EGMO 2020 - Прв тест за избор на МКД екипа

16.02.2020

1. Одредете го бројот на подредени тројки множества (A, B, C) за кои се исполнети условите:
(1) $A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots, n\}$
(2) $A \cap B \cap C = \emptyset$
(3) $A \cap B \neq \emptyset$.

Решение. Согласно наведените услови, секој елемент од множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$ припаѓа во едно од следниве шест, попарно дисјунктни, множества:

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}, \overline{A} \cap B \cap \overline{C}, \overline{A} \cap \overline{B} \cap C, A \cap B \cap \overline{C}, A \cap \overline{B} \cap C, \overline{A} \cap B \cap C.$$

(Со $\overline{X}$ е означен комплементот на подмножество X во множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$)

(2 поени)

Притоа, $A \cap B \cap \overline{C}$ е непразно; секое од преостаните наведени множества може да е празно.

(2 поени)

Според комбинаторните принципи на збир и производ, бараниот број изнесува $6^n - 5^n$.

(3 поени)

□

2. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ е избрана точка P. Полуправите AP, BP и CP ги пресекуваат страните BC, CA и AB во точки D, E и F, соодветно. Нека точките R, S и T се слики на P при централни симетрии во однос на D, E и F, соодветно. Покажете дека

$$\frac{|AR|}{|PD|} \cdot \frac{|BS|}{|PE|} \cdot \frac{|CT|}{|PF|} \geq 64\,,$$

при што равенство се достигнува за единствена точка P.

Прво решение. Означуваме $a = \frac{|PD|}{|AD|}, b = \frac{|PE|}{|BE|}, c = \frac{|PF|}{|CF|}$. Бидејќи $[ABC] = [PBC] + [PCA] + [PAB]$ и $a = \frac{[PBC]}{[ABC]}, b = \frac{[PCA]}{[ABC]}, c = \frac{[PAB]}{[ABC]}$, имаме $a + b + c = 1$.

(2 поени)

Да забележиме дека

$$\frac{|AR|}{|PD|} = \frac{|AD| + |PD|}{|PD|} = \frac{1}{a} + 1 = \frac{a+1}{a}.$$

Слично,

$$\frac{|BS|}{|PE|} = \frac{b+1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{|CT|}{|PF|} = \frac{c+1}{c}.$$

Така, посакуваното неравенство е еквивалентно со

$$\frac{a+1}{a} \cdot \frac{b+1}{b} \cdot \frac{c+1}{c} \geq 64\,.$$

(1 поен)

Користиме дека

$$\frac{a+1}{a}=\frac{a+a+b+c}{a}=1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\geq 4\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}.$$

Слично,

$$\frac{b+1}{b}\geq 4\sqrt[4]{\frac{ca}{b^2}} \quad \text{и} \quad \frac{c+1}{c}\geq 4\sqrt[4]{\frac{ab}{c^2}}.$$

(2 поени)

Следствено,

$$\frac{a+1}{a}\cdot\frac{b+1}{b}\cdot\frac{c+1}{c}\geq 64.$$

(1 поен)

Равенство се достигнува ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$, т.е., акко P е тежиште на $\triangle ABC$.

(1 поен)

$\square$

Второ решение. Означуваме $x=\frac{|BD|}{|CD|}, y=\frac{|CE|}{|AE|}, z=\frac{|AF|}{|BF|}$. Согласно теоремата на Ван-Обел:

$$\frac{|AP|}{|PD|}=\frac{1}{y}+z \quad , \quad \frac{|BP|}{|PE|}=\frac{1}{z}+x \quad \text{и} \quad \frac{|CP|}{|PF|}=\frac{1}{x}+y\,.$$

(2 поени)

Следствено,

$$\frac{|AR|}{|PD|}=2+\frac{1}{y}+z \quad , \quad \frac{|BR|}{|PE|}=2+\frac{1}{z}+x \quad \text{и} \quad \frac{|CR|}{|PF|}=2+\frac{1}{x}+y\,.$$

Така, посакуваното неравенство е еквивалентно со

$$(2+\frac{1}{y}+z)\cdot(2+\frac{1}{z}+x)\cdot(2+\frac{1}{x}+y)\geq 64\,.$$

(1 поен)

Да забележиме дека

$$2+\frac{1}{y}+z\geq 4\sqrt[4]{\frac{z}{y}} \quad , \quad 2+\frac{1}{z}+x\geq 4\sqrt[4]{\frac{x}{z}} \quad \text{и} \quad 2+\frac{1}{x}+y\geq 4\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\,.$$

(2 поени)

Оттука,

$$(2+\frac{1}{y}+z)\cdot(2+\frac{1}{z}+x)\cdot(2+\frac{1}{x}+y)\geq 64\,,$$

со равенство ако и само ако $x=y=z$.

(1 поен)

Од друга страна, согласно теоремата на Чева, имаме $xyz=1$. Следува дека равенство се достигнува акко P е тежиште на $\triangle ABC$.

(1 поен)

$\square$

3. Низата $\{x_n\}$ е дефинирана со: $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = 3x_n + \lfloor x_n\sqrt{5} \rfloor$ за секој $n \geq 0$. Одредете ја цифрата на единици на бројот x_{2020}.

