Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 17
(збирка задачи за VIII одделение - втор дел)

Скопје, 2020

Одговорен уредник
проф. д-р Алекса Малчески

Рецензенти
проф. д-р Методи Главче
проф. д-р Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Математички талент 17 : (збирка задачи за VIII одделение-втор дел) / Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2020. - 288 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 282-288

ISBN 978-608-4904-52-6

COBISS.MK-ID 51290885

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* 17 е наменета за талентираните ученици по математика од осмо одделение и на извесен начин е дополнување на книгата *Математички* 5. Меѓутоа, сметам дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 524 решени задачи во која во пет одделни дела се обработени алгебарски, аритметички, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски и задачи од теорија на броеви, приспособени за учениците на возраст од четиринаесет до петнаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области.

Рецензентите, д-р Методи Главче и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодарам.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сум благодарен на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ми биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје Авторот
мај, 2020 г.

I АЛГЕБРА

I.1. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

1. Определи ја вредноста на дропката $\frac{A \cdot R \cdot H \cdot I \cdot M \cdot E \cdot D}{E \cdot V \cdot K \cdot L \cdot I \cdot D}$ во која на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

2. На која цифра завршува бројот $1^{1996}+2^{1996}+3^{1996}+...+1996^{1996}$?

3. Определи ја 2018-тата цифра после запирката во децималниот запис на бројот $\frac{21}{37}$.

4. Рационалниот број 0,12121212... запиши го во вид на дропка.

5. Дадени се изразите
$$S_{2015}=1-2+3-4+5-...-2014+2015 \text{ и}$$
$$S_{2016}=1-2+3-4+5-...-2014+2015-2016.$$
Определи го збирот $S_{2015}+S_{2016}$.

6. Докажи дека бројот $1991 \cdot 1992 \cdot 1993 \cdot 1994+1$ е точен квадрат.

7. Пресметај ја вредноста на изразот: $\frac{4^{13}-4^{12}-6 \cdot 4^{10}}{2^{19}+2^{17}+2^{15}}$.

8. а) Определи ги броевите A, B, C, ако
$$A=\frac{(3^{30}+3^{30}+3^{30})(3^3+3^3+3^3)(3+3+3+2)^{33}}{33^{33}}, \; B=33\tfrac{1}{3}\% \text{ од } A \text{ и}$$
$$C=-(-1)^{10} \cdot 2^2-4^2 \cdot (\tfrac{1}{2})^3+8^3 \cdot (-0,25)^4$$
б) Пресметај $D=[(3^{-2}A+2C)B+8]:C$.
в) Подреди ги броевите A, B, C и D по големина.

9. Докажи дека $(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$ е рационален број.

10. Докажи дека вредноста на изразот $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ е природен број.

11. Докажи дека $A=(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$ е рационален број.

12. Дали бројот $\sqrt{0,\overline{04}}$ е рационален?

13. Ако a и b се рационални броеви такви што $a+b\sqrt{2}=0$, тогаш $a=b=0$. Докажи.

14. Ако a,b,c и $\frac{a-b\sqrt{2017}}{b-c\sqrt{2017}}$ се рационални броеви, докажи дека $b^2=ac$.

15. Определи го реалниот број $a\,(1<a<10)$ и природниот број k за кои е исполнето равенството

$$17\cdot 10^{33}+26\cdot 10^{32}-74\cdot 10^{31}=a\cdot 10^{k}.$$

16. Нека аритметичката средина на броевите x,y,z,p,q е еднаква на a. Определи ја аритметичката средина на броевите

$$x+y-3,\ y+2z-1,\ z+2p,\ p+2q+1,\ q+2x+3.$$

17. Аритметичката средина на пет податоци е еднаква на 18. Определи ја аритметичката средина на преостанатите податоци откако ќе го отстраниме податокот чија вредност е 10.

18. Нека

$$w=\sqrt{1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}-\sqrt{1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}.$$

Докажи, дека $w=\sqrt{3}-1$.

19. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\{(\tfrac{11}{2}:\tfrac{33}{4}+2):[\tfrac{9}{5}-\tfrac{5}{8}:(1-\tfrac{3}{8})]\}\cdot(1-0,9)+(1-0,9):\tfrac{3}{10}.$$

20. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{(1,2:36+1\frac{1}{5}:0,25-1\frac{5}{6})\cdot 1\frac{1}{4}}{[(7-6,35):6,5+9,9]\cdot\frac{1}{12,8}}:0,125.$$

21. Определи ја вредноста на изразот

$$\frac{(1\frac{3}{25}-1,87)\cdot 1,2-1,25:1\frac{7}{18}}{1,4:0,01-50}.$$

22. Ако $a=4$ и $b=0,25$, определи ја вредноста на изразот $a^{2018}\cdot b^{2020}$.

23. Определи ја вредноста на изразот

$$\sqrt{0,1}\cdot\sqrt{0,9}-\sqrt{2-0,56}+\frac{\sqrt{0,12}}{\sqrt{3}}.$$

24. Докажи дека изразот

$$27a^3-(3a-2)(9a^2+6a+4)$$

не зависи од a.

25. При делење на полиномот a^4+b^4+1, делителот е еднаков на количникот, а остатокот е еднаков на $2a^2+2b^2-2a^2b^2$. Определи го количникот.

26. Упрости го изразот

$$\frac{8ab-(a+2b)^2}{3a^2-12b^2}.$$

I.2. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

27. Од равенката

$$\frac{5x+2}{3}+\frac{1}{5}(1-4x)=\frac{2y-3x}{3}$$

изрази ја променливата y со помош на променливата x.

28. Реши ја равенката

$$\frac{8x+13}{3}=\frac{19-12x}{2}-(16x-\frac{7-4x}{6}).$$

29. Реши ја равенката

$$\frac{5}{8}:(0,4-2-\frac{1}{2}x)=1,25:(3,8-2\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}).$$

30. Реши ја равенката

$$\frac{1}{5}(2+x)+\frac{3(4+x)}{7}=\frac{7}{5}(8-x)-\frac{3(5x-1)}{14}.$$

31. Реши ја равенката

$$3,8-(0,8-4,5x)=(1\frac{2}{5}+3,5:1\frac{1}{4}):2\frac{2}{5}+3,4:1\frac{8}{9}+2,4x-0,35+1,5x.$$

32. Реши ја равенката

$$(\frac{31}{3}+\frac{12}{5}:4,5):(\frac{4}{5}:0,2+\frac{2}{1,2})=(5x):(\frac{172}{6}+\frac{19}{3}).$$

33. Реши ја равенката

$$\frac{(4-3{,}5(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5})):0{,}16}{x}=\frac{5\frac{3}{7}-\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{16}}{41\frac{23}{84}-10\frac{49}{60}}.$$

34. Реши ја равенката

$$\frac{\frac{23}{3}+\frac{39}{2}:4{,}5}{\frac{3}{5}:0{,}1+4{,}2}=\frac{2x}{\frac{21}{6}+\frac{61}{2}}.$$

35. Реши ја равенката

$$\frac{\frac{\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2}{3}+2}{3}=1.$$

36. Реши ја равенката:

$$\frac{\sqrt{8}}{x}=(\sqrt{288}-\sqrt{98})(\sqrt{0{,}02}+\sqrt{4\frac{1}{2}}).$$

37. Марко при решавањето на равенката

$$\frac{5x-3}{2}-\frac{3x-5}{4}=5$$

наместо коефициентот 3 пред x во втората дропка запишал некој друг број и на тој начин добил за 18 поголема вредност на непознатата x од нејзината вистинска вредност. Кој број Марко го запишал наместо коефициентот 3?

38. Определи го најмалиот природен број чија вредност може да ја има параметарот k за да решението x на равенката

$$5(2x-3k)+5k=4(x-8)+k$$

е позитивно. Определи го ова решение за најдената вредност на k.

39. Реши ја равенката:

$$(1-x)^2-4=21.$$

40. Реши ја равенката

$$||x-1|-6|=2.$$

41. Определи ги сите вредности на параметарот k, за кои решенијата на равенката $|3x+5|=|3-x|$ се решенија на равенката

$$(kx-1)(x+|x|+k)=0.$$

42. Определи ги броевите a,b,c,d за кои важи

$$a:b=2:3,\ a:d=3:5,\ b:c=6:5 \text{ и } 2d-a-c=26.$$

43. Збирот, разликата и количникот на два броја се однесуваа како $20:4:1$. Определи ги овие броеви.

44. Разликата, збирот и производот на два броја се однесуваат како $1:4:15$. Определи ги овие броеви.

45. Реши ја неравенката

$$\frac{x-1}{2}-\frac{5x+4}{8}>x+2.$$

46. Реши ја неравенката

$$\frac{5-2x}{4+2x}>0.$$

47. Реши ја неравенката

$$\frac{3x-2}{x+1}<0.$$

48. Определи го најмалиот цел број x за кој важи $x>y-1$ и $2y-1>0$.

49. Дали постојат последователни природни броеви a,b и c такви што

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{53}{60}?$$

50. Определи го бројот на природните броеви n за кои се исполнети неравенствата

$$2013<\sqrt{n}<2014.$$

I.3. НЕРАВЕНСТВА

51. За броевите a,b,c,d важи $d>c$, $a+b=c+d$ и $a+d<b+c$. Подреди ги овие броеви по големина.

52. Што е поголемо 10^{20} или 90^{10}?

53. Што е поголемо 31^{13} или 65^{11}?

54. Што е поголемо 2^{2010} или 5^{861}?

55. Што е поголемо 333^{444} или 444^{333}?

56. Што е поголемо 2^{1993} или 65^{333}?

57. Што е поголемо $0,064^{665}$ или $0,16^{997}$?

58. Што е поголемо $(\sqrt{2})^{3000}$ или $(\sqrt{3})^{2000}$?

59. Што е поголемо $2-\sqrt{3}$ или $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$?

60. Кој број е поголем $2+\sqrt{2}$ или $6-\sqrt{6}$?

61. Што е поголемо $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$?

62. Што е поголемо 2006 или $\sqrt{2005\cdot 2007}$?

63. Нека се a,b,m три позитивни реални броеви и $a>b$. Спореди ги броевите $A=\sqrt{a+m}-\sqrt{a}$ и $B=\sqrt{b+m}-\sqrt{b}$.

64. Нека a и b се реални броеви такви што $a<b$. Докажи дека $a<\frac{a+b}{2}<b$.

65. Ако $a<b$ и $b<3$, тогаш $13a<4b+28$, докажи!

66. Докажи дека $\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$.

67. За реалните броеви a и b важи $a-b\geq 2$. Докажи дека $a^4+b^4\geq 2$.

68. Даден е полиномот $P(t)=t^4-t+\frac{1}{2}$. Докажи дека $P(t)>0$ за секој реален број t.

69. Определи ги реалните броеви a,b,c,d така што изразот
$$a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)$$
ќе прими најмала вредност.

70. Даден е полиномот
$$P=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx.$$
Определи за кои вредности на x,y,z овој полином не е позитивен.

71. За која вредност на променливите x, y, z вредноста на изразот
$$A=-2x-6z+x^2+y^2+z^2+4y$$
е најмала? Определи ја оваа вредност.

72. Определи ја најмалата вредност на изразот
$$a^2+b^2-ab-a-b.$$

I.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

73. Определи ја вредноста на изразот $P(x,y)=x^{1989}+1989y$, ако за броевите x и y важи $x^2+y^2+2x-6y+10=0$.

74. Реши ја равенката
$$x^{1988}+y^6+z^4+146=2x^{994}+16y^3+18z^2.$$

75. За вредноста на променливата $x=101987$ определи ја вредноста на функцијата $f(x)=x^2-1988x+1987$.

76. Определи ја вредноста на изразот
$$x^{19}-23x^{18}+23x^{17}-23x^{16}+...+23x^3-23x^2+23x+5,$$
ако $x=22$.

77. Нека $\frac{a+b}{b}=1,5$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{b-a}{a}$.

78. За реалните броеви a и b важи $\frac{a+b}{b}=2-\sqrt{2}$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{a^2+b^2}{ab}$.

79. Ако е $x\sqrt{2}-y\sqrt{2}=\sqrt{18}$, определи ја вредноста на изразот $\frac{x\sqrt{3}}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}$.

80. Нека x е реален број таков што $x+\frac{1}{x}=3$. Определи ја вредноста на изразот $x^4+\frac{1}{x^4}$.

81. Ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$, определи ја вредноста на изразот

$$a^4+b^4+c^4.$$

82. Определи ја ведноста на изразот

$$\sqrt{(3x-2)(x-2)-2x(x-2)}-\sqrt{2}\text{, за } x=3-\sqrt{2}.$$

83. Позитивните рационални броеви се запишани во низа:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\ldots.$$

Откриј го правилото според кое се запишуваат броевите. На кое место е запишан бројот $\frac{1996}{1995}$?

84. Низата броеви $2,2,0,2,-2,...$ е зададена на следниов начин:

$$a_1=2, a_2=2, a_3=a_1-a_2, a_4=a_2+a_3, a_5=a_3-a_4, a_6=a_4+a_5,...$$

Определи го збирот на првите 100 члена на оваа низа.

85. Реши го бројниот ребус: $(5c+1)^2=\overline{abca}$.

86. Дешифрирај го бројниот ребус

$$\overline{ccb}\cdot b=\overline{ab5b},$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Определи ја цифрата на единициите на збирот $3^{2019}+7^{122}$.

2. Телефонскиот број на Ѓурѓа се состои од два трицифрени броја, напишани едноподруго. Секој од нив е делив со 45, а средната цифра им е 8. Одреди го телефонскиот број, ако трицифрениот број што е запишан од лево во телефонскиот број е помал од трицифрениот број од десно.

3. Определи го најголемиот природен број таков што било кои негови две соседни цифри запишани во истиот редослед формираат двоцифрен број кој е делив со 23.

4. При делење на броевите 280 и 240 со природниот број n се добиени остатоци 21 и 18, соодветно. Определи го бројот n.

5. Производот на првите 2004 природни броеви $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2003\cdot 2004$ е делив со број a чии сите прости множители се еднакви на 3. Колку најмногу тројки може да има бројот a во разложувањето на прости множители?

6. Даден е природниот број n кој е запишан со 60 седумки и определен број нули. Докажи дека вредноста на дропката $\frac{n-27}{3}$ е цел број, а вредноста на дропката $\frac{n+27}{9}$ не е цел број.

7. Должините на страните на еден правоаголен триаголник се изразени со природни броеви. Дали е можно должините на катетите да бидат изразени со непарни броеви? (Одговорот да се образложи)

8. Докажи дека за секој трицифрен број важи: или тој број е делив со 3 или некој двоцифрен, односно едноцифрен број, составен од неговите цифри е делив со 3.

9. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што

$$2\cdot\overline{abc}=\overline{bcd}\ .$$

10. Докажи дека збирот на четири последователни природни броја не е делив со 4. Докажи дека збирот на четири последователни парни броеви е делив со 4. Докажи дека збирот на четири последователни непарни броеви е делив со 8.

11. Докажи дека шестцифрениот број $\overline{abcabc}$ е делив со 7, 11 и 13.

12. Даден е четирицифрен природен број $\overline{abcd}$ чии цифри a,b,c,d се четири последователни природни броја ($a<b<c<d$). Докажи дека бројот $\overline{bacd}$ е делив со 11.

13. Нека $\overline{xyy}$ е трицифрен број делив со 7. Докажи дека збирот на цифрите на бројот $\overline{xyy}$ е делив со 7.

14. Определи го трицифрениот број запишан со различни цифри и таков што бројот е делив со 7 и збирот на цифрите со кои е запишан е делив со 7.

15. Бројот $\overline{6ababab}$ е содржател на бројот 18. Ако ја избришеме првата и последната цифра ќе добиеме петцифрен број кој е делив со 6. Кои броеви од зададениот вид го имаат ова својство?

16. Докажи дека меѓу пет непарни последователни природни броеви секогаш постои барем еден број кој не е делив ниту со 3, ниту со 5, ниту со 7.

17. Докажи дека секој природен број поголем од 7 може да се запише како збир на еден природен број делив со 3 и еден природен број делив со 5.

18. Докажи дека збирот на квадратите на кои било пет последователни цели броеви е делив со 5, но не е делив со 25.

19. Дадени се 1991 последователни непарни броеви. Докажи дека нивниот збир е делив со 1991.

20. Докажи дека за секој природен број n вредноста на изразот $\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}$ е цел број.

21. Докажи дека 3 е делител на $n(n^2+2)$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

22. Докажи дека не постои цел број n таков што бројот n^2-8 е делив со 5.

23. Нека n е парен природен број. Докажи дека бројот $n^3-1990n$ е делив со 6.

24. Природните броеви m и n се такви што изразот $m^2+5mn+n^2$ е делив со 49. Докажи дека m и n се деливи со 7.

25. Докажи дека производот $101\cdot 102\cdot 103\cdot\ldots\cdot 200$ е делив со 2^{100}.

26. Докажи дека бројот $7^{1996}-1$ е делив со 10.

27. Докажи дека разликата $43^{1995}-37^{1993}$ е делива со бројот 5.

28. Докажи дека 33 е делител на 16^5+2^{15}.

29. Докажи дека разликата $10^{1989}-7$ е делива со 3, но не е делива со 27.

30. Докажи дека збирот $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}, n\in\mathbb{N}$ е делив со 14.

31. Докажи дека $155\,|\,(5^n+5^{n+1}+5^{n+2})$, за секој природен број n.

32. Докажи дека 30 е делител на бројот $A=2+2^2+2^3+\ldots+2^{1988}$.

33. Нека $2n=2+2^2+2^3+\ldots+2^{1989}+2^{1990}$.
а) Докажи дека $n=2^{1990}-1$.
б) Докажи дека $93\,|\,n$.

34. Нека $S=2+2^2+2^3+\ldots+2^{1995}$. Докажи дека:
а) $S=2(2^{1995}-1)$ и б) $434\,|\,S$.

35. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот $3(n^2+n)+7$ е делив со 5.

36. Определи ја најголемата вредност на природниот број n, така што бројот 39^n е делител на бројот $39!$. Одговорот да се образложи.

37. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот n^3-n+2^n е делив со 1992.

38. Ако двоцифрениот број го поделиме со збирот на неговите цифри добиваме количник 6 и остаток 2. Ако истиот тој двоцифрен број го поделиме со производот на неговите цифри добиваме количник 5 и остаток 2. Кој е тој број?

39. Нека n е природен број за кој е точно равенството

$$(\tfrac{2}{3})^{n+1}\cdot(\tfrac{2}{3})^2=\frac{6^2\cdot 128\cdot 81^6\cdot 2015^0}{(3^4)^5\cdot 8\cdot 27^4}.$$

Докажи дека $72\,|\,(63+n^6)$.

II.2. НАЈГОЛЕН ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

40. Докажи дека $\sqrt{5}$ е ирационален број.

41. Докажи дека бројот $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ е ирационален.

42. Докажи дека $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ е ирационален број.

43. Определи го најмалиот природен број n за кој секоја од дропките

$$\frac{7}{n+9},\frac{8}{n+10},\frac{9}{n+11},\ldots,\frac{30}{n+32},\frac{31}{n+33}$$

е нескратлива.

44. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $\underbrace{11\ldots1}_{2018}$ и 1111.

II.3. ПРОСТИ БРОЕВИ

45. Збирот на првите n природни броеви е трицифрен број запишан со исти цифри. Определи го бројот n и збирот на првите n броеви.

