Neprebrojivost skupa transcendentnih brojeva

Petar Gregorek[1], *Mladen Vuković*[2]

Ovo je nastavak članka [4]. U njemu smo definirali sljedeće pojmove: injekcija, surjekcija, bijekcija i prebrojiv skup. Najvažniji rezultat koji smo dokazali je prebrojivost svakog skupa $\mathbb{Z}^n$, gdje je n prirodan broj.

Sada nam je glavni cilj dokazati da skup svih transcendentnih realnih brojeva nije prebrojiv, odnosno da je neprebrojiv.

Ovaj članak podijeljen je na tri dijela koji imaju sljedeće naslove: *Polinomi*, *Neprebrojivi skupovi* i *Dokazi neprebrojivosti skupa transcendentnih brojeva*. U dijelu pod naslovom *Polinomi* uvodimo redom sljedeće pojmove: polinom, stupanj polinoma i nultočka polinoma. Posebno ističemo da je skup svih nultočaka svakog polinoma konačan. Zatim, tu dokazujemo da je skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima prebrojiv. U dijelu pod naslovom *Neprebrojivi skupovi* razmatramo beskonačne skupove koji nisu prebrojivi. Prva važna činjenica iz tog dijela, koju posebno ističemo, je neprebrojivost skupa svih realnih brojeva. Druga tvrdnja koju ističemo u drugom dijelu je sljedeća: *Ako je A neprebrojiv skup, te je $B \subseteq A$ prebrojiv, tada je skup $A \setminus B$ neprebrojiv.* U zadnjem dijelu definiramo algebarske i transcendentne realne brojeve, te dajemo primjere. Glavni cilj zadnjeg dijela je dokaz neprebrojivosti skupa svih transcendentnih realnih brojeva. Prvo izlažemo dokaz u kojem se koristi prebrojivost skupa svih algebarskih realnih brojeva i neprebrojivost skupa $\mathbb{R}$. Zatim izlažemo i dokaz iz [3].

Na početku članka [4] bili smo naveli da to nije tekst samo za čitanje, već zainteresiranom čitatelju predlažemo da kraj sebe ima papir i olovku, te da barem neke navedene tvrdnje pokuša sam dokazati. Isti prijedlog vrijedi i ovdje. Zatim, isto kao u prvom članku i ovdje se iza svakog dijela nalazi desetak zadataka za vježbu. Zadatci se mogu grubo podijeliti na one za provjeru usvojenih pojmova, te na zadatke u kojima su iskazani neki važni rezultati koje koristimo.

Polinomi

U ovom članku važnu ulogu imaju funkcije koje se nazivaju polinomi. Polinom je funkcija oblika $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdje je n prirodan broj, te $a_0, a_1, \ldots, a_n$ su realni brojevi koje nazivamo koeficijenti. Navedimo neke primjere polinoma:

$$f_1(x) = 5x + 13,$$
$$f_2(x) = \sqrt{4}x^3 + \sqrt[3]{7}x^2 + (\sin 56)x,$$

[1] Autor je predavač na Fakultetu strojarstva i brodogranje u Zagrebu; e-pošta: `petar.gregorek@fsb.hr`

[2] Autor je izvanredni profesor na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: `vukovic@math.hr`

$$f_3(x) = \frac{1}{3}x^{17} - 345x^5 - 567x^2 - \log 101.$$

Primjerice, funkcija zadana s $f(x) = x^4 - 9\sqrt{x} - 9$ nije polinom, jer je $\sqrt{x} = x^{1/2}$, a $1/2$ nije prirodan broj. Skup svih polinoma čiji su koeficijenti realni brojevi označava se s $\mathbb{R}[X]$.

