Републички натпревар 1995

I година

1. Спортскиот известувач задоцнил за финишот на трката на $100\ m$. Од петмина присутни расположени гледачи ги собрал следните податоци:

Александар:	Сенко беше втор, а Огнен трет.
Блаже:	Петар беше трет, а Томе петти.
Васко:	Томе беше прв, а Петар втор.
Горјан:	Сенко беше втор, а Раде четврт.
Драган:	Огнен беше прв, а Раде четврт.

На известувачот му било јасно дека гледачите сепак биле премногу расположени и го препрашал својот колега за резултатите. Но колегата само му спомнал деда секој од гледачите дал по еден точен одговор и еден неточен пласман на натпреварувачите. Помогнете му на известувачот да го состави својот извештај и да го определи конечниот редослед на натпреварувачите во трката.

Решение. За секој од натпреварувачите и гледачите ја користиме само првата буква од неговото име како кратенка.

Да претпоставиме дека С е навистина втор. Тогаш, според изјавата на Г, Р не е четврт. Сега, според изјавата на В, следува дека П е втор. Но, последново противречи на претпоставката дека С е втор. Значи, не е можно С да е втор.

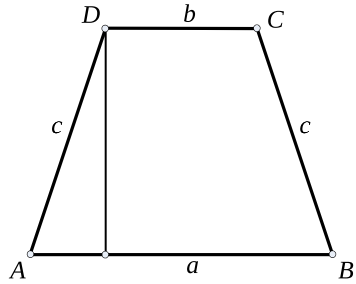
Со оглед на претходниот заклучок и изјавите на А и Г, добиваме дека О е трет и Р е четврт. Бидејќи О е трет, според изјавата на Б, добиваме дека Т е петти. Сега, бидејќи Т е петти, според изјавата на В, добиваме дека П е втор. Конечно, преостанува дека С победил во трката.

Значи, конечниот редослед е: С,П,О,Р,Т

2. Градовите A и B се оддалечени $106\,\mathrm{km}$. На пладне, од градот A, пошол Антонио на велосипед движејќи се кон B со постојана брзина од $30\,\mathrm{km/h}$. По половина час, од градот B пошол Бојан пеш движејќи се од кон A со постојана брзина од $5\,\mathrm{km/h}$. Во моментот кога Антонио поаѓа кон B, од неговиот нос полетала мува летајќи кон B со постојана брзина $50\,\mathrm{km/h}$. Кога мувата го сретнала Бојан му слетала на носот, и веднаш со истата брзина почнала да се враќа кон Антонио и му слетала на носот, и веднаш полетала кон Бојан и се така додека Антонио и Бојан не се сретнале. Колку километриц прелетала мувата?

Решение. Во 12.30 Антонио се наоѓа на $106-15=91$ километри од B. Во истиот момент Бојан поаѓа од B. Времето што им е потребно (мерено од тој момент) за да се сретнат е $\frac{91}{30+5}=\frac{91}{35}=\frac{13}{5}$ часа. Значи, мувата лета половина час(до 12.30) и уште $\frac{13}{5}$ часа, со брзина од $50\,\mathrm{km/h}$. Притоа, прелетува вкупно $50\cdot(\frac{1}{2}+\frac{13}{5})=155$ километри.

3. Во рамнокрак трапез со плоштина 20 е впишана кружница со радиус 2. Да се определи должината на секоја од страните на трапезот.



Решение. Дијаметарот на впишаната кружница е еднаков на висината h на дадениот трапез. Значи, $h=4$. За плоштината на трапезот имаме $P=\frac{a+b}{2}h=20$, од каде се добива дека $a+b=10$. Бидејќи дадениот трапез е тангентен, збировите на должините на спротивните страни му се еднакви па $a+b=2c$, од каде добиваме дека $c=5$. Од питагоровата теорема добиваме дека: $\frac{a-b}{2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$. Конечно решевајќи го системот равенки

$$\begin{cases} a+b=10 \\ a-b=6 \end{cases},$$

добиваме $a=8$ и $b=2$.

4. Нека природните броеви m и n имаат по точно 101 делител (броејќи ги и 1 и самите броеви како делители). Докажи дека не е можно mn да има 1000 делители.

