

## XLIV РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

### IV одделение

**Задача 1.** Матеј и Стефан многу сакаат да читаат книги. Во следнава табела се дадени податоци за бројот на книгите кои ги прочитале во три години.

	Број на прочитани книги во првата година	Број на прочитани книги во втората година	Број на прочитани книги во третата година
Матеј			
Стефан			
 = 12 прочитани книги			

Со помош на податоците од табелата, одговори:

- а) Колку книги прочитал Матеј во првите две години?
- б) Колку вкупно книги прочитале двајцата во третата година?
- в) Колку пати е поголем бројот на книги што ги прочитал Матеј во третата во однос на втората година?
- г) Кој прочитал повеќе книги во сите три години, и за колку повеќе?
- д) Колку книги прочитале двајцата во сите три години?

**Решение.** а) Во првата година Матеј прочитал  $3 \cdot 12 = 36$  книги. Во втората година прочитал  $2 \cdot 12 = 24$  книги. Во првите две години прочитал вкупно  $36 + 24 = 60$  книги.

б) Во третата година Матеј прочитал  $4 \cdot 12 = 48$  книги, а Стефан прочитал  $5 \cdot 12 = 60$  книги. Значи, во третата година двајцата прочитале  $48 + 60 = 108$  книги.

в) Во третата година Матеј прочитал  $4 \cdot 12 = 48$  книги, а во втората прочитал  $2 \cdot 12 = 24$  книги. Значи во третата година Матеј прочитал  $48 : 24 = 2$  пати повеќе книги отколку во втората година.

г) Во сите три години, Матеј прочитал  $(3 + 2 + 4) \cdot 12 = 9 \cdot 12 = 108$  книги, а Стефан  $(4 + 3 + 5) \cdot 12 = 12 \cdot 12 = 144$  книги. Значи, Стефан прочитал  $144 - 108 = 36$  книги повеќе од Матеј.

д) Двајцата во трите години прочитале  $108 + 144 = 252$  книги.

**Задача 2.** Во еден букет има бели, црвени и жолти ружи. Вкупно има 15 ружи, од кои 7 се црвени, а жолтите се за 2 повеќе од белите. Колку жолти

ружи има во букетот?

**Решение.** Во букетот има  $15 - 7 = 8$  жолти и бели ружи. Ако во букетот има  $x$  бели ружи, тогаш има  $x + 2$  жолти ружи. Затоа  $x + x + 2 = 8$ , од каде добиваме  $x = 3$ . Значи, во букетот има 3 бели и  $3 + 2 = 5$  жолти ружи.

**Задача 3.** Ги разгледуваме сите четирицифрени броеви што може да се запишат со помош на цифрите 0, 1, 2 и 3. Од нив запиши ги сите непарни броеви со различни цифри кои се наоѓаат помеѓу 1300 и 3000, а потоа пресметај го нивниот збир.

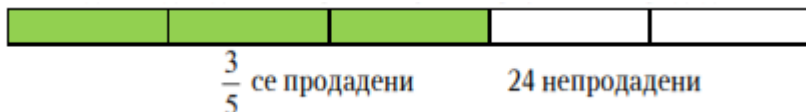
**Решение.** Со помош на цифрите 0, 1, 2 и 3 треба да се запишат четирицифрени броеви со различни цифри, од каде заклучуваме дека секоја од цифрите 0, 1, 2 и 3 се јавува точно еднаш. Непарни четирицифрени броеви во кои секоја од цифрите 0, 1, 2 и 3 се јавува точно еднаш, а кои се поголеми од 1300 и помали од 3000 се: 2013, 2031, 2103 и 2301. Нивниот збир е

$$2013 + 2031 + 2103 + 2301 = 8448.$$

**Задача 4.** Во еден забавен парк секој ден се планираат одреден број билети за дневна продажба. На крајот на еден ден продавачот утврдил дека се продале  $\frac{3}{5}$  од планираните билети, а непродадени останале 24 билети. Колку билети биле планирани да се продадат тој ден?

**Решение.** *Прв начин.* Од условот на задачата имаме дека продадените билети се  $\frac{3}{5}$  од планираните билети. Тогаш непродадени останале  $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$  од планираните билети. Од тоа што бројот на непродадени билети е 24, следува дека  $\frac{2}{5}$  од планираните билети е 24, па заклучуваме дека  $\frac{1}{5}$  од планираните билети  $24 : 2 = 12$ . Значи, бројот на планираните билети е  $5 \cdot 12 = 60$ .

*Втор начин.* Ќе го користиме методот на отсечка. Нека дадената отсечка (лента) го претставува вкупниот број планирани билети за продажба кој е непознат. Од условот на задачата имаме дека продадените билети се  $\frac{3}{5}$  од планираните билети па затоа дадената отсечка ќе ја поделиме на пет еднакви дела, од кои првите 3 дела го претставуваат бројот на продадени билети, а последните два дела го претставуваат бројот на непродадени билети.



