Самоил Малчески, Скопје
Македонија

ПОДГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ (АЛГЕБАРСКИ НЕРАВЕНСТВА)

Во [1] и [2] се докажани основните неравенства меѓу средините и се решени повеќе примери. Понатаму, во [4] се разгледани основните неравенства и се решени повеќе задачи со примена на истите, а во [4] се разгледани повеќе примери кои се решени со помош на неравенствата меѓу средините и разложување на алгебарски изрази. Во продолжение со примена на основните неравенства и неравенствата меѓу средините ќе докажеме поголем број алгебарски неравенства, за кои сметаме дека се погодни за подготовка на учениците за национални натпревари по математика.

1. Што е поголемо 2^{2012} или 15^{503}?

   Решение. Имаме
$$2^{2012}=2^{4\cdot 503}=(2^4)^{503}=16^{503}>15^{503}.$$

2. Спореди ги броевите 2^{7n+3} и 5^{3n+1}, каде $n\in\mathbb{N}$.

   Решение. Од $2^7=128>125=5^3$ следува
$$(2^7)^n>(5^3)^n \text{, т.е. } 2^{7n}>5^{3n}.$$
   Понатаму, од $2^3>5$, добиваме
$$2^{7n+3}=2^{7n}\cdot 2^3>5^{3n}\cdot 5=5^{3n+1}.$$

3. Што е поголемо $4^{2012}+9^{2012}$ или $2^{2013}\cdot 3^{2012}$?

   Решение. Од $(3^{2012}-2^{2012})^2>0$ следува
$$(3^{2012})^2-2\cdot 3^{2012}\cdot 2^{2012}+(2^{2012})^2>0,$$
$$(3^2)^{2012}-3^{2012}\cdot 2^{2013}+(2^2)^{2012}>0,$$
$$4^{2012}+9^{2012}>3^{2012}\cdot 2^{2013}.$$

4. Докажи дека $2^{2015}+3^{2015}<4^{2015}$.

   Решение. Имаме

$$2^{2015}+3^{2015}<2\cdot 3^{2015},$$

па затоа доволно е да докажеме дека $2\cdot 3^{2015}<4^{2015}$. Последното неравенство следува од

$$2=\frac{54}{27}<\frac{64}{27}=(\frac{4}{3})^3<(\frac{4}{3})^3(\frac{4}{3})^{2012}=\frac{4^{2015}}{3^{2015}}.$$

5. Докажи го неравенството

$$3^{2016}+4^{2016}<6^{2016}.$$

Решение. Имаме $3^{2016}+4^{2016}<2\cdot 4^{2016}$, па затоа доволно е да докажеме дека $2\cdot 4^{2016}<6^{2016}$, односно $2\cdot 2^{2016}<3^{2016}$. Сега, од $\frac{2}{3}<1$ и $\frac{8}{9}=\frac{2^3}{3^2}<1$ следува $(\frac{2}{4})^{2014}\frac{2^3}{3^2}<1$, односно $2\cdot 2^{2016}<3^{2016}$.

6. Дадени се броевите

$$a=22^{22},\ B=222^2,\ d=22^{2^2},\ e=2^{2^{22}},\ f=2^{222}\text{ и } g=2^{2^{2^2}}.$$

Спореди ги овие броеви и подреди ги во растечки редослед.