Решение. Прво ќе покажеме дека еден природен број k има непарен број на делители ако и само ако е полн квадрат. Навистина, за секој делител d на k кој е помал од $\sqrt{k}$, постои соодветен делител $\frac{k}{d}$ на k кој е поголем од $\sqrt{k}$. Значи, ако k не е полн квадрат тој има парен број на делители, а ако е полн квадрат, тогаш и $\sqrt{k}$ е делител на k и k има вкупно непарен број на делители.

Користејќи го споменатото својство, добиваме дека m и n се полни квадрати, бидејќи имаат непарен број на делители. Но, тогаш и mn е полн квадрат и има непарен број на делители, односно не е можно mn да има 1000 делители.

II година

1. Нека $u=-1+i\sqrt{3}$, $v=-1-i\sqrt{3}$, $w=2$ и n е природен број кој не е делив со 3. Докажи дека $u^n+v^n+w^n=0$.

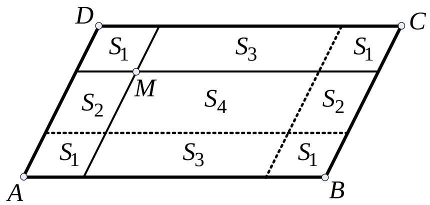
Решение. Имаме $u^3=(-1+i\sqrt{3})^3=8$ и $v^3=(-1-i\sqrt{3})^3=8$. Освен тоа $u^2=2v$ и $v^2=2u$.

Ако $n=3k+1$, каде $k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$u^n+v^n+w^n=8^k u+8^k v+8^k w=8^k(u+v+2)=0.$$

Доказот за $n=3k+2$, $k\in\mathbb{N}$ е аналоген.

2. Даден е паралелограм $ABCD$ (темињата A и C се спротивни) и точка M во внатрешноста на паралелограмот. Низ M се повлечени две прави, паралелно на страните на паралелограмот. Двете прави го делат паралелограмот на четири нови паралелограми. Докажи дека плоштината на барем еден од двата нови паралелограми, од кои едниот го содржи темето A а другиот темето C, не е поголема од една четвртина од плоштината на целиот паралелограм $ABCD$.



Решение. Ако точката M е пресек на дијагоналите или лежи на која било од средните линии на паралелограмот, задачата е тривијална.

Да претпоставиме дека M не лежи на некоја од средните линии на паралелограмот. Ако правите повлечени низ M ги пресликаме со централна симетрија во однос на пресекот на дијагоналите добиваме уште две нови прави кои заедно со правите низ M го делат паралелограмот $ABCD$ на 9 паралелограми. Ако со S_i ($i = 1,2,3,4$) се означат плоштините на добиените паралелограми, а со P плоштината на паралелограмот $ABCD$, добиваме:

$$4S_1 + 2S_2 + 2S_3 + S_4 = P,$$

од каде, бидејќи , добиваме дека

$$4S_1 + 2S_2 + 2S_3 < P,$$

односно

$$(S_1 + S_2) + (S_1 + S_3) < \frac{P}{2}.$$

Од последното е јасно дека не е можно и двете плоштини $P_1 + P_2$ и $P_1 + P_3$ да се поголеми од $\frac{P}{4}$.

3. Да се определат 11 реални броја така што секој од нив да е еднаков на квадратот на сумата на преостанатите 10.

Решение. Нека бараните броеви се $x_1, x_2, ..., x_{11}$ и нека важи:

$$x_1 \le x_2 \le ... \le x_{11}. \tag{1}$$

Нека вкупната сума на броевите е s. Според условите на задачата, имаме:

$$x_i = (s - x_i)^2,\ i = 1,2,3,...,11, \tag{2}$$

од каде според (1), добиваме:

$$(s - x_1)^2 \le (s - x_2)^2 \le .... \le (s - x_{11})^2. \tag{3}$$

Бидејќи бараните броеви се квадрати, истите се ненегативни, па од (1) следува дека $s - x_1 \le s - x_2 \le .... \le s - x_{11}$, односно

$$(s - x_1)^2 \ge (s - x_2)^2 \ge .... \ge (s - x_{11})^2. \tag{4}$$

Од (3) и (4) добиваме дека $(s-x_1)^2=(s-x_2)^2=....=(s-x_{11})^2$, од каде поради ненегативноста, имаме $x_1=x_2=...=x_{11}$. Тогаш за секој од нив важи $x=(10x)^2$, од каде добиваме дека сите барани броеви се 0 или сите се еднакви на $\frac{1}{100}$.

