

Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

ЕНГЕЛОВ ПРИНЦИП НА МИНИМУМ

Во оваа статија ќе го разгледаме таканаречениот Енгелов принцип на минимум, кој го вовел познатиот германски математичар и едукатор Arthur Engel (1928-2022). Енгеловиот принцип на минимум вуспност е запис на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц во друга форма, но истиот е полезен при решавање на голем број задачи.

Теорема 1 (Енгелов принцип на минимум). Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се реални броеви и $x_1, x_2, \dots, x_n$ се ненегативни реални броеви. Тогаш

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}, \quad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \dots = \frac{a_n}{x_n}. \quad (2)$$

Доказ. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц непосредно следува неравенството

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &= \left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}} \sqrt{x_1} + \frac{a_2}{\sqrt{x_2}} \sqrt{x_2} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{x_n}} \sqrt{x_n} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \right) (x_1 + x_2 + \dots + x_n), \end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

Јасно знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{\sqrt{x_1}} : \sqrt{x_1} = \frac{a_2}{\sqrt{x_2}} : \sqrt{x_2} = \dots = \frac{a_n}{\sqrt{x_n}} : \sqrt{x_n},$$

т.е. ако и само ако важи (2).

Втор начин. За $n = 2$ неравенството (1) има облик

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{x_1 + x_2},$$

и тоа е еквивалентно со неравенството

$$(a_1^2 x_2 + a_2^2 x_1)(x_1 + x_2) \geq (a_1 + a_2)^2 x_1 x_2,$$

т.е. со неравенството $(a_1 x_2 - a_2 x_1)^2 \geq 0$, кое очигледно е точно и притоа

знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2}$.

Нека претпоставиме дека неравенството важи за $n = k$. Тогаш, за $n = k + 1$, од индуктивната претпоставка и претходно докажаното следува

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_k^2}{x_k} + \frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_k} + \frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1})^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој $n \in \mathbb{N}$. ■

Задача 1. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a, b, c, d е точно неравенството

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Решение. Користејќи го Енгеловиот принцип на минимум, т.е. неравенството (1), добиваме

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} = \frac{1^2}{a} + \frac{1^2}{b} + \frac{2^2}{c} + \frac{4^2}{d} \geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d} = \frac{64}{1+b+c+d}. \blacksquare$$

Задача 2. Ако $a_i, b_i > 0$, за $i = 1, 2, \dots, n$ се такви што $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$, докажи дека

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум и условот на задачата следува

$$\begin{aligned} \frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} &\geq \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{a_1+b_1+a_2+b_2+\dots+a_n+b_n} \\ &= \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{2(a_1+a_2+\dots+a_n)} \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n), \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 3. Ако позитивните броеви x, y и z го задоволуваат условот $xyz = 1$, докажи го неравенството

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Со примена на Енгеловиот принцип на минимум имаме

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}.$$

Ако пак го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и го користиме условот $xyz = 1$, добиваме

$$\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}. \blacksquare$$

Забелешка 1. а) Непосредна последица од теорема 1 е неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц. Имено, ако $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, за $i = 1, 2, \dots, n$, тогаш од неравенството (1) следува неравенството

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 &= \frac{a_1^2 b_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2 b_2^2}{b_2^2} + \dots + \frac{a_n^2 b_n^2}{b_n^2} \\ &= \frac{(a_1 b_1)^2}{b_1^2} + \frac{(a_2 b_2)^2}{b_2^2} + \dots + \frac{(a_n b_n)^2}{b_n^2} \\ &\geq \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}, \end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц.

б) Непосредна последица од теорема 1 е неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина. Навистина, ако $a_i > 0$, за $i = 1, 2, \dots, n$, тогаш од (1) следува неравенството

$$\frac{a_1^2}{n} + \frac{a_2^2}{n} + \dots + \frac{a_n^2}{n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n + n + \dots + n} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2,$$

кое е еквивалентно со неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина.

