XIX РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика ‘86-‘95
подготвена од Илија Јанев, Никола Петрески и Милчо Аврамоски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Славко со синот, и Јордан со синот биле на риболов. Славко уловил толку риби, колку што уловил неговиот син, а Јордан уловил три пати повеќе од својот син. Сите заедно уловиле 35 риби. Синот на Славко се вика Никола. Како се вика синот на Јордан и по колку риби уловил секој од нив ?

2. Најди четирицифрен број од видот $\overline{abba}$, којшто е еднаков на производот од три последователни прости броја.

3. Некој сточар заменувал зајаци за кокошки, така што за 2 зајака добивал 3 кокошки. Секоја од кокошките што ги добил сточарот снела јајца колку што е третината од бројот на кокошките. Сточарот ги продал јајцата од кокошките за 1000 денари. Потоа утврдил дека за 3 продадени јајца добивал толку денари, колку што јајца снела една кокошка. Колку зајаци сточарот заменил за кокошки?

4. Даден е паралелограм $ABCD$, во кој $\overline{AB}=2\overline{BC}$. Симетралата на аголот BAD ја сече страната CD во точката M, а правите BM и AD се сечат во точка P.

а) Докажи дека триаголникот AMP е правоаголен.

б) Најди ја плоштината на паралелограмот $ABCD$, ако плоштината на триаголникот AMP е n.

5. Дијагоналите на еден трапез ја делат средната линија на три еднакви дела. Делот зафатен меѓу дијагоналите е еднаков на збирот од другите два дела. Најди го односот на должините на основите на тој трапез.

XIX (94.VII.1)

Можни се два случаја:

1) На риболов биле четворица: Славко со синот Никола и Јордан со својот син.

2) На риболов биле тројца: Јордан со синот Славко и Славко со синот Никола, т.е. татко, син и внук.

Во првиот случај Славко и синот Никола уловиле $2x$ риби. Ако синот на Јордан уловил y риби, тогаш Јордан уловил $3y$ риби или двајцата заедно уловиле $4y$ риби. Во овој случај, сите четворица заедно уловиле вкупно $2x+4y$ риби, т.е. парен број риби, што противречи на условот дека се уловени вкупно 35 риби, т.е. непарен број риби.

Во вториот случај ако Никола уловил x риби, тогаш и Славко уловил x риби, а Јордан уловил $3x$ риби, па имаме:

$$x+x+3x=35$$
$$5x=35$$
$$x=7$$

Значи, Никола и Славко уловиле по 7 риби, а Јордан уловил 21 риба. Следствено, синот на Јордан е Славко.

XIX (94.VII.2)

Бидејќи:

$$\begin{aligned}\overline{abba}&=1000a+100b+10b+a=1001a+110b\\&=11(91a+10b),\end{aligned}$$

заклучуваме дека 11 е еден од простите множители на бројот $\overline{abba}$. Според тоа, можни се следниве три случаја:

$$5\cdot7\cdot11=385;\quad 7\cdot11\cdot13=1001;\quad 11\cdot13\cdot17=2431,$$

од каде заклучуваме дека $\overline{abba}=1001$.

XIX (94.VII.3)

Ако сточарот за 2 зајака добивал 3 кокошки, тогаш за $2x$ зајака ќе добие $3x$ кокошки. Секоја кокошка снела по x јајца, значи вкупно $3x \cdot x$, т.е. $3x^2$ јајца. Ако за 3 јајца се добиени x денари (колку што јајца снела една кокошка), тогаш за 1 јајце се добиени $\frac{x}{3}$ денари. Следствено, продадени се $3x^2$ јајца по цена од $\frac{x}{3}$ денари и за нив се добиени 1000 денари, па имаме:

$$3x^2 \cdot \frac{x}{3} = 1000$$

$$x^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10, \quad x = 10$$

Значи, сточарот заменил 20 зајаци.

XIX (94.VII.4)

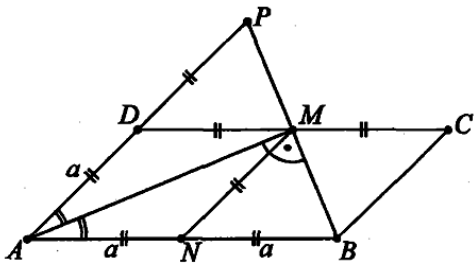
а) Нека *AM* е симетралата на аголот α на паралелограмот *ABCD*, со страни $\overline{AB} = 2a$ и $\overline{AD} = a$ (црт. 1), тогаш од:

$\measuredangle BAM = \measuredangle DAM$ и $\measuredangle BAM = \measuredangle DMA$

следува $\measuredangle DAM = \measuredangle DMA$. Значи триаголникот *AMD* е рамнокрак, т.е.

$$\overline{AD} = \overline{MD}.$$

Но, $\overline{DC} = 2\overline{AD}$, па следува дека *M* е средина на страната *DC*. Нека *N* е средина на *AB*, тогаш четириаголниците *ANMD* и *NBCM* се складни ромбови, па имаме:



Црт. 1

$$\overline{NA} = \overline{NB} = \overline{NM}$$

Оттука следува дека ΔABM е правоаголен, со прав агол кај темето *M*, бидејќи тежишната линија повлечена од тоа теме е еднаква на половината од спротивната страна. Значи, $\measuredangle AMB = 90°$, па и $\measuredangle AMP = 90°$, т.е. и триаголникот *AMP* е правоаголен.