Бидејќи два дела од отсечката претставуваат 24 билети, заклучуваме дека еден дел од отсечката претставува  $24 : 2 = 12$  билети. Според тоа, вкупниот број продадени билети е  $5 \cdot 12 = 60$ .

*Трет начин.* Нека со  $x$  го означиме бројот на планирани билети за продажба за тој ден. Тогаш од условот на задачата имаме дека  $\frac{3}{5}x$  е бројот на продадени билети, а непродадени останале  $x - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$ . Од тоа што бројот на непродадени билети е 24, важи дека  $\frac{2}{5}x = 24$ . Оттука следува дека  $x = \frac{5}{2} \cdot 24 = 60$ .

## V одделение

**Задача 1.** Неколку другарчиња решиле за роденденот на Андреј да му купат заеднички подарок. Ако секој од нив даде по 200 денари, за да го купат планираниот подарок ќе им недостасуваат 400 денари. Ако пак секој од нив даде по 300 денари, ќе им останат неискористени 300 денари. Колку чини подарокот што сакаат да го купат другарчињата на Андреј?

**Решение.** Нека со  $x$  го означиме бројот на деца што учествуваат во купување на заедничкиот подарок. Ако секој даде 200 денари, ќе недостасуваат 400 денари за да се купи подарокот, што значи дека подарокот чини  $200x + 400$  ден. Од друга страна, ако секој даде 300 денари, ќе останат 300 денари вишок, што значи дека подарокот чини  $300x - 300$  ден. Со изедначување на двата изрази добиени за цената на подарокот имаме

$$200x + 400 = 300x - 300, \text{ т.е. } x = 7.$$

Значи, во купување на заедничкиот подарок учествуваат 7 деца, а цената на подарокот е  $200 \cdot 7 + 400 = 1800$  денари.

**Задача 2.** Мила замислила еден број од втората десетка и еден број од третата десетка. Збирот на цифрите на единиците на овие два броја е 7, а разликата помеѓу двата броја е 11. Кои броеви ги замислила Мила?

**Решение.** *Прв начин.* Бидејќи важи  $7 = 7 + 0 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$ , можни се следниве решенија за цифрите на единиците на првиот и вториот број: 0 и 7, 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, 4 и 3, 5 и 2, 6 и 1, 7 и 0. Броеви од втората и третата десетка кои го задоволуваат условот збирот на цифрите на единиците да е 7, се: 20 и 27, 11 и 26, 12 и 25, 13 и 24, 14 и 23, 15 и 22, 16 и 21, и 17 и 30. Од нив, само броевите 13 и 24 го задоволуваат вториот услов, односно нивната разлика е 11. Значи, Мила ги замислила броевите 13 и 24.

*Втор начин.* Броеви од втората десетка се: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 и 20, а од третата десетка се: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 и 30. Бидејќи збирот на цифрите на единиците на двата броја што ги замислила Мила е 7, заклучуваме дека првиот и вториот број може да завршуваат на: 0 и 7, 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, 4 и 3, 5 и 2, 6 и 1, или пак, 7 и 0.

Ги разгледуваме броевите чиј што збир на единици е 7 и добиваме:

- ако првиот број завршува на 0, вториот завршува на 7, па броевите се 20 и 27

- ако првиот број завршува на 1, вториот завршува на 6, па броевите се 11 и 26

- ако првиот број завршува на 2, вториот завршува на 5, па броевите се 12 и 25

- ако првиот број завршува на 3, вториот завршува на 4, па броевите се 13 и 24

- ако првиот број завршува на 4, вториот завршува на 3, па броевите се 14 и 23

- ако првиот број завршува на 5, вториот завршува на 2, па броевите се 15 и 22

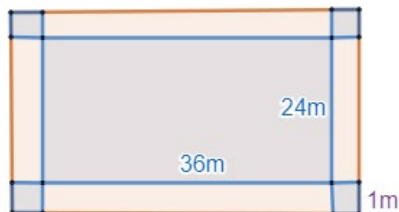
- ако првиот број завршува на 6, вториот завршува на 1, па броевите се 16 и 21

- ако првиот број завршува на 7, вториот завршува на 0, па броевите се 17 и 30.

Од наведените броеви, само 13 и 24 се разликуваат за 11. Значи, Мила ги замислила броевите 13 и 24.

**Задача 3.** Парк во форма на правоаголник е долг 36 *m* и широк 24 *m*. Околу целиот парк се прави патека широка 1 *m* (однадвор). Ако за бојадисување на 1 *m*<sup>2</sup> од патеката се потребни 0,5 литри боја, тогаш колку литри боја се потребни за бојадисување на целата патека?

**Решение.** *Прв начин.* Плоштината на паркот е  $36 \cdot 24 = 864 \text{ m}^2$ . По изградбата на патеката добиваме правоаголник со страни 38 *m* и 26 *m*. Плоштината на овој правоаголник е еднаква на  $38 \cdot 26 = 988 \text{ m}^2$ . Значи, плоштината на патеката е  $988 - 864 = 124 \text{ m}^2$ . Бидејќи за бојадисување на патеката се по-



требни  $0,5 = \frac{1}{2}$  литри боја, за бојадисување на целата патека се потребни  $\frac{1}{2} \cdot 124 = 62$  литри боја.