Za polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, pri čemu je $a_n \neq 0$, broj n nazivamo *stupanj polinoma* f, i pišemo $st(f) = n$. Ako je stupanj polinoma f jednak n, kažemo da je f polinom n-tog stupnja. Za prije navedene polinome f_1, f_2, f_3 vrijedi: $st(f_1) = 1$, $st(f_2) = 3$ i $st(f_3) = 17$, tj. f_1 je polinom prvog, f_2 trećeg, a f_3 sedamnaestog stupnja.

Realna nultočka polinoma f je realan broj x_0 za koji je $f(x_0) = 0$. Realna nultočka prije navedenog polinoma f_1 je racionalan broj $-\frac{13}{5}$. Jedna realna nultočka od f_2 je broj nula. Polinom f_3 je neparnog stupnja pa ima barem jednu realnu nultočku (zašto? za detalje vidi [5]). Nemaju svi polinomi realne nultočke. Primjerice, takav je polinom $f(x) = x^2 + 1$.

U ovom članku glavnu ulogu imaju polinomi s cjelobrojnim koeficijentima, te njihove realne nultočke. Skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima označavamo sa $\mathbb{Z}[X]$. Za prije navedene primjere polinoma f_1, f_2, f_3 vrijedi $f_1 \in \mathbb{Z}[X]$ i $f_2, f_3 \notin \mathbb{Z}[X]$.

Postoje funkcije koje imaju beskonačno mnogo realnih nultočaka. Primjerice, takve su funkcije sin i cos. No, broj svih realnih nultočaka polinoma je uvijek konačan. Preciznije, broj nultočaka polinoma n-tog stupnja je manji ili jednak n (zašto? vidi zadatak 3). Više detalja o polinomima možete naći u [7].

Svaki polinom je jedinstveno određen svojim koeficijentima (zašto? vidi zadatak 4). Posebno, svaki polinom $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ iz $\mathbb{Z}[X]$ jedinstveno je određen $(n+1)$-torkom cijelih brojeva $(a_n, \ldots, a_1, a_0)$. Za svaki prirodan broj n označimo s P_n skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima čiji je stupanj n. Zatim, za svaki prirodan broj n neka je $F_n : P_n \to \{(a_n, \ldots, a_1, a_0) : a_i \in \mathbb{Z},\ a_n \neq 0\}$ funkcija koja polinomu $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ iz skupa P_n pridružuje $(n+1)$-torku $(a_n, \ldots, a_1, a_0)$. Iz prethodnih razmatranja slijedi da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija $F_n : P_n \to \{(a_n, \ldots, a_1, a_0) : a_i \in \mathbb{Z},\ a_n \neq 0\}$ bijekcija. Budući da je za svaki prirodan broj n skup $\mathbb{Z}^{n+1}$ prebrojiv (vidi [4]), lako je vidjeti da je i za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup $\{(a_n, \ldots, a_1, a_0) : a_i \in \mathbb{Z},\ a_n \neq 0\}$ prebrojiv. To znači da je za svaki prirodan broj n skup P_n svih polinoma stupnja n prebrojiv.

Označimo s $\mathcal{P}$ skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima čiji je stupanj barem 1, tj. $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{Z}[X] : st(p) \geq 1\}$. Očito vrijedi $\mathcal{P} = \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n$. To znači da je $\mathcal{P}$ prebrojiva unija prebrojivih skupova. U [4] smo naveli da je svaka prebrojiva unija prebrojivih skupova također prebrojiv skup. Iz toga slijedi da je skup $\mathcal{P}$ prebrojiv.

Zadatci s polinomima

1. Kažemo da polinom f dijeli polinom g ako postoji polinom h tako da je $g = f \cdot h$. Primjerice, polinom $f(x) = x^2 + 1$ dijeli polinom $g(x) = x^4 - 1$.
Ako polinom f dijeli polinom g tada to označavamo s $f|g$. Neka su $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$. Dokažite da vrijedi: ako $f|g$ i $f|h$ tada $f|(g+h)$.