б) Покажавме дека симетралата *AM* на аголот α е нормална на *BP*, па следува дека таа е и висина на ΔABP. Оттука заклучуваме дека ΔABP е рамнокрак, т.е. $\overline{AB} = \overline{AP}$. Од условот $\overline{AB} = 2\overline{AD}$ следува дека $\overline{AD} = \overline{DP}$, т.е *D* е средина на $\overline{AP}$. Значи, *MD* е тежишна линија на ΔAMP, па имаме:

$$P_{AMD} = \frac{1}{2} P_{AMP} = \frac{n}{2}.$$

Очигледно, секој од триаголниците *AMD, ANM, NBM* и *BCM* имаат еднакви плоштини, па добиваме:

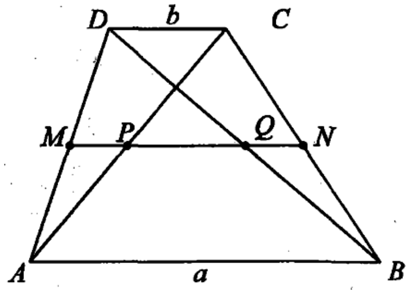
$$P_{ABCD} = 4 \cdot \frac{n}{2} = 2n.$$

Следствено, плоштината на паралелограмот *ABCD* е два пати поголема од плоштината на триаголникот *AMP*.

XIX (94.VII.5)

Нека P и Q се точки од средната линија MN на трапезот $ABCD$, такви што $\overline{MP}+\overline{QN}=\overline{PQ}$ (црт. 2). Треба да го одредиме односот $a:b$. За таа цел воочуваме дека MP и QN се средни линии во триаголниците ACD и BCD, па имаме:

$$\overline{MP}=\frac{b}{2},\quad \overline{QN}=\frac{b}{2}$$



Црт. 2

По услов $\overline{PQ}=\overline{MP}+\overline{QN}$, т.е.

$$\overline{PQ}=b,\qquad \overline{MN}=2b\ ,$$

па имаме:

$$a+b=2\cdot\overline{MN}=2\cdot 2b=4b$$

од каде што $a=3b$.

Значи, едната од основите е три пати поголема од другата, т.е. $a:b=3:1$.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Еден телефонски број се состои од два трицифрени броја деливи со 45. Средната цифра на трицифрените броеви е 8, а првиот од нив е поголем од вториот. Најди го телефонскиот број.

2. Во едно училиште бројот на учениците од осмо одделение бил помал од 199. Резултатите од писмената работа по математика се следните: 28% од учениците добиле оценка 5; 35% оценка 4; 25% оценка 3, а 12% оценка 2. Најди го бројот на учениците според добиените оценки.

3. Третина од производите на една фабрика се продадени со 10% поголема цена од планираната, а половина од производите се продадени со 15% помала цена од планираната. За колку проценти поголема цена од планираната треба да се продаде остатокот од производите, за вкупниот приход да биде ист со приходот од продажбата на производите со планираната цена?

4. Над страните AC и BC на триаголникот ABC конструирани се, надвор од него, квадратите $CBFG$ и $ACDE$. Докажи дека отсечката DG е два пати поголема од тежишната линија на триаголникот, повлечена од темето C.

5. Во трапезот $ABCD$ симетралата на аголот ABC е нормална на кракот AD и го сече во точката E, така што $\overline{AE} = 2\overline{DE}$. Во кој однос симетралата ја дели плоштината на трапезот?

XIX (94.VIII.1)

Еден број е делив со 45, ако е делив со 5 и со 9. Број, пак, е делив со 5, ако завршува на 0 или на 5. Значи, тие два трицифрени броја се: $\overline{x80}$ или $\overline{y85}$. Тие ќе бидат деливи со 9, ако $x=1$, а $y=5$. Бидејќи првиот трицифрен број е поголем од вториот, заклучуваме дека телефонскиот број е 585 180.

XIX (94.VIII.2)

Да го означеме со x бројот на учениците, тогаш:

28% од x, т.е. $\frac{28}{100}x=\frac{7x}{25}$ биле оценети со 5,

$\frac{35}{100}x=\frac{7x}{20}$ биле оценети со 4,

$\frac{x}{4}$ биле оценети со 3, а $\frac{3x}{25}$ биле оценети со 2.