*Втор начин.* Плоштината на патеката е еднаква на збирот на плоштините на 4 квадрати со страна 1 m, два правоаголници со страни 38 m и 1 m и два правоаголници со страни 1 m и 26 m. Значи, плоштината на патеката е еднаква на  $4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 36 + 2 \cdot 1 \cdot 24 = 124 m^2$ . Бидејќи за бојадисување на патеката се потребни  $0,5 = \frac{1}{2}$  литри боја, за бојадисување на целата патека се потребни  $\frac{1}{2} \cdot 124 = 62$  литри боја.

**Задача 4.** Една печатница добила нарачка да отпечати одреден број постери за четири дена. Првиот ден отпечатила 20% од вкупно нарачаните постери. Вториот ден отпечатила 50% од преостанатите неотпечатени постери. Третиот ден отпечатила 50% од преостанатите неотпечатени постери. Четвртиот ден ги отпечатила преостанатите 30 постери. Колку вкупно постери биле нарачани?

**Решение.** *Прв начин.* Нека  $x$  е вкупниот број на отпечатени постери. Првиот ден се отпечатени  $0,2x$  постери, што значи дека останале неотпечатени  $x - 0,2x = 0,8x$  постери. Вториот ден се отпечатени 50%, т.е.  $0,5$  од преостанатите постери, односно  $0,5 \cdot 0,8x = 0,4x$ , а остануваат неотпечатени  $0,8x - 0,4x = 0,4x$  постери. Третиот ден се отпечатени 50%, т.е.  $0,5$  од преостанатите постери, односно  $0,5 \cdot 0,4x = 0,2x$ , а остануваат неотпечатени  $0,4x - 0,2x = 0,2x$  постери. Значи по третиот ден остануваат неотпечатени  $0,2x$  постери кои се отпечатени четвртиот ден, а тоа се 30 постери, па имаме  $0,2x = 30$ , односно  $x = 150$ .

Значи, вкупно биле нарачани 150 постери.

*Втор начин.* Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред.

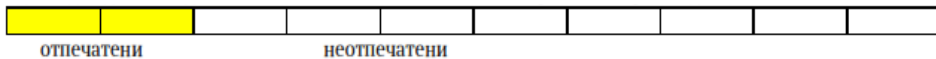
Бидејќи четвртиот ден се отпечатени 50% од постерите кои биле на почетокот на третиот ден, а тоа се 30 постери, заклучуваме дека на почетокот на третиот ден имало два пати повеќе постери, односно имало  $2 \cdot 30 = 60$  постери.

Слично, третиот ден се отпечатени 50% од постерите кои биле на почетокот на вториот ден, а тоа се 60 постери, па заклучуваме дека на почетокот на вториот ден имало два пати повеќе постери, односно имало  $2 \cdot 60 = 120$  постери.

Овие 120 постери се  $100 - 20 = 80\%$  од постерите кои останале по печат-

тењето првиот ден. Значи, 10% од постерите кои останале по првиот ден се  $120:8 = 15$ . Конечно, целата нарачка е  $15 \cdot 10 = 150$  постери.

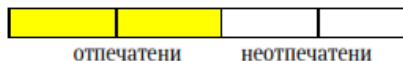
*Трет начин.* Ќе го користиме методот на отсечки. Нека со отсечка (лента) го преставиме вкупниот број нарачани постери. Отсечката ќе ја поделиме на 10 еднакви дела (секој дел означува 10% од нарачката). Ако 20% од вкупната нарачка е отпечатена во првиот ден, тогаш бројот на отпечатени постери во првиот ден е два дела, а 8 дела се останатите неотпечатени постери по првиот ден.



Вториот ден се отпечатени 50% од неотпечатените постери, значи бројот, а отпечатени постери во вториот ден е 4 дела, а 4 дела останале неотпечатени.



Третиот ден се отпечатени 50% од преостанатите неотпечатени постери, значи 2 дела.



Заклучуваме дека двата дела кои преостануваат се постерите коишто се отпечатени четвртиот ден. Бидејќи четвртиот ден се отпечатени 30 постери, добиваме дека два дела од отсечката се 30 постери. Значи еден дел од отсечката означува 15 постери. Бидејќи целата отсечка има 10 дела, добиваме дека вкупниот број на нарачани постери бил  $15 \cdot 10 = 150$ .