46. Докажи дека при делење на прост број со бројот 30 се добива остаток кој е прост број.

47. Докажи дека бројот $2018\cdot 2020-35$ е сложен број.

48. Определи го најмалиот природен број кој помножен со бројот 2646 дава точен куб на некој природен број.

49. Производот на два двоцифрени броја е запишан само со помош на цифрата 4. Определи ги овие броеви.

50. Производот на два трицифрени броја се запишува само со помош на неколку седумки. Определи ги овие трицифрени броеви.

51. Ако p е прост број поголем од 2, тогаш $p^{1987}+1987^{p}$ е сложен број. Докажи!

52. Ако p е прост број, тогаш бројот $p^{1995}+1995^{p}+1996$ е сложен број. Докажи!

53. Определи ги сите прости броеви p такви што и бројот $p^{3}+3^{p}$ е прост.

54. Определи ги сите прости броеви p за кои $p^{2}+2p+11$ и $p^{2}+p+13$ се прости броеви.

55. Определи три прости броја така што нивниот производ е пет пати поголем од нивниот збир.

56. Определи ги природните броеви $n_1, n_2, ..., n_k$, $(k>1)$ такви што

$$n_1+n_2+...+n_k=1988 \text{ и } n_1\cdot n_2\cdot ...\cdot n_k=1988.$$

57. Даден е полиномот $P(x)=x^{3}+2x^{2}-x-2$.

а) Ако p е прост број поголем од 3, тогаш $P(p)$ е делив со 24. Докажи!

б) Определи го најмалиот прост број p таков што $P(p)$ е делив со 120.

II.4. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

58. Илија треба да реши 20 задачи. За секоја точно решена задача добива по 8 бода, за неточно решена задача му се одземаат по 5 бода, а задача

која не е решена не се бодува. Илија освоил 13 бодови. Колку задачи решил точно Илија?

59. Во множеството цели броеви реши ја равенката $a(a-b)=b$.

60. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$2mn-5m+3n=130.$$

61. Во множеството цели броеви реши ја равенката:
$$xy-2x=5y-7.$$

62. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2y=y^3+10.$$

63. На почетокот на воената парада група војници се построила во облик на квадрат (n редови по n војници), а потоа се престроиле во правоаголна формација шри што бројот на редовите се зголемил за 5 ($n+5$ редови по m војници). Колку војници учествувале во парадата?

64. Определи ги сите цели броеви n за кои дропката $\frac{5n^2-9}{2n+6}$ е цел број.

65. Определи ги сите целобројни вредности на изразот $\frac{n^3-n^2+3}{n-1}, n\in\mathbb{Z}$.

66. Определи го целиот број m за кој вредноста на дропката $\frac{m^2+2m-15}{m^2-9}$ е цел број.

67. Определи ги сите цели броеви m за кои $\frac{2m^2+7m-9}{m^2+m+1}$ е цел број.

68. а) Скрати ја дропката $R=\frac{n^2+2n-8}{n^2-4}$.

б) Определи ги сите цели броеви n за кои вредноста на R е цел број.

69. Броевите 12 и 60 имаат интересно својство: нивниот производ е десет пати поголем од нивниот збир. Определи ги сите парови природни броеви кои го имаат ова својство.

70. Должините на страните на правоаголниот триаголник се природни броеви, при што должината на едната катета е 15. Определи ги должините на другите две страни на триаголникот. Колку различни правоаголни триаголници има со ова својство?

71. Природните броеви x, y и z го задоволуваат равенството

$$x^2+y^2+z^2=6(x+y+z).$$

Определи ја најголемата можна вредност на бројот z.

72. Определи го бројот на подредените парови цели броеви (x, y) такви што

$$8x^2-6xy+y^2=5.$$

73. Даден квадрат е исечен на 100 квадрати така што плоштината на 99 од нив е еднаква на 1. Пресметај ја плоштината на дадениот квадрат.

74. Определи ги сите парови прости броеви чија разлика на квадрати е еднаква на 120.

75. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$2x^2-y^2=y^2+1994.$$

76. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$m^2+n^2=2019.$$

77. Докажи дека равенката $x^2-y^2=1990$ нема решенија во множеството цели броеви.

78. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2y^2=3y^2+x^2.$$

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ за чии цифри се исполнети равенствата $\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}$.

2. Определи го најголемиот петцифрен парен број чии први три цифри формираат точен квадрат, а последните три цифри формираат точен куб на природен број?

3. Збирот на четири броја е 396. Ако на првиот број му се додаде 5, од вториот се одземе 5, третиот се помножи со 5, а четвртиот се подели до 5, се добиваат четири еднакви броја. Кои се тие броеви?

4. Збирот на два природни броја е 4923. Ако на едниот од тие два броја од десната страна му ја допишеме цифрата 7, а на другиот му ја избришеме цифрата на единиците, ќе добиеме два еднакви броја. Определи ги почетните броеви.

5. Определи го трицифрениот број кој е 12 пати поголем од збирот на своите цифри.

6. Определи ги сите двоцифрени броеви со својство збирот на тој број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е квадрат на некој природен број.

7. На таблата е запишан трицифрен број во чиј запис сите цифри се различни од нула. Од неа се добиени три двоцифрени броеви, така што прво се пречкртува првата цифра на почетниот број, потоа се пречкртува втората цифра на почетниот број и на крајот се пречкртува последната цифра на почетниот број. Збирот на така добиените броеви е еднаков на 293. Определи го почетниот број.

8. Даден е трицифрен број. Ако неговите цифра на единиците и цифра на десетките ги заменат местата, тогаш дадениот број се зголемува за 45, а ако цифрата на стотките и цифрата десетките ги заменат местата, тогаш дадениот број се намалува за 270.

Што ќе се случи ако цифрата на стотките и цифрата на единиците ги заменат местата?

9. Разликата, збирот и производот на два броја се однесуваат како $1:7:24$. Определи ги овие броеви.

10. Определи ги броевите a,b,c ако нивниот збир е за $\frac{5}{2}$ поголем од a, за $\frac{59}{6}$ поголем од b и за $\frac{5}{3}$ поголем од c.

11. Намалителот е еднаков на $\frac{8}{13}$ од намаленикот. На колку проценти од намалителот е еднаква разликата?

12. Ако броителот на една дропка се зголеми за 5%, а именителот се зголеми за 20%, дали вредноста на дропката ќе се зголеми или ќе се намали и за колку проценти?

13. Замислив еден број, кој го помножив со бројот $\frac{5}{6}$ и на добиениот резултат го додадов бројот $\frac{3}{4}$, после што го добив бројот $\frac{5}{4}$. Кој број го замислив?

14. Ако броителот на некоја дропка се намали за 8%, а именителот на дропката се зголеми за 8%, тогаш новата дропка ќе биде за 2 помала од почетната. Определи ја вредноста на почетната дропка.

15. Во една дропка именителот е за три поголем од броителот. Ако броителот на оваа дропка го зголемиме за 2, а именителот го зголемиме трипати, тогаш збирот на така добиената дропка и почетната дропка е еднаков на 1. Определи ја почетната дропка.

16. Определи ги сите нескратливи вистински дропки кои се поголеми од $\frac{1}{3}$ и се такви што постои природен број x таков што вредноста на дропката не се менува ако броителот се зголеми за x, а именителот се помножи со x.

17. Дадени се 2015 броеви такви што ако секој од нив се замени со збирот на останатите, тогаш повторно се добиваат истите 2015 броеви. Докажи дека производот на дадените броеви е еднаков на нула.

III.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

18. Цената на месото во една продавница се зголемила за 8%, а во друга се намалила за 8%. Определи ја почетната цена на месото ако сега разликата во цените на месото е 56 денари.

19. Во една продавница за облека цената на еден вид фармерки се покачила за 8%, а во друга продавница за облека истата цена ја намалиле за 8%. Сега фармерките во втората продавница се поевтини за 264 денари отколку во првата продавница. Определи ја пониската цената на фармерките во втората продавница.

20. Третина од некоја стока е продадена по цена која е за 10% повисока од планираната, а половина од истата стока е продадена за 15% поевтино од планираната цена. Со колку проценти над планираната цена треба да се продаде остатокот од стоката ако се сака на крајот наплатената сума пари за вкупната количина стока да биде еднаква на сумата која би се добила ако целата стока се продадеше по планираната цена?

21. Една четвртина од вкупното количество стока е продадено со 5% заработувачка, а $\frac{1}{2}$ од стоката е продадена со 10% загуба. Со колкав процент заработувачка треба да се продаде остатокот ос стоката за да се покрие веќе направената загуба?

22. Шестина од вкупното количество на некоја стока е продадена со заработувачка од 20%, а половината е вкупното количество на истата стока е продадена со загува од 10%. Со колкав процент на заработувачка треба да се продаде остатокот од стоката за да се покрие досега направената загуба?

23. За да купи нов компјутер на Горјан му недостасуваат уште 5% од парите кои ги има. Но, кога проверил во продавницата заклучил дека цената на компјутерот кој сакал да го купи е намалена за 5%. Тогаш Горјан пресметал дека има доволно пари да го купи компјутерот при што му преостануваат 40 денари. Колку чинел компјутерот пред, а колку по намалувањето на цената?

24. Цената на една книга, по зголемувањето за 20% е еднаква на $\frac{4}{5}$ од цената која би се добила ако почетната цена на книгата се зголеми за 50 денари. Определи ја почетната цена на книгата?

25. Во продавница за домашни апарати се продаваат правосмукалки и миксери. Миксерот е 300 денари поевтин од правосмукалката. На акција миксерот е намален за 5%, а правосмукалката за 10%. Елена со попустите купила и миксер и правосмукалка и за двата апарати платила 3600 денари. Определи ги цените на миксерот и правосмукалката пред намалувањето на истите.

26. Марко на крајот на годината на $\frac{1}{3}$ од заработените пари платил 10% данок, а на $\frac{2}{5}$ од заработените пари платил 20% данок. На остатокот од парите, кој изнесувал 100000 денари Марко бил ослободен од плаќање данок. Колку пари платил данок Марко?

27. Продавница за спортска опрема продава фудбалски топки кои ги набавува од производител. Заработувачката на продавницата по продадена топка е 10% од нејзината набавна вредност. Ако продавницата топките ги набавува по 10% пониска набавна цена, а ги продава со заработувачка од 20% од новата набавна цена, тогаш продажната цена би била за 15 денари помала. Определи ја продажната цена на топката?

28. Кога цената на оревите е намалена за 20%, за 960 денари можело да се купи еден килограм ореви повеќе отколку што можело да се купат за 1080 денари пред намалувањето на цената. Определи ја цената на оревите пред намалувањето.

29. Цената на еден телевизор прво се зголемила за 20%, потоа се намалила за 10%, па се зголемила за 30% и сега телевизорот се продава за 70200 денари. Определи ја почетната цена на телевизорот?

30. Цената на еден производ се намалила за 5%. Потоа цената се зголемила за 40% и сега е за 1352,06 денари помала од двократната почетна цена на производот. Определи ја почетната цена на овој производ.

31. Горазд во книжарницата забележал дека гумата е за 20% поевтина од тетратката, а за 25% е поскапа од моливот. За купување на една гума, една тетратка и еден молив тој платил 610 денари. Определи ја цената на секој од купените предмети.

32. Брат и сестра сакале да купат топка. Сам да ја купи топката, на братот му недостасувало $\frac{5}{19}$ од цената на топката, а на сестрата $\frac{1}{4}$ од цената

на топката. Тие, заедно имале 185 денари повеќе од цената на топката. Топката ја купиле заедно така што братот платил 45%, а сестрата го платила остатокот од цената на топката. Колку пари му останале на братот, а колку на сестрата?

33. Во едно далечно кралство некој човек имал сопруга и четири деца: два сина и две ќерки. Кога умрел, неговите златници биле поделени според тамошниот закон: имотот прво се делел меѓу семејството и државата во однос 2:1, потоа остатокот (семејниот дел) се дели меѓу децата и сопругата во однос 3:1. Својот дел децата го делат во однос 4:1 во полза на синовите, а потоа добиениот дел се дели меѓу постариот и помладиот син во однос 5:1. Определи колку пари добил постариот син ако помладиот син добил 300 златници помалку од мајката.

34. Се викам Марко, одам во седмо одделение и имам 13 години. Кога пред шест години бев првоодделенец, родителите на мојата година дена постара сестра и мене почнаа да ни даваат џепарлак. Парите ги делевме пропорционално на нашите години и се сеќавам дека мојот прв џепарлак беше 350 денари. На почетокот на секоја нова учебна година вкупниот износ на џепарлакот го зголемуваа за 200 денари, но ние и понатаму го делевме пропорционално на нашите години. Колку денари џепарлак добивам денес, во седмо одделение?

35. Зоран, Горан и Ружа треба да поделат 2000 денари така што деловите на Зоран и Горан се однесуваат како $2:3$, а деловите на Горан и Ружа се однесуваат како $9:5$. По колку денари ќе добие секој од нив?

36. Ана потрошила $\frac{2}{3}$ од својот џепарлак, Борка потрошил $\frac{3}{4}$ од својот џепарлак и Цветанка потрошила $\frac{5}{6}$ од својот џепарлак. Потоа им останале еднакви суми пари. Колку потрошило секое девојче ако на почетокот сите заедно имале 7800 денари?

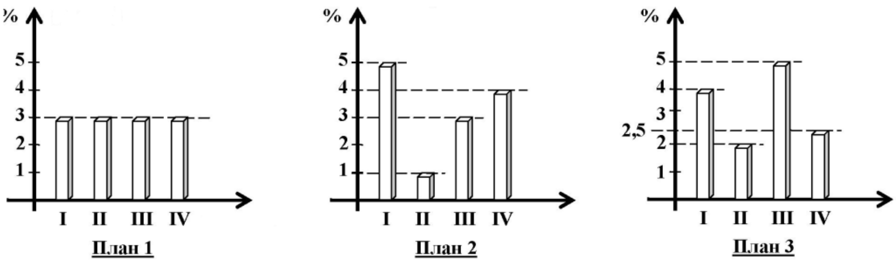
37. Тројца другари собирале хартија и заработиле 2660 денари. Се договориле парите да ги поделат во однос $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}$. Колку пари добил секој од нив?

38. Дончо сака во банка да вложи 100 денари и сака по две години на сметката да има најмалку двапати повеќе пари отколку што вложил. Определи го најмалиот цел број проценти на годишната камата која тоа му го овозможува.

39. Иван, Никола и Васил купиле еднаков број акции по една иста цена, така што Иван и Никола за таа цел потрошиле 100% и 50% соодветно од парите што ги имале, а на Васил му останала сума еднаква на $\frac{4}{5}$ од парите кои ги платил за своите акции. По купувањето на акциите на тројцата вкупно им останале 90000 днари.

а) Колку денари имал секој пред купувањето на акциите:

б) По купувањето на акциите тројцата решиле да ги вложат акциите во фонд, кој има предлага три плана за инвестирање. Плановите се направени така што секој план ја прикажува добивката изразена во проценти за четирите тримесечија на годината и истите се прикажани на долните цртежи.



Определи ја вкупната добивка која може според секој од понудените планови да се оствари.

III.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

40. Сега е точно 9 часот. По колку минути стрелките на часовникот за првпат ќе зафаќаат агол од 50°?

41. Кога Зоран се разбудил забележал дека само што поминал 5 часот и дека стрелките на нејзиниот часовник се преклопуваат. Во колку часот се разбудил Зоран?

42. Во еден магацин книгите се ставени во кутии. Во секоја кутија има еднаков број книги. Магационерот вади една по една книга од кутија, ги пакува и ги адресира до претплатниците. Магационерот Илија цела кутија препакува за 3 часа и 36 минути, а магационерот Дончо иста таква кутија препакува за 2 часа и 6 минути, при што брзината на пакувањето на секој од нив е константна.

а) Ако за определено време Илија спакувал 63 книги, колку книги Дончо спакувал за истото тоа време?
б) Ако за пакување на една книга на секој од магационерите му треба цел број минути, колку најмногу книги може да се спакувани во една кутија?

43. Иван излегол од дома неколку минути по 18 часот. Во моментот на излегување погледал на својот часовник и забележал дека неговите стрелки зафаќаат агол од 110°. Тој се вратил дома нешто пред 19 часот истиот ден, точно во моментот кога стрелките на часовникот повторно зафаќаат агол од 110°. Колку минути Иван бил отсутен од дома, ако се знае дека неговиот часовник е точен?

44. Располагаме со две свеќи со различна должина и дебелина. Подолгата свеќа целосно изгорува за 3,5 часа, а пократката за 5 часа. Свеќите се запалени истовремено, па откако гореле 2 часа, нивните должини биле еднакви. За колку проценти потанката свеќа е подолга од подебелата свеќа?

45. Дванаесет работници завршуваат една работа за 14 дена. По 2 дена од почетокот на работата се разболеле 3 работника, а останатите работници продолжиле да работат. За колку дена ќе биде завршена работата?

46. Јас сега имам четирипати повеќе години отколку што имаше мојата сестра кога беше двапати помлада од мене. Колку години имам јас, а колку мојата сестра, ако по 6 години заедно ќе имаме 75 години?

47. Марко е 26 години постар од Велко, а по 10 години ќе биде три пати постар од Велко. Колку години има Марко, а колку години има Велко?

48. Ана има 20% повеќе години отколку што имал Иван кога Ана имала толку години колку што сега има Иван. Кога Иван ќе има години колку што сега има Ана, заедно ќе имаат 150 години. Колку години има сега Ана, а колку Иван?

49. Мојот прадедо е роден во XIX век. Која година тој го славел 60-тиот роденден, ако во годината x^2 имал точно x години?

50. Во 1988 година Илија наполнил онолку години колку што е збирот на цифрите на годината во која е роден. Која година е роден Илија, ако се знае дека тој е роден во XX век?

51. Павел во 2018 година ќе наполни онолку години колку што е збирот на цифрите од годината во која е роден. Колку години има Павел?

III.4. ЗАДАЧИ СО РАБОТА

52. Ако садот се полни со првата славина, тогаш ќе се наполни за 18 минути, а ако се полни со втората славина ќе се наполни за 27 минути. Ако ги отвориме двате славини истовремено, за колку време ќе се наполнат $\frac{5}{9}$ од садот?

53. Еден сад може да се наполни со вода од три чешми. Од првата чешма се полни за 10 минути, од втората чешма се полни за 15 минути, а ако сите три чешми истовремено го полнат садот, тој се полни за 5 минути. За колку време ќе се наполни садот, ако истовремено го полнат втората и третата чешма?

54. На едно тестирање за учество во квиз на знаење присуствувале 64 кандидати. По тестирањето тестовите на кандидатите ги прегледувале два професора. Секој од професорите прегледал по 32 теста и секој професор секој тест го прегледувал за исто време. Првиот професор прегледал 5 теста за исто време за кое вториот професор прегледал 4 теста. Првиот професор своите 32 теста ги прегледал за 1 час и 36 минути побрзо од вториот професор. Колку тестови за 1 час прегледувал првиот, а колку вториот професор?

55. Четиринаесет работници треба да завршат една работа за 10 дена. Меѓутоа, по два дена раководителот согледал дека работејќи со тоа темпо со извршувањето на работата ќе се доцни 4 дена. Затоа третиот ден тој ангажирал уште неколку работници со чија помош работата била завршена точно на време. Колку работници биле дополнително ангажирани?

56. Дванаесет работници завршуваат една работа за 8 дена работејќи по 10 часа дневно. За колку дена истата работа ќе ја завршат 16 работници кои ќе работат 6 часа дневно?

