

**Ристо Малчески**

**ОСНОВИ НА МАТЕМАТИЧКА  
АНАЛИЗА**

**Скопје, 2011**



# СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

vii

## I глава. ЕЛЕМЕНТИ ОД ТЕОРИЈА НА МНОЖЕСТВА, МАТЕМАТИЧКИ СТРУКТУРИ И РЕАЛНИ БРОЕВИ

|   |     |
|---|-----|
| 1. Елементи од теоријата на множествата                                   | 1   |
| 2. Пресликувања. Функции  | 5   |
| 3. Еквивалентни множества   | 7   |
| 4. Бинарни релации  | 9   |
| 5. Внатрешна бинарна операција. Полугрупа                                 | 11  |
| 6. Природни броеви. Основни својства                                      | 13  |
| 7. Собирање на природни броеви  | 17  |
| 8. Множење на природни броеви   | 20  |
| 9. Поим за група  | 23  |
| 10. Цели броеви   | 26  |
| 11. Рационални броеви   | 29  |
| 12. Групирање на елементи на конечно множество                            | 35  |
| 13. Пребројливи множества. Кардинални броеви                              | 38  |
| 14. Поим за изоморфизам и поле  | 43  |
| 15. Апсолутна вредност  | 45  |
| 16. Кошијеви низи во множеството рационални броеви                        | 48  |
| 17. Реални броеви   | 50  |
| 18. Аритметички својства на инфимумот и супремумот.<br>Теорема на Архимед | 63  |
| 19. Биномна формула и некои неравенства во<br>множеството реални броеви   | 67  |
| 20. Лема за вложени затворени интервали                                   | 74  |
| 21. Отворени и затворени множества во $\mathbf{R}$                        | 76  |
| 22. Точки на натрупување. Изводно множество                               | 81  |
| 23. Атхерентни и гранични точки. Затворац и<br>граница на множество       | 83  |
| 24. Густо множества   | 86  |
| 25. Компактни множества   | 89  |
| 26. Сврзани множества   | 93  |
| 27. Совршени множества  | 95  |
| 28. Множества од типот $G_\delta$ и $F_\sigma$                            | 98  |
| 29. Борелови множества  | 101 |
| 30. Поим за комплексен број   | 103 |
| 31. Конјугиран комплексен број  | 109 |
| 32. Геометриска интерпретација на комплексен број                         | 112 |
| 33. Тригонометриски запис на комплексен број.<br>Корен од комплексен број | 114 |
| 34. Задачи  | 120 |

## II глава. НИЗИ РЕАЛНИ БРОЕВИ

|  |     |
|--|-----|
| 1. Дефиниција на низа реални броеви. Конвергентни и дивергентни низи | 131 |
| 2. Елементарни својства на конвергентните низи                       | 134 |
| 3. Монотони низи   | 139 |
| 4. Бесконечно мали (нула) низи                                       | 142 |
| 5. Теореме на Теплиц и Штолц   | 145 |
| 6. Поднизи. Основни својства   | 149 |
| 7. Горна и долна граница на низа                                     | 153 |
| 8. Кошијеви низи во множеството реални броеви                        | 160 |
| 9. Претставување на реалните броеви со бесконечни десетични друпки   | 162 |
| 10. Непребројливи множества  | 166 |
| 11. Канторово множество  | 171 |
| 12. Задачи   | 175 |

## III глава. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА ВО ТОЧКА. НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ

|   |     |
|---|-----|
| 1. Граница на функција во точка   | 181 |
| 2. Својства на граница на функција во точка                               | 185 |
| 3. Граница на функција по множество                                       | 190 |
| 4. Едностранни граници. Егзистенција на граница на функција во точка      | 192 |
| 5. Непрекинати функции  | 197 |
| 6. Елементарни својства на непрекинатите функции                          | 201 |
| 7. Својства на функции непрекинати на сегмент                             | 205 |
| 8. Рамномерна непрекинатост   | 210 |
| 9. Точки на прекин на функција  | 214 |
| 10. Полиноми со реални коефициенти  | 216 |
| a) Дефиниција на полином. Еднаквост на полиноми                           | 216 |
| b) Нули на полином. Факторизација   | 218 |
| c) Најголем заеднички делител на полиноми                                 | 223 |
| d) Непрекинатост на полиноми  | 225 |
| 11. Рационални функции  | 228 |
| a) Дефиниција на рационална функција. Непрекинатост на рационални функции | 228 |
| b) Разложување на правилни рационални друпки на елементарни               | 229 |
| 12. Експоненцијална, логаритамска и степенска функција                    | 234 |
| 13. Тригонометриски и инверзни тригонометриски функции                    | 243 |
| 14. Хиперболични функции  | 257 |
| 15. Елементарни функции   | 259 |
| 16. Параметарски зададени функции   | 260 |
| 17. Функции зададени во поларни координати                                | 263 |