Решение. Јасно,

$$22^2=484<1024=2^{10}<2^{22}.$$

Бидејќи $222<256=2^8$, имаме

$$222^2<(2^8)^2=2^{16}=2^{2^{2^2}}.$$

Слично,

$$2^{2^{2^2}}=2^{16}=16^4<22^4=22^{2^2}<22^{22}.$$

Понатаму,

$$22^{22}<32^{22}=(2^5)^{22}=2^{110}<2^{222}.$$

Исто така,

$$2^{222}<2^{484}=2^{22^2}<2^{2^{22}}.$$

Конечно, од претходно изнесеното следува

$$b<g<d<a<f<c<e.$$

7. Спореди ги дропките $\frac{5^{2007}+1}{5^{2008}+1}$ и $\frac{5^{2008}+1}{5^{2009}+1}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{5^{2007}+1}{5^{2008}+1}-\frac{5^{2008}+1}{5^{2009}+1}=\frac{(5^{2007}+1)(5^{2009}+1)-(5^{2008}+1)^2}{(5^{2008}+1)(5^{2009}+1)}$$
$$=\frac{5^{4016}+5^{2007}+5^{2009}+1-5^{4016}-2\cdot 5^{2008}-1}{(5^{2008}+1)(5^{2009}+1)}$$
$$=\frac{5^{2007}+5^{2009}-2\cdot 5^{2008}}{(5^{2008}+1)(5^{2009}+1)}$$
$$=\frac{5^{2007}(1+5^2-2\cdot 5)}{(5^{2008}+1)(5^{2009}+1)}$$
$$=\frac{16\cdot 5^{2007}}{(5^{2008}+1)(5^{2009}+1)}>0,$$

па затоа $\frac{5^{2007}+1}{5^{2008}+1}>\frac{5^{2008}+1}{5^{2009}+1}$.

8. Докажи дека

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots\frac{1}{2005\cdot 2007}<\frac{1}{2}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3-1}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}=(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{3\cdot 5}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5-3}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{2}=(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})\cdot\frac{1}{2},$$

....

$$\frac{1}{2005\cdot 2007}=\frac{1}{2005\cdot 2007}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{2005\cdot 2007}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2007-2005}{2005\cdot 2007}\cdot\frac{1}{2}=(\frac{1}{2005}-\frac{1}{2007})\cdot\frac{1}{2}$$

па затоа

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots\frac{1}{2005\cdot 2007}=(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})\cdot\frac{1}{2}+\dots+(\frac{1}{2005}-\frac{1}{2007})\cdot\frac{1}{2}$$
$$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2007})\cdot\frac{1}{2}$$
$$=(1-\frac{1}{2007})\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2007}\cdot\frac{1}{2}<\frac{1}{2}.$$

9. Докажи дека $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}<1$.

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{16}{2\cdot 16}+\frac{8}{4\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 4}+\frac{2}{16\cdot 2}+\frac{1}{32}$$
$$=\frac{16}{32}+\frac{8}{32}+\frac{4}{32}+\frac{2}{32}+\frac{1}{32}$$
$$=\frac{16+8+4+2+1}{32}=\frac{31}{32}<1.$$

10. Докажи дека

$$1<\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{17}<2\,.$$

Решение. Прво ќе докажеме дека дадениот збир е поголем од 1. Имаме:

$$\frac{1}{5}>\frac{1}{10},\ \frac{1}{6}>\frac{1}{10},\ \frac{1}{7}>\frac{1}{10},\ \frac{1}{8}>\frac{1}{10},\ \frac{1}{9}>\frac{1}{10},\ \frac{1}{10}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{11}>\frac{1}{17},\ \frac{1}{12}>\frac{1}{17},\ \frac{1}{13}>\frac{1}{17},\ \frac{1}{14}>\frac{1}{17},\ \frac{1}{15}>\frac{1}{17},\ \frac{1}{16}>\frac{1}{17},\ \frac{1}{17}=\frac{1}{17},$$

па затоа

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{17}>6\cdot\frac{1}{10}+7\cdot\frac{1}{17}=\frac{3}{5}+\frac{7}{17}=\frac{51+35}{85}=\frac{86}{85}>1\,.$$

Понатаму,

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{5},\ \frac{1}{6}<\frac{1}{5},\ \frac{1}{7}<\frac{1}{5},\ \frac{1}{8}<\frac{1}{5},\ \frac{1}{9}<\frac{1}{5},$$

$$\frac{1}{10}=\frac{1}{10},\ \frac{1}{11}<\frac{1}{10},\ \frac{1}{12}<\frac{1}{10},\ \frac{1}{13}<\frac{1}{10},\ \frac{1}{14}<\frac{1}{10},\ \frac{1}{15}<\frac{1}{10},\ \frac{1}{16}<\frac{1}{10},\ \frac{1}{17}<\frac{1}{10},$$