## VI одделение

**Задача 1.** Спореди ги дробките:

$$\frac{1+2+3+\dots+49+50}{2024} \text{ и } \frac{1275}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9}.$$

**Решение.** Имаме:

$$\frac{1+2+3+\dots+49+50}{2024} = \frac{(1+50)+(2+49)+(3+48)+\dots+(25+26)}{2024} = \frac{51 \cdot 25}{2024} = \frac{1275}{2024}$$

и

$$\frac{1275}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{1275}{32 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{1275}{224 \cdot 9} = \frac{1275}{2016}.$$

Сега, од  $\frac{1275}{2024} < \frac{1275}{2016}$  следува  $\frac{1+2+3+\dots+49+50}{2024} < \frac{1275}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9}.$

**Задача 2.** Еден ученик на табла ја запишал големината на два агли  $\alpha$  и  $\beta$ . Потоа вториот ученик на таблата го запишал нивниот збир, а третиот ученик го запишал збирот на сите три претходно запишани агли. На крајот

четвртиот ученик го запишал збирот на комплементниот агол на  $\alpha$  и суплементниот агол на  $\beta$ . Ако третиот ученик го запишал аголот  $240^\circ$ , пресметај ја големината на аголот што ја запишал четвртиот ученик.

**Решение.** Вториот ученик го запишал мерниот број на збирот  $\alpha + \beta$ , а третиот ученик мерниот број на збирот  $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 2(\alpha + \beta)$ . Според тоа,  $2(\alpha + \beta) = 240^\circ$ , па затоа  $\alpha + \beta = 240^\circ : 2 = 120^\circ$ . Комплементниот агол на  $\alpha$  е  $90^\circ - \alpha$ , а суплементниот агол на  $\beta$  е  $180^\circ - \beta$ . Значи, четвртиот ученик го запишал мерниот број на аголот

$$90^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta = 270^\circ - (\alpha + \beta).$$

Но,  $\alpha + \beta = 120^\circ$ , што значи дека четвртиот ученик запишал

$$270^\circ - (\alpha + \beta) = 270^\circ - 120^\circ = 150^\circ.$$

**Задача 3.** Една слаткарница добила нарачки за колачи од две компании. Слаткарницата подготвила 6 мали пакети и 4 големи пакети со колачи. Во секој мал пакет има по 50 колачи, а во секој голем пакет има по 100 колачи. На колку различни начини може да се поделат подготвените пакети помеѓу двете компании, ако двете компании треба да добијат еднаков број колачи?

**Решение.** *Прв начин.* Вкупниот број колачи во подготвените пакети е  $6 \cdot 50 + 4 \cdot 100 = 700$  колачи. Бидејќи двете компании треба да добијат еднаков број колачи, секоја компанија треба да добие по  $700 : 2 = 350$  колачи. Имаме 6 мали пакети со по 50 колачи и 4 големи пакети со по 100 колачи. Бидејќи  $4 \cdot 100 = 400 > 350$  и  $6 \cdot 50 = 300 < 350$ , една компанија може да добие најмногу три големи пакети и најмалку еден од голем пакет.

Значи, подготвените пакети можат да се поделат помеѓу двете компании на следните начини:

- првата да добие 3 големи и 1 мал пакет, а втората да добие 1 голем и 5 мали пакети,
- првата да добие 2 големи и 3 мали пакети, а втората да добие 2 големи и 3 мали пакети,
- првата да добие 1 голем и 5 мали пакети, а втората да добие 3 големи и 1 мал пакет.

Според тоа, добиваме дека подготвените пакети можат да се поделат помеѓу двете компании на 3 различни начини.

*Втор начин.* Вкупниот број колачи е  $6 \cdot 50 + 4 \cdot 100 = 700$  колачи. Бидејќи двете компании треба да добијат еднаков број колачи, секоја компанија треба да добие по  $700 : 2 = 350$  колачи. Нека првата компанија добие  $x$  мали

пакети и у големи пакети. Тогаш таа ќе добие  $50x + 100y$  колачи. Според тоа, ја добиваме равенката  $50x + 100y = 350$ , т.е.  $x + 2y = 7$ . Бидејќи вкупниот број на мали пакети е 6, а на големи 4, важи  $0 \leq x \leq 6$ ,  $0 \leq y \leq 4$ , па ги разгледуваме сите можните вредности за  $y$ .

- за  $y = 0$  добиваме  $x = 7$ , што не е можно,
- за  $y = 1$  добиваме  $x = 5$ ,
- за  $y = 2$  добиваме  $x = 3$ ,
- за  $y = 3$  добиваме  $x = 1$ ,
- за  $y = 4$  добиваме  $x = -1$ , што не е можно.

Значи, подготвените пакети можат да се поделат помеѓу двете компании на 3 различни начини: првата компанија да добие 5 мали и 1 голем пакет, а втората 1 голем и 3 мали пакети; или двете компании да добијат по 3 мали и 2 големи пакети; или пак, првата да добие 1 мал и 3 големи пакети, а втората компанија 5 мали и 1 голем пакет.

**Задача 4.** Над страните  $AC$  и  $BC$  од рамностраниот триаголник  $ABC$  се конструирани правоаголните рамнокраки триаголници  $ACN$  и  $BMC$ , со прави агли во темињата  $A$  и  $C$ , соодветно, при што  $N$  и  $B$  се на различни страни од  $AC$ , а  $M$  и  $A$  се на различни стран од  $BC$ . Пресметај ја големината на  $\angle MBN$ .