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 18. Споредување на функции      | 268 |
| 19. Еквивалентни функции        | 274 |
| 20. Задачи                      | 279 |
| Упатства и решенија на задачите | 289 |
| Литература                      | 329 |
| Индекс на поими                 | 335 |
| Индекс на имиња                 | 339 |
| За авторот                      | 343 |



## ПРЕДГОВОР КОН ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава содржи целосен опфат на разработуваниот материјал, кој е неопходен за натамошното изучување на математичката анализа. Всушност оваа книга е воведна во серијата книги под заеднички наслов МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА. Материјалот е поделен на три глави, и тоа:

1. Елементи од теоријата на множествата, математички структури и реални броеви,
2. Низи реални броеви, и
3. Граница на функција во точка. Непрекинати функции

Во првата глава постапно се конструирани множествата  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{C}$ . Притоа посебно внимание е посветено на воведувањето на реалните броеви, како класи на еквиваленција на Кошиеве низи рационални броеви. Заради целовитост на излагањата, се разработени и некои содржини од алгебрата и топологијата, а дел од излагањата се во функција на натамошното изучување на математичката анализа. На читателот му препорачувам при првичното разработување на изложениот материјал, нив да не ги изучува. Ова особено се однесува на параграфите 26, 27, 28 и 29, како и на задачите сврзани со оваа материја.

Втората глава е посветена на низите реални броеви. Воведени се поимите конвергентни и дивергентни низи, монотони низи, поднизи, нула низи, горна и долна граница на низа и Кошиева низа и во врска со овие поими се докажани повеќе својства. Во рамките на оваа глава е дадено претставувањето на реалните броеви со бесконечни десетични дропки, се разработени непребројливите множества, а посебно внимание е посветено на Канторовото множество. Како и во првата глава и овде се поместени содржини кои се во функција на натамошното изучување на математичката анализа, кои слободно може да се изостават при првото усвојување на изложениот материјал.

Во третата глава се воведени поимите и се дадени својствата на граница на функција, непрекинатост и рамномерна непрекинатост. Посебно внимание е посветено на изучувањето на елементарните функции, при што детално се разработени полиномите со реални коефициенти, факторизацијата, непрекинатоста и разложувањето на правилните рационални дробки на прости дробки. Исто така, со цел да се запази аксиоматскиот приод и нивото на строгост во излагањата, тригонометриските функции се воведени како решенија на функционални равенки, со што е избегната геометриската дефиниција на истите. На крајот од оваа глава, во параграфите 18 и 19 се разработува споредувањето на функциите и еквивалентните функции.

На крајот од книгава е даден список на литературата која е користена при изработката на споменатата серија книги и која на читателот треба да му укаже на дел од литературата која дополнително може да ја користи при усвојување на разработуваните содржини. Исто така, презентирани се индекс на автори на значајни поими и резултати опфатени во споменатата серија книги, за кои е даден периодот во кој живееле и земјата од која потекнуваат и во која твореле. Постојат повеќе причини кои ме поттикнува да ги презентирам овие податоци, но сепак од пресудно значење беше желбата на читателите да им се укаже од кој период потекнуваат научните сознанија кои ги усвојуваат и каде истите се создавале. Се разбира, на крајот од книгава е даден детален индекс на разработуваните поими и тврдења, кој треба да го олесни користењето на книгава.

Изучувањето на математичката анализа, како и на секоја математичка дисциплина, не е можно без систематско самостојно решавање на задачи. Токму затоа, при изложувањето на материјалот се разработени 90 примери со кои се појаснуваат воведените поими и презентирани тврдења, и на крајот од секоја глава се дадени задачи за самостојна работа, вкупно 226. Дел од задачите, како и примерите, содржат и по неколку подзадачи, па така бројот на задачите е значително поголем. Примерите и задачите се така избрани, што дел од нив се во функција на усвојување на презентираниот материјал, дел се наменети за утврдување на усвоените знаења, но има и задачи кои се од натпреварувачки карактер. Притоа, посебно внимание е обрнато на разгледување на погодни избрани контрапримери, се со цел да се укаже на конзистентноста на одделни тврдења, но и да се потенцира значењето на воведените поими и докажаните теореми.

Пријатна должност и особено задоволство ми е да им искажам благодарност на рецензентите проф. д-р Новак Ивановски и проф. д-р Марија Оровчанец кои со своите забелешки и сугестии придонесоа за подобрување на содржината на оваа книга. Исто така сакам да се заблагодарам на м-р Вера Малческа која внимателно го прочитаа ракописот и со своите забелешки даде значаен придонес за неговото подобрување.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа книга, па затоа сум однапред благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија.

Септември, 2011  
Скопје

Авторот