па затоа

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{17}<5\cdot\frac{1}{5}+8\cdot\frac{1}{10}=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}<2\,.$$

11. Докажи дека

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{200}>1\,.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{100}>\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+...+\frac{1}{100}=50\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+...+\frac{1}{200}>\frac{1}{200}+\frac{1}{200}+\frac{1}{200}+...+\frac{1}{200}=100\cdot\frac{1}{200}=\frac{1}{2},$$

па затоа

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{200}=(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{100})+(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200})$$

$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

12. Докажи дека

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(2021^3+1)}>\frac{674}{1011}\,.$$

Решение. Користејќи ги идентитетите

$$x^3\pm1=(x\pm1)(x^2\mp x+1)$$

имаме:

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(2021^3+1)}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2020}{3\cdot4\cdot5\cdot...\cdot2022}\cdot\frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)...(2021^2+2021+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)...(2021^2-2021+1)}\quad(1)$$

За првата од двете дропки на десната страна од добиеното равенство (1), со кратење, добиваме:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2020}{3\cdot 4\cdot 5\cdot ...\cdot 2022}=\frac{2}{2021\cdot 2022}=\frac{1}{2021\cdot 1011}.$$

За да ја пресметаме втората дропка на десната страна на (1), ќе го користиме идентитетот:

$$x^2+x+1=(x+1)^2-(x+1)+1.$$

Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2020}{3\cdot 4\cdot 5\cdot ...\cdot 2022}\cdot\frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)...(2021^2+2021+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)...(2021^2-2021+1)}&=\frac{2021^2+2021+1}{2^2-2+1}\\&=\frac{2021\cdot 2022+1}{3}\\&>\frac{2021\cdot 2022}{3}=2021\cdot 674\end{aligned}$$

Конечно,

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(2021^3+1)}>\frac{1}{2021\cdot 1011}\cdot 2021\cdot 674=\frac{674}{1011}.$$

13. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{2}{2022}}<\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot ...\cdot\frac{2021}{2022}<\sqrt{\frac{3}{2023}}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot ...\cdot\frac{2021^2}{2022^2}&>\frac{3^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{6^2}\cdot\frac{7^2-1}{8^2}\cdot ...\cdot\frac{2021^2-1}{2022^2}\\&=\frac{2\cdot 4}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{6^2}\cdot\frac{6\cdot 8}{8^2}\cdot ...\cdot\frac{2020\cdot 2022}{2022^2}=\frac{2}{2022}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot ...\cdot\frac{2021^2}{2022^2}&<\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdot\frac{7^2}{8^2-1}\cdot ...\cdot\frac{2021^2}{2022^2-1}\\&=\frac{3^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{5^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{7^2}{7\cdot 9}\cdot ...\cdot\frac{2021^2}{2021\cdot 2023}=\frac{3}{2023}.\end{aligned}$$

Конечно, со коренување на горните неравенства се добива бараното неравенство.

14. Докажи дека

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}<8.$$

Решение. Од $\sqrt{6}<3$ следува

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}<\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+3}}}=3,$$

а од $\sqrt{20} < 5$ следува

$$\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}} < \sqrt{20+\sqrt{20+5}} = 5,$$

па затоа

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} + \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}} < 3+5 = 8.$$

15. Докажи дека

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}} + \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}} < 10.$$

Решение. Од $\sqrt{12} < 4$ следува

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}} < \sqrt{12+\sqrt{12+4}} = 4,$$

а од $\sqrt{30} < 6$ следува

$$\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}} < \sqrt{30+\sqrt{30+6}} = 6.$$