**Решение.** Триаголникот  $ABC$  е рамностран, па затоа неговите внатрешни агли се еднакви на  $60^\circ$ . Бидејќи во триаголникот  $ACN$  важи  $\angle CAN = 90^\circ$ , добиваме

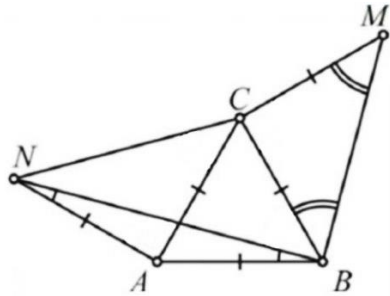
$$\begin{aligned}\angle BAN &= \angle BAC + \angle CAN \\ &= 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.\end{aligned}$$

Понатаму, триаголникот  $ACN$  е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето  $A$ , па затоа  $\overline{AN} = \overline{AC} = \overline{AB}$ , од каде следува дека триаголникот  $ABN$  е рамнокрак, па затоа

$$\angle ABN = \frac{180^\circ - \angle BAN}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Сега, триаголникот  $BMC$  е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето  $C$ , па затоа  $\angle MBC = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$ . Конечно,

$$\angle MBN = \angle ABC + \angle CBM - \angle ABN = 60^\circ + 45^\circ - 15^\circ = 90^\circ.$$



## VII одделение

**Задача 1.** Шифрата за аплицирање на конкурс на еден кандидат е природен број чија последна цифра е 5. Ако се избрише последната цифра на шифрата и бројот се подели со 7, се добива количник чија последна цифра е 2. Ако се избрише последната цифра на количникот и добиениот број се подели со 6 се добива количник 4 и остаток 1. Определи ја шифрата на кандидатот.

**Решение.** Нека со  $x$  го означиме количникот на кој му е избришана последната цифра 2. Од тоа што при делењето со 6 се добива количник 4 и остаток 1, добиваме дека  $x = 6 \cdot 4 + 1 = 25$ . Значи, по бришење на последната цифра 5 на шифрата и делење со 7, се добива бројот 252. Според тоа, пред делењето со 7, бројот бил  $252 \cdot 7 = 1764$ . Но, последната цифра на шифрата е 5, па добиваме дека шифрата на кандидатот за аплицирање на конкурсот е 17645.

**Задача 2.** Во една кутија има црвени, зелени и жолти топчиња. Нивниот вкупен број е 420, од кои 30 се жолти топчиња. Половината од вкупниот број на топчиња во кутијата се состои од  $\frac{1}{3}$  од бројот на црвените и  $\frac{5}{6}$  од бројот на зелените топчиња. Колкав е бројот на црвени, а колкав бројот на зелени топчиња во кутијата?

**Решение.** Нека во кутијата има  $x$  зелени топчиња. Тогаш во кутијата има  $420 - 30 - x = 390 - x$  црвени топчиња. Од условот следува равенката

$$\frac{1}{3}(390 - x) + \frac{5}{6}x = \frac{420}{2}.$$

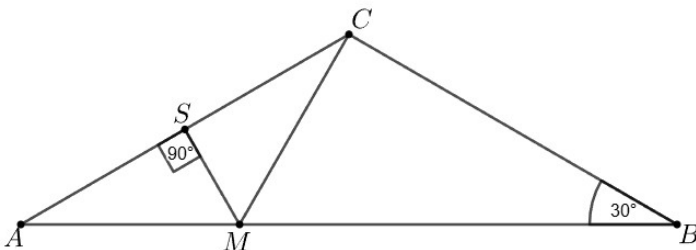
Решението на последната равенка е  $x = 160$ . Значи, во кутијата има 160 зелени топчиња и  $390 - 160 = 230$  црвени топчиња.

**Задача 3.** Одреди го најмалиот природен број кој е делив со 7, а при делење со 3, 4, 5 и 6 дава остаток 2.

**Решение.** Нека  $a$  е бараниот број. Тогаш бројот  $a - 2$  е делив со броевите 3, 4, 5 и 6, што значи е делив со  $\text{НЗС}(3, 4, 5, 6) = 60$ . Тоа значи дека  $a - 2 = 60c$ ,  $c \in \mathbb{N}$ , т.е.  $a = 60c + 2$ ,  $c \in \mathbb{N}$ . Бидејќи се бара најмалиот природен број од дадениот вид кој е делив со бројот 7 последователно ја проверуваме деливоста на дадените броеви со 7. За  $c = 1$  добиваме  $a = 62$  и овој број не е делив со 7. За  $c = 2$  добиваме  $a = 122$  и овој број не е делив со 7. За  $c = 3$  добиваме  $a = 182 = 7 \cdot 26$ , што значи дека бараниот број е 182.