57. Симон може сам да заврши некоја работа за 8 дена, а Златко истата работа може да ја заврши за 12 дена. Прво Симон сам работел 3 дена, а потоа двајцата заедно ја довршиле работата. За колку дена е завршена целата работа?

58. Двајца работници можат заедно да завршат една работа за 24 дена. Тие заедно работеле 10 дена и едниот работник се разболел, па вториот работник сам продолжил да работи и ја завршил работата во следните 35 дена. За колку дена секој од работниците самостојно можел да ја заврши оваа работа?

III.5. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

59. Колку литри 30-процентен алкохол и колку литри 10-процентен алкохол треба да се измешаат за да се добијат 600 литри 15-процентен алкохол?

60. Во еден базен од една цевка се влеваат $15\frac{1}{3}\,hl$, а од втора цевка се влева уште $18\frac{5}{6}\,hl$ вода на час. Истовремено од базенот од други две цевки истекуваат $13\frac{3}{4}\,hl$ и $16\frac{5}{8}\,hl$ вода на час. Колку литри вода ќе има во базенот по 2,4 часа?

61. Воз минува преку мост долг $171\,m$ за 27 секунди, а покрај пешак кој се движи спротивно од насоката на возот со брзина $1\,m/s$, поминува за 9 секунди. Определи ја брзината на возот и неговата должина ако преминувањето на возот се смета од моментот кога локомотивата доаѓа на почетокот на мостот, до моментот кога последниот вагон слегува од мостот.

62. Двајца велосипедисти почнуваат тренинг истовремено. Едниот тргнува од Скопје, а другиот од Гевгелија, еден кон друг. Кога се на растојание од 180 km еден од друг, во тренингот се вклучува една мува. Таа стартува од рамото на едниот велосипедист и лета да го сретне другиот. Застанува на неговото рамо и се веднаш се враќа назад кон првиот велосипедист. Ова го повторува се додека двајцата велосипедисти не се сретнат. Мувата лета со брзина од 30 km на час, а велосипедистите се движат со брзина 15 km на час. Колку километри ќе прелета мувата за време на тренингот?

63. Првите $120\,km$ од некој пат автомобил се движи со брзина $90\,km/h$. Потоа брзината ја намалува на $64\,km/h$ и со оваа брзина вози 1 час и 15 минути. Со која брзина автомобилот треба да ја помине преоста-

натата шестина од патот за да просечната брзина на целиот пат биде $80\,km/h$.

64. Две свеќи имаат должини кои се разликуваат за 32 cm. Ако се запали подолгата во 15 часот, а пократката во 19 часот, тогаш во 21 часот ќе имаат иста должина. Подолгата целосно ќе изгори во 22 часот, а пократката на полноќ. Свеќите горат со константни брзини. Колкав е збирот на почетните должини на свеќите?

65. Авион лета од Скопје за Белград и се враќа назад. При какви временски услови авионот побрзо ќе го помине целиот пат: со ветер кој постојано со иста брзина дува од Скопје кон Белград, или при мирно време без ветер?

66. Двајца туристи тргнале истовремено еден кон друг по планинарска патека од точките A и B и се сретнале во 11:54 часот. Без да застануваат тие продолжиле по патекатаи туристот кој тргнал од точката A простигнал во B во 12:30 часот, а другиот турист пристигнал во точката A во 15:39 часот. Ако туристите се движеле со постојани брзини, определи:
а) во колку часот тргнале туристите,
б) односот на нивните брзини.

67. Десет работници, работејќи 4 дена по 9 часа дневно, ископале канал со должина од $100\,m$, ширина $1\,m$ и длабочина $0{,}6\,m$. За колку дена 18 работници, работејќи 6 часа дневно, ќе ископаат канал со должина $36\,m$, ширина $3\,m$ и длабочина $0{,}5\,m$.

68. Од Скопје по реката Вардар тргнува чамец, кој има сопствена брзина $12\,km/h$. Еден час покасно од Скопје тргнува друг чамец, чија сопствена брзина е за 25% поголема од брзината на првиот чамец. Ако брзината на течението на Вардар е $3\,km/h$, после колку време растојанието меѓу двата чамци ќе биде $9\,km$?

69. Во три вреќи има $64{,}2\,kg$ брашно. Бо првата вреќа има 20% помалку брашно отколку во втората, а во третата има 42,5% од количеството брашно во првата вреќа. Колку брашно има во секоја вреќа?

70. Златар има две различни легури од сребро и злато. Во едната среброто и златото се во соодвеос $2:3$, а во другата се во соодвос $5:3$. Колку

килограми од секоја легура треба да земеме за да добиеме $9\,kg$ нова легура во која има еднакво количество злато и сребро.

71. Во еден магацин имало $1000\,kg$ јагоди кои содржат 92% вода. По извесно време количеството вода во јагодите се намалило на 90%. Определи ја сега масата на јагодите.

72. Свежо грозје содржи 70% вода, а суво грозје содржи 18% вода. Колку килограми свежо грозје треба да се исуши за да се добијат $24\,kg$ суво грозје?

73. Свежи печурки содржат 95% вода, а суви печурки содржат 14% вода. Колку свежи печурки треба да се наберат за да се добијат $50\,kg$ суви печурки?

74. Влажноста на свежа тукуштo искосена трева е 60%, а на сеното е 20%. Колку сено ќе се добие од $1\,t$ свежо искосена трева?

75. Во еден вид челик има 5% никел, а во друг вид челик има 40% никел. По колку тони треба да се земе од секој вид челик за да се добијат $140\,t$ челик во кој ќе има 30% никел?

76. Во три гајби има $72\,kg$ јаболки. Во првата гајба има $\frac{4}{5}$ пати повеќе јаболки отколку во втората, а во третата има 12 килограми помалку јаболки отколку во втората. По колку килограми јаболки има во секоја гајба?

77. Мартин, Марио, Горјан и Самоил се ученици од исто оделение. Еден дена на час по физичко образование ја мереле својата маса. Мартин, Марио и Горјан заедно имаат $138kg$, Мартин, Марио и Самоил заедно имаат $146kg$, Мартин, Горјан и Самоил заедно имаат $131kg$, а Марио, Горјан и Самоил заедно имаат $143kg$. Определи ја масата на секој од нив.

III.6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

78. Кожна фудбалска топка е сошиена од делови на кожа во форма на правилни петаголници и правилни шестаголници. На топката има

вкупно 32 парчиња кожа. Секое парче кожа во форма на петаголник по страните е поврзано само со делови на кожа во форма на шестаголник. Секое парче кожа во форма на шестаголник е поврзано со три петаголници и три шестаголници. Колку парчиња кожа на топката се во форма на петаголници, а колку се во форма на шестаголници?

79. Ангел има 80% повеќе сликички од Бранко. Бранко има $\frac{3}{5}$ од бројот на сликичкте кои ги има Дарко. Ако Бранко му даде 150 сликички на Дарко, тогаш Дарко ќе има три пати повеќе сликички од Бранко. Колку сликички имаат сите тројца заедно?

80. Во кутија се наоѓаат црвени и сини топчиња. Бројот на црвените топчиња се однесува спрема бројот на сините топчиња како $7:3$. За колку проценти треба да се зголеми бројот на црвените топчиња во однос на црвените точиња кои веќе се наоѓаат во кутијата за да новиот број црвени топчиња се однесува спрема бројот на сините топчиња како $14:5$?

81. Една производна компанија минатата година го исполнила производствениот план со 112%. Определи колку проценти од оствареното производство претставува планираното производство.

82. Во кутија се наоѓаат еднаков број сини и црвени топчиња. Ако во кутијата ставиме уште 3 црвени и 1 сино топче, тогаш односот на бројот на црвените топчиња и вкупниот број топчиња ќе биде поголем од 0,503. Определи го најголемиот можен број црвени топчиња во кутијата?

83. Двајца трговци со јужно овошје вршат размена. Првиот трговец на вториот за 16 кивија му дал онолку лимони колку кивија што добил за три дузини лимони. Колку кивија ќе му даде вториот трговец на првиот за дузина (12 парчиња) лимони?

84. Марко има три албуми со марки. Во првиот се наоѓаат петтина од сите марки, во вториот се наоѓаат неколку седмини од сите марки и во третиот се наоѓаат 303 марки. Колку марки има во сите три албуми?

85. Во театар со само два партери (лево и десно) во секој партер има толку редови, колку што во редот има столици. Во секој ред има еднаков број столици и во салата има 578 столици. Колку редови има во салата и колку столици има во секој ред?

86. Секое од присутните момчиња има толку моливи колку што има вкупно момчиња. Милан пресметал дека сите заедно имаат 2116 моливи. Колку момчиња биле присутни?

87. Една вечер во училиште за танци имало вкупно 26 момчиња и девојки. Првата девојка играла со 9 момчиња, втората играла со 10, трета со 11 и секоја следна девојла играла со едно момче повеќе од претходната, се до последната присутна девојка која играла со сите присутни момчиња. Колку момчиња и колку девојки биле таа вечер во училиштето?

88. Бројот на момчињата во едно одделение е еднаков на 60% од бројот на девојчињата во тоа одделение. Колкав процент од вкупниот број ученици во тоа одделение сочинуваат девојчињата?

89. На општинскиот натпревар по математика учествувале 240 ученици. Половината од сите ученици се $\frac{3}{5}$ од сите девојчиња и $\frac{3}{7}$ од сите момчиња. Колку момчиња и колку девојчиња учествувале на натпреварот?

90. Една година на државните натпревари за учениците од основното образование во осмо одделение учествувале 86 ученици на натпреварот поо математика, 40 ученици на натпреварот по физика и 36 ученици на натпреварот по хемија. Притоа некои ученици учествувале само на еден од наведените три натпревари, некои на точно два, а некои учествувале на сите три натпревари. Бројот на учениците кои учествувале на точно два натпревари бил двапати помал од бројот на учениците кои учествувале само на еден натпревар, а бројот на учениците кои учествувале на сите три натпревари бил трипати помал од бројот на учениците кои учествувале само на еден натпревар. Колку ученици учествувале само на еден натпревар, колку на точно два натпревара и колку учествувале на сите три натпревари?

91. Успехот на учениците на некое основно училипте на крајот на учебната година е прикажан со кружен дијаграм. На овој дијаграм 15 ученици упатени на дополнителна настава се претставени со кружен исечок со централен агол еднаков на $8^\circ 38' 24''$. Определи го бројот на учениците во ова училиште.

92. Од вкупно запишаните ученици во осмо одделение на почетокот на учебната година 43% биле девојчиња. Во текот на годината училиштето го напуштиле 14 девојчиња и 36 момчиња, па на крајот на учебната година 46% од учениците во осмо одделение биле девојчиња. Колку ученици имало во осмо одделение на почетокот на учебната година? Колку момчиња учеле во осмо одделение на крајот на учебната година?

93. Во еден хотел во текот на 2018 година летувале 1200 мажи и жени. Во 2019 година, во однос на 2018 година, бројот на мажите кои летувале во хотелот се намалил за 10%, а бројот на жените се зголемил за 20%. Така во 2019 година вкупниот број гости во однос на 2018 година се зголемил за 75. Колку мажи, а колку жени летувале во овој хотел во 2019 година.

94. Еден ден 40% од учениците во претпладневната смена на некое училиште за ужина пиеле какао, 36% пиеле сок, а останатите се одлучиле за чај. Во попладневната смена на тоа училиште за ужина чај пиеле 37,5% ученици повеќе отколку во претпладневната смена, сок 75% ученици повеќе, а какао пиеле 75% ученици помалку отколку претпладне. Дали бројот на учениците во попладневната смена е поголем или е помал во однос на бројот на учениците во претпладневната смена? За колку проценти?

95. Во неполн сад се наоѓа 85-процентен раствор на алкохол. Ако садот се дополни со 21-процентен раствор на алкохол, добиената течност добро ја измешаме, потоа одлееме онолку течност колку што сме долеале и повторно долееме 21-процентен раствор на алкохол, ќе добиеме 70-процентен раствор на алкохол, Колкав дел од садот бил полн пред долевањето?

96. Во текот на годината Мартин учествувал на неколку натпревари и на нив освојувал определен број бодови. Ако Мартин на следниот натпревар освои 89 бода, тогаш неговиот просек ќе биде 91 освоен бод по натпревар. Но, ако на следниот натпревар освои 64 бода, тогаш неговиот просек ќе биде 86 освоени бода по натпревар. На колку натпревари учествувал Мартин до сега?

97. Откако за изградба на некоја станбена зграда е купен половина од планираниот материјал и се платени половина од предвидените трошоци за работа, материјалот поскапел за 15%, а цената на работната

сила се зголемила за 8%. Во трошокот за изградба на таа зграда материјалот учествува со 60%, а работната сила учествува со 40%. Колку проценти се зголемил вкупниот трошок за изградба во однос на планираната цена за изградба на оваа зграда?

98. Еден базен се полни со една цевка. Ако дотокот на водата во базенот се намали за 20%, за колку проценти ќе се зголеми времето на полнење на базенот?

99. Цената на влезниците за следење на натпреварите на еден фудбалски клуб се зголемила за 40%, но заработувачката се зголемила само 20%. За колку проценти се намалил бројот на гледачите?

100. Во секоја од две овошни градини се одгледуваат само јаболка и круши. Бројот на јаболковите стебла е еднаков на 65% од бројот на стеблата во првата овошна градина и на 45% од бројот на стеблата во втората овошна градина, односно на 53% од бројот на стеблата во двете овошни градини заедно. Колкав процент од вкупниот број стебла во двете овошни градини заедно се овошните стебла од првата овошна градина?

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Дадени се 1995 броеви секој од кои е еднаков на 1 или на -1. Дали може дадените броеви да се поделат во две групи кои немаат заеднички елементи така што збирот на броевите во првата група да биде еднаков на збирот на броевите вовтората група?

2. Во некој месец три саботи биле на парен датум. Кој ден од седмицата бил 25-тиот ден на тој месец?

3. Природниот број x е таков што се точни две од тврдењата
   1) $x+7$ е точен квадрат,
   2) цифрата на единиците на x е 5,
   3) $x-12$ е точен квадрат.
   Определи го бројот x.

4. Во семејството Јакопетрески има три деца: ќерки Ана и Бојана и син Горјан. Кое од децата е најмладо, а кое е најстаро ако е познато дека еден од следниве искази е лажен, а останатите три се вистинити:
   p : Ана е постара од Бојана.
   q : Горјан е помлад од Бојана.
   r : Горјан е постар од Ана.
   s : Бојана и Горјан заедно имаат двапати повеќе години од Ана.

5. Црвени, сини и зелени деца се наредени на кружница. Кога учителот замолил црвените деца кои имаат зелен сосед да кренат рака, се подигнале 20 раце. Потоа учителот замолил сините деца кои имаат зелен сосед да кренат рака и се подигнале 25 раце. Докажи, дека некое од децата кои подигнале рака има два зелени соседи.

6. На таблата се запишани сите природни броеви од 1 до 1991. Горјан последователно брише по два броја и на нивно место ја запишува апсолутната вредност на нивната разлика. Постапката ја повторува се додека на таблата не остане само еден број. Дали тоа може да биде бројот 1991?

7. Во таблицата

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

се заокружени 10 броеви и тоа по еден во секој ред и по еден во секоја колона. Докажи дека меѓу заокружените броеви барем два се еднакви.

8. На таблата се запишани броевите 1, 2, 3, 4, ..., 1994, 1995. Горјан брише било кои два броја и наместо нив го запишува или нивниот збир или апсолутната вредност на нивната разлика. Постапката се повторува се додека на таблата не остане само еден број. Дали може последниот број да биде:
а) 0, б) 1995?

9. Во група од 26 луѓе секој познава најмалку 13 луѓе. Докажи дека од групата може да се изберат 4 луѓе и да се разместат околу тркалезна маса така што секој седи меѓу свои познаници.

10. Шест броја се распоредени во темињата на правилен шестаголник. Збирот на сите броеви е 1 и секој од нив е еднаков на апсолутната вредност на разликата на претходните два броја, разгледувајќи ги броевите во насока на движењето на стрелката на часовникот. Определи ги овие броеви.

11. Во една соба има мачка и 10 глувци: 9 црни (означени со броевите од1 до 9) и 1 бел (означен со бројот 10). Глувците трчаат во круг, секогаш во иста насока и притоа не го менуваат нивниот редоследот (1, 2, 3, ..., 9, 10). Мачката ги лови глувците еден по еден и секогаш кога ќе улови еден глушец покрај неа претрчуваат 4 глувци, а петтиот кој претрчува го лови. Се покажало дека белиот глушец е уловен последен. Кој глушец е прв уловен?

12. Во едно царство има 12 замоци. Еден од нив е царската палата. Некои парови замоци се поврзани со царски пат. Од секој замок може да се стигне до царската палата на единствен начин, движејќи се само по царски патишта. Замок, различен од царската палата, го нарекуваме *„краен“*, ако е сврзан со точно еден од останатите замоци по царскиот пат.
    а) Ако има 4 „крајни“ замоци, определи го максималниот број царски патишта од „краен“ замок до царската палата.
    б) Ако нема царски пат, кој надминува $56km$, докажи, дека збирот на растојанијата од „крајните“ замоци до царската палата е помал од $2017km$.

13. Даден е квадрат со должина на страна $46cm$. Подели го овој квадрат на 1988 помали квадрати чии должини на страни изразени во сантиметри се целобројни.

IV.2. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

14. Во квадрат со должина на страна $5cm$ произволно се избрани 77 точки. Докажи дека може да се конструира квадрат со плоштина $1cm^2$ во кој се наоѓаат најмалку четири од дадените точки.

15. Во квадрат со должина на страна $6cm$ на произволен начин се разместени 75 точки. Докажи дека може да се конструира квадрат со плоштина $1cm^2$ во кој се наоѓаат најмалку три од дадените точки.

16. На шаховско првенство учествувале 8 шахисти при што секој шахист со секој шахист одиграл по една партија. Докажи дека во секој момент на натпреварот постојат најмалку двајца шахисти со еднаков број до тогаш одиграни партии.

17. Дали може броевите $-1, 0, 1$ да се распоредат во квадратна таблица со димензии 5×5 така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагоналка е различен?

IV.3. ПРЕБРОЈУВАЊЕ

18. На кружницата се распоредени 1995 точки такви што 1994 точки се бели, а една точка е црна. Ги разгледуваме сте конвексни многуаголници со темиња во овие точки. Кои многуаголници се повеќе, оние кои имаат едно црно теме или оние кои немаат црно теме?

19. Во единечните квадратчиња на квадратна табела 3×3 се запишуваат 9 различни природни броеви чиј збир е еднаков на S. Табелата ја нарекуваме „интересна", ако при прецртување на било кој ред и било која колона збирот на двата броја во дијагонални полиња е еднаков на збирот на другите два броја во дијагоналните полиња.
   а) Докажи дека за $S=2018$ не постои интересна табела.
   б) Најди го бројот на различните интересни табели кои ги содржат броевите 1, 2, 3, 5, 668 и за кои S е најмал можен број. (Две табели се различни, ако не се добиваат една од друга со вртење околу центарот на табелата.)

20. Пајак се движи по прозорска решетка во облик на квадратна мрежа со димензии 4×4. Движењето на пајакот е праволиниски, чекор по чекор, од еден до друг јазол на решетката, но секогаш десно или горе, при што пајакот поаѓа од долниот лев агол на решетката и сака да стигне во горниот десен агол на решетката.
   а) Колку чекори треба да направи пајакот до целта?
   б) На колку различни начини може пајакот да стигне до целта?