2. Dokažite da vrijedi: ako je x_0 nultočka polinoma g tada polinom $f(x) = x - x_0$ dijeli polinom g. (Navedena tvrdnja se naziva Bézoutov teorem.)

3. Dokažite da je broj svih realnih nultočaka nekog polinoma $f \in \mathbb{Z}[X]$ stupnja n manji ili jednak n.
Uputa. Iskoristite Bézoutov teorem.

4. Teorem o nul-polinomu glasi:
Neka je $f \in \mathbb{R}[X]$ *i* $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. *Ako za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $f(x) = 0$, *tj.* f *je nul-polinom, tada imamo* $a_n = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.
Dokaz teorema o nul-polinomu možete pogledati, primjerice, u [7].
Primjenom teorema o nul-polinomu dokažite sljedeći teorem o jednakosti polinoma:
Neka su $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *i* $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$. *Ako za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $f(x) = g(x)$ *tada je* $n = m$ *i za svaki* $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *vrijedi* $a_j = b_j$.

5. Teorem o dijeljenju polinoma s ostatkom glasi:
Neka su $f, g \in \mathbb{R}[X]$, *tako da je* $st(g) \geq 1$. *Tada postoje* $q, r \in \mathbb{R}[X]$ *tako da je* $f = g \cdot q + r$, *i vrijedi* $r = 0$ *ili* $st(r) < st(g)$.
Primjenom teorema o jednakosti polinoma dokažite da su polinomi q i r jedinstveni.

6. Dokažite detaljno da je skup $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{Z}[X] : st(p) \geq 1\}$ prebrojiv.

Neprebrojivi skupovi

Ponovimo definiciju ekvipotentnosti skupova. U [4] definirali smo da su skupovi A i B ekvipotentni ako postoji barem jedna bijekcija $f : A \to B$. Ako su skupovi A i B ekvipotentni tada to označavamo s $A \sim B$. Skup A je prebrojiv ako vrijedi $A \sim \mathbb{N}$.

Za beskonačan skup koji nije prebrojiv kažemo da je *neprebrojiv*. Cantorova jednostavna definicija ekvipotentnosti ima više iznenađujućih posljedica. Ovdje navodimo važan Cantorov teorem koji ćemo koristiti u daljnjem izlaganju. Dokaz tog teorema možete pogledati, primjerice, u [11].

Teorem 1. (G. Cantor) *Skup* $\mathbb{R}$ *realnih brojeva je neprebrojiv.*

Naglasimo još jednom da Cantorov teorem tvrdi da ne postoji bijekcija između skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$. To znači da skup $\mathbb{R}$ ima "više" elemenata nego skup $\mathbb{N}$. Skup $\mathbb{R}$ je jedan primjer neprebrojivog skupa. Znate li neki skup koji ima "više" elemenata nego skup $\mathbb{R}$ (vidi zadatak 10)?

Istaknimo da je skup $\mathbb{R}^2$ svih uređenih parova realnih brojeva tj. skup svih točaka koordinatne ravnine neprebrojiv, kao i skup $\mathbb{C}$ svih kompleksnih brojeva. Mnoge primjere prebrojivih i neprebrojivih skupova možete naći u [2].

U daljnjim razmatranjima koristit ćemo i sljedeći teorem:

Teorem 2. *Ako je skup* A *neprebrojiv, a* $B \subseteq A$ *prebrojiv, tada vrijedi* $A \setminus B \sim A$.

Dokaz te činjenice možete vidjeti u [11]. Njezina neposredna posljedica glasi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$. Znači da je i skup svih iracionalnih brojeva neprebrojiv.

Dokažimo da je skup $[0, +\infty\rangle$ svih nenegativnih realnih brojeva neprebrojiv. Vrijedi $\mathbb{R} \sim \langle 0, +\infty\rangle$, jer je eksponencijalna funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$, zadana s $f(x) = 2^x$, jedna bijekcija. Očito vrijedi $[0, +\infty\rangle \sim \langle 0, +\infty\rangle$ (zašto?). Dakle vrijedi, $\mathbb{R} \sim [0, +\infty\rangle$ (zašto?), pa je skup $[0, +\infty\rangle$ neprebrojiv.