**Задача 4.** Во рамнокракиот триаголник  $ABC$  аголот во темето  $B$  е  $30^\circ$ . Симетралата на кракот  $AC$  ја сече основата  $AB$  во точка  $M$ , а кракот  $AC$  во точката  $S$ . Ако  $\overline{SM} = 2\text{ cm}$ , определи ја должината на основата  $AB$  на триаголникот  $ABC$ .

**Решение.** Бидејќи триаголникот  $ABC$  е рамнокрак со основа  $AB$  следува дека  $\angle BAC = 30^\circ$ . Од условот на задачата следува дека  $\angle ASM = 90^\circ$ . Тогаш Триаголникот  $AMS$  е со агли  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ , што значи дека е половина од рамностран триаголник. Затоа неговата хипотенуза е  $\overline{AM} = 2 \cdot 2 = 4\text{ cm}$ .



Од друга страна,  $MS$  е висина и тежишна линија во триаголникот  $AMC$ , па заклучуваме дека триаголникот  $AMC$  е рамнокрак. Значи,  $\overline{AM} = \overline{CM} = 4\text{ cm}$  и  $\angle MCA = \angle MAC = 30^\circ$ . Понатаму,  $\angle BMC$  е надворешен агол за триаголникот  $AMC$ , па затоа  $\angle BMC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ . Значи, триаголникот  $MBC$  е со агли  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ , па затоа тој е половина од рамностран триаголник. Според тоа, неговата хипотенуза е  $\overline{MB} = 2\overline{MC} = 2 \cdot 4 = 8\text{ cm}$ . Конечно, основата на триаголникот  $ABC$  е  $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = 4 + 8 = 12\text{ cm}$ .

### VIII одделение

**Задача 1.** Три автобуски конвои со ученици тргнале кон училишните кампови. Во првиот конвој имало 462 ученика, во вториот конвој 546 ученика и во третиот конвој 630 ученика. Познато е дека секој автобус превезувал еднаков број ученици. Определи го најмалиот вкупен број користени автобуси за превозот и бројот на ученици во секој автобус.

**Решение.** Бидејќи секој автобус превезувал еднаков број ученици, бројот на учениците кои биле во еден автобус е заеднички делител на броевите 462, 546 и 630. Најмалиот вкупен број автобуси се добива ако во секој автобус е најголемиот можен број ученици, односно НЗД(462, 546, 630). Сега, од

$$462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11, \quad 546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13, \quad 630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

следува дека  $\text{НЗД}(462, 546, 630) = 42$ . Според тоа, во првиот, вториот и третиот конвој соодветно имало  $462:42 = 11$ ,  $546:42 = 13$ ,  $630:42 = 15$ . Значи, вкупниот број автобуси е  $11 + 13 + 15 = 39$  и во секој автобус имало по 42 ученика.

**Задача 2.** Нека  $n$  е природен број кој при делење со 7 дава остаток  $a$  и при делење со 19 дава остаток  $b$ . Докажи дека  $95a + 42b - 4n$  е делив со 133.

**Решение.** Од условот на задачата следува  $n = 7k + a$ ,  $n = 19m + b$ , за некои  $k, m \in \mathbb{N}$ , односно  $a = n - 7k$ ,  $b = n - 19m$ , за некои  $k, m \in \mathbb{N}$ . Според тоа,

$$\begin{aligned} 95a + 42b - 4n &= 95(n - 7k) + 42(n - 19m) - 4n \\ &= 95n - 665k + 42n - 798m - 4n \\ &= 133n - 133 \cdot 5k - 133 \cdot 6m \\ &= 133(n - 5k - 6m), \end{aligned}$$

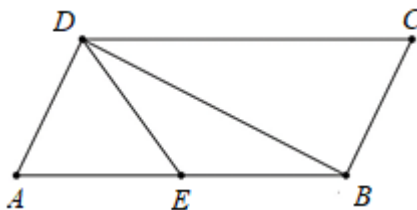
од каде следува тврдењето на задачата.

**Задача 3.** За кои вредности на природните броеви  $m$  и  $n$ , аритметичката средина на броевите 4, 7, 7,  $m$ ,  $n$ , 13 е природен број, ако секој од броевите е помал или еднаков на следниот број во дадениот редослед.

**Решение.** Од условот дека секој од броевите 4, 7, 7,  $m$ ,  $n$ , 13 е помал или еднаков на следниот број во дадениот редослед, за  $m$  и  $n$  добиваме дека важи  $7 \leq m \leq n \leq 13$ . Од условот дека аритметичката средина на броевите од низата е природен број, добиваме дека  $\frac{4+7+7+m+n+13}{6} = 5 + \frac{1+m+n}{6}$  е природен број, односно дека  $m+n+1$  е делив со 6. Сега, од  $7 \leq m \leq n \leq 13$  следува дека  $15 \leq m+n+1 \leq 27$ , па заради деливоста со 6 следува  $m+n=17$  или  $m+n=23$ . Од последните две равенства и од неравенствата  $7 \leq m \leq n \leq 13$  следува дека  $(m, n) = (7, 10), (8, 9), (10, 13), (11, 12)$ .