Задача 4. Нека a, b се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4.$$

Решение. За $n = 2$, прво од Енгеловиот принцип на минимум, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$a^4 + b^4 = \frac{a^4}{1} + \frac{b^4}{1} \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq \frac{\left[\frac{(a+b)^2}{2} \right]^2}{2} = \frac{(a+b)^4}{8}. \blacksquare$$

Задача 5. Докажи, дека ако позитивните реални броеви a, b и c го задовуваат условот $a + b + c = 1$, тогаш точно е неравенството

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

Решение. Прво да забележиме дека од условот на задачата следува

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

Сега од Енгеловиот принцип на минимум следува $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+2b+c} = \frac{4}{1+b}$ и аналогно $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{1+c}$ и $\frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{4}{1+a}$. Ако ги собереме последните три неравенства добиваме дека $2(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}) \geq \frac{4}{1+a} + \frac{4}{1+b} + \frac{4}{1+c}$, од каде директно следува бараното неравенство. ■

Задача 6. Нека каде a, b, c и d се позитивни броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} &= \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+d)} + \frac{c^2}{c(d+a)} + \frac{d^2}{d(a+b)} \\ &\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{2ac+2bd+ab+bc+cd+da}. \end{aligned}$$

Од друга страна

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

па значи

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 - 2(2ac+2bd+ab+bc+cd+da) &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \\ &= (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

од каде следува бараното неравенство. ■

Задача 7. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум непосредно следува

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} = \frac{\sqrt{2}^2}{x+y} + \frac{\sqrt{2}^2}{y+z} + \frac{\sqrt{2}^2}{z+x} \geq \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}{x+y+y+z+z+x} = \frac{9}{x+y+z}. \quad \blacksquare$$

Задача 8. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{y^2+z^2}{y+z} + \frac{z^2+x^2}{z+x} \geq x+y+z.$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{y^2+z^2}{y+z} + \frac{z^2+x^2}{z+x} &= \left(\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \right) + \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{y+z} + \frac{x^2}{z+x} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} + \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} \\ &= x+y+z. \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 9. Докажи дека за секои $a, b, c \in \mathbb{R}$ е точно неравенството

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca).$$

Решение. Од очигледното неравенство $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ по квадрирање и средување го добиваме неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Ако на последното неравенство од двете страни додадеме $2ab + 2bc + 2ca$, по средувањето го добиваме бараното неравенство. ■

Последица 1 (неравенство на Несбит). Ако $a, b, c > 0$, тогаш

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Доказ. Од Енгеловиот принцип на минимум и од задача 9 непосредно следува

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \\ &\geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 10. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ се такви што $abc = 1$. Докажи дека

$$\frac{1}{ab+b} + \frac{1}{bc+c} + \frac{1}{ca+a} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Земаме $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ и добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно на неравенството на Несбит $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$. ■

Задача 11. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ се такви што такви што $abc = 1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Со примена, прво на Енгеловиот принцип на минимум, а потоа на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата, добиваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)} \geq \frac{(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2}{2(ab+bc+ca)} \\ &= \frac{ab+bc+ca}{2abc} \geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2abc} = \frac{3}{2}. \blacksquare\end{aligned}$$

Задача 12. Нека a, b и c се позитивни броеви такви да $a + b + c \leq 3$. Докажи дека

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум следува, дека

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{3^2}{3+a+b+c}.$$

Од друга страна, од условот на задачата добиваме $a + b + c + 3 \leq 6$ и значи

$$\frac{1}{3+a+b+c} \geq \frac{1}{6} \text{ од каде добиваме } \frac{3^2}{3+a+b+c} \geq \frac{9}{6} = \frac{3}{2}. \blacksquare$$

Задача 13. За позитивните броеви x и y да се докаже неравенството:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \geq \frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}.$$

Решение. Од Енгеловиот принципи на минимум добиваме

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \geq \frac{2^2}{\sqrt[4]{x+\sqrt[4]{y}}}}.$$

Понатаму од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина наоѓаме

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 2\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{y^2}}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \text{ и } \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2\sqrt{\frac{x+y}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{x+y},$$

па затоа

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{x+y} = 2^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{x+y}, \text{ т.е. } \frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} \geq \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{x+y}}.$$

Конечно,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \geq \frac{2^2}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} \geq \frac{2^2}{2^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{x+y}} = \frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}. \blacksquare$$

Задача 14. Ако $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ се такви што $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, докажи дека

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{4}(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c})^2.$$