Конечно,

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}} + \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}} < 4+6 = 10.$$

16. Докажи дека

$$\sqrt{13-\sqrt{13+\sqrt{13}}} < 3.$$

Решение. Бидејќи $\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$, добиваме $3 < \sqrt{13} < 4$. Тогаш $13+3 < 13+\sqrt{13} < 13+4$, т.е. $16 < 13+\sqrt{13} < 17$. Според тоа, точни се неравенствата $4 < \sqrt{13+\sqrt{13}} < 5$, од каде следува

$$8 = 13-5 < 13-\sqrt{13+\sqrt{13}} < 13-4 = 9,$$

т.е.

$$\sqrt{8} < \sqrt{13-\sqrt{13+\sqrt{13}}} < \sqrt{9} = 3,$$

што и требаше да се докаже.

17. Докажи дека

$$\sqrt{1+\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}} > 2.$$

Решение. Од

$$\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2, \sqrt{10} > \sqrt{9} = 3, \sqrt{17} > \sqrt{16} = 4,$$

добиваме

$$\sqrt{1+\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}} > \sqrt{1+\sqrt{2+3+4}} = \sqrt{1+\sqrt{9}} = \sqrt{1+3} = 2.$$

18. Што е поголемо $\sqrt{5}+\sqrt{8}$ или $\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

Решение. Нека $x=\sqrt{5}+\sqrt{8}$ и $y=\sqrt{6}+\sqrt{7}$. Имаме:

$$x^2=(\sqrt{5}+\sqrt{8})^2=\sqrt{5}^2+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}+\sqrt{8}^2=13+2\sqrt{40},$$

$$y^2=(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2=\sqrt{6}^2+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}^2=13+2\sqrt{42}.$$

Бидејќи $13+2\sqrt{42}>13+2\sqrt{40}$ добиваме $x^2>y^2$, па од $x,y>0$ следува $x>y$. Значи, $\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

19. Докажи дека $|2x-8|+|3-2x|\geq 5$ за секој реален број x.

Решение. Ако го искористиме неравенството $|a+b|\leq|a|+|b|$ кое важи за секои броеви a и b, и тоа дека $|-a|=|a|$, добиваме

$$5=|3-8|=|2x-8+3-2x|\leq|2x-8|+|3-2x|.$$

20. Ако $x+y+z=5$, докажи дека

$$|x-5|+|y+3|+|z-9|\geq 6.$$

Решение. Ако искористиме дека за секои броеви a,b,c важи

$$|a+b+c|\leq|a|+|b|+|c|,$$

добиваме

$$\begin{aligned}6&=|5-11|=|x+y+z-11|\\&=|x-5+y+3+z-9|\\&\leq|x-5|+|y+3|+|z-9|,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

21. Ако $a+b>0$, докажи дека $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

Решение. Ако $a+b>0$,тогаш последователно добиваме

$$(a+b)(a-b)^2>0,$$

$$(a+b)(a-b)(a-b)>0,$$

$$(a^2-b^2)(a-b)>0,$$

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2>0,$$

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2,$$

што и требаше да се докаже.

22. Докажи дека за секој реален број a важи неравенството

$$3(1+a^2+a^4)\geq(1+a+a^2)^2.$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквиваленно со неравенсвото

$$3(1+a^2+a^4)\geq(1+a+a^2)^2,$$
$$3+3a^2+3a^4\geq 1+a^2+a^4+2a+2a^2+2a^3,$$
$$2a^4-2a^3-2a+2\geq 0,$$
$$2a^3(a-1)-2(a-1)\geq 0,$$
$$2(a-1)(a^3-1)\geq 0,$$
$$(a-1)(a-1)(2a^2+2a+2)\geq 0,$$
$$(a-1)^2(a^2+1+(a+1)^2)\geq 0.$$

Конечно, од точноста на последното неравенство следува точноста на даденото неравенство.