**Задача 4.** Даден е паралелограм  $ABCD$  така што  $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ . Нека  $E$  е точка на страната  $AB$  така што  $DE$  е симетрала на аголот  $ADC$  и  $DB$  е симетрала на аголот  $EDC$ . Определи ја големината на аглиите на паралелограмот  $ABCD$ .

**Решение.** Нека  $\angle EDB = x$ . Бидејќи  $DB$  е симетрала на аголот  $EDC$ , следува  $\angle BDC = x$ , а бидејќи  $DE$  е симетрала на аголот  $ADC$ , следува  $\angle ADE = 2x$ . Бидејќи  $AB \parallel CD$ , следува  $\angle DBE = x$ .



Од тоа што  $\angle DEA$  е надворешен агол на триаголникот  $EBD$ , следува  $\angle DEA = 2x$ , па триаголникот  $AED$  е рамнокрак, односно  $\overline{AD} = \overline{AE}$ . Понатаму, бидејќи во паралелограмот  $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ , следува дека  $\overline{AB} = 2\overline{AD} = 2\overline{AE}$ , па точката  $E$  е средина на отсечката  $AB$ . Триаголникот  $EBD$  е исто така рамнокрак триаголник, односно  $\overline{EB} = \overline{ED}$ , од каде следува дека триаголникот  $AED$  е рамностран. Тогаш,  $2x = 60^\circ$ , односно  $x = 30^\circ$ . Конечно, аглите на паралелограмот се  $60^\circ$  и  $120^\circ$ .

## IX одделение

**Задача 1.** Васе конструирал кули од коцки. Кога конструирал  $n$  кули со по 22 коцки му останале 3 коцки. Потоа од сите свои коцки конструирал  $n-1$  кула, така што во сите кули имало еднаков број коцки. Кое е најголемиот број коцки што може да ги има Васе, ако се знае дека има помалку од 300 коцки?

**Решение.** Од првиот услов на задачата заклучуваме дека вкупниот број коцки е  $22n+3$ . Од нив Васе конструирал  $n-1$  кула, кои по услов имаат еднаков број коцки. Затоа, вкупниот број коцки  $22n+3$  е делив со  $n-1$ . Според тоа,  $\frac{22n+3}{n-1} = \frac{22(n-1)+25}{n-1} = 22 + \frac{25}{n-1}$  е природен број. Следува дека  $n-1$  е делител на 25, т.е.  $n-1 \in \{1, 5, 25\}$ , од каде добиваме  $n \in \{2, 6, 26\}$ . За  $n=2$  имаме  $22n+3=47$ , аа  $n=6$  имаме  $22n+3=135$  и за  $n=26$  имаме  $22n+3=575 > 300$ . Значи, Васе може да има најмногу 135 коцки.

**Задача 2.** Нека  $x, y, z$  и  $a$  се позитивни реални броеви такви што

$$yz = 6ax, \quad zx = 6ay, \quad xy = 6az, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Пресметај  $\frac{1}{xyza}$ .

**Решение.** *Прв начин.* Од условот на задачата следува

$$xyz = 6ax^2, \quad xyz = 6ay^2, \quad xyz = 6az^2, \quad \text{т.е.} \quad x^2 = \frac{xyz}{6a}, \quad y^2 = \frac{xyz}{6a}, \quad z^2 = \frac{xyz}{6a}.$$

Според тоа,  $x^2 = y^2 = z^2$ , и со замена во  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  добиваме  $3x^2 = 1$ .

Но,  $x, y, z$  и  $a$  се позитивни реални броеви, па затоа  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , што значи

$x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Понатаму, со замена во  $yz = 6ax$  наоѓаме  $6a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , т.е.

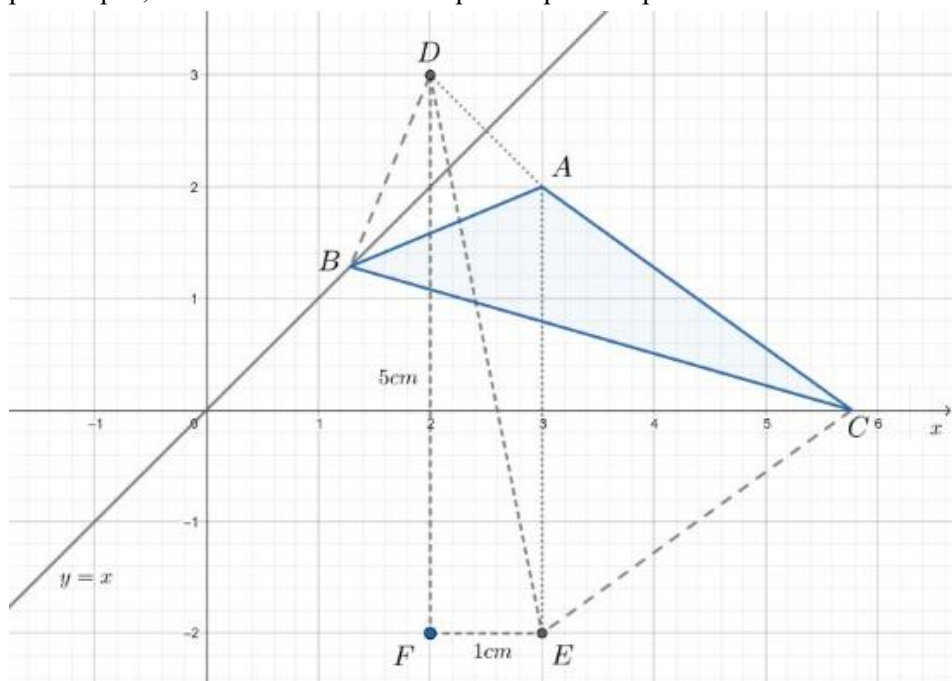
$$a = \frac{1}{6\sqrt{3}}. \quad \text{Конечно,} \quad \frac{1}{xyza} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}}} = 54.$$