Zadatci s neprebrojivim skupovima

1. Neka su a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, takvi da je $a < b$ i $c < d$. Dokažite da vrijedi $[a, b] \sim [c, d]$.
2. Neka je A beskonačan skup i $B \subseteq A$ konačan. Dokažite da je $A \sim A \setminus B$.
3. Dokažite da vrijedi $[0, 1] \sim \langle 0, 1 \rangle$.
   Uputa. Iskoristi prethodni zadatak ili vidi [8].
4. Dokažite da za sve a, $b \in \mathbb{R}$, takve da je $a < b$, vrijedi: $[a, b] \sim \langle a, b] \sim [a, b\rangle \sim \langle a, b \rangle$.
5. Dokažite da su svi ograničeni intervali realnih brojeva međusobno ekvipotentni. Točnije: dokažite da za sve a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, takve da je $a < b$ i $c < d$, vrijedi, primjerice, $[a, b\rangle \sim \langle c, d \rangle$.
6. Dokažite da je $\mathbb{R} \sim \langle 0, 1 \rangle$.
   Uputa. Pošto je funkcija $\mathrm{tg} : \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \to \mathbb{R}$ bijekcija, imamo $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \sim \mathbb{R}$. Iz prethodnog zadatka slijedi posebno $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \sim \langle 0, 1 \rangle$.
7. Dokažite teorem 2.
8. Dokažite da je $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$ (na osnovu ovog možemo reći da točaka u ravnini ima isto toliko koliko i točaka na pravcu).
   Uputa. Ova tvrdnja se standardno dokazuje primjenom tzv. Cantor–Schröder–Bernsteinovog teorema. Jedan takav dokaz možete vidjeti u [11].
9. Dokažite da vrijedi $\mathbb{R}^3 \sim \mathbb{R}$ (na osnovu ovoga možemo reći da točaka u prostoru ima isto toliko koliko i točaka na pravcu).
   Uputa. Primjenom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$.
10. Dokažite da za svaki skup A vrijedi $A \not\sim \mathcal{P}(A)$, gdje je $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ *partitivni* skup skupa A.
    Uputa. Dokaz možete vidjeti u [11]. Ova tvrdnja se naziva Cantorov osnovni teorem teorije skupova. Uočite da iz toga posebno slijedi da ne postoji "najveći" skup.

Dokazi neprebrojivosti skupa transcendentnih brojeva

Za realan broj x_0 kažemo da je *algebarski* ako postoji polinom $p \in \mathcal{P}$, tj. polinom s cjelobrojnim koeficijentima čiji je stupanj barem jedan, tako da vrijedi $p(x_0) = 0$. To znači da su algebarski brojevi realne nultočke polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Svaki cijeli broj je algebarski, jer ako je m cijeli broj tada je $p(x) = x - m$ jedan polinom s cjelobrojnim koeficijentima čija je nultočka upravo broj m. Očito je svaki racionalan broj algebarski (zašto?). Broj $\sqrt{2}$ je također algebarski jer je nultočka polinoma $p(x) = x^2 - 2$ s cjelobrojnim koeficijentima.

Skup svih algebarskih brojeva ima mnoga zanimljiva svojstva vezana uz aritmetičke operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Istaknimo jedno svojstvo vezano uz zbrajanje: zbroj algebarskih brojeva je opet algebarski broj. Dokaz te činjenice nije nimalo trivijalan. Možete ga vidjeti u [1].