23. Докажи дека за секој реален број x важи

$$x^{10}-2x^3+4x^2-8x+16>0.$$

Решение. Ако $x<0$, тогаш секој собирок $x^{10},-2x^3,4x^2,-8x,16$, па затоа и нивниот збир $x^{10}-2x^3+4x^2-8x+16$ е позитивен.

Ако $0\leq x<2$, тогаш $2-x>0$, па затоа

$$x^{10}-2x^3+4x^2-8x+16=x^{10}+2x^2(2-x)+8(2-x)>0.$$

Ако $x\geq 2$, тогаш $x-2>0$, па затоа

$$\begin{aligned}x^{10}-2x^3+4x^2-8x+16&>x^4-2x^3+4x^2-8x+16\\&=x^3(x-2)+4x(x-2)+16>0,\end{aligned}$$

бидејќи сите собирци $x^3(x-2),\ 4x(x-2),16$ се позитивни.

24. Докажи дека за секој реален број x важи

$$(x^2+1)^8-(x^2+1)^5\geq\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^4}.$$

Решение. Воведуваме смена $y=x^2+1$. Од $x^2\geq 0$, за секој реален број x следува $y\geq 1$. Оттука, бидејќи $y>0$, последователно добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенствата

$$y^8 - y^5 \geq \frac{1}{y} - \frac{1}{y^4},$$

$$y^{12} - y^9 \geq y^3 - 1,$$

$$y^9(y^3 - 1) - (y^3 - 1) \geq 0,$$

$$(y^3 - 1)(y^9 - 1) \geq 0.$$

Но, од $y \geq 1$ следува $y^3 \geq 1$ и $y^9 \geq 1$, па затоа $y^3 - 1 \geq 0$ и $y^9 - 1 \geq 0$, што значи дека е точно последното неравенство, т.е. точно е даденото неравенсво.

25. Докажи дека $x^2 - x + 1 > 0$ за секој реален број x.

Решение. *Прв начин*. Бидејќи $(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ имаме

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

Втор начин. Имаме $x^2 \geq 0$ и $(x-1)^2 \geq 0$, па затоа важи $x^2 + 1 > 0$ и $x^2 - 2x + 1 \geq 0$. Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме $2x^2 - 2x + 2 > 0$. Последното неравенство го делиме со 2, и добиваме $x^2 - x + 1 > 0$.

26. Ако x и y се реални броеви, тогаш $x^4 + y^4 \geq x^3 y + x y^3$. Докажи!

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$x^4 + y^4 - x^3 y - x y^3 \geq 0,$$

$$x^3(x - y) - y^3(x - y) \geq 0,$$

$$(x - y)(x^3 - y^3) \geq 0,$$

$$(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0 \quad (1)$$

Понатаму, за секои реални броеви x и y важи $(x - y)^2 \geq 0$ и

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4} y^2$$

$$= (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4} y^2 \geq 0.$$

Конечно, ако ги помножиме последните две неравенства го добиваме неравенството (1), што и требаше да се докаже.

27. Докажи дека за произволни реални броеви x, y и z важи неравенството:

$$3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2 .$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2 &= 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz\\ &= x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2xz+x^2\\ &= (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0,\end{aligned}$$

т.е.

$$3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2 .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

28. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge a+b+c$$

и знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

Решение. За секои $x,y\in\mathbb{R}^+$ важи $\frac{x^3}{y^2}\ge 3x-2y$. Притоа, знак за равенство важи ако и само ако $x=y$. Множејќи со y^2 и користејќи дека

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2) ,$$

заклучуваме дека споменатото неравенство е еквивалентно со неравенството:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)\ge 3y^2(x-y) . \qquad (1)$$

Разгледуваме три случаи:

1) Ако $x>y$, тогаш (1) е еквивалентно со неравенството

$$x^2+xy+y^2\ge 3y^2 ,$$

кое очигледно е исполнето.

2) Ако $x=y$, тогаш (1) преминува во равенство.