Решение. Бидејќи x_n е цел број, имаме $0 < x_n\sqrt{5} - \lfloor x_n\sqrt{5} \rfloor < 1$. Оттука

$$x_{n+1} - 3x_n < x_n\sqrt{5} < x_{n+1} - 3x_n + 1$$
$$(3+\sqrt{5})x_n - 1 < x_{n+1} < (3+\sqrt{5})x_n$$
$$4x_n - (3-\sqrt{5}) < (3-\sqrt{5})x_{n+1} < 4x_n$$
$$3x_{n+1} - 4x_n < x_{n+1}\sqrt{5} < 3x_{n+1} - 4x_n + (3-\sqrt{5}).$$

(2 поени)

Земајќи предвид дека $0 < 3-\sqrt{5} < 1$, имаме $\lfloor x_{n+1}\sqrt{5} \rfloor = 3x_{n+1} - 4x_n$. Следствено, важи

$$x_{n+1} = 6x_n - 4x_{n-1} \text{ за секој } n \geq 1.$$

(1 поен)

За да ја одредиме цифрата на единици на бројот x_{2020}, потребно и доволно е да ги одредиме остатоците на x_{2020} при делење со 2 и 5.

(1 поен)

Од рекурентната врска, x_n е парен за секој $n \geq 2$.

(1 поен)

Нека r_n е остатокот при делење на x_n со 5. Тогаш

$$r_{n+1} \equiv_5 r_n + r_{n-1} \text{ за секој } n \geq 1, \text{ и } r_0 = 1, r_1 = 0.$$

Оттука, непосредно добиваме дека првите 21 членови на низата $\{r_n\}$ се:

$$1, 0, 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0.$$

Бидејќи $(r_0, r_1) = (r_{20}, r_{21}) = (1, 0)$, заклучуваме дека $r_{2020} = 1$. Следствено, бројот x_{2020} завршува на цифрата 6.

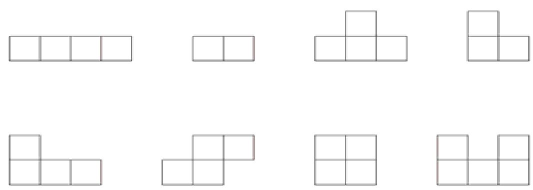
(2 поени)

□

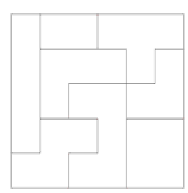
EGMO 2020 - Втор тест за избор на МКД екипа

23.02.2020

4. Дали постои паркетирање на правоаголник 10×6 со по две копии на секоја од следниве фигури? (Одговорот да се образложи.)



Решение. Одговорот е потврден. Имено, правоаголник 10×6 може да се паркетира со помош на две копии на правоаголник 6×5. Од друга страна, постои паркетирање на правоаголник 6×5 со горенаведените фигури:



(7 поени)

□

5. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ е избрана точка P. Нека D, E и F се подножја на нормалите спуштени од P врз правите BC, CA и AB, соодветно. Нека S е средна точка на страната AB. Покажете дека следниве две тврдења се еквивалентни:

(1) FP е бисектриса во $\triangle DEF$
(2) $|SD| = |SE|$.

Решение. Од тетивноста на $AEPF$ и $BDPF$, имаме $\angle EFP = \angle CAP$ и $\angle DFP = \angle CBP$.

(1 поен)

Нека L и M се средни точки на отсечките AP и BP, соодветно. Тогаш $|EL| = |PL| = |MS|$, $|DM| = |PM| = |LS|$ и $\angle PLS = \angle PMS$.

(2 поени)

Следствено, $\angle ELS = 2\angle CAP + \angle PLS$ и $\angle DMS = 2\angle CBP + \angle PMS$. Заклучуваме дека тврдењето (1) е еквивалентно со следново тврдење: (3) $\angle ELS = \angle DMS$.

(2 поени)

Од друга страна, означувајќи $x = |EL|$ и $y = |DM|$, имаме (согласно косинусна теорема)

$$|SE|^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos\angle ELS$$
$$|SD|^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos\angle DMS\,.$$

(1 поен)

Следува дека и тврдењето (2) е еквивалентно со тврдењето (3).

(1 поен)

□

6. Нека $p \mid a^{2^n} + b^{2^n}$ и $p \nmid ab$, каде $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ и p е непарен прост број. Покажете дека p дава остаток 1 при делење со 2^{n+1}.

Прво решение. Согласно условот на задачата и малата теорема на Ферма, имаме

$$p \mid a^{2^{n+1}} - b^{2^{n+1}} \quad \text{и} \quad p \mid a^{p-1} - b^{p-1}\,.$$

(2 поени)

Нека $d = (2^{n+1}, p-1)$. Тогаш (од алгоритамот на Евклид) следува дека

$$p \mid a^d - b^d\,.$$

(2 поени)

Да претпоставиме дека p не дава остаток 1 при делење со 2^{n+1}, т.е., дека $d \mid 2^n$.

(1 поен)

Тогаш,

$$p \mid a^{2^n} - b^{2^n}\,.$$

(1 поен)

Следствено $p \mid 2a^{2^n}$. Оттука, непарноста на p повлекува дека $p \mid a$. Ова е посакуваната противречност.

(1 поен)

□

Второ решение. Нека $k = \nu_2(p-1)$. (Со други зборови, со k е означен експонентот на 2 во канонската факторизација на $p-1$.) Тогаш количникот $s = \frac{p-1}{2^k}$ е непарен природен број.

(1 поен)

Нека $a^{2^n} \equiv_p u$. Од условот на задачата следува дека $b^{2^n} \equiv_p -u$.

(1 поен)

Да претпоставиме дека p не дава остаток 1 при делење со 2^{n+1}, т.е., дека $p - 1 \mid 2^n s$.

(2 поени)

Согласно направената претпоставка и малата теорема на Ферма, имаме

$$1 \equiv_p (a^{2^n})^s \equiv_p u^s \equiv_p -(-u)^s \equiv_p -(b^{2^n})^s \equiv_p -1\,.$$

(2 поени)

Но ова повлекува дека $p \mid 2$, што е посакуваната противречност.

(1 поен)

□