Бидејќи нема недоволни ученици, а секоја од дропките:

$$\frac{7x}{25},\quad \frac{7x}{20},\quad \frac{x}{4},\quad \frac{3x}{25}$$

треба да биде природен број, следува дека x треба да биде содржател за броевите: 25, 20, 4. Значи:

$$x\in\{100,200,300,\dots\}$$

Но $x<199$, па значи $x=100$, па следува дека:

28 ученици добиле оценка 5; 35 - оценка 4; 25 - оценка 3 и 12 ученици добиле оценка 2.

XIX (94.VIII.3)

$p=25$. Види го решението на задачата **XVIII (93.VII.2)**

XIX (94.VIII.4)

Нека над страните AC и BC на ΔABC се конструирани квадратите $ACDE$ и $CBFG$ и нека CM е тежишната линија повлечена од темето C (црт. 3). Треба да докажеме дека $\overline{DG} = 2\overline{CM}$. За таа цел ја продолжуваме тежишната линија CM, и нанесуваме $\overline{MN} = \overline{CM}$. Четириаголникот $ANBC$ е паралелограм, бидејќи неговите дијагонали се преполовуваат во пресечната точка M.

Бидејќи $\overline{CN} = 2\overline{CM}$, доволно е да докажеме дека $\overline{DG} = \overline{CN}$. Тоа, пак, следува од складноста на триаголниците CAN и DCG, бидејќи:

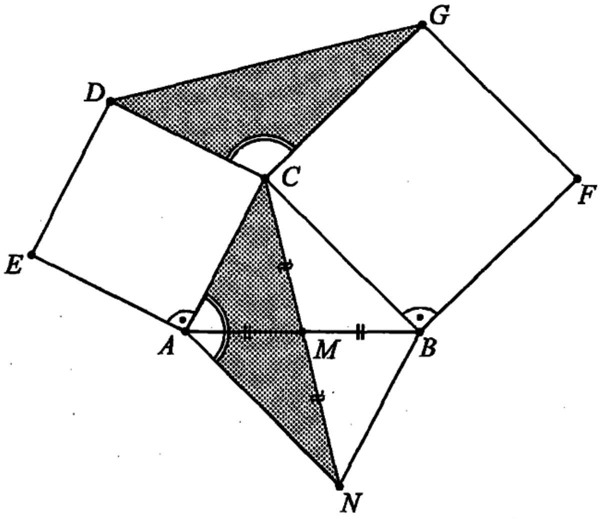
1) $\overline{CA} = \overline{CD}$, по конструкција

2) $\overline{AN} = \overline{CG}$, бидејќи $\overline{AN} = \overline{CB} = \overline{CG}$

3) $\measuredangle CAN = \measuredangle DAG$, како агли со заемно нормални краци.

Значи, докажавме дека:

$\overline{DG} = 2\overline{CM}$.



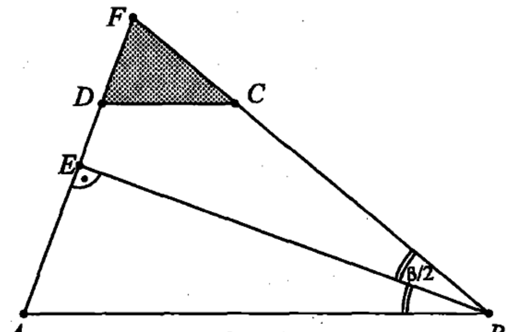
Црт. 3

XIX (94.VIII.5)

Нека симетралата BE на аголот β на трапезот $ABCD$ е нормална на кракот AD и нека $\overline{AE}=2\cdot\overline{DE}$ (црт. 4). Ако со F ја означиме пресечната точка на продолжението на краците на трапезот, тогаш триаголникот AFB е рамнокрак, бидејќи симетралата на аголот β е и негова висина. Значи:

$$\overline{AE}=\overline{EF}\cdot$$

Но, по услов $\overline{AE}=2\overline{DE}$, следува дека D е средина на отсечката EF, т.е. $\overline{AF}:\overline{DF}=4:1$. Од сличноста на триаголниците ABF и DCF следува пропорцијата:



Црт. 4

$$\overline{AB}:\overline{DC}=\overline{AF}:\overline{DF}$$

т.е.

$$\overline{AB}:\overline{DC}=4:1\cdot$$

Ако со P ја означиме плоштината на ΔABF, тогаш:

$$P_{DCF}=\frac{P}{16},\quad P_{ABE}=\frac{P}{2},\quad P_{BCDE}=\frac{P}{2}-\frac{P}{16}=\frac{7P}{16},$$

па за односот на плоштините добиваме:

$$P_{ABE}:P_{BCDE}=\frac{P}{2}:\frac{7P}{16}=8:7.$$