3) Ако $x<y$, тогаш (1) е еквивалентно со неравенството

$$x^2+xy+y^2\le 3y^2 ,$$

кое очигледно е исполнето.

Од досега изнесеното следува

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge 3a-2b+3b-2c+3c-2a=a+b+c .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

29. Докажи дка не постојат реални броеви a,b,c,d такви што

$$a-b^2>\tfrac{1}{4},\ b-c^2>\tfrac{1}{4},\ c-d^2>\tfrac{1}{4},\ d-a^2>\tfrac{1}{4}. \qquad (1)$$

Решение. Нека постојат релани броеви такви што се исполнето неравенствата (1). Ги собереме дадените неравенства, добиваме

$$a+b+c+d-a^2-b^2-c^2-d^2>1,$$

од каде следува

$$(a-\tfrac{1}{2})^2+(b-\tfrac{1}{2})^2+(c-\tfrac{1}{2})^2+(d-\tfrac{1}{2})^2<1,$$

што не е точно.

30. Докажи дека не постојат позитивни реални броеви a,b,c такви што

$$a(1-b)>\tfrac{1}{4},\ b(1-c)>\tfrac{1}{4},\ c(1-a)>\tfrac{1}{4}. \qquad (1)$$

Решение. За секој реален број x важи $(x-\frac{1}{2})^2\geq 0$, од каде добиваме дека $x^2-x+\frac{1}{4}\geq 0$, односно

$$x(1-x)\leq\tfrac{1}{4} \qquad (2)$$

за секој реален број x.

Нека претпоставиме дека постојат позитивни реални броеви a,b,c такви што се исполнети неравенствата (1). Тогаш $1-b>0$, $1-c>0$ и $1-a>0$, па затоа прво од неравенствата (1), а потоа од неравенството (2) следува

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{64}=\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}&<a(1-b)b(1-c)c(1-a)\\&=a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)\\&\leq\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{64},\end{aligned}$$

што е противречност. Конечно, од добиената проитврречност следува тврдењето на задачата.

31. Ако x,y,z се ненегативни реални броеви такви што $x+y+z=6$, докажи дека $xy+yz+zx\leq 12$.

Решение. Ако искористиме дека за секои ненегативни реални броеви a,b важи $ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$, добиваме

$$
\begin{aligned}
36 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\
&= \tfrac{x^2+y^2}{2} + \tfrac{y^2+z^2}{2} + \tfrac{z^2+x^2}{2} + 2xy + 2yz + 2zx \\
&\geq xy + yz + zx + 2xy + 2yz + 2zx \\
&= 3(xy + yz + zx),
\end{aligned}
$$

од каде добиваме $xy + yz + zx \leq 12$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = 2$.

32. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$. Докажи дека

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \leq \frac{1}{abc} . \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството $(a + b - c)^2 \geq 0$ следува дека

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - bc - ca) \geq 0 ,$$

односно

$$ac + bc - ba \leq \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{3} = \tfrac{5}{6} < 1 .$$

Ако последното неравенство го поделиме со abc , го добиваме неравенството (1).

33. Ако $a - b \geq 12$, каде $a,b \in \mathbb{R}$, докажи дека $a^4 + b^4 > 2006$.

Решение. Ако искористиме дека $a^2 + b^2 \geq -2ab$, добиваме

$$2a^2 + 2b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 144 \text{, т.е. } a^2 + b^2 \geq 72 .$$

Понатаму, $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$, па затоа

$$2a^4 + 2b^4 \geq a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 \geq 72^2 ,$$

т.е.

$$a^4 + b^4 \geq 2592 > 2006 .$$

34. Определи број x така што збирот $x + x^2$ ќе биде минимален.

Решение. Имаме

$$x^2 + x = x^2 + 2x \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} = (x + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} \geq -\tfrac{1}{4} .$$

Според тоа, најмалата можна вредност на збирот $x + x^2$ ќе биде еднаква на $-\frac{1}{4}$ и таа се достигнува за $x = -\frac{1}{2}$.