Решение. Имаме

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} = \frac{a^3}{a^2b^2+a^2} + \frac{b^3}{b^2c^2+b^2} + \frac{c^3}{c^2a^2+c^2} = \frac{(a\sqrt{a})^2}{a^2b^2+a^2} + \frac{(b\sqrt{b})^2}{b^2c^2+b^2} + \frac{(c\sqrt{c})^2}{c^2a^2+c^2}.$$

Со примена на Енгеловиот принцип на минимум добиваме

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+a^2+b^2c^2+b^2+c^2a^2+c^2} = \frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}.$$

Сега од неравенството

$$1 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

слекува, дека

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 1 \leq \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}, \text{ т.е. } \frac{1}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1} \geq \frac{3}{4}.$$

Затоа,

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1} \geq \frac{3}{4}(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c})^2. \blacksquare$$

Задача 15. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c = 2$. Докажи го неравенството

$$\frac{(a-1)^2}{b} + \frac{(b-1)^2}{c} + \frac{(c-1)^2}{a} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \right).$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум и од равенството $a + b + c = 2$ слекува

$$\frac{(a-1)^2}{b} + \frac{(b-1)^2}{c} \geq \frac{(2-a-b)^2}{b+c} = \frac{c^2}{b+c},$$

$$\frac{(b-1)^2}{c} + \frac{(c-1)^2}{a} \geq \frac{(2-b-c)^2}{c+a} = \frac{a^2}{c+a},$$

$$\frac{(c-1)^2}{a} + \frac{(a-1)^2}{b} \geq \frac{(2-c-a)^2}{a+b} = \frac{b^2}{a+b}.$$

Горните неравенства ги собираме и добиваме

$$\frac{(a-1)^2}{b} + \frac{(b-1)^2}{c} + \frac{(c-1)^2}{a} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a} \right). \quad (1)$$

Понатаму, важи

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a} - \frac{a^2}{a+b} - \frac{b^2}{b+c} - \frac{c^2}{c+a} &= \frac{b^2-a^2}{a+b} + \frac{c^2-b^2}{b+c} + \frac{a^2-c^2}{c+a} \\ &= b-a+c-b+a-c=0, \end{aligned}$$

односно

$$\frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a} = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}.$$

Според тоа, важи

$$\frac{1}{4} \left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a} \right). \quad (2)$$

Конечно, од неравенството (1) и равенството (2) следува бараното неравенство. ■

Задача 16. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи го неравенството

$$\frac{a}{1+b^3} + \frac{b}{1+c^3} + \frac{c}{1+a^3} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Ставаме $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ и неравенството го добива видот

$$\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{z^3}{y^3}} + \frac{\frac{z}{y}}{1+\frac{x^3}{z^3}} + \frac{\frac{x}{z}}{1+\frac{y^3}{x^3}} \geq \frac{3}{2},$$

$$\frac{y^4}{y^3x+z^3x} + \frac{z^4}{z^3y+x^3y} + \frac{x^4}{x^3z+y^3z} \geq \frac{3}{2},$$

$$\frac{y^6}{y^5x+z^3xy^2} + \frac{z^6}{z^5y+x^3yz^2} + \frac{x^6}{x^5z+y^3zx^2} \geq \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{y^6}{y^5x+z^3xy^2} + \frac{z^6}{z^5y+x^3yz^2} + \frac{x^6}{x^5z+y^3zx^2} \geq \frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{y^5x+z^3xy^2+z^5y+x^3yz^2+x^5z+y^3zx^2},$$

па затоа за да го докажеме неравенството (1) доволно е да го докажеме неравенството

$$\frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{y^5x+z^3xy^2+z^5y+x^3yz^2+x^5z+y^3zx^2} \geq \frac{3}{2},$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$2(x^6 + y^6 + z^6) + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) \geq 3(y^5x + z^5y + x^5z) + 3(z^3xy^2 + x^3yz^2 + y^3zx^2).$$

Последното неравенство следува од неравенствата

$$x^6 + x^6 + x^3z^3 \geq 3x^5z \text{ и } x^3y^3 + x^3z^3 + x^3z^3 \geq 3x^3yz^2,$$

и аналогните неравенства, кои следуваат од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. ■