*Втор начин.* Бидејќи  $x, y, z$  се позитивни реални броеви, од првите три равенки добиваме  $6a = \frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z}$ , од каде следува  $x^2 = y^2 = z^2$ . Со замена во  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  добиваме  $3x^2 = 1$ , односно  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Значи,  $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$  и со замена во  $yz = 6ax$  наоѓаме  $6a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , т.е.  $a = \frac{1}{6\sqrt{3}}$ . Конечно,

$$\frac{1}{x y z a} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}}} = 54.$$

**Задача 3.** Во координатната рамнина е даден триаголник  $ABC$  така што темето  $A$  има координати  $A(3,2)$ , темето  $B$  лежи на правата  $y = x$ , а темето  $C$  се наоѓа на  $x$ -оската. Пресметај го најмалиот можен периметар на триаголникот  $ABC$ .

**Решение.** Нека  $D(2,3)$  е симетричната точка на точката  $A$  во однос на правата  $y = x$ , а точката  $E(3,-2)$  е симетрична на точката  $A$  во однос на  $x$ -оската. Бидејќи темето  $B$  лежи на правата  $y = x$ , која е симетрала на отсечката  $AD$ , триаголникот  $ABD$  е рамнокрак, т.е.  $\overline{AD} = \overline{DB}$ . Темето  $C$  лежи на  $x$ -оската, која е симетрала на отсечката  $AE$ , па и триаголникот  $ACE$  е рамнокрак, т.е.  $\overline{AC} = \overline{CE}$ . Тогаш периметарот на триаголникот  $ABC$  е



$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \overline{DB} + \overline{BC} + \overline{CE} \geq \overline{DE}.$$

Значи, триаголник со најмал периметар е тој на кој темето  $B$  му е пресек на  $DE$  со правата  $y = x$ , а темето  $C$  му е пресек на  $DE$  со  $x$ -оската. Периметарот на тој триаголник е еднаков на должината на отсечката  $DE$  (види цртеж). Сега, ако  $F(2, -2)$ , тогаш од Питагоровата теорема следува

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{DF}^2 + \overline{FE}^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$$

**Задача 4.** Даден е триаголникот  $ABC$  кај кој  $\angle BAC = 45^\circ$ . Симетралата на аголот  $BAC$  ја сече страната  $BC$  во точката  $D$ . Правата која е нормална на  $AD$  и минува низ темето  $A$ , го сече продолжението на страната  $BC$  во точка  $M$ , така што  $B$  лежи меѓу точките  $M$  и  $C$ . Определи ги големините на аглиите  $ACB$  и  $ABC$ , ако  $\overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AC}$ .

**Решение.** Нека

$$\angle ABC = \beta \text{ и } \angle BCA = \gamma.$$

Нека точката  $N$  лежи на продолжението на  $AB$  така што  $\overline{AN} = \overline{AC}$  (види цртеж). Тогаш од условот на задачата имаме

$$\overline{BN} = \overline{BA} + \overline{AN} = \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BM}$$

што значи дека триаголникот  $MBN$  е рамнокрак со врв во темето  $B$ , па  $\angle BMN = \angle BNM = \frac{\beta}{2}$  ( $\angle ABC = \beta$  е надворешен агол на триаголникот  $ABC$ ).

Од тоа што  $AM$  е нормална на симетралата на аголот во темето  $A$  на триаголникот  $ABC$  следува дека таа е симетрала и на надворешниот агол во темето  $A$ . Тогаш  $\angle CAM = \angle NAM$ . Според признакот  $SAC$  ( $AM$  е заедничка страна,  $\angle CAM = \angle NAM$  и  $\overline{AN} = \overline{AC}$ ) заклучуваме дека  $\triangle NMA \cong \triangle CMA$ , па следува дека  $\frac{\beta}{2} = \gamma$ . Од триаголникот  $ABC$  имаме  $45^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ$ , па добиваме дека  $45^\circ + 3\gamma = 180^\circ$ , т.е.  $\gamma = 45^\circ$ . Значи,  $\beta = 90^\circ$ .

