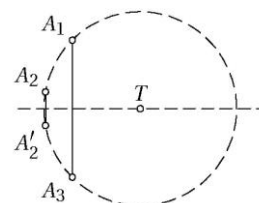


## XL олимпијада

1. Определи ги сите конечни множества точки во рамнината  $S$  кои содржат барем три точки и кои го задоволуваат следниов услов: за секои две различни точки  $A$  и  $B$  од  $S$ , симетралата на отсечката  $AB$  е оска на симетрија на множеството  $S$ .

**Решение.** За произволни различни точки  $A, B \in S$ , симетријата во однос на симетралата  $s_{AB}$  на отсечката  $AB$  го пресликува множеството  $S$  во себе, па така го пресликува во себе и тежиштето  $T$  на множеството  $S$ . Значи,  $T \in s_{AB}$ , т.е.  $\overline{TA} = \overline{TB}$ . Последното значи дека целото множество  $S$  припаѓа на кружница со центар  $T$ .

Нека точките на множеството  $S$  определуваат конвексен многуаголник  $A_1A_2\dots A_n$ . Точката  $A'_2$ , симетрична на точката  $A_2$  во однос на  $S_{A_1A_3}$  припаѓа на лакот  $A_1A_2A_3$  и припаѓа на множеството  $S$ , па затоа мора да важи  $A'_2 \equiv A_2$ . Оттука сле-



дува дека  $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$ . Аналогно следува дека  $\overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \dots = \overline{A_nA_1}$ , т.е.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  се темиња на правилен  $n$ -аголник. Јасно е дека сите вакви множества ги задоволуваат условите на задачата.

2. Нека  $n \geq 2$  е природен број.  
а) Определи ја најмалата константа  $C$  така да неравенството

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^4 \quad (1)$$

важи за секои реални броеви  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ .

б) За најдената константа  $C$  определи кога важи знак за равенство.

**Решение.** *Прв начин.* Ако не се сите броеви  $x_i$  еднакви на нула (во спротивно неравенството е тривијално), заради хомогеноста можеме да сметаме дека

$\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Левата страна на неравенството го добива обликот

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_i x_i^3 \sum_{j \neq i} x_j = \sum_i x_i^3 (1 - x_i) = \sum_i f(x_i),$$

каде  $f(x) = x^3 - x^4$ .

Бидејќи

$$f(x+y) + f(0) - f(x) - f(y) = 3xy(x+y) \left( \frac{2}{3} - x - y \right)$$

вредноста на  $F$  расте ако два позитивни броја  $x$  и  $y$  такви што  $x + y \leq \frac{2}{3}$  се заменат со броевите  $0$  и  $x + y$ . Оваа операција секогаш може да се реализира ако меѓу броевите  $x_i$  има најмалку три броја различни од нула. Така со нејзино повеќекратно применување добиваме

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq F(a, 1-a, 0, \dots, 0) = \frac{1}{2}(2a(1-a))(1-2a(1-a)) \leq \frac{1}{8},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако  $a = \frac{1}{2}$ . Според тоа,  $C = \frac{1}{8}$  за секој  $n$ , при што знак за равенство важи ако и само ако два броја  $x_i$  се еднакви, а останатите се нули.

*Втор начин.* Да означиме  $M = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ . Користејќи го неравенството

$$ab \leq \frac{1}{8}(a+2b)^2$$

добиваме

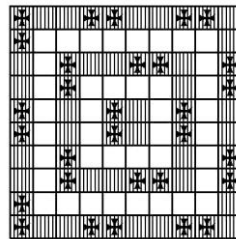
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq M \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq \frac{1}{8} (M + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j)^2 = \frac{1}{8} (\sum_{i=1}^n x_i)^4,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$M = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \text{ и } x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = M x_i x_j, \text{ за секои } i < j.$$

3. Дадена е квадратна табла со димензија  $n \times n$ , каде  $n$  е парен природен број. Таблата е поделена на  $n^2$  единечни квадрати. Два различни единечни квадрати на таблата се соседни ако имаат заедничка страна. Означени се  $N$  единечни квадрати така што секој единечен квадрат (означен или неозначен) е соседен со барем еден означен квадрат. Определи ја најмалата можна вредност на бројот  $N$ .

**Решение.** Нека  $n = 2k$ . Множеството квадратни полиња чии центри се на растојание  $i - \frac{1}{2}$  од најблиската страна на квадратот ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) го нарекуваме  $i$ -та рамка. Полињата на  $i$ -тата рамка ги боиме во црно за непарно  $i$ , а во бело за парно  $i$ .



Сега секое поле на таблата (обоено во било која боја) е соседно со точно две црни полиња. Бидејќи имаме  $2k(k+1)$  црни полиња, мораме да означиме најмалку  $k(k+1)$  поле. Останува да докажеме дека овој број може да се достигне. Во секоја црна рамка да го означиме полето во долниот лев агол и полето непосредно над него, а потоа одејќи долж оваа рамка во насока на движењето на стрелката на часовникот, наизменично прескокнуваме и означуваме по две полиња. Лесно се гледа дека секое поле има точно по едно означено соседно поле, а се оз-

начени  $2(2k-1) + 2(2k-5) + 2(2k-9) + \dots = k(k+1)$  полиња.

Според тоа, одговорот на задачата е  $k(k+1)$ .

**Забелешка.** На сличен начин може да се решат случаите кога  $n = 4k - 1$  и  $n = 4k + 1$ . Во општи случај одговорот е  $(2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1)(n - 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor)$ .