Задача 17. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c = 3$. Докажи дека

$$\frac{a^4}{b^2+c} + \frac{b^4}{c^2+a} + \frac{c^4}{a^2+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум и условот на зада-чата следува

$$\frac{a^4}{b^2+c} + \frac{b^4}{c^2+a} + \frac{c^4}{a^2+b} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+a+b+c} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+3}. \quad (1)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3.$$

Сега, ако ја воведеме смената $a^2 + b^2 + c^2 = x$, тогаш од (1) следува дека треба да докажеме дека

$$\frac{x^2}{x+3} \geq \frac{3}{2},$$

при услов $x \geq 3$. Навистина,

$$\frac{x^2}{x+3} = \frac{x}{1+\frac{3}{x}} \geq \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}. \blacksquare$$

Задача 18. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c = 3$. Докажи го неравенството

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} = \frac{a^4}{a^3+a^2b^2} + \frac{b^4}{b^3+b^2c^2} + \frac{c^4}{c^3+c^2a^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Ако се искорити условот $a + b + c = 3$, добиваме дека последното неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^3 + ac^3 + ba^3 + bc^3 + ca^3 + cb^3. \quad (2)$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^4 + a^2b^2 \geq 2a^3b, \quad b^4 + b^2a^2 \geq 2b^3a, \quad c^4 + c^2a^2 \geq 2c^3a,$$

$$a^4 + a^2c^2 \geq 2a^3c, \quad b^4 + b^2c^2 \geq 2b^3c, \quad c^4 + c^2b^2 \geq 2c^3b.$$

Конечно, ако ги собереме последните шест неравенства и добиеното неравенство го поделиме со 2, го добиваме неравенството (2). ■

Задача 19. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи дека важи

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a} + \frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a+b+c=1$, (Зошто?). Тогаш неравенството последователно го добива видот

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{a}}{1-a} + \frac{1+\sqrt{b}}{1-b} + \frac{1+\sqrt{c}}{1-c} &\geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{\sqrt{a}}{1-a} + \frac{\sqrt{b}}{1-b} + \frac{\sqrt{c}}{1-c} &\geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = \frac{1^2}{1-a} + \frac{1^2}{1-b} + \frac{1^2}{1-c} \geq \frac{(1+1+1)^2}{3-(a+b+c)} = \frac{9}{2}. \quad (2)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a(1-a)^2}{4} = a \cdot \frac{1-a}{2} \cdot \frac{1-a}{2} \leq \left(\frac{a+\frac{1-a}{2}+\frac{1-a}{2}}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

односно $\sqrt{a}(1-a) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ и аналогно $\sqrt{b}(1-b) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ и $\sqrt{c}(1-c) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Според тоа,

$$a\sqrt{a}(1-a) + b\sqrt{b}(1-b) + c\sqrt{c}(1-c) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}(a+b+c) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Сега, од претходното неравенство и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a}}{1-a} + \frac{\sqrt{b}}{1-b} + \frac{\sqrt{c}}{1-c} &\geq \frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}}\sqrt[4]{a^3}\sqrt{1-a} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}}\sqrt[4]{b^3}\sqrt{1-b} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{1-c}}\sqrt[4]{c^3}\sqrt{1-c}}{a\sqrt{a}(1-a) + b\sqrt{b}(1-b) + c\sqrt{c}(1-c)} \\ &= \frac{a+b+c}{a\sqrt{a}(1-a) + b\sqrt{b}(1-b) + c\sqrt{c}(1-c)} \\ &= \frac{1}{a\sqrt{a}(1-a) + b\sqrt{b}(1-b) + c\sqrt{c}(1-c)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Конечно, од последното неравенство и од неравенството (2) следува неравенството (1). ■

Литература

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
2. Cîrtoaje, V., *Algebraic Inequalities*, GIL Publishing house, Zalau, 2006
3. Govedarica, V., *Matematička takmičenja u Republici Srpskoj*, ZUNS, Sarajevo, 2007
4. Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1993
5. Гроздев, С., Две елементарни неравенства и нивна примена, Математички талент, Скопје, 2021
6. Малчески, Р., *Елементарни алгебарски и аналитички неравенства* (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019

Статијата прв пат е издадена на српски јазик во математичкото списание ДИОФАНТ во април 2026 година