21. Иван пакува бомбони во кеси. На располагање има три вида бомбони: карамели, чоколадни бомбици и гумени бомбони. Во секоја кеса мора да има точно 6 бомбони и најмалку 1 бомбона од секоја вид. Определи го бројот на различните пакувања кои може да ги направи Иван.

22. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се деливи со 3 и се запишуваат само со цифрите 1, 2, 3, 4, 5.

23. Определи го бројот на петцифрените броеви кои се поголеми од 88888 и чиј збир на цифри е еднаков на 42. Испиши ги овие броеви.

24. Определи го бројот на петцифрените броеви такви што: првата цифра е парен број, втората цифра е сложен број, третата цифра е непарен број, четвртата цифра е прост број и последната цифра е број кој е делив со бројот 3.

25. Определи го бројот на петцифрените броеви чија цифра на десетилјадите е парна, цифрата на стотките е непарна, а цифрата на единиците е прост број.

26. Определи го бројот на четирицифрените броеви во кои постојат цифри кои се повторуваат.

27. Определи го бројот на петцифрените броеви запишани со цифрите 0, 1 и 2 такви што барем две соседни цифри им се еднакви.

28. Определи го бројот на четирицифрените природни броеви кои запишани со помош на цифрите 0, 1, 3, 4, 5 и 8 и се такви што:
а) цифрите може да се повторуваат,
б) цифрите не може да се повторуваат,
в) цифрите може да се повторуваат, а бројот е делив со 5.

29. Определи го бројот на шестцифрени броеви кои може да се формираат од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 така што секоја цифра во записот на бројот се јавува само еднаш и парните цифри се една до друга. (*Забелешка*: 0 е парна цифра.)

30. Определи го бројот на петцифрените природни броеви во чиј запис барем една цифра е 5 и барем една цифра е 1.

31. Определи го бројот на природните броеви n кои се помали од 2000 такви што збирот на цифрите на n и збирот на цифрите на $n+1$ се непарни броеви?

32. На роденденот на Горјан сите се ракувале со Горјан и се ракувале меѓу себе. Имало вкупно 136 ракувања. Колку гости имал Горјан на неговиот роденден?

33. Даден е конвексен многуаголник $P_1P_2...P_{49}P_{50}$. Од темето P_1 се повлечени дијагоналите до темињата P_3 и P_{49}, а потоа од дадениот многуаголник се отсечени триаголниците $P_1P_2P_3$ и $P_1P_{50}P_{49}$. Колку дијагонали има новодобиениот многуаголник?

34. Страната на правилен многуаголник е со должина $1cm$. Колкав е периметарот на овој правилен многуаголник ако тој има 252 дијагонали?

35. Ако збирот на аглите на многуаголникот се помножи со бројот на дијагоналите на многуаголникот се добива 97200°. Определи го бројот на страните на овој многуаголник.

36. Определи го збирот на внатрешните агли на мноуаголник кој има 189 дијагонали.

37. Збирот на бројот на страните и бројот на дијагоналите на правилен многуаголник е еднаков на 153. Определи го внатрешниот агол на овој многуаголник.

38. Бројот на дијагоналите на многуаголникот е 8 пати поголем од бројот на страните. Определи го збирот на внатрешните аглина овој многуаголник.

39. Внатрешниот агол на правилен многуаголник е 12 пати поголем од придружениот надворешен агол. Определи го бројот на дијагоналите на овој многуаголник.

40. а) На колку различни начини 7 ученици може да седнат на 9 различни столици?
б) На колку различни начини на 5 столици може да седнат некои од 7 ученици?

41. Дванаесет витези на тркалезната маса треба да изберат двочлена делегација кој ќе го посети кралот Артур. На колку начини тоа може да се направи ако во делегацијата не смее да бидат два витеза кои на тркалезната маса седат еден до друг?

42. Даден е конвексен десетаголник. Колку триаголници се определени со темињата на дадениот десетаголник?

43. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржани во квадратна мрежа со димензии 8×8. Колку од нив се квадрати?

44. Во потесен избор за државниот натпревар по математика Комисијата за задачи предложила 7 алгебарски и 5 геометриски задачи. На колку начини од предложените задачи може да се изберат 5 задачи за натпреварот, ако меѓу нив мора да има 3 алгебарски и 2 геометриски задачи? (Напомена. Редоследот на избраните задачи не е важен.)

45. Во работната соба на Митре на полицата се наоѓаат 12 различни книги, од кои 5 се од математика, 4 се од физика и 3 се од хемија. На колку различни начини може да се распоредат книгите на полицата ако се знае дека книгите од иста област мораат секогаш да бидат една до друга?

46. На колку различни начини околу тралезна маса може да седнат 3 момчиња и 3 девојчња така што две лица од ист пол да не седат едно до друго? (Распоредувањата кои се добиваат со ротација на едно распоредување околу масата ги сметаме за исти.)

47. Четири момчиња и три девојчиња сакаат да седнат на иста клупа. Определи го бројот на можностите:
а) на двата краја на клупата да седат лица од ист пол,
б) на двата краја на клупата да седат лица од спротивен пол.

48. Учесниците на математичкиот натпревар Кенгур се регистрираат со помош на шифра која содржи: одделение на ученикот, иницијали на ученикот и четирицифрен идентификационен број на ученикот. На пример, една од можните шифри е 7ВА2016. Колку најмногу ученици може да се регистрираат на овој начин, ако ознаката за IV одделение е 0, ознаката за V одделение е 1, ознаката за VI одделение е 2, ознаката за VII одделение е 3, ..., ознаката за IX одделение е 5, ознаката за I година средно е 6, ..., ознаката за IV средно е 9 и ако двајца различни учесници имаат различни шифри?

49. Во рамнината се дадени 10 црвени и 8 сини точки такви што било кои три точки не лежат на иста права. Определи го бројот на триаголниците со темиња во дадените точки кај кои сите темиња не се еднобојни.

50. Дадени се три различни прави и на секоја од нив по 5 различни точки. Определи го најголемиот број триаголници чии темиња се дадените точки.

51. Во рамнината се дадени две класи паралелни прави: $p_1, p_2, ..., p_{10}$ и $q_1, q_2, ..., q_6$. Правите од класата p ги сечат правите од класата q. Колку различни паралелограми се определени со овие прави? (Различни се оние паралелограми кои имаат барем две различни темиња.)

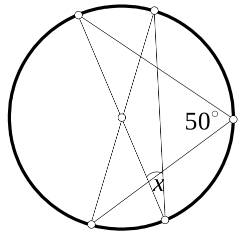
52. Чоколадна табла, која има $m \times n$ „коцки“ кои се распоредени во m редови и n колони, треба да се искрши на одделните „коцкички“. Кршењето е исклучиво така што некој правоаголен дел од таблата се крши по линија која разделува два негови соседни редови или две негови соседни колони. Докажи дека вкупниот број кршења не зависи од изборот на редоследот на кршењата.

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ЕЛЕМЕНТИ НА ТРИАГОЛНИК. СКЛАДНИ ТРИАГОЛНИЦИ

1. На кружница во насока на движењето на стрелките на часовникот последователно се земени точките A, B, C, D, E и F така што важи $\measuredangle ADF = \measuredangle BEC$. Докажи дека $AB \parallel CF$.

2. Определи го аголот x означен на цртежот десно.



3. Две кружници k_1 и k_2 со центри O_1 и O_2 се сечат во точките A и B. Произволна права која минува низ точката A ја сече k_1 во C_1, а k_2 во C_2. Докажи дека $\measuredangle BC_1O_1 = \measuredangle BC_2O_2$.

4. Нацртај шесткрака ѕвезда, а потоа определи го збирот на нејзините конвексни внатрешни агли.

5. Нека x, y, z се агли на даден триаголник, (во степени). Докажи дека ако $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$ се рационални броеви, тогаш x, y, z се исто така рационални броеви.

6. Надворешните агли на правоаголниот триаголник (кои не се прави) се однесуваат како $7:11$. Определи ги острите агли на овој триаголник.

7. Големините на острите агли на правоаголен триаголник се однесуваат како $4:5$. Ако помалиот агол се намали за 8%, за колку проценти ќе се зголеми поголемиот агол?

8. Определи ги аглите на триаголникот ако тие се однесуваат како $6:11:7$.

9. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC = 70^\circ$ и $\measuredangle ABC = 50^\circ$. Точката M припаѓа на внатрешноста на $\triangle ABC$ и е таква што $\measuredangle MAC = \measuredangle MCA = 40^\circ$. Определи ги $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle BMC$.

10. Во правоаголен триаголник висината повлечена кон хипотенузата ја дели хипотенузата на два дела чија разлика е еднаква на должината на едната катета. Определи ги аглите на овој триаголник.

11. Даден е $\triangle ABC$ во кој $\measuredangle BAC = 70^\circ$. На страната AB избрана е точка D, а на страната AC точка E така што $\measuredangle BDC = \measuredangle BEC$ и $\measuredangle EBC : \measuredangle DCB = 1:3$. Правите BE и CD се сечат во точката M, при што $\measuredangle BMD = 84^\circ$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$ и на $\triangle ADC$.

12. Даден е тапоаголен триаголник ABC со тап агол во темето C. Нека точката P е средина на страната AB и нека $\measuredangle PCA = 90^\circ$, $\measuredangle BCP = 30^\circ$, $\overline{AC} = 3\,cm$. Определи ја должината на страната BC.

13. Нека AD е дијаметар на кружницата, а B и C се точки на кружницата такви што отсечките AC и BD се сечат под агол од 60°. Ако S е центарот на кружницата, докажи дека $\triangle BCS$ е рамностран.

14. Даден е разностран $\triangle ABC$. На најголемата страна AB земена е точка D таква што $\overline{BD} = \overline{BC}$. Докажи дека правата CD го дели $\measuredangle ACB$ на два агли при што едниот агол е еднаков на половината на збирот, а другиот на половината на разликата на аглите $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle BAC$.

15. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle BAC = 68^\circ$ и $\measuredangle ABC = 32^\circ$. Точката D е подножјето на висината повлечена од темето C на страната AB, точката P е средина на страната AB, точката M е симетрична на точката C во однос на правата AB, а точката N е симетрична на точката C во однос на точката P. Определи го $\measuredangle MBN$.

16. Во $\triangle ABC$ страната AB е најдолга. На страната AB се избрани точки D и E такви што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и $\overline{BE} = \overline{BC}$. Определи го $\measuredangle ACB$ ако $\measuredangle ECD = 20^\circ$.

17. Даден е правоаголен триаголник ABC. Нека точката E е средина на хипотенузата AB, а точката D е пресечната точка на симетралата на

правиот агол $\measuredangle ACB$ и хипотенузата. Определи ги аглите на триаголникот CDE, ако триаголникот CDE е рамнокрак.

18. Нека S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, а M е средината на лакот AB на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ кој не ја содржи C. Докажи дека $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MS}$.

19. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, таков што $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle ACB=80^\circ$. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ е избрана точка M таква што $\measuredangle MBA=30^\circ$ и $\measuredangle MAB=10^\circ$. Определи го $\measuredangle AMC$.

20. Даден е правоаголен триаголник ABC. На хипотенузата AB е земена точка M таква што $\overline{BM}=\overline{BC}$ и на катетата AC е земена точка N таква што отсечката CN е еднаква на висината повлечена кон хипотенузата. Докажи дека $\measuredangle CNM=90^\circ$.

21. Страните AC и BC на $\triangle ABC$ правата p ги сече во точките M и N соодветно, така што осносиметричната слика C_1 на темето C во однос на таа права p лежи на страната AB и притоа $\overline{AC_1}=\overline{AM}$ и $\overline{BC_1}=\overline{BN}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

22. Во правоаголникот $ABCD, \overline{AB}>\overline{BC}$ е повлечена симетралата AN на $\measuredangle BAD$, $N\in BD$. Ако $\measuredangle CAN=20^\circ$ определи ги аглите на $\triangle AND$.

23. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ во кој $\measuredangle ABC=80^\circ$. На кракот AC избрана е точка D, а на кракот BC точка E така што $\measuredangle DBE=30^\circ$ и $\measuredangle DAE=40^\circ$. Определи ги аглите $\measuredangle BDE$ и $\measuredangle AED$.

24. Даден е тапоаголен триаголник ABC со тап агол во темето B. Симетралата на надворешниот агол при темето C ја сече правата AB во точката D, а симетралата на надворешниот агол во темето A ја сече правата BC во точката E. Притоа важи $\overline{AE}=\overline{AC}=\overline{CD}$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

25. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle CAB=60^\circ$. Нека A_1 е средина на страната BC, а B' и C' се подножјата на висините повлечени од темињата B и C. Докажи дека $\triangle A_1B'C'$ е рамностран.

26. Даден е рамностран $\triangle ABC$. На страната AB избрани се точки M и N такви што $\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}$, а на страната AC точка P таква што $\overline{CP}=\overline{AM}$. Определи го збирот $\measuredangle PMC+\measuredangle PNC$.

27. Нека D е пресечната точка на страната AB на $\triangle ABC$ и симетралата на аголот на триаголникот во темето C. Центарот на впишаната кружница на $\triangle ADC$ се совпаѓа со центарот на опишаната кружница на $\triangle ABC$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

28. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ таков што должината на кракот е двапати поголема од должината на основата, т.е. $\overline{AC}=\overline{BC}=2\overline{AB}$. Нека точките D и E се средините на краците AC и BC, соодветно. Правите AE и BD се сечат под агол од 76°. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

29. Нека M и N се допирните точки на впишаната кружница во $\triangle ABC$ со страните AB и AC, а P е пресечната точка на правата MN со симетралата на $\measuredangle ABC$. Докажи дека $\measuredangle BPC=90^\circ$.

30. Даден е $\triangle ABC$ во кој $\measuredangle BAC=78^\circ$. На страната BC земена е точка D таква што правата AD го дели $\triangle ABC$ на два рамнокраки триаголници, при што отсечката AB е основа на $\triangle ABD$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

31. Во триаголникот ABC еден од аглите е двапати поголем од другиот, а третиот агол е $120°$. Симетралата на надворешниот аголот при темето B ја сече правата која минува низа темето C и е нормална на правата AB, во точка Q, а правата AC – во точка P. Определи ги аглите на триаголникот CPQ.

32. Даден $\triangle ABC$ во кој тежишната линија AD и симетралата BE на $\measuredangle ABC$ се заемно нормални. Пресметај ја должината на страната AB, ако $\overline{BC}=12\,cm$.

33. Даден е триаголник $\triangle ABC$ со $\measuredangle BAC=40^\circ$, $\measuredangle ABC=20^\circ$ и $\overline{AB}-\overline{BC}=5cm$. Ако симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече AB во точка M, да се пресмета должината на CM.

34. Даден е правоаголен триаголник ABC, $\measuredangle C=90^\circ$ и $\overline{AC}>\overline{BC}$. Над катетата AC како над дијаметар е конструирана кружница која хипоте-

нузата AB ја сече во точката D. Низ точката D е повлечена тангента t која катетата BC ја сече во точката E. Докажи дека $\overline{BE} = \overline{CE}$.

35. Нека k е кружница со дијаметар AB, OM е нејзин произволен радиус, а P и Q се центрите на кружниците опишани околу триаголниците AOM и BOM, соодветно. Правите AP и BP се сечат во точката S. Докажи дека S припаѓа на кружницата k.

36. Даден е $\triangle ABC$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AC во точката N. Во рамнината е избрана точка M така што точките A и M не лежат на иста страна на правата BC и така што $\measuredangle NBM = \measuredangle BNA$ и $\overline{BM} = \overline{AN}$. Нека точката D е пресекот на правата MN и страната BC. Докажи дека $\overline{BD} = \overline{DN}$.

37. На гусарската карта пишува: На ридот Лагатор, над Лозово, се наоѓат еден даб, една липа и една црница. Тргни од дабот и број чекори до липата, потоа заврти лево под прав агол и изброј исто толку чекори. Тука стави го првиот знак. Потоа тргни од дабот до црницата, па заврти десно под прав агол и изброј исто толку чекори. Тука стави го вториот знак. Определи ја средината меѓу првиот и вториот знак и копај. Тука ќе најдеш богатство. Еден гусар според картата го нашол Лагатор и на него ги нашол липата и црницата. Но, дабот го немало, па тој заминал без да го најде богатството. Меѓутоа, ако знаел геометрија гусарот можел да го пронајде богатството. Како?

38. Над страните AC и BC на остроаголен $\triangle ABC$ во надворешноста на триаголникот се нацртани квадрати $ACMN$ и $CBED$. Докажи дека $\overline{AD} = \overline{BM}$ и $AD \perp BM$.

39. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Нека D е подножјето на всиината повлечена од темето C кон хипотенузата AB, точката R е центар на впишаната кружница во $\triangle ADC$ и точката S е центар на впишаната кружница во $\triangle BDC$. Ако правата CR ја сече хипотенузата AB во точката M, а правата CS во точката N, тогаш $\overline{AC} = \overline{AN}$ и $\overline{BC} = \overline{BM}$. Докажи!

40. Околу рамностран $\triangle ABC$ е опишана кружница. На лакот BC кој не ја содржи точката A дадена е произволна точка M. Докажи дека $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{AM}$.

41. Даден е $\triangle ABC$, $\overline{AB}=9, \overline{BC}=18, \overline{CA}=12$. На страната AB е избрана точка M така што нормалата од точката M на симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната AC во точка P, нормалата во точката M на симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната BC во точка Q и притоа $\overline{CQ}=2\overline{CP}$. Во кој однос точката M ја дели страната AB.

V.2. ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

42. Определи ги должините на катетите на правоаголен триаголник со плоштина $24\,cm^2$. Должините на катетите на триаголникот се природни броеви изразени во сантиметри.

43. Нека $m>n>0$. Докажи дека триаголникот со должини на страни $2mn,\ m^2-n^2$ и m^2+n^2 е правоаголен.

44. Во правоаголен триаголник (со прав агол во темето C) должините на тежишните линии се t_a, t_b и t_c. Докажи дека $t_a^2+t_b^2=5t_c^2$.

45. Односот на должините на хипотенузата и едната катета ма правоаголен триаголник е еднаков на $101:99$. Определи го односот на должините на хипотенузата и другата катета.

46. Должините на тежишните линии на правоаголен триаголник повлечени од темињата со остри агли се еднакви на $7\,cm$ и $4\,cm$. Определи ја должината на хипотенузата на овој триаголник.

47. Определи го радиусот на кругот впишан во правоаголен триаголник со катети $a=30\,cm$ и $b=40\,cm$.

48. Должините на страните на триаголникот се три последователни природни броја. Докажи дека висината повлечена на страната со средна должина ја дели оваа страна на две отсечки кои по должина се разликуваат за 4.

49. Должините на страните на правоаголен триаголник се $a, a-b$ и $a+b$, каде a и b се реални броеви и $a>b$. Докажи дека односот на должините на катетатите на овој триаголник е еднаков на $4:3$.

50. Нека D е точката во која впишаната кружница во правоаголниот $\triangle ABC$ ја допира хипотенузата AB. Докажи дека
$$\overline{AC}\cdot\overline{BC}=2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}.$$

51. Даден е рамнокрак триаголник со должина на кракот $7,5\,cm$ и агол при основата 75°. Определи ја плоштината на триаголникот.