4. Во рамнина се дадени n точки ($n\geq 3$) така што меѓу нив нема три колинеарни. Докажи дека постои кружница низ три од дадените точки така што во внатрешноста на кругот определен со кружницата не лежи ниту една од дадените точки.

Решение. Нека A и B се две од дадените точки така што растојанието од A до B е минимално, односно за секој пар дадени точки X и Y важи $\overline{XY}\geq\overline{AB}$.

Понатаму, нека точката C е избрана така што $\measuredangle ACB$ е максимален, односно за секоја точка Z, различна од A и B, важи $\measuredangle AZB\leq\measuredangle ACB$. Кружницата низ точките A,B и C ги задоволува бараните услови, затоа што секоја точка W од внатрешноста на кругот важи дека аголот $\measuredangle AWB$ е поголем од $\measuredangle ACB$ или некое од растојанијата $\overline{AW}$ и $\overline{BW}$ е помало од $\overline{AB}$, што значи дека ниту една од внатрешните точки на кругот не е една од избраните точки.

III година

1. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2.$$

Решение.Користејќи го неравенството меѓу геометриската и хармониската средина

$$\sqrt{xy}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}},$$

заменувајќи $x=\frac{a}{b+c}$ и $y=1$, добиваме:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\frac{2a}{a+b+c}.$$

Аналогно се добива $\sqrt{\frac{b}{a+c}}\geq\frac{2b}{a+b+c}$ и $\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2c}{a+b+c}$.

Со сумирање на трите добиени неравенства се добива бараното неравенство.

Забелешка. Напоменуваме дека случајот на равенство не е можен. Навистина, равенството е можно само ако во трите неравенства кои се сумираат важи равенство, а тоа е исполнето само ако $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}=1$. Лесно се проверува дека последниот услов не е исполнет за ниту еден избор на a,b и c.

2. Да се утврди за кои природни броеви n низата броеви $1,2,3,...,4n$ може да се подели на n групи по 4 броја така што во секоја група еден од броевите е аритметичка средина на останатите три.

Решение. Да разгледаме група од 4 броја a,b,c и d така што бројот d е аритметичка средина на a,b и c. Имаме $a+b+c=3d$, односно $a+b+c+d=4d$. Значи, сумата на броевите од групата е делива со 4. Оттука следува дека за да може да се подели дадената низа на n групи со бараното својство, мора вкупната сума да е делива со 4. Имаме $1+2+...,4n=2n(4n+1)$. Значи, n мора да е парен број.

Нека $n=2k$ е парен број. Тогаш дадената низа е $1,2,...,8k$. Ги делиме дадените броеви на k групи по 8 броеви:

$$1,2,...,8;9,10,...,16;...;8(k-1)+1,8(k-1)+2,....,8k.$$

Избираме една од добиените групи и нека тоа е $8s+1,8s+2,....,8s+8$, каде $0\leq s\leq k-1$. Ја делиме добиената група на две групи по 4 броја:

$$8s+1,8s+3,8s+4,8s+8;8s+2,8s+5,8s+6,8s+7 .$$

Во првата група $8s+4$ е аритметичка средина на преостанатите три броја, а во втората $8s+5$ е аритметичка средина на преостанатите три броја. На овој начин ја делиме секоја од претходно дефинираните групи од 8 елементи на две групи од 4 елементи кои ги задоволуваат бараните услови од задачата.

3. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти така што постои цел број n за кој $P(n)=0$. Докажи дека не постои природен број m така што

$$P(1995)P(2000)=7^m .$$

Решение. Ќе го користиме фактот што ако a и b се цели броеви, тогаш $a-b$ е делител на $P(a)-P(b)$.

Да претпоставиме дека постои m така што

$$P(1995)P(2000)=7^m .$$

Тогаш $P(1995)$ и $P(2000)$ се степени на 7 (или на -7).

Користејќи го споменатитот факт, добиваме дека $1995-n$ е делител на $P(1995)$ и $2000-n$ е делител на $P(2000)$. Значи, и $1995-n$ и $2000-n$ се степени на 7 (или на -7). Ако $1995-n$ е 1 или -1, тогаш n е 1994 или 1996, па $2000-n$ е 6 или 4 и не е степен на 7. Ако $2000-n$ е 1 или -1, тогаш n е 1999 или 2001, па $1995-n$ е -4 или -6, па не е степен на 7. Ако $1995-n$ и $2000-n$ се деливи со 7, тогаш и нивната разлика е делива со 7, но нивната разлика е 5 и не е делива со 7.