4. Определи ги сите парови природни броеви  $(n, p)$  такви што

- 1)  $p$  е прост број,
- 2)  $n \leq 2p$  и
- 3)  $n^{p-1} \mid (p-1)^n + 1$ .

**Решение.** Единствени решенија за  $n < 3$  или  $p < 3$  се  $(2, 2)$  и  $(1, p)$  за произволен прост број  $p$ . Понатаму, ќе сметаме дека  $p$ , а со само тоа и  $n$  е непарен број.

Нека  $q$  е најмалиот прост делител на бројот  $n$ . Од  $q \mid (p-1)^n + 1 \mid (p-1)^{2n} - 1$  следува дека редот  $k$  на бројот  $p-1$  по модул  $q$  е делител на  $2n$ . Од друга страна, знаеме дека  $k \mid q-1$ , па затоа  $k \mid \text{NZD}(2n, q-1) = 2$ . Според тоа,  $q \mid (p-1)^2 - 1 = p(p-2)$ . Притоа не е можно  $q \mid p-2$ , бидејќи тогаш

$$(p-1)^n + 1 \equiv 2 \pmod{q}.$$

Значи,  $q = p$  и бидејќи  $n < 2p$  заклучуваме дека  $n = p$ . Сега, од 3) следува дека

$$p^{p-1} \mid (p-1)^p + 1 = p^p - \binom{p}{1}p^{p-1} + \binom{p}{2}p^{p-2} - \dots - \binom{p}{p-2}p^2 + \binom{p}{p-1}p. \quad (1)$$

Меѓутоа, на десната страна во (1) сите собирци освен последниот се деливи со  $p^3$ , па затоа  $p^3 \nmid (p-1)^p + 1$ . Затоа  $p = 3$ . Навистина, парот  $(n, p) = (3, 3)$  ги задоволува условите на задачата.

5. Кружниците  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  се наоѓаат во внатрешноста на кружницата  $\Gamma$  и ја допираат  $\Gamma$  во различни точки  $M$  и  $N$ , соодветно. Кружницата  $\Gamma_1$  минува низ центарот на кружницата  $\Gamma_2$ . Правата која што минува низ пресечните точки на кружниците  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  ја сече кружницата  $\Gamma$  во точките  $A$  и  $B$ . Правите  $MA$  и  $NB$  ја сечат  $\Gamma_1$  во точките  $C$  и  $D$ , соодветно. Докажи, дека правата  $CD$  е тангентата на кружницата  $\Gamma_2$ .

**Решение.** *Прв начин.* Нека кружниците  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  се сечат во точките  $X$  и  $Y$ , а правите  $NA$  и  $NB$  ги сечат кружниците  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  во точките  $E$  и  $F$ , соодветно (види цреж). При хомотетија со центар  $M$  која  $\Gamma_1$  ја пресликува во  $\Gamma$  точките  $C$  и  $D$  се пресликуваат во точките  $A$  и  $B$  соодветно, па затоа





$AB$  и  $CD$ , соодветно. Бидејќи

$$d(M, AB) = \frac{y_2 - y_1 + y_1 - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{\sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \quad (6)$$

$$d(M, CD) = \frac{y_2 - y_1 + k}{\sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \quad (7)$$

добиваме дека

$$k = (1 - y_1)(y_2 - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}) + y_1 - y_2. \quad (8)$$

Задачата ќе биде решена ако докажеме дека растојанието  $d(P, CD)$ , од центарот  $P(x_2, y_2)$  на кружницата  $\Gamma_2$  до правата  $CD$ , е еднакво на нејзиниот радиус  $r_2 = 1 - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ . Ако од (8) за  $k$  замениме во (7) и ја искористиме формулата за растојанието од точка до права добиваме

$$d(P, CD) = \frac{x_2^2 + y_2(y_2 - y_1) + (1 - y_1)(y_2 - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}) + y_1 - y_2}{\sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2}}. \quad (9)$$

Сега, од (3) добиваме  $\sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2} = 1 - y_1$  и ако замениме во (9) добиваме

$$d(P, CD) = \frac{x_2^2 + y_2(y_2 - y_1) + (1 - y_1)(y_2 - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}) + y_1 - y_2}{1 - y_1} = 1 - \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

со што задачата е решена.

6. Определи ги сите функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такви што

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1,$$

за секои  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Решение.** Нека  $f(0) = c$ . За  $x = y = 0$  добиваме  $f(-c) = f(c) + c - 1$ , па затоа  $c \neq 0$ . Да го разгледаме множеството  $A = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Ако во почетната равенка ставиме  $x = f(y)$  добиваме  $f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}$ , за секој  $x \in A$ . Уште повеќе, за  $u, v \in A$  имаме

$$f(u - v) = f(u) + uv + f(v) - 1 = c - \frac{u^2 + v^2}{2} + uv = c - \frac{(u-v)^2}{2}.$$

Останува да забележиме дека за секој  $x \in \mathbb{R}$  постојат  $u, v \in A$  такви што  $u - v = x$ . Навистина, почетната равенка за  $y = 0$  дава

$$f(x - c) - f(x) = cx + f(c) - 1,$$

и вредностите на десната страна на последното равенство се сите реални броеви.

Според тоа,  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ , за секој  $x \in \mathbb{R}$ . Непосредно се проверува дека последната функција ги задоволува условите на задачата.