52. Во правоаголен $\triangle ABC$ точката D е средина на хипотенузата, а E и F се точки на катетите AC и BC соодветно такви што важи $DE\perp DF$. Докажи дека $\overline{EF}^2=\overline{AE}^2+\overline{BF}^2$.

53. Два праволиниски пата p_1 и p_2 се сечат под агол од 75°. Местото M од патот p_1 е оддалечено $6\,km$, а од раскрсницата R е оддалечено $12\,km$. Определи колку е оддалечено местото M од патот p_2.

54. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. Должината на висината повлечена од темето C кон основата AB е $6\,cm$, а периметарот на триаголникот е еднаков на $20\,cm$. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$.

55. Висината која соодветствува на хипотенузата на правоаголен триаголник ја дели хипотенузата на два дела: $x=16\,cm$ и $y=9\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на овој триаголник.

56. Определи ја плоштината на правоаголен триаголник со периметар $36\,cm$ таков што за катетите a и b и хипотенузата c важи $\frac{a+b}{c}=\frac{7}{5}$.

57. Во правоаголен триаголник ABC, $\measuredangle A=90^\circ$ впишана е кружница која хипотенузата ја допира во точката M. Ако $\overline{BM}=m$ и $\overline{MC}=n$, докажи дека плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на mn.

58. Тежиштето T на $\triangle ABC$ се наоѓа на кружницата конструирана над страната AB, $\overline{AB}=12\,cm$ како над дијаметар. Определи ја плоштината на $\triangle ABC$ ако $\measuredangle TAB=30^\circ$.

59. На хипотенузата AB на рамнокрак правоаголен триаголник ABC се дадени точки M и N такви што $\overline{MC}=\overline{NC}=2\,cm$. Растојанието од секоја од точките M и N до нејзе поблиската катета е еднакво на

$1cm$. Определи ги плоштината на триаголникот ABC и должината на отсечката MN.

60. За триаголникот ABC важи $\overline{AB}=32\,cm$, $\overline{BC}=24\,cm$ и тежишните линии AA' и CC' се заемно нормални. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

61. Впишаната кружница $k(O,r)$ во триаголник ABC ја допира страната BC во точката T. Определи ја должината на страната BC, ако $\measuredangle BAC=30^\circ$ и $\frac{\measuredangle BOT}{\measuredangle COT}=\frac{3}{4}$.

62. Должината на висината CC' која соодветствува на основата на рамнокракиот триаголник е еднаква на $20\,cm$, а должината на висината AA' која соодветствува на кракот е еднаква на $24\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на овој триаголник.

63. Должината на хипотенузата на еден правоаголен триаголник е $20\,cm$, а еден од острите агли е еднаков на четвртина од правиот агол. Определи ја плоштината на овој триаголник.

64. Нека h_a, h_b, h_c се висните на триаголник ABC. Ако

$$(\frac{h_c}{h_a})^2+(\frac{h_c}{h_b})^2=1,$$

тогаш триаголникот ABC е правоаголен. Докажи!

65. Нека a е должината на основата, а b е должината на кракот на рамнокрак триаголник со агол при врвот еднаков на 150°. Докажи дека $a^2=b^2(2+\sqrt{3})$.

66. Должината на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC е $7\,cm$, а еден внатрешен агол е еднаков на четвртина од правиот агол. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC.

67. На страните AB, BC и CA на рамностраниот триаголник ABC се земени точки M, N и P, соодветно такви што

$$\overline{AM}:\overline{MB}=\overline{BN}:\overline{NC}=\overline{CP}:\overline{PA}=2:1.$$

Докажи дека и триаголникот MNP е рамностран и определи ги односите на периметрите и плоштините на триаголниците ABC и MNP.

68. Ортоцентарот H на триаголникот ABC ја дели висината AH така што $\overline{AH}:\overline{HA'}=1:1$, а висината BB' ја дели така што $\overline{BH}:\overline{HB'}=2:1$. Определи го односот $\overline{CH}:\overline{HC'}$ во кој H ја дели висината CC'.

69. Определи ја плоштината на правоаголен триаголник со агол $\alpha=22^\circ30'$ и хипотенуза $c=2\,cm$.

70. Определи ги катетите на правоаголоен триаголник кај кој еден од внатрешните агли е еднаков на $22^\circ30'$, а должината на хипотенузата е еднаква на $2\,cm$.

71. Должините на катетите AC и BC на правоаголен $\triangle ABC$ се $20\,cm$ и $15\,cm$, соодветно. Нека CD е висината на $\triangle ABC$. Определи ја плоштината на $\triangle BCD$.

72. Во правоаголен триаголник едниот остар агол е трипати поголем од другиот, а должината на хипотенузата е $c=8\,cm$. Определи ја плоштината на овој триаголник.

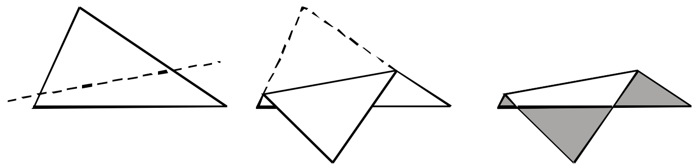
73. Должината на кракот на рамнокрак триаголник е еднаква на $8\,cm$, а аголот меѓу краците е еднаков на 135°. Определи ја плоштината на овој триаголник.

74. Во триаголникот ABC познати се должините на страните $\overline{AB}=48\,cm$ и $\overline{AC}=30\,cm$, како и должината на тежишната линија $\overline{CP}=18cm$. Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

75. Во правоаголен триаголник со должини на катети $21\,cm$ и $28\,cm$ впиши квадрат чии две страни лежат на катетите, а темето кое не припаѓа на тие две страни припаѓа на хипотенузата на триаголникот. Определи ги должините на отсечките на кои хипотенузата е поделена со темето на квадратот.

76. Тежиштето T на триаголникот ABC припаѓа на кружницата конструирана над страната $AB, \overline{AB}=8\,cm$ како дијаметар и важи $\measuredangle TAB=30^\circ$. Определи ја плоштината на триаголникот ABC.

77. Триаголник од хартија е превиткан по испрекината линија, како што е прикажано на цртежот.



Плоштината на добиената фигура е еднаква на 80% од плоштината на триаголникот, а плоштината на затемнетиот дел е еднаква на 120 cm^2. Определи ја плоштината на триаголникот.

78. Нека е даден правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и аголот во темето B е 15°. Ако $\overline{AB} = 20cm$ да се пресмета плоштината на $\triangle ABC$.

79. Во еден триаголник две страни имаат должини $5cm$ и $6cm$ и истите зафаќат агол од 120°. Определи ги периметарот и плоштината на овој триаголник.

80. Во триаголникот ABC важи $\overline{AC} + \overline{BC} = 2\overline{AB}$. Докажи дека правата која минува низ тежиштето и центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC е паралелна со AB.

81. Во $\triangle ABC$ најкратката страна е долга $5cm$. За должините на висините на овој триаголник важи $h_b = h_a + h_c$. Определи ги сите можни целобројни должини на сите страни на триаголникот мерени во сантиметри.

82. Даден е $\triangle ABC$ и точка D во неговата внатрешност. Ако растојанијата од точката D до страните AB, BC и CA се m, n и p, соодветно, а должините на висините повлечени кон страните AB, BC и CA се h_c, h_a и h_b, определи ја вредноста на изразот $\frac{m}{h_c} + \frac{n}{h_a} + \frac{p}{h_b}$.

83. Нека CC_1 е висина на $\triangle ABC$, каде C_1 е точка од правата AB. Познато е дека збирот на квадратите на периметрите на $\triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$ е еднаков на квадратот на периметарот на $\triangle ABC$. Докажи, дека $\measuredangle ACB = 90^\circ$.

84. На страните *AC* и *BC* на триаголникот *ABC* земени се точки *M* и *N*, такви што $\overline{CM} = 3\overline{AM}$ и $\overline{CN} = 4\overline{BN}$. Пресечната точка на *AN* и *BM* е *O*.

Определи ја плоштината на триаголникот ABC, ако плоштината на триаголникот ABO е $5cm^2$.

V.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

85. Во рамнината се дадени два квадрати $AEDB$ и $ACFG$ кои се еднакво ориентирани и кои не се преклоПуваат. Докажи дека $\overline{BG}=\overline{CE}$.

86. Во квадрат $ABCD$ точките M и N се средини на страните CD и AD, соодветно. Отсечките BM и CN се сечат во точката E.
Докажи дека
а) $BM\perp CN$, б) $\overline{AE}=\overline{AB}$.

87. Докажи дека спротивните темиња на паралелограмот се еднакво оддалечени од дијагоналата на која не ѝ припаѓаат?

88. Во внатрешноста на квадрат $ABCD$ е земена точка P таква што $\measuredangle ABP=\measuredangle BAP=15^\circ$. Докажи дека триаголникот CDP е рамностран.

89. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека M и N се средини на страните BC и CD соодветно. Докажи дека правите DM и BN се сечат во точка од дијагоналата AC.

90. Даден е квадрат $ABCD$ и точка E надвор од него, таква што триаголникот DCE е рамностран. Докажи дека радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABE е еднаков на должината на страната на квадратот.

91. Нека за паралелограмот $ABCD$ и правата p имаат единствена заедничка точка D. Ако M,N,O се подножјата на нормалите повлечени од точките A,B,C на правата p, соодветно, тогаш $\overline{AM}+\overline{OC}=\overline{BN}$. Докажи!

92. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Докажи, дека било која точка од четириаголникот $ABCD$ и неговата внатрешност лежи барем во еден од четирите кругови чии дијаметри се страните на тој четириагоник.

93. Даден е квадрат $ABCD$ и точка M на страната BC. Ако точката N од страната CD е таква што $\measuredangle AMB = \measuredangle AMN$, определи го $\measuredangle MAN$.

94. Над хипотенузата AB на правоаголниот $\triangle ABC$ во надворешноста на $\triangle ABC$ е конструиран квадрат $ABDE$. Докажи дека правата која го поврзува темето на правиот агол C со пресекот на дијагоналите на квадратот S е симетрала на правиот агол на $\triangle ABC$.

95. Во правоаголникот $ABCD$ точката E е подножје на нормалата повлечена од темето B кон дијагоналата AC. Ако точката M е средина на отсечката AE, а точката N е средина на страната CD, докажи дека $\measuredangle BMN = 90^\circ$.

96. Даден е паралелограм $ABCD, \overline{AB} > \overline{BC}$ и се повлечени симетралите на четирите негови внатрешни агли. Докажи дека четириаголникот ограничен со овие симетрали е правоаголник.

97. Даден е правоаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. На страната AB земена е точка M таква што симетралата ба $\measuredangle AMC$ минува низ точката D. Определи го $\measuredangle AMD$.

98. Нека E е средина на страната CD на квадратот $ABCD$. Точка M во внатрешноста на квадратот е таква што $\measuredangle MAB = \measuredangle MBC = \measuredangle BME = x$. Определи го x?

99. Во конвексен четириаголник $ABCD$ точките E, F, G се средини на страните AD, DC, AB, соодветно. Притоа $GE \perp AD, GF \perp CD$. Определи го аголот $\measuredangle ACB$.

100. Даден е паралелограм $ABCD$. Точката M е средина на CD и $BD \cap AM = \{N\}$. Пресметај $\overline{ND} : \overline{NB}$.

101. Даден е паралелограм $ABCD$. На дијагоналата BD земена е точка M таква што $\overline{BM} : \overline{MD} = 2:7$. Правата AM ја сече страната BC во точката N. Во кој однос точката N ја дели страната BC?

102. Должината на едната страна на правоаголникот се намалува за 20%, а должината на другата страна се зголемува за 20%. За колку проценти ќе се промени плоштината на правоаголникот?

103. а) Докажи, дека $\triangle ABC$ е рамнокрак со основа AB ако и само ако за секоја точка P од страната AB збирот од растојанијата до страните AC и BC не зависи од точката P.

б) Конвексниот четириаголник $ABCD$ е таков, што за секоја внатрешна точка P збирот од растојанијата до четирите негови страни е константен. Докажи дека $ABCD$ е паралелограм.

104. Должините на страните на еден правоаголник во сантиметри се изразени со природни броеви. Определи ги должините на страните на овој правоаголник ако мерниот број на неговата плоштина е еднаков на мерниот број на неговиот периметар.

105. Даден е правоаголник со должини на страни a и b. Ако a се продолжи за b и b се продолжи за a, се добива четириаголник со плоштина $100\,cm^2$. Определи го периметарот на добиениот четириаголник. Ако должините на страните почетниот правоаголник се целобројни, определи го правоаголникот со најмала плоштина.

106. Во внатрешноста на правоаголник P даден е помал правоаголник P'. Конструирај права s која множеството точки $P \setminus P'$ ќе го подели на два дела со еднакви плоштини.

107. Квадратот $ABCD$ со должина на страна a ротира за агол од 45° околу темето A така што темето B_1 на добиениот квадрат $AB_1C_1D_1$ се наоѓа во внатрешноста на дадениот квадрат. Нека правите BC и C_1D_1 се сечат во точката M. Определи ја плоштината на квадратот со страна AM.

108. Даден е квадрат $ABCD$ со страна $\overline{AB}=a$. На продолжението на страната AD преку темето D земена е точка E, а на продолжението на страната CB преку темето B земена е точка F така што $\overline{DE}=\overline{BF}=b$. Пресметај ги плоштината и периметарот на четириаголникот $DFBE$.

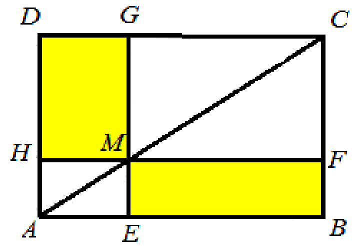
109. Разликата на периметрите на два квадрати е $24\,cm$, а должините на нивните страни се однесуваат како $3:2$. Определи ги плоштините на двата квадрата.

110. Нека отсечките AB и BC се заемно нормални и $\overline{AB}=\overline{BC}=a$. Нека K и L се средините на отсечките AB и BC, а K' и L' се нивните

осносиметрични слики во однос на правата AC како оска на симетрија, соодветно. Определи ја плоштината на шестаголникот $AKLCL'K'$.

111. За цифрата b важи $\overline{bbb}:(b\cdot b)=37$. Во правоаголен координатен систем се дадени точките $A\,(1,\,a),\ B\,(b,\,1)$ и $C\,(a+b+1,\,a-b+1)$, каде a е природен број поголем од b.
а) Изрази ја плоштината P_{ABC} на $\triangle ABC$ преку a.
б) Определи ја најмалата можна целобројна вредност на P_{ABC}.

112. На цртежот десно е даден правоаголник $ABCD$. Низ точката $M\in AC$ се повлечени прави паралелни на страните на правоаголникот кои страните AB, BC, CD, DA ги сечат во точките E, F, G, H, соодветно. Кој од обоените делови има поголема плоштина.



113. Околу правоаголник $ABCD$ со дијагонала со должина $20\,cm$ е опишана кружница. Страната CD на правоаголникот $ABCD$ е основа на рамнокрак триаголник чие трето теме се наоѓа на помалиот лак определен со тетивата CD на опишаната кружница околу правоаголникот $ABCD$. Плоштината на правоаголникот $ABCD$ е еднаква на плоштината на триаголникот DCE. Определи ја должината на страната AD.

114. Во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$ е дадена точка P таква што $\overline{AP}=5\,cm$, $\overline{BP}=10\,cm$ и $\overline{CP}=14\,cm$. Определи ја должината на отсечката DP.

115. Темето B на правоаголникот $ABCD$ е оддалечено од дијагоналата AC за $12\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот $ABCD$ ако $\overline{AC}=25\,cm$.

116. Даден е правоаголник $ABCD$, $\overline{AB}=20\,cm$. Должината на нормалата повлечена од темето B на дијагоналата AC е $12\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот $ABCD$.

117. Дијагоналата AC на правоаголникот $ABCD$ е за $2\,cm$ подолга од поголемата страна AB, а помалата страна е $\overline{BC}=10\,cm$.

Пресметај го растојанието од темето B до дијагоналата AC.

118. Должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се $\overline{AB}=3$ и $\overline{BC}=2$. Нека точките E и F се средини на страните AB и AD, соодветно. Нека G е пресекот на отсечките FC и DE, а H е пресекот на отсечките AC и DE. Определи ја плоштината на четириаголникот $AHGF$.

119. Даден е правоаголник $ABCD$. Точките P и Q припаѓаат на страните BC и CD, соодветно и важи $\measuredangle AQP=90^{\circ}$. На продолженијата на страните AD и CD преку точката D се земени точки M и N, соодветно за кои важи $\overline{DM}=\overline{CQ}$ и $\overline{DN}=\overline{CP}$.

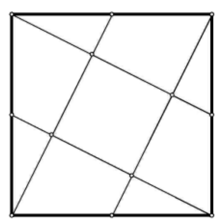
а) Докажи дека $P_{ABCD}=\overline{BP}\cdot\overline{DQ}+\overline{QP}\cdot\overline{AQ}$.

б) Докажи дека правите AQ и MN се паралелни.

120. Должините на страните AB и BC на правоаголникот $ABCD$ се 5 cm и 3 cm, соодветно. Пресекот на правата која минува низ точките B и C и симетралата на аголот $\measuredangle BAD$ е точката M, а пресекот на правата која ги содржи точките A и D и симетралата на аголот $\measuredangle BCD$ е точката N. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ANCM$.

121. Даден е $\triangle ABC$ со должината на страната AB е $24cm$ и должина на соодветната висина $18cm$. Во $\triangle ABC$ е впишан правоаголник $MNPQ$ така што темињата M и N припаѓаат на страната AB, темето P припаѓа на страната BC и темето Q припаѓа на страната AC. Определи ја плоштината на правоаголникот $MNPQ$ ако должината на една негова страна е еднаква на $12cm$.

122. Даден е квадрат со должина на страна $10cm$. Средината на секоја негова страна е поврзана со едно теме како што е прикажано на цртежот десно, со што во внатрешноста на квадратот е добиен четириаголник. Определи ја плоштината на овој четириаголоник.

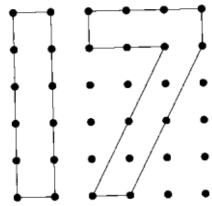


123. Даден е четириаголник $ABCD$. Точките M,N,P и Q се средини на страните AB,BC,CD и DA соодветно.

Ако отсечките MP и NQ се заемно нормални, докажи дека $\overline{AC}=\overline{BD}$.

124. Во паралелограмот $ABCD$ точките E и F се средини на спротивните страни AB и CD, соодветно. Докажи дека отсечките AE и FC ја делат дијагоналата BD на три еднакви дела.

125. Во квадратна мрежа од точки нацртан е број, при што должината на страната на квадратите е еднаква на a. Ако плоштината на цифрите е еднаква на $2028\,cm^2$, колкава е должината на страната a.

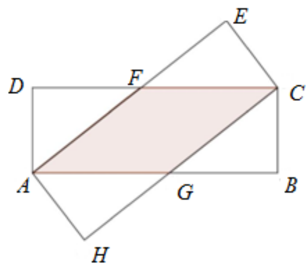


126. Висините на паралелограмот се $h_a=4\,cm$ и $h_b=6\,cm$, а неговиот периметар е еднаков на $60\,cm$. Определи ја плоштината на овој паралелограм.

127. Определи ги должините на страните на ромб со плоштина $480\,cm^2$, кај кој односот на должините на страната и едната дијагонала е $13:10$.

