Меѓутоа, ова не е можно бидејќи $q\mid n$, а $n\equiv 2 \pmod 3$. Оттука, барем еден од броевите m,p е еднаков на 3.

Лесно се проверува дека случајот $m=p=3$ не е можен. Ако $m=3$, добиваме дека $n=9p^4-2$ и $k=p+9$. Меѓутоа, важи

$$(3p^2)^2 = 9p^4 < 9p^4 + \frac{(p+9)(p+8)}{2} - 2 < 9p^4 + 6p^2 + 1 = (3p^2+1)^2,$$

при што второто неравенство се сведува на $11p^2 - 17p - 66 > 0$ и лесно се проверува дека важи за сите $p \geq 5$. Па, бројот q^4 се наоѓа меѓу два последователни квадрати, па не може да биде полн квадрат.

Ако $p = 3$, имаме $k = m^2 + 3$, $n = 81m^2 - 2$. Бидејќи $q \mid k$ и $q \mid n$, важи

$$q \mid 81(m^2+3) - (81m^2 - 2) = 245 = 5 \cdot 7^2,$$

па $q = 5$ или $q = 7$. Случајот $q = 5$ не е можен, бидејќи бројот $m^2 + 3$ никогаш не е делив со 5. Според тоа, важи $q = 7$, па k е од облик $28t^2$ и го задоволува неравенството $\frac{k(k-1)}{2} < 7^4$, од каде добиваме $k < 70$. Единствена можност е $t = 1$ и $k = 28$, па $m = 5$, $n = 2023$. Овие броеви навистина ги задоволуваат сите четири услови на задачата, па единственото решение на задачата е дадено со $(k, m, n) = (28, 5, 2023)$.

Забелешка. Некои од чекорите во прикажаното решение можат да се заменат со следниот начин на размислување.

Бидејќи $q^4 \equiv 0,1 (\mathrm{mod}\, 5)$, последната цифра на бројот q^4 е 5 (доколку $q = 5$) или 1 (во сите останати случаи). Ќе докажеме дека барем еден од простите броеви m, p е еднаков на 5.

Ако $q \neq 5$, последната цифра на производот $k(k-1)$ е $0, 2$ или 6, па од равенството $q^4 = \frac{k(k-1)}{2} + n$ и фактот дека n е непарен, добиваме дека n завршува на цифрите $1, 3$ или 5. Тоа значи дека $n + 2$ завршува на цифрите $3, 5$ или 7. Меѓутоа, од четвртиот услов $n + 2$ е полн квадрат, па единствена можност е $n + 2$ да се завршува на цифрата 5, што значи дека $m = 5$ или $p = 5$.

Ако $q = 5$, тогаш од $k = 20l^2$ и $\frac{k(k-1)}{2} < 5^4$ (т.е. $k < 36$) добиваме дека мора $l = 1$, $k = 20$. Со проверка се добива дека ова не го дава бараното решение.