Ilustrirajmo ovu činjenicu na jednostavnom slučaju algebarskih brojeva $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$. Dokažimo da je broj $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ također algebarski. U tu svrhu računamo:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+2\sqrt{6}+3 = 5+2\sqrt{6}\\
&(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 5 = 2\sqrt{6}\\
&\left((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 5\right)^2 = (2\sqrt{6})^2\\
&(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 - 10(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + 25 = 24.
\end{aligned}$$

To znači da je broj $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nultočka polinoma x^4-10x^2+1, pa je algebarski. Neke zanimljive primjere algebarskih brojeva možete vidjeti u [9] i [10].

Označimo s $\mathcal{A}$ skup svih realnih algebarskih brojeva. Zbog $\mathbb{Q}\subseteq\mathcal{A}$ slijedi da je skup $\mathcal{A}$ beskonačan. Pošto vrijedi $\mathcal{A}=\{x_0\in\mathbb{R}:\ \text{postoji}\ \ p\in\mathcal{P}\ \ \text{takav da}\ p(x_0)=0\}$, te smo bili naveli da svaki polinom ima najviše konačno nultočaka, tada je skup $\mathcal{A}$ beskonačan i prebrojiva je unija konačnih skupova, pa je prebrojiv (zašto?).

Ako bi skup $\mathbb{R}\setminus\mathcal{A}$ bio prebrojiv, tada bi zbog $\mathbb{R}=\mathcal{A}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathcal{A})$ imali da je skup $\mathbb{R}$ prebrojiv kao unija dva prebrojiva skupa. No, iz teorema 1 znamo da je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv. Iz toga slijedi da je skup $\mathbb{R}\setminus\mathcal{A}$ neprebrojiv. Štoviše, iz teorema 2 imamo $\mathbb{R}\setminus\mathcal{A}\sim\mathbb{R}$.

Za realan broj koji nije algebarski kažemo da je *transcendentan*. Upravo smo dokazali da je skup $\mathbb{R}\setminus\mathcal{A}$ svih transcendentnih brojeva neprebrojiv.

Važno je naglasiti da smo posebno dokazali da postoje transcendentni brojevi. No, bez obzira što znamo da ima neprebrojivo mnogo transcendentnih realnih brojeva, prethodni dokaz nam ne daje niti jedan konkretan primjer transcendentnog broja. Prisjetite se iz uvoda prvog članka [4] da su Liouvilleovi brojevi transcendentni brojevi "konstruirani" upravo u tu svrhu dok je C. Hermite 1873. godine dokazao da je broj e transcendentan. Dokaz te činjenice možete vidjeti u [1] i [5]. U prvom članku smo ostavili neodgovoreno pitanje: je li broj π transcendentan? Njemački matematičar F. von Lindemann je 1882. godine dokazao da je broj π transcendentan. Dokaz te činjenice isto tako nije nimalo trivijalan. Dokaz možete, primjerice, vidjeti u [1]. Želimo posebno istaknuti da je transcendentnost broja π implicirala nerješivost starogrčkog problema kvadrature kruga.[3]

Upravo je transcendentnost broja π ključna u drugom tj. direktnom dokazu, neprebrojivosti skupa svih transcendentnih realnih brojeva koji ćemo sada prezentirati. Dokaz je preuzet iz [3]. U tu svrhu definirajmo funkciju $f:[0,+\infty\rangle\to\mathbb{R}\setminus\mathcal{A}$ ovako:

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & \text{ako je }\ \pi+x\ \text{transcendentan broj;}\\ \pi-x, & \text{inače.}\end{cases}$$

Primijetimo prvo da je definicija funkcije korektna, tj. da je za svaki realan broj $x\geq 0$ točno jedan od brojeva $\pi+x$ i $\pi-x$ transcendentan: ako bi za neki x oba broja bila algebarska, tada bi i njihova suma bila algebarski broj. No, pošto je $(\pi+x)+(\pi-x)=2\pi$, tada bi broj π bio algebarski, što nije.