128. Даден е ромб $ABCD$. Низ темето D е повлечена права p паралелна на дијагоналата AC. На страната AD се наоѓа точка P за која важи $\overline{AP}:\overline{PD}=3:2$. Нека $p\cap CP=T$. Определи го односот на плоштините на триаголникот APT и ромбот $ABCD$.

129. Должините на страните два складни правоаголника кои се преклопуваат како на цртежот десно се $5\,cm$ и $12\,cm$. Определи ја плоштината на обоениот дел.



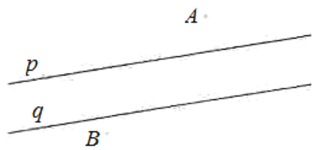
130. Даден е паралелограм $ABCD$, за кој точката S е пресек на неговите дијагонали. Периметарот на триаголникот CDS е за $5{,}6cm$ помал од периметарот на триаголникот BCS. Симетралата на аголот $\measuredangle BAD$ ја сече страната BC во точка M така што $\overline{BM}:\overline{BM}=7:4$.
Определи ја должината на страната и периметарот на паралелограмот $ABCD$.

131. Должините на страните на ромбоидот се $7\,cm$ и $4\,cm$. Определи го односот на плоштините на деловите на кои овој ромбоид е поделен со симетралата на еден негов внатрешен агол.

132. Определи ги должините на дијагоналите и плоштината на ромбоидот $ABCD$ ако $\overline{AB}=5\,cm$, $\overline{AD}=4\,cm$ и $\measuredangle BAD=30^\circ$.

133. Секоја од двете дијагонали на конвексниот четириаголник $ABCD$ ја дели неговата површина на два еднакви дела. Докажи дека овој четириаголник е паралелограм.

134. Дадени се две паралелни прави p и q и точки A и B како на цртежот десно. Нека A_1 е симетрина на A, а B_1 е симетрична на B во однос на правата p, па A_2 е симетрична на A_1, а B_2 е симетрична на B_1 во однос на правата q. Докажи дека отсечките AB_2 и BA_2 меѓусебно се половат.



135. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$ кој има два спротивни прави агли, при што две страни кои го зафаќаат едниот од нив се со еднаква должина и збирот на должините на другите две страни е еднаков на $10\,cm$.

136. Дадени се конвексен четириаголник $ABCD$ и паралелограм $DBCM$. Докажи дека плоштината на $\triangle ACM$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $ABCD$.

137. Определи ги аглите на трапезот со должини на страни $2\,cm, 2\,cm, 2\,cm$ и $4\,cm$.

138. Периметарот на еден рамнокрак трапез е $34\,cm$, а кракот е за $10\,cm$ пократок од поголемата основа. Дијагоналата AC е симетрала на аголот A. Пресметај ги должините на страните на трапезот.

139. Отсечката чии крајни точки се средините на дијагоналите на еден трапез, и разликата на должините на основите на тој трапез се однесуваат како $1:2$. Докажи!

140. Даден е правоаголник $ABCD$. На симетралата на страната AB, односно BC се наоѓаат точките E и G, односно F и H така што

$\overline{ES} = \overline{SH}$ и $\overline{FS} = \overline{SG}$, при што точката S е пресек на симетралите на страните AB и BC. Докажи дека четириаголникот $EFGH$ е рамностран трапез.

141. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со основи AB и CD, таков што $\overline{AB} = \overline{BC} = 2\overline{CD}$. Ако точката N е подножје на нормалата повлечена од темето A на кракот BC, тогаш $\overline{BN} : \overline{NC} = 1:3$. Докажи!

142. Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се сечат во точката O. Ако плоштината на триаголникот ADO е еднаква на плоштината на триаголникот BCO, тогаш четириаголникот $ABCD$ е трапез. Докажи!

143. Докажи дека средините на страните и подножјето на било која висина на разностран триаголник се темиња на рамнокрак трапез.

144. Нека a и b се должините на основите AB и CD, а c е должината на кракот на рамнокрак трапез $ABCD$, чии дијагонали се заемно нормални. Докажи дека $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

145. Даден е трапез со прав агол меѓу неговите краци. Докажи дека збирот на квадратите на дијагоналите на овој трапез е еднаков на збирот на квадратите на основите.

146. Во трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ симетралите на внатрешните агли во темињата A и D се сечат во точка која лежи на кракот $\overline{BC}$. Докажи дека $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

147. На кружницата последователно во насока на движењето на стрелката на часовникот се избрани точки A, B, C, D и E такви што
$$\measuredangle ABE = \measuredangle BEC = \measuredangle ECD = 45^\circ .$$
Докажи дека
$$\overline{AB}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CD}^2 . \qquad (1)$$

148. Нека X е произволна точка на отсечката $AB, \overline{AB} = d$. Нека C и D се точки на различни страни на правата AB и се такви што триаголниците AXD и XBC се рамнострани. Докажи дека четириаголникот $ACBD$ е рамнокрак трапез и определи ја неговата плоштина во зависност од d .

149. Околу кружница со радиус $5\,cm$ е опишан трапез со плоштина $120\,cm^2$. Определи го збирот на краците на овој трапез.

150. Даден е трапез со должини на основи $6\,cm$ и $10\,cm$. Со три паралелни прави подели го трапезот на четири дела со еднакви плоштини.

151. Во трапезот $ABCD$ дијагоналата AC е нормална на кракот BC и го полови аголот $\measuredangle BAD$. Определи ја плоштината на трапезот ако $\measuredangle ABC = 60^\circ$ и периметарот на трапезот е еднаков на $2\,m$.

152. Околу трапез со основи $a = 24\,cm$ и $b = 10\,cm$ е опишана кружница. Плоштината на трапезот е $P = 289\,cm^2$.

а) Докажи дека трапезот е рамнокрак.

б) Определи го радиусот на опишаната кружница околу трапезот.

в) Определи го аголот меѓу дијагоналата и основата на трапезот.

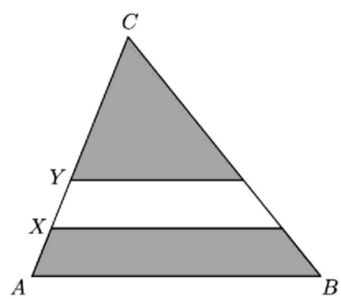
г) Определи го аголот меѓу дијагоналите на трапезот.

153. Даден е разностран триаголник ABC со ортоцентар H и центар на опишана кружница O. Нека правите CH и CO по втор пат ја сечат опишаната кружница во точките M и N, соодветно. Докажи дека точките A, B, M и N се темиња на рамнокрак трапез.

154. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголен трапез $ABCD$ со прав агол во темето A, пократка дијагонала $\overline{AC} = 5\,cm$, крак $\overline{BC} = 6\,cm$ и остар агол на трапезот $\measuredangle ABC = 30^\circ$.

155. Дијагоналата на рамнокрак трапез е долга $10\,cm$ и со поголемата основа формира агол од 45°. Пресметај ја плоштината на овој трапез.

156. Во $\triangle ABC$ во точките X и Y на страната AC се повлечени отсечки паралелни со страната AB (цртеж десно). Точката X ја дели страната AC на два дела така што $\overline{AX} : \overline{XC} = 1:4$. Ако плоштините на двата сиви делови на $\triangle ABC$ се еднакви, определи го односот $\overline{CY} : \overline{YA}$.



157. Дијагоналата на рамнокрак трпез има должина $6\,cm$ и со поголемата основа зафаќа агол од 45°. Определи ја плоштината на трапезот.

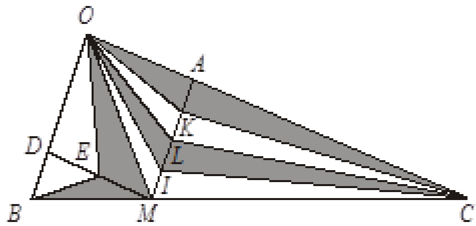
158. Трапезот $ABCD$ не е рамнокрак и дијагоналите $\overline{AC}=20\,cm$ и $\overline{BD}=15\,cm$ се сечат под прав агол. Определи ги плоштината и периметарот на трапезот $ABCD$ ако должината на поголемата основа е $\overline{AB}=21\,cm$.

159. Должината на поголемата основа на рамнокрак трапез е $44\,cm$, должината на кракот е $17\,cm$, а должината на дијагоналата е $39\,cm$. Пресметај ја плоштината на трапезот.

160. Аголот при основата на рамнокрак трапез е еднаков на 75°, а основите му се однесуваат како $2:1$. Ако должината на кракот е $10\,cm$, определи ја плоштината на дадениот трапез.

161. Даден е $\triangle ABC$ со плоштина $60\,cm^2$. Нека точките M и N на страните AB и BC, соодветно се такви што $\overline{AM}=2\overline{MB}$ и $\overline{BN}=\overline{NC}$ и нека P е пресечната точка на AN и CM. Определи ја плоштината на четириаголникот $MBNP$.

162. Градината на баба Милка има триаголна форма BCO, како што е прикажано на цртежот. Отсечките MA *и* MD са нормални соодветно на страните OC *и* OB. *Точката E е средината на отсечката MD, а точките I, L и K ја делат отсечката MA на еднакви делови.*



а) Ако $\overline{MI}=2{,}5m$, $\overline{MD}=10m$ *и* $\overline{OC}+\overline{OB}=51{,}4m$, *определи ја плоштината на градината на баба Милка.*

б) Во затемнетите делови OMBE, ICLO и KCO баба Милка одгледува овошје, а во другите делови на градината таа одгледува зеленчук. Што баба Милка одгледува на поголема површина, овошје или зеленчук.

163. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ со плоштина $1995\,cm^2$. На страната AB се земени точки M и N такви што $\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}$, а

на страната CD се земени точки P и Q такви што $\overline{CP}=\overline{PQ}=\overline{QD}$. Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.

V.4. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

164. Да се подели дадена отсечка со должина a на две отсечки, кои се пропорционални на две дадени отсечки со должини m и n.

165. Да се конструира отсечка, која е четврта геометриска пропорционала на три дадени отсечки.

166. Дадени се отсечки со должини a и b. Конструирај отсечка со должина $x=ab$.

167. Дадена е отсечка со должина a. Конструирај отсечка со должина $x=a^2$.

168. Конструирај рамнокрак триаголник кај кој должината на висината која соодветствува на основата е еднаква на $3cm$, а должината на висината која соодветствува на кракот е еднаква на $4cm$.

169. Конструирај правоаголен триаголник ABC за кој се познати должината на хипотенузата AB и должината на тежишната линија BB_1.

170. Дадени се три неколинеарни точки A,T и H. Конструирај $\triangle ABC$ за кој точката A е негово теме, точката T е негово тежиште и точката H е негов ортоцентар.

171. Дадена е точка C и прави p и q кои се сечат. Конструирај $\triangle ABC$ кај кој правата p е симетрала на внатрешниот агол при темето A, а правата q е симетрала на внатрешниот агол при темето B.

172. На основата BC на рамнокракиот остроаголен $\triangle ABC$ определи точка M таква што разликата на растојанијата од точката M до краците на $\triangle ABC$ е еднаква на половината од должината на кракот AB.

173. Дадена е кружница $k(O,r=3cm)$ и во нејзината внатрешност произволни точки M и N. Во дадената кружница впиши правоаголен три-

аголник ABC така што точката M ќе припаѓа на катетата AC, а точката N ќе припаѓа на катетата BC.

174. Конструирај триаголник со зададени тежишни линии t_a, t_b и t_c.

175. Дадена е кружница k, точка A на кружницата k и точка B надвор од кружницата k. Конструирај кружница која минува низ точката B и ја допира кружницата k во точката A.

176. Конструирај триаголник ABC, ако се дадени $a+b+c, \alpha$ и β.

177. Најди геометриско место на точки од кои отсечката AB се гледа под даден агол α.

178. Конструирај тангента на кружница $k(O,r)$ што минува низ дадена точка T.

179. Конструирај триаголник зададен со R, γ, h_a.

180. Конструирај триаголник зададен со c, h_a, h_b.

181. Даден е рамностран триаголник со должина на страна a. Конструирај рамностран триаголник чија плоштина е трипати поголема од плоштината на дадениот триаголник.

182. Дадени се два квадрата со должини на страни $3cm$ и $5cm$. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на дадените квадрати.

183. Конструирај квадрат со плоштина $20\,cm^2$.

184. Конструирај квадрат со плоштина $6\,cm^2$.

185. Даден е квадрат со страна a. Конструирај квадрат чија плоштина е три пати поголема од плоштината на дадениот квадрат.

186. Дадени се три квадрати со должини на страни $1cm, 2cm$ и $3cm$. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на дадените квадрати.

187. Најдолгата дијагонала на правилен многуаголник со парен број страни формира со страната на тој многуаголник агол од $67^\circ 30'$. Конструи-

рај го овој многуаголник така што должината на неговата најголема дијагонала е $4cm$.

188. Дадена е кружница k и точка P во рамнината на кружницата. Конструирај права p која минува низ точката P и кружницата k ја сече во точки A и B такви што збирот $\overline{PA}+\overline{PB}$ е најголем.

189. Конструирај квадрат зададен со збирот $a+d$ од страната a и дијагоналата d

190. Конструирај правоаголник зададен со $a, b+d$.

191. Конструирај рамнокрак трапез зададен со a, b, c.

192. Конструирај трапез зададен со a, b, c и h.

193. Конструирај трапез зададен со основите a, b и дијагоналите d_1, d_2.

194. Конструирај делтоид ако се дадени неговите дијагонали и една страна.

195. Местата A и B се наоѓаат на различни страни од канал со паралелни брегови p и q. Каде треба да се изгради мост на каналот (нормално поставен на бреговите), така што патот меѓу A и B да биде најкус.

196. Да се конструира кружница која минува низ дадена точка и допира две паралелни прави.

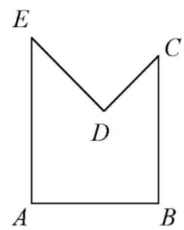
V.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

197. За петаголникот $ABCDE$ прикажан на цртежот десно е исполнето

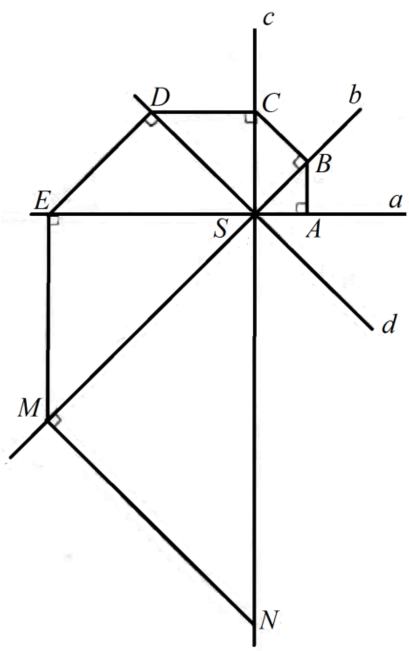
$$\overline{AE}=13\,cm, \overline{BC}=7\,cm, \overline{ED}=8\,cm,$$

$$\overline{CD}=6\,cm \text{ и } \measuredangle EAb=\measuredangle ABC=\measuredangle CDE=90^\circ.$$

Определи го периметарот на петаголникот $ABCDE$.



198. Дадени се две заемно нормални прави a и c кои се сечат во точката S. Нека b и d се симетралите на аглите кои ги зафаќаат правите a и c. На правата a избираме точка A таква што $\overline{SA}=2$. Во точката A повлекуваме нормала на a и со B да го означиме нејзиниот пресек со правата b. Нека C е пресекот на нормалата на b во точката B и правата c, D е пресекот на нормалата на c во точката C и правата d, E е пресекот на нормалата на d во точката D и правата a, M е пресек на нормалата на a во точката E и правата b и N е пресек на нормалата на b во точката M и правата c. Пресметај ја плоштината на многуаголникот $SABCDEMN$.



199. Колку страни има конвексен многуаглник кај кој сите внатрешни агли се еднакви, ако збирот на сите надворешни агли на тој многуаголник и два негови внатрешни агли е еднаков на 672°?

200. Даден е правоаголник $ABCD$ во кој точката S е пресек на неговите дијагонали. На страната AD земени се точки E и F такви што $\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FB}$. Определи го односот на плоштините на петаголникот $EBSCF$ и правоаголникот $ABCD$.

201. Даден е рамностран $\triangle ABC$ со должина на страна a. Во надворешноста на триаголникот над неговите страни се конструирани квадрати $ABNM, BCQP$ и $ACRS$. Определи ги периметарот и плоштината на шестаголникот $MNPQRS$.

202. Даден е правоаголен триаголник ABC, $\measuredangle C=90^\circ$, $\overline{BC}=a$ и $\overline{AC}=b$. Над страните на триаголникот, надвор од него, се конструирани квадрати $ACMN$, $ABQP$ и $BCSR$. Определи ја плоштината на шестаголникот $MNPQES$ во функција од a и b.

203. Правоаголен триаголник има хипотенуза со должина $5cm$ и висина повлечена кон хипотенузата $2,4cm$. Познато е дека мерните броеви на катетите на триаголникот изразени во сантиметри се природни броеви. Над страните на триаголникот, во неговата надворешност се нацртани три квадрати. Определи ги плоштината и периметарот на добиената фигура.

204. Околу кружница со дијаметар $3\frac{1}{5}cm$ е опишан седумаголник (страните на седумаголникот ја допираат кружницата). Плоштината на седумаголникот е еднаква на $20cm^2$. Определи го периметарот на седумаголникот.

205. Симетралата на внатрешниот агол на триаголникот ја дели спротивната страна на две отсечки. Докажи дека секоја од овие отсечки е пократка од нејзината соседна страна.

206. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со основа AB и висна CD. Ако M е произволна точка од кракот BC, докажи дека разликата на отсечките CA и CM е поголема од разликата на отсечките DA и DM.

207. Даден е $\triangle ABC$. На симетралата на надворешниот агол кај темето C избрана е произволна точка M. Докажи дека
$$\overline{MA}+\overline{MB}>\overline{AC}+\overline{BC}.$$

208. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ е земена произволна точка M. Докажи:
а) $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$,
б) $\overline{AM}+\overline{MB}<\overline{AC}+\overline{CB}$.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I АЛГЕБРА

I.1. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

1. Определи ја вредноста на дропката $\frac{A\cdot R\cdot H\cdot I\cdot M\cdot E\cdot D}{E\cdot V\cdot K\cdot L\cdot I\cdot D}$ во која на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

   Решение. Во дадената дропка имаме 10 различни цифри и тоа: $A, R, H, I, M, E, D, V, K, L$, па затоа една од цифрите мора да е 0. Јасно, за да дропката биде дефинирана цифрата 0 не смее да е множител во именителот, што значи дека таа е множител во броителот, од каде следува дека вредноста на дропката е 0.

2. На која цифра завршува бројот $1^{1996}+2^{1996}+3^{1996}+...+1996^{1996}$?

   Решение. Секој парен број n степенуван на 4-ти степен, па и на 1996-ти степен завршува на цифрата 6 (ако n не завршува на 0) или на цифрата 0 (ако n завршува на 0). Секој непарен број n степенуван на 4-ти степен, па и на 1996-ти степен завршува на цифрата 1 (ако n не завршува на цифрата 5) или на цифрата 5 (ако n завршувана цифрата 5). Затоа бројот $1^{1996}+2^{1996}+3^{1996}+...+1996^{1996}$ завршува на иста цифра како и бројот $200\cdot 5+(998-200)\cdot 1+199\cdot 0+(998-199)\cdot 6$, т.е. на цифрата 2.