Значи, не постои природен број m така што $P(1995)P(2000)=7^m$.

4. Еден квадрат е прекриен со правоаголници кои не се преклопуваат и не преоѓаат надвор од квадратот. Докажи дека збирот на плоштините на круговите определени со кружинците опишани околу покривачките правоаголници не е помал од плоштината на кругот определен со кружницата опишана околу почетниот квадрат.

Решение. Нека плоштината на квадратот е P, а на кругот определен со кружницата опишана околу квадратот е K. Тогаш $K=\frac{P\pi}{2}$. Нека плоштината на еден од покривачките правоаголници е P', а плоштината на кругот определен со кружницата опишана околу правоаголникот е K'. Нека страните на правоаголникот се a и b. Имаме:

$$K'=\frac{a^2+b^2}{4}\pi\geq\frac{\pi ab}{2}=\frac{P'\pi}{2}.$$

Со сумирање на соодветното неравенство за секој од покривачките правоаголници, а со оглед на фактот што сумата нап лоштините на покривачките правоаголници е еднаква на плоштината на почетниот квадрат го добиваме бараниот резултат.

Забелешка. При добивањето на горното неравенство, користено е неравенство $a^2+b^2\geq 2ab$ кое е последица на очигледното неравенство $(a-b)^2\geq 0$.

IV година

1. Нека $a_1,a_2,...$ е бесконечна аритметичка прогресија со прв член a и разлика $d\neq 0$. Докажи дека ако во дадената прогресија постојат три члена кои формираат геометриска прогресија, тогаш $\frac{a}{d}$ е рационален број.

Решение. Нека a_m,a_n и a_p формираат геометриска прогресија. Тогаш: $(a_n)^2=a_m a_p$, од каде по средувањето, ставајќи $r=n-1$, $s=m-1$ и $t=p-1$, добиваме:

$$a(2r-s-t)=d(st-r^2). \tag{1}$$

Да претпоставиме дека $2r-s-t=0$. Тогаш:

$$st-r^2=st-(\tfrac{s+t}{2})^2=-(\tfrac{s-t}{2})^2<0,$$

бидејќи s и t се сигурно различни (поради $d\neq 0$). Значи, левата страна на (1) е 0 а десната не е, што не е можно.

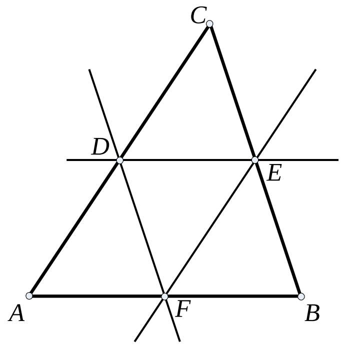
Значи, $2r-s-t\neq 0$, па од (1), добиваме:

$$\frac{a}{d}=\frac{st-r^2}{2r-s-t},$$

од каде е јасно дека $\frac{a}{d}$ е рационален број.

2. Во рамнината се дадени n точки ($n \geq 3$) така што нив нема три колинеарни точки и плоштината на секој триаголник определен со три од дадените точки е најмногу 1. Докажи дека постои триаголник ABC во рамнината (темињата не мора да се од дадените точки) со плоштина најмногу 4 така што сите дадени точки се покриени со триаголникот ABC.

Решение. Нека триаголникот DEF има најголема плоштина од сите триаголници чии темиња се три од дадените точки. Низ темето D повлекуваме права паралелна на EF, низ E паралелна на DF а низ F паралелна на DE и на тој начин го добиваме триаголникот ABC. Бидејќи триаголникот DEF има плоштина најмногу 1, триаголникот ABC има плоштина најмногу 4 (ABC се состои од 4 триаголници кои се складни на DEF). Во внатрешноста и на рабовите на $\triangle ABC$ се наоѓаат точки од рамнината кои со секои две од точките D, E и F определуваат триаголник со плоштина најмногу еднаква на плоштината на DEF. Значи, сите n дадени точки се покриени со ABC.



3. Иста како задача

4. Иста како задача