35. За кои вредности на реалните броеви x и y изразот

$$x^2-8xy+19y^2-6y+3$$

прима најмала вредност.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}x^2-8xy+19y^2-6y+3&=x^2-8xy+16y^2+3y^2-6y+3\\&=(x-4y)^2+3(y-1)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x-4y=y-1=0$, т.е. ако и само ако $y=1$ и $x=4$. Значи, најмалата можна вредност на дадениот израз е 0 и истата се достигнува за $y=1$ и $x=4$.

36. Во множеството позитивни реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}x+\frac{1}{y}=2-(y-z)^2\\ y+\frac{1}{z}=2-(x-y)^2\\ z+\frac{1}{x}=2-(z-x)^2.\end{cases}$$

Решение. Ги собираме равенките од системот и добиваме

$$x+y+z+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}=6-(y-z)^2-(x-y)^2-(z-x)^2.$$

Од $a+\frac{1}{a}\geq 2$ за секој позитивен реален број a следува дека левата страна на последната равенка е поголема или еднаква на 6. Но, десната е помала или еднаква на 6, па затоа знак за равенство важи ако и само ако двете страни се еднакви на 6, односно ако и само ако $x=y=z=1$.

37. Ако x и y се ненегативни реални броеви такви што $x^2+y^2=18$, тогаш $x+y\leq 6$. Докажи!

Решение. *Прв начин*. Од $(x-y)^2\geq 0$ следува $x^2-2xy+y^2\geq 0$, т.е. $x^2+y^2\geq 2xy$. Оттука следува дека

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\leq 2(x^2+y^2)=36,$$

па затоа $x+y\leq 6$.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина имаме

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3 \text{, т.е. } x+y \leq 6 .$$

38. Докажи дека за ненегативни реални броеви x, y, z и t важи неравенството

$$(\frac{x+y+z+t}{4})^4 \geq xyzt . \qquad (1)$$

Решение. За секои ненегативни реални броеви a и b е исполнето $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$, од каде добиваме $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$, т.е. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Притоа знак за равенство важи ако и само ако $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, т.е. ако и само ако $a=b$.

Ако во последното неравенство земеме $a=\frac{x+y}{2}, b=\frac{z+t}{2}$, добиваме

$$\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+t}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{x+y}{2} \cdot \frac{z+t}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{zt}} = \sqrt[4]{xyzt} ,$$

од каде по средувањето и степеувањето на степен 4 следува неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{x+y}{2}=\frac{z+t}{2}$ и $x=y$, $z=t$, т.е. ако и само ако $x=y=z=t$.

39. Докажи дека за ненегативните реални броеви a,b и c важи неравенството

$$(\frac{a+b+c}{3})^3 \geq abc . \qquad (1)$$

Решение. Ако во неравенството $(\frac{x+y+z+t}{4})^4 \geq xyzt$ ставиме $x=a$, $y=b$, $z=c$ и $t=\frac{a+b+c}{3}$, последователно добиваме

$$(\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4})^4 \geq abc\frac{a+b+c}{3},$$

$$(\frac{1}{4}\frac{4(a+b+c)}{3})^4 \geq abc\frac{a+b+c}{3},$$

$$(\frac{a+b+c}{3})^4 \geq abc\frac{a+b+c}{3},$$

$$(\frac{a+b+c}{3})^3 \geq abc.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{a+b+c}{3}$,т.е. $a=b=c$.

Литература

1. Milošević, D., O brojevnim sredinama za dva pozitivna broja, Matka, 114, 2020/2021
2. Малчески, Р., Неравенства меѓу срединитe, Математички талент, 2021
3. Малчески, С., Докажување неравенства со разложување и со примена на неравенствата меѓу срединитe, Математички талент, 2023
4. Тошић, Р., Основна својства неједнакости и примене у решавању задатака, Математички лист (Математички талент), Београд (Скопје)