3. Определи ја 2018-тата цифра после запирката во децималниот запис на бројот $\frac{21}{37}$.

   Решение. Со елементарна пресметка добиваме дека $\frac{21}{37}=0,(567)$ (заградите значат периода). Понатаму, $2018=3\cdot 672+2$, па затоа 2018-тата цифра после децималната запирка во записот на бројот $\frac{21}{37}$ е втората цифра од периодата, т.е. тоа е цифрата 6.

4. Рационалниот број 0,12121212... запиши го во вид на дропка.

   Решение. Нека $x=0,12121212...$. Тогаш $100x=12,121212...$, па затоа $100x-x=12$, од каде добиваме $99x=12$, односно $x=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$.

5. Дадени се изразите

$$S_{2015}=1-2+3-4+5-...-2014+2015 \text{ и}$$
$$S_{2016}=1-2+3-4+5-...-2014+2015-2016.$$

Определи го збирот $S_{2015}+S_{2016}$.

Решение. Имаме

$$S_{2015}=(1-2)+(3-4)+...+(2013-2014)+2015$$
$$=(2014:2)\cdot(-1)+2015=-1007+2015=1008,$$
$$S_{2016}=(1-2)+(3-4)+...+(2013-2014)+(2015-2016)$$
$$=(2016:2)\cdot(-1)=-1008,$$

па затоа $S_{2016}+S_{2015}=-1008+1008=0$.

6. Докажи дека бројот $1991\cdot1992\cdot1993\cdot1994+1$ е точен квадрат.

Решение. Имаме:

$$1991\cdot1992\cdot1993\cdot1994+1=(1993-2)\cdot(1993+1)\cdot1993\cdot(1993-1)+1$$
$$=(1993^2-1993-2)(1993^2-1993)+1$$
$$=(1993^2-1993)^2-2(1993^2-1993)+1$$
$$=(1993^2-1993-1)^2=(1993^2-1994)^2.$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот: $\frac{4^{13}-4^{12}-6\cdot4^{10}}{2^{19}+2^{17}+2^{15}}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{4^{13}-4^{12}-6\cdot4^{10}}{2^{19}+2^{17}+2^{15}}=\frac{4^{10}\cdot(4^3-4^2-6)}{2^{15}\cdot(2^4+2^2+1)}=\frac{2^{20}\cdot(64-16-6)}{2^5\cdot(16+4+1)}=\frac{2^5\cdot42}{21}=2^6=64.$$

8. а) Определи ги броевите A,B,C, ако

$$A=\frac{(3^{30}+3^{30}+3^{30})(3^3+3^3+3^3)(3+3+3+2)^{33}}{33^{33}},\ B=33\tfrac{1}{3}\% \text{ од } A \text{ и}$$
$$C=-(-1)^{10}\cdot2^2-4^2\cdot(\tfrac{1}{2})^3+8^3\cdot(-0,25)^4$$

б) Пресметај $D=[(3^{-2}A+2C)B+8]:C$.

в) Подреди ги броевите A,B,C и D по големина.

Решение. а) Имаме:

$$A=\frac{(3^{30}+3^{30}+3^{30})(3^3+3^3+3^3)(3+3+3+2)^{33}}{33^{33}}=\frac{3\cdot3^{30}\cdot3\cdot3^3\cdot11^{33}}{3^{33}\cdot11^{33}}=9,$$
$$B=33\tfrac{1}{3}\%A=\tfrac{100}{3}\%A=\tfrac{100}{3}\cdot\tfrac{1}{100}\cdot9=3 \text{ и}$$

$$C=-(-1)^{10}\cdot 2^2-4^2\cdot(\tfrac{1}{2})^3+8^3\cdot(-0,25)^4$$
$$=-4-16\cdot\tfrac{1}{8}+\frac{8^3}{4^4}=-4-2+2=-4.$$

б) Значи,

$$D=[(3^{-2}A+2C)B+8]:C=[(\tfrac{1}{9}\cdot 9+2\cdot(-4))\cdot 3+8]:(-4)$$
$$=[(1-8)\cdot 3+8]:(-4)=(-21+8):(-4)=3,25.$$

в) Имаме $A>D>B>C$.

9. Докажи дека $(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$ е рационален број.

Решение. Имаме:

$$(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2})^2-1^2=2-1=1,$$

па дадениот број е природен, што значи дека е рационален.

10. Докажи дека вредноста на изразот $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ е природен број.

Решение. Имаме

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}+\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}$$
$$=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$$
$$=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4,$$

што и требаше да се докаже.

11. Докажи дека $A=(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$ е рационален број.

Решение. Имаме

$$\sqrt{10}-\sqrt{6}=\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})=\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{8-2\sqrt{15}}=2\sqrt{4-\sqrt{15}}.$$

Затоа,

$$A=(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$$
$$=2(4+\sqrt{15})\sqrt{4-\sqrt{15}}\sqrt{4-\sqrt{15}}$$
$$=2(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})=2(16-15)=2.$$

12. Дали бројот $\sqrt{0,\overline{04}}$ е рационален?

Решение. Нека $x=\sqrt{0,\overline{04}}$. Имаме

$$x^2 = 0,\overline{04} = 0,040404...$$
$$100x^2 = 4,040404...$$
$$100x^2 = 4 + 0,040404...$$
$$100x^2 = 4 + x^2$$
$$99x^2 = 4$$
$$x = \sqrt{\tfrac{4}{99}} = \tfrac{2}{3\sqrt{11}} = \tfrac{2\sqrt{11}}{33}.$$

Бидејќи $\sqrt{11}$ е ирационален број заклучуваме дека $x = \sqrt{0,\overline{04}}$ е ирационален број.

13. Ако a и b се рационални броеви такви што $a + b\sqrt{2} = 0$, тогаш $a = b = 0$. Докажи.

Решение. Нека $a + b\sqrt{2} = 0$. Ако $b \neq 0$, тогаш $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$, што е противречност бидејќи $-\frac{a}{b}$ е рационален, а $\sqrt{2}$ е ирационален број. Според тоа, $b = 0$, па затоа $a = -0 \cdot \sqrt{2} = 0$.

14. Ако a, b, c и $\frac{a-b\sqrt{2017}}{b-c\sqrt{2017}}$ се рационални броеви, докажи дека $b^2 = ac$.

Решение. Ако $\frac{a-b\sqrt{2017}}{b-c\sqrt{2017}} = r$, $r \in \mathbb{Q}$, тогаш $a - b\sqrt{2017} = (b - c\sqrt{2017})r$, па затоа $a - rb = (b - rc)\sqrt{2017}$. Но, $\sqrt{2017}$ е ирационален број, па затоа $a - rb = b - rc = 0$, односно $\frac{a}{b} = r = \frac{b}{c}$, од каде добиваме $b^2 = ac$.

15. Определи го реалниот број $a\,(1 < a < 10)$ и природниот број k за кои е исполнето равенството
$$17 \cdot 10^{33} + 26 \cdot 10^{32} - 74 \cdot 10^{31} = a \cdot 10^k.$$

Решение. Имаме
$$17 \cdot 10^{33} + 26 \cdot 10^{32} - 74 \cdot 10^{31} = a \cdot 10^k$$
$$10^{34} \cdot (1,7 + 0,26 - 0,074) = a \cdot 10^k$$
$$1,886 \cdot 10^{34} = a \cdot 10^k,$$
од каде добиваме $a = 1,886$ и $k = 34$.

16. Нека аритметичката средина на броевите x, y, z, p, q е еднаква на a. Определи ја аритметичката средина на броевите

$$x+y-3, y+2z-1, z+2p, p+2q+1, q+2x+3.$$

Решение. Имаме $\frac{x+y+z+p+q}{5}=a$, па затоа

$$\frac{x+y-3+y+2z-1+z+2p+p+2q+1+q+2x+3}{5}=\frac{3(x+y+z+p+q)}{5}=3\cdot\frac{x+y+z+p+q}{5}=3a.$$

17. Аритметичката средина на пет податоци е еднаква на 18. Определи ја аритметичката средина на преостанатите податоци откако ќе го отстраниме податокот чија вредност е 10.

Решение. Имаме $\frac{a+b+c+d+e}{5}=18$, т.е. $a+b+c+d+e=90$. Едниот податок е еднаков на 10, на пример $e=10$, па затоа $a+b+c+d+10=90$, т.е. $a+b+c+d=80$. Конечно, бараната аритметичка средина е $\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{80}{4}=20$.

18. Нека

$$w=\sqrt{1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}-\sqrt{1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}.$$

Докажи, дека $w=\sqrt{3}-1$.

Решение. Од $\sqrt{1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}>\sqrt{1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}$ следува $w>0$. Ставаме $a=\sqrt{1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}$ и $b=\sqrt{1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}$ и добиваме

$$a^2=1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}} \text{ и } b^2=1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}.$$

Според тоа, $a^2+b^2=2$. Од друга страна

$$\begin{aligned}ab&=\sqrt{1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}\\&=\sqrt{1^2-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}^2}=\sqrt{1-(-3+2\sqrt{3})}\\&=\sqrt{1-2\sqrt{3}+3}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1.\end{aligned}$$

Затоа

$$\begin{aligned}w^2&=(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=2-2(\sqrt{3}-1)\\&=3-2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}-1)^2\end{aligned}$$

и бидејќи $w>0$ добиваме $w=\sqrt{3}-1$.

19. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\{(\tfrac{11}{2}:\tfrac{33}{4}+2):[\tfrac{9}{5}-\tfrac{5}{8}:(1-\tfrac{3}{8})]\}\cdot(1-0,9)+(1-0,9):\tfrac{3}{10}.$$

Решение. Имаме

$$\{(\tfrac{11}{2}:\tfrac{33}{4}+2):[\tfrac{9}{5}-\tfrac{5}{8}:(1-\tfrac{3}{8})]\}\cdot(1-0,9)+(1-0,9):\tfrac{3}{10}=$$
$$=\{(\tfrac{11}{2}\cdot\tfrac{4}{33}+2):[\tfrac{9}{5}-\tfrac{5}{8}:\tfrac{5}{8}]\}\cdot\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{10}:\tfrac{3}{10}$$
$$=\{(\tfrac{2}{3}+2):[\tfrac{9}{5}-1]\}\cdot\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{10}{3}$$
$$=(\tfrac{8}{3}:\tfrac{4}{5})\cdot\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{3}=(\tfrac{8}{3}\cdot\tfrac{5}{4})\cdot\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{3}$$
$$=\tfrac{10}{3}\cdot\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}=\tfrac{2}{3}.$$

20. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{(1,2:36+1\frac{1}{5}:0,25-1\frac{5}{6})\cdot 1\frac{1}{4}}{[(7-6,35):6,5+9,9]\cdot\frac{1}{12,8}}:0,125.$$

Решение. Имаме

$$\frac{(1,2:36+1\frac{1}{5}:0,25-1\frac{5}{6})\cdot 1\frac{1}{4}}{[(7-6,35):6,5+9,9]\cdot\frac{1}{12,8}}:0,125=\frac{(\frac{12}{10}\cdot\frac{1}{36}+\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}-\frac{11}{6})\cdot\frac{5}{4}}{(0,65:6,5+9,9)\cdot\frac{1}{12,8}}:\frac{1}{8}=\frac{(\frac{1}{30}+\frac{6}{5}\cdot 4-\frac{11}{6})\cdot\frac{5}{4}}{(0,1+9,9)\cdot\frac{1}{12,8}}:\frac{1}{8}$$
$$=\frac{(\frac{1}{30}+\frac{24}{5}-\frac{11}{6})\cdot\frac{5}{4}}{10\cdot\frac{1}{12,8}}:\frac{1}{8}=\frac{\frac{1+144-55}{30}\cdot\frac{5}{4}}{10\cdot\frac{10}{128}}:\frac{1}{8}=\frac{3\cdot\frac{5}{4}}{\frac{25}{32}}\cdot 8$$
$$=\frac{192}{5}=38,4.$$

21. Определи ја вредноста на изразот

$$\frac{(1\frac{3}{25}-1,87)\cdot 1,2-1,25:1\frac{7}{18}}{1,4:0,01-50}.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{(1\frac{3}{25}-1,87)\cdot 1,2-1,25:1\frac{7}{18}}{1,4:0,01-50}=\frac{-0,75\cdot 1,2-\frac{125}{100}\cdot\frac{18}{25}}{140-50}=\frac{-0,9-0,9}{90}=-\frac{1,8}{90}=-0,02.$$

22. Ако $a=4$ и $b=0,25$, определи ја вредноста на изразот $a^{2018}\cdot b^{2020}$.

Решение. Имаме

$$a^{2018}\cdot b^{2020}=4^{2018}\cdot 0,25^{2020}=4^{2018}\cdot(\tfrac{1}{4})^{2020}=4^{2018}\cdot\tfrac{1}{4^{2020}}=\tfrac{1}{4^2}=\tfrac{1}{16}.$$

23. Определи ја вредноста на изразот

$$\sqrt{0,1}\cdot\sqrt{0,9}-\sqrt{2-0,56}+\frac{\sqrt{0,12}}{\sqrt{3}}.$$

Решение. Имаме:

$$\sqrt{0,1}\cdot\sqrt{0,9}-\sqrt{2-0,56}+\frac{\sqrt{0,12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{0,1\cdot 0,9}-\sqrt{1,44}+\sqrt{0,04}$$
$$=\sqrt{0,3^2}-\sqrt{1,2^2}+\sqrt{0,2^2}$$

$$=0,3-1,2+0,2=-0,7.$$

24. Докажи дека изразот

$$27a^3-(3a-2)(9a^2+6a+4)$$

не зависи од a.

Решение. Имаме

$$27a^3-(3a-2)(9a^2+6a+4)=27a^3-(27a^3+18a^2+12a-18a^2-12a-8)$$
$$=27a^3-27a^3+8=8$$

што значи дека дадениот израз не зависи од a.

25. При делење на полиномот a^4+b^4+1, делителот е еднаков на количникот, а остатокот е еднаков на $2a^2+2b^2-2a^2b^2$. Определи го количникот.

Решение. Ако P е количникот, т.е. делителот, тогаш

$$a^4+b^4+1=P^2+2a^2+2b^2-2a^2b^2$$
$$P^2=a^4+b^4+1-2a^2-2b^2+2a^2b^2$$
$$P^2=(a^2+b^2-1)^2$$

па затоа $P=a^2+b^2-1$ или $P=1-a^2-b^2$.

26. Упрости го изразот

$$\frac{8ab-(a+2b)^2}{3a^2-12b^2}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{8ab-(a+2b)^2}{3a^2-12b^2}=\frac{8ab-(a^2+4ab+4b^2)}{3(a^2-4b^2)}=\frac{-a^2+4ab-4b^2}{3(a-2b)(a+2b)}$$
$$=\frac{-(a^2-4ab+4b^2)}{3(a-2b)(a+2b)}=-\frac{(a-2b)^2}{3(a-2b)(a+2b)}.$$
$$=-\frac{a-2b}{3(a+2b)}=\frac{2b-a}{2(2b+a)}.$$

I.2. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

27. Од равенката

$$\frac{5x+2}{3}+\frac{1}{5}(1-4x)=\frac{2y-3x}{3}$$

изрази ја променливата y со помош на променливата x.

Решение. Последователно добиваме

$$\frac{5x+2}{3}+\frac{1}{5}(1-4x)=\frac{2y-3x}{3}$$

$$\frac{5x+2}{3}+\frac{1-4x}{5}=\frac{2y-3x}{3} \qquad /\cdot 15$$

$$5(5x+2)+3(1-4x)=5(2y-3x)$$

$$25x+10+3-12x=10y-15x$$

$$10y=28x+13 \qquad /:10$$

$$y=\frac{28}{10}x+\frac{13}{10}.$$

28. Реши ја равенката

$$\frac{8x+13}{3}=\frac{19-12x}{2}-(16x-\frac{7-4x}{6}).$$

Решение. Имаме:

$$\frac{8x+13}{3}=\frac{19-12x}{2}-(16x-\frac{7-4x}{6})$$

$$\frac{8x+13}{3}=\frac{19-12x}{2}-16x+\frac{7-4x}{6}$$

$$2(8x+13)=3(19-12x)-96x+7-4x$$

$$16x+26=57-36x-96x+7-4x$$

$$16x+36x+96x+4x=57+7-26$$

$$152x=38$$

$$x=\frac{38}{152}=\frac{1}{4}.$$

29. Реши ја равенката

$$\frac{5}{8}:(0,4-2-\frac{1}{2}x)=1,25:(3,8-2\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}).$$

Решение. Имаме

$$\frac{5}{8}:(0,4-2-\frac{1}{2}x)=1,25:(3,8-2\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})$$

$$\frac{5}{8}\cdot(3,8-2\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})=1,25\cdot(0,4-2-\frac{1}{2}x)$$

$$\frac{5}{8}\cdot(\frac{19}{5}-\frac{9x}{4}+\frac{1}{2})=\frac{5}{4}\cdot(\frac{2}{5}-2-\frac{1}{2}x)$$

$$\frac{19}{8}-\frac{45x}{32}+\frac{5}{16}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}-\frac{5x}{8}$$

$$76-45x+10=16-80-20x$$

$$-25x=-150$$

$$x=6.$$

30. Реши ја равенката

$$\tfrac{1}{5}(2+x)+\tfrac{3(4+x)}{7}=\tfrac{7}{5}(8-x)-\tfrac{3(5x-1)}{14}.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\tfrac{1}{5}(2+x)+\tfrac{3(4+x)}{7}=\tfrac{7}{5}(8-x)-\tfrac{3(5x-1)}{14}$$
$$\tfrac{2}{5}+\tfrac{x}{5}+\tfrac{12+3x}{7}=\tfrac{56}{5}-\tfrac{7x}{5}-\tfrac{15x-3}{14}$$
$$28+14x+120+30x=784-98x-75x+15$$
$$148+44x=799-173$$
$$217x=651$$
$$x=3.$$

31. Реши ја равенката

$$3{,}8-(0{,}8-4{,}5x)=(1\tfrac{2}{5}+3{,}5:1\tfrac{1}{4}):2\tfrac{2}{5}+3{,}4:1\tfrac{8}{9}+2{,}4x-0{,}35+1{,}5x.$$

Решение. Имаме

$$3{,}8-(0{,}8-4{,}5x)=(1\tfrac{2}{5}+3{,}5:1\tfrac{1}{4}):2\tfrac{2}{5}+3{,}4:1\tfrac{8}{9}+2{,}4x-0{,}35+1{,}5x,$$
$$3{,}8-0{,}8+4{,}5x=(1\tfrac{2}{5}+2\tfrac{4}{5}):2\tfrac{2}{5}+1\tfrac{4}{5}+2{,}4x-0{,}35+1{,}5x,$$
$$3+4{,}5x=4\tfrac{1}{5}:2\tfrac{2}{5}+1\tfrac{4}{5}+3{,}9x-0{,}35,$$
$$3+4{,}5x=1\tfrac{3}{4}+1\tfrac{4}{5}+3{,}9x-0{,}35,$$
$$3+4{,}5x=3{,}2+3{,}9x,$$
$$x=\tfrac{1}{3}.$$

32. Реши ја равенката

$$(\tfrac{31}{3}+\tfrac{12}{5}:4{,}5):(\tfrac{4}{5}:0{,}2+\tfrac{2}{1{,}2})=(5x):(\tfrac{172}{6}+\tfrac{19}{3}).$$