Dokažimo sada da je funkcija f injekcija. Neka su $x,y\in[0,+\infty\rangle$ takvi da je $f(x)=f(y)$. Tada imamo: $x=|f(x)-\pi|=|f(y)-\pi|=y$. Iz injektivnosti funkcije f direktno slijedi neprebrojivost skupa svih transcendentnih realnih brojeva (zašto?).

3 Problem kvadrature kruga glasi: za zadani kvadrat konstruirati samo pomoću ravnala i šestara krug koji ima istu površinu kao i zadani kvadrat.

Na kraju ovog direktnog dokaza naglasimo da se ovdje bitno koristi činjenica da je broj π transcendentan, te da je suma dva algebarska broja ponovno algebarski broj. Očito je da nije nužno koristiti broj π. U definiciji injekcije f može se koristiti bilo koji transcendentan broj (primjerice, Liouvilleov broj).

U [6] dan je još jedan tzv. direktan dokaz neprebrojivosti skupa $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$. Autor navedenog članka smatra da dokaz u [3] nije direktan jer bitno koristi transcendentnost broja π. Ne možemo ništa više reći o tom drugom direktnom dokazu jer se koriste pojmovi koji su dio gradiva viših godina studija matematike.

A. Geljfond je 1934. godine dokazao da je za svaki algebarski broj $a > 0$ koji je različit od 1, i svaki iracionalan broj b, broj a^b transcendentan. Iz toga posebeno slijedi da su brojevi $2^{\sqrt{2}}$ i $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ transcendentni.

Puno je još otvorenih pitanja u vezi transcendentnih brojeva. Primjerice, ne zna se jesu li brojevi 2^π, 2^e, π^e i $e + \pi$ racionalni ili iracionalni. Izgleda kao da skup realnih brojeva, još uvijek i u 21. stoljeću, uspješno čuva svoju tajnu (prirodu).

Više detalja o transcendentnim brojevima možete vidjeti na mrežnoj stranici s adresom: `https://en.wikipedia.org/wiki/Transcendental_number_theory` .

Zadatci s algebarskim brojevima

1. Dokažite da je broj $1 + \sqrt{3}$ algebarski.

2. Dokažite da je broj $\sqrt{2 + \sqrt[3]{3}}$ algebarski.

3. Dokažite da je broj $\sqrt{21 - 3\sqrt[3]{5}}$ algebarski.

4. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ nultočka nekog polinoma s racionalnim koeficijentima. Dokažite da je tada broj x_0 algebarski.

Literatura

[1] D. Blanuša, *Viša matematika II-2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.

[2] F. M. Brückler, V. Čačić, M. Doko, M. Vuković, *Zbirka zadataka iz teorije skupova*, web-izdanje, PMF–MO, Zagreb, 2008.
`https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/ts-zbirka-2009.pdf`

[3] J. Gaspar, *Direct Proof of the Uncountability of the Transcendental Numbers*, American Mathematical Monthly 121 (2014), p. 80.

[4] P. Gregorek, M. Vuković, *Prebrojivi skupovi*, MFL 271 (2018), br. 3, 152–157.

[5] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1980.

[6] D. Marques, *Yet Another Direct Proof of the Uncountability of the Transcendental Numbers*, American Mathematical Monthly 121 (2014), p. 631.

[7] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.

[8] I. Smud, *O ekvipotentnosti (jednakobrojnosti) skupova*, MFL 222 (2005), br. 2, 74–75.

[9] P. Svirčević, *Vrijednost i netranscendentnost kosinusa od* 1° *na elementaran način*, MFL 212 (2003), br. 4, 214–243.

[10] P. Svirčević, *Transcendentnost vrijednosti trigonometrijskih funkcija od racionalnog broja radijana*, MFL 262 (2015), br. 2, 98–101.

[11] M. Vuković, *Teorija skupova*, predavanja, PMF–Matematički odsjek, Zagreb, 2015.
`https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/ts-skripta-2015.pdf`