Решение. Имаме:

$$(\tfrac{31}{3}+\tfrac{12}{5}:4{,}5):(\tfrac{4}{5}:0{,}2+\tfrac{2}{1{,}2})=(5x):(\tfrac{172}{6}+\tfrac{19}{3})$$
$$(\tfrac{31}{3}+\tfrac{12}{5}:\tfrac{9}{2}):(\tfrac{4}{5}:\tfrac{2}{10}+\tfrac{20}{12})=(5x):\tfrac{172+38}{6}$$
$$(\tfrac{31}{3}+\tfrac{12}{5}\cdot\tfrac{2}{9}):(\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{10}{2}+\tfrac{5}{3})=(5x):\tfrac{210}{6}$$
$$(\tfrac{31}{3}+\tfrac{8}{15}):(4+\tfrac{5}{3})=(5x):35$$
$$\tfrac{155+8}{15}:\tfrac{17}{3}=x:7$$
$$x=7\cdot\tfrac{163}{15}\cdot\tfrac{3}{17}$$
$$x=\tfrac{1141}{85}.$$

33. Реши ја равенката

$$\frac{(4–3,5(2\frac{1}{7}–1\frac{1}{5}):0,16}{x}=\frac{5\frac{3}{7}–\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{16}}{41\frac{23}{84}–10\frac{49}{60}}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{(4–3,5(2\frac{1}{7}–1\frac{1}{5})):0,16}{x}=\frac{5\frac{3}{7}–\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{16}}{41\frac{23}{84}–40\frac{49}{60}}$$

$$\frac{(4–\frac{7}{2}\cdot\frac{33}{35})\cdot\frac{25}{4}}{x}=\frac{\frac{38}{7}–\frac{3}{14}\cdot 16}{1–\frac{19}{35}}$$

$$\frac{(4–\frac{33}{10})\cdot\frac{25}{4}}{x}=\frac{\frac{38}{7}–\frac{24}{7}}{\frac{16}{35}}$$

$$\frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{25}{4}}{x}=\frac{2}{\frac{16}{35}}$$

$$\frac{\frac{35}{8}}{x}=\frac{35}{8}$$

$$x=1.$$

34. Реши ја равенката

$$\frac{\frac{23}{3}+\frac{39}{2}:4,5}{\frac{3}{5}:0,1+4,2}=\frac{2x}{\frac{21}{6}+\frac{61}{2}}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{\frac{23}{3}+\frac{39}{2}:4,5}{\frac{3}{5}:0,1+4,2}=\frac{2x}{\frac{21}{6}+\frac{61}{2}}$$

$$\frac{\frac{23}{3}+\frac{39}{2}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{3}{5}\cdot 10+\frac{21}{5}}=\frac{2x}{\frac{21}{6}+\frac{183}{6}}$$

$$\frac{12}{\frac{51}{5}}=\frac{2x}{34}$$

$$x=20.$$

35. Реши ја равенката

$$\frac{\frac{\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2}{3}+2}{3}=1.$$

Решение. Имаме

$\frac{\frac{\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2}{3}+2}{3}+2=3$, т.е. $\frac{\frac{\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2}{3}+2}{3}=1$, па затоа $\frac{\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2}{3}+2=3$, т.е. $\frac{\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2}{3}=1$.

Понатаму, $\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2=3$, т.е. $\frac{\frac{x}{3}+2}{3}=1$, па затоа $\frac{x}{3}+2=3$, т.е. $\frac{x}{3}=1$, од каде добиваме $x=3$.

36. Реши ја равенката:

$$\frac{\sqrt{8}}{x}=(\sqrt{288}-\sqrt{98})(\sqrt{0,02}+\sqrt{4\tfrac{1}{2}}).$$

Решение. Имаме:

$$\frac{\sqrt{8}}{x}=(\sqrt{288}-\sqrt{98})(\sqrt{0,02}+\sqrt{4\tfrac{1}{2}})$$
$$\frac{2\sqrt{2}}{x}=(\sqrt{2\cdot 144}-\sqrt{2\cdot 49})(\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{3}{\sqrt{2}})$$
$$\frac{2\sqrt{2}}{x}=(12\sqrt{2}-7\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{3\sqrt{2}}{2})$$
$$\frac{2}{x}=(12-7)(\frac{1}{10}+\frac{3}{2})\sqrt{2}$$
$$\frac{1}{x}=4\sqrt{2}$$
$$x=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

37. Марко при решавањето на равенката

$$\frac{5x-3}{2}-\frac{3x-5}{4}=5$$

наместо коефициентот 3 пред x во втората дропка запишал некој друг број и на тој начин добил за 18 поголема вредност на непознатата x од нејзината вистинска вредност. Кој број Марко го запишал наместо коефициентот 3?

Решение. Решение на дадената равенка е $x=3$. Со a да го означиме бројот кој Марко во втората дропка го запишал наместо коефициентот 3. Значи, Марко ја решавал равенката

$$\frac{5x-3}{2}-\frac{ax-5}{4}=5$$

и добил решение кое е за 18 поголемо од вистинското решение, т.е. добил решение $18+3=21$. Според тоа, мора да важи

$$\frac{5\cdot 21-3}{2}-\frac{21a-5}{4}=5.$$

Решение на последната равенка е $a=9$, што значи дека наместо коефициентот 3 Марко запишал коефициент 9.

38. Определи го најмалиот природен број чија вредност може да ја има параметарот k за да решението x на равенката

$$5(2x-3k)+5k=4(x-8)+k$$

е позитивно. Определи го ова решение за најдената вредност на k .

Решение. Дадена равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$10x-15k+5k=4x-32+k$$
$$10x-4x=15k-5k+k-32$$
$$6x=11k-32$$
$$x=\frac{11k-32}{6}.$$

Од условот $x>0$ следува $11k-32>0$, односно $k>\frac{32}{11}$. Но, $\frac{32}{11}=2\frac{10}{11}$, па затоа решение на задачата е $k=3$ и бараното решение е $x=\frac{11\cdot 3-32}{6}=\frac{1}{6}$.

39. Реши ја равенката: $(1-x)^2-4=21$.

Решение. Од $(1-x)^2-4=21$ следува $(1-x)^2=25$, т.е. $|1-x|=5$. Тоа значи $1-x=5$ од каде добиваме $x=-4$ или $1-x=-5$ од каде добиваме $x=6$.

40. Реши ја равенката

$$||x-1|-6|=2.$$

Решение. Од дефиницијата на апсолутната вредност следува дека треба да разгледуваме два случаја.

1) Ако $|x-1|-6\geq 0$, тогаш почетната равенката го добива обликот $|x-1|-6=2$, т.е. $|x-1|=8$. Сега повторно имаме два случаја:

а) Ако $x-1\geq 0$, тогаш равенката $|x-1|=8$ го добива обликот $x-1=8$, па $x=9$ е едно решение на почетната равенка.

б) Ако $x-1<0$, тогаш равенката $|x-1|=8$ го добива обликот $x-1=-8$, па $x=-7$ е второ решение на почетната равенка.

2) Ако $|x-1|-6<0$, тогаш почетната равенката го добива обликот $|x-1|-6=-2$, т.е. $|x-1|=4$. Сега повторно имаме два случаја:

а) Ако $x-1\geq 0$, равенката $|x-1|=4$ го прима обликот $x-1=4$, па $x=3$ е трето решение на почетната равенка.

б) Ако $x-1<0$, равенката $|x-1|=4$ го прима обликот $x-1=-4$, па $x=-3$ е четврто решение на почетната равенка.

41. Определи ги сите вредности на параметарот k, за кои решенијата на равенката $|3x+5|=|3-x|$ се решенија на равенката

$$(kx-1)(x+|x|+k)=0.$$

Решение. Имаме

$$|3x+5|=|3-x| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5=3-x \\ 3x+5=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=-2 \\ 2x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=-4 \end{cases}.$$

Ако $x_1=-\frac{1}{2}$, за втората равенка имаме

$$(k(-\tfrac{1}{2})-1)(-\tfrac{1}{2}+|-\tfrac{1}{2}|+k)=0 \Leftrightarrow (-\tfrac{k}{2}-1)k=0,$$

од каде следува $k_1=-2$ и $k_2=0$. Ако $x_2=-4$, за втората равенка имаме

$$(k(-4)-1)(-4+|-4|+k)=0 \Leftrightarrow (-4k-1)k=0,$$

од каде следува $k_3=-\frac{1}{4}$ и $k_4=0$.

Значи за $k=-2$ решение на втората равенка е само $x_1=-\frac{1}{2}$, а за $k=-\frac{1}{4}$ решение на втората равенка е само $x_2=-4$. Според тоа, само за $k=0$ и двата корена на $|3x+5|=|3-x|$ са корени и на

$$(kx-1)(x+|x|+k)=0.$$

42. Определи ги броевите a,b,c,d за кои важи

$$a:b=2:3,\ a:d=3:5,\ b:c=6:5 \text{ и } 2d-a-c=26.$$

Решение. Од $a:b=2:3,\ a:d=3:5,\ b:c=6:5$ следува $b=\frac{3a}{2}$, $d=\frac{5a}{3}$, $c=\frac{5b}{6}=\frac{5a}{4}$, па затоа $\frac{10a}{3}-a-\frac{5a}{4}=26$. Според тоа, $\frac{40-12-15}{12}a=26$, односно $a=24$. Конечно, $b=36, c=30$ и $d=40$.

43. Збирот, разликата и количникот на два броја се однесуваа како $20:4:1$. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека броевите се x и y. Тогаш важи

$$(x+y):(x-y):\frac{x}{y}=20:4:1.$$

Според тоа, постои број k таков што $x+y=20k, x-y=4k$ и $\frac{x}{y}=k$.

Ако ги собереме првото и второто равенство добиваме $2x=24k$, т.е. $x=12k$. Според тоа, $y=20k-12k=8k$. Од $\frac{x}{y}=k$ следува $\frac{12k}{8k}=k$, т.е. $k=1,5$.

Конечно, $x=12\cdot 1,5=18$ и $y=8\cdot 1,5=12$.

44. Разликата, збирот и производот на два броја се однесуваат како $1:4:15$. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека x и y се бараните броеви. Тогаш важи

$$(x-y):(x+y):xy=1:4:15, \text{ т.е. } x-y=k, x+y=4k, xy=15k.$$

Тоа значи, $x=\frac{5}{2}k$ и $y=\frac{3}{2}k$, па затоа $\frac{5}{2}k\cdot\frac{3}{2}k=15k$, од каде добиваме $k=1$. Според тоа, бараните броеви се $x=\frac{5}{2}$ и $y=\frac{3}{2}$.

45. Реши ја неравенката

$$\frac{x-1}{2}-\frac{5x+4}{8}>x+2.$$

Решение. Дадената неравенка последователно е еквивалентна на неравенките

$$\begin{aligned}
&\frac{x-1}{2}-\frac{5x+4}{8}>x+2 \qquad\qquad /\cdot 8\\
&4(x-1)-(5x+4)>8(x+2)\\
&-x-8>8x+16\\
&-16-8>8x+x\\
&-24>9x\\
&x<-\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

46. Реши ја неравенката

$$\frac{5-2x}{4+2x}>0.$$

Решение. Имаме, два случаја и тоа:

1) $5-2x>0$ и $4+2x>0$, односно $x<\frac{5}{2}$ и $x>-2$. Според тоа, множеството решенија се сите броеви од интервалот $(-2,\frac{5}{2})$.

2) $5-2x<0$ и $4+2x<0$, односно $x>\frac{5}{2}$ и $x<-2$ и во овој случај немаме решение на задачата.

47. Реши ја неравенката $\frac{3x-2}{x+1}<0$.

Решение. Вредноста на дропката ќе биде негативна ако броителот и именителот се со различни знаци. Затоа разликуваме два случаја.

1) $3x-2>0$ и $x+1<0$, т.е. $x>\frac{2}{3}$ и $x<-1$. Во овој случај решение на постои, бидејќи не постои реален број кој истовремено е поголем од $\frac{2}{3}$ и е помал од -1.

2) $3x-2<0$ и $x+1>0$, т.е. $x<\frac{2}{3}$ и $x>-1$. Множеството решенија на почетната неравенка е пресек на множествата решенија на добиените неравенки, т.е. решенија на почетната неравенка се сите реални броеви x такви што $-1<x<\frac{2}{3}$.

48. Определи го најмалиот цел број x за кој важи $x>y-1$ и $2y-1>0$.

Решение. Од неравенството $x>y-1$ следува неравенството $x+1>y$. Од неравенството $2y-1>0$ следува неравенството $y>\frac{1}{2}$. Според тоа, $x+1>y>\frac{1}{2}$, од каде добиваме $x+1>\frac{1}{2}$, односно $x>\frac{1}{2}-1$. Според тоа, $x>-\frac{1}{2}$, па бараниот најмал цел број е $x=0$.

49. Дали постојат последователни природни броеви a,b и c такви што

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{53}{60}?$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a<b<c$, односно $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$. Според тоа, $\frac{53}{60}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{3}{a}$, па затоа $a<\frac{180}{53}$, т.е. $a\leq 3$. Можни се следниве случаи:

1) $a=1, b=2, c=3$ и тогаш $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1>\frac{53}{60}$.

2) $a=2, b=3, c=4$ и тогаш $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{65}{60}>\frac{53}{60}$.

3) $a=3, b=5, c=5$ и тогаш $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{20+15+12}{60}=\frac{47}{60}<\frac{53}{60}$.

Според тоа, бараните последователни природни броеви a,b,c не постојат.

50. Определи го бројот на природните броеви n за кои се исполнети неравенствата

$$2013<\sqrt{n}<2014.$$

Решение. По квадрирањето на неравенствата добиваме

$$2013^2<n<2014^2.$$

Бидејќи ист број природни броеви n ги задоволува и двете строги неравенства, заклучуваме дека бројот на природните броеви кои ги задоволуваат неравенствата е еднаков на

$$2014^2-2013-1=(2014-2013)\cdot(2014+2013)-1=4027-1=4026.$$

I.3. НЕРАВЕНСТВА

51. За броевите a,b,c,d важи $d>c$, $a+b=c+d$ и $a+d<b+c$. Подреди ги овие броеви по големина.
Решение. Од $a+d<b+c$ следува дека $a+d+b<2b+c$ и бидејќи $a+b=c+d$, добиваме $2d+c<2b+c$, т.е. $d<b$. Слично, од неравенството $a+d<b+c$ следува $a+d+c<b+2c$, па повторно од $a+b=c+d$ добиваме $2a+b<b+2c$, т.е. $a<c$. Конечно, ако искористиме и дека $d>c$ добиваме $a<c<d<b$.

52. Што е поголемо 10^{20} или 90^{10}?
Решение. Имаме: $10^{20}=(10^2)^{10}=100^{10}>90^{10}$.

53. Што е поголемо 31^{13} или 65^{11}?
Решение. Имаме:
$$31^{13}<32^{13}=2^{65}<2^{66}=64^{11}<65^{11}.$$

54. Што е поголемо 2^{2010} или 5^{861}?
Решение. Имаме $5^3=125<128=2^7$, па затоа
$$5^{861}=(5^3)^{287}<(2^7)^{287}=2^{2009}<2^{2010}.$$

55. Што е поголемо 333^{444} или 444^{333}?
Решение. Од $333^{444}=(3^4\cdot 111^4)^{111}$, $444^{333}=(4^3\cdot 111^3)^{111}$, $3^4>4^3$ и $111^4>111^3$ заклучуваме дека $333^{444}>444^{333}$.

56. Што е поголемо 2^{1993} или 65^{333}?
Решение. Имаме:
$$65^{333}>64^{333}=(2^6)^{333}=2^{1998}>2^{1993}.$$

57. Што е поголемо $0,064^{665}$ или $0,16^{997}$?
Решение. Имаме:
$$0,064^{665}=(\tfrac{64}{1000})^{665}=(\tfrac{8}{125})^{665}=(\tfrac{2}{5})^{3\cdot 665}=(\tfrac{2}{5})^{1995}$$
и бидејќи
$$0,16^{997}=(\tfrac{16}{100})^{997}=(\tfrac{4}{25})^{997}=(\tfrac{2}{5})^{2\cdot 997}=(\tfrac{2}{5})^{1994},$$
добиваме

$$0,064^{665}=(\tfrac{2}{5})^{1995}<(\tfrac{2}{5})^{1994}=0,16^{997},$$

бидејќи $\frac{2}{5}<1$.

58. Што е поголемо $(\sqrt{2})^{3000}$ или $(\sqrt{3})^{2000}$?

Решение. Имаме

$$(\sqrt{2})^{3000}=2^{1500}=(2^3)^{500}=8^{500} \text{ и } (\sqrt{3})^{2000}=3^{1000}=(3^2)^{500}=9^{500}.$$

Сега од $8^{500}<9^{500}$ следува $(\sqrt{2})^{3000}<(\sqrt{3})^{2000}$.

59. Што е поголемо $2-\sqrt{3}$ или $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$?

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3},$$

што значи дека двата изрази имаат еднакви вредности.

60. Кој број е поголем $2+\sqrt{2}$ или $6-\sqrt{6}$?

Решение. Имаме $2>\sqrt{3}$, па затоа $4>2+\sqrt{3}$, т.е. $16>8+4\sqrt{3}$. Од последното неравенство следува $4^2>(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$, т.е. $4>\sqrt{2}+\sqrt{6}$, па затоа $6-\sqrt{6}>2+\sqrt{2}$.

61. Што е поголемо $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$?

Решение. Нека $a=\frac{5+2\sqrt{5}}{2}=\frac{5}{2}+\sqrt{5}$ и $b=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$. Тогаш од $\frac{25}{4}>6$ следува $(\frac{5}{2})^2>6$, па затоа $\frac{5}{2}>\sqrt{6}$. Значи, $a-b=\frac{5}{2}-\sqrt{6}>0$, односно $a>b$.

62. Што е поголемо 2006 или $\sqrt{2005\cdot 2007}$?

Решение. Имаме

$$\sqrt{2005\cdot 2007}=\sqrt{(2006-1)\cdot(2006+1)}=\sqrt{2006^2-1^2}<\sqrt{2006^2}=2006.$$

63. Нека се a,b,m три позитивни реални броеви и $a>b$. Спореди ги броевите $A=\sqrt{a+m}-\sqrt{a}$ и $B=\sqrt{b+m}-\sqrt{b}$.

Решение. Имаме

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{\sqrt{a+m}-\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a+m}+\sqrt{a}}{m},$$

$$\frac{1}{B}=\frac{1}{\sqrt{b+m}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b+m}+\sqrt{b}}{m}.$$

Сега, бидејќи $a>b$ добиваме $\sqrt{a+m}>\sqrt{b+m}$, па затоа $\frac{1}{A}>\frac{1}{B}$, односно $A<B$.

64. Нека a и b се реални броеви такви што $a<b$. Докажи дека $a<\frac{a+b}{2}<b$.

Решение. Од $a<b$ следува $a+a<a+b$, т.е. $2a<a+b$, па затоа $a<\frac{a+b}{2}$. На сличен начин се докажува дека $\frac{a+b}{2}<b$.

65. Ако $a<b$ и $b<3$, тогаш $13a<4b+28$, докажи!

Решение. Ако неравенството $a<b$ го помножиме со 13, а неравенството $b<3$ го помножиме со 9, добиваме $13a<13b$ и $9b<27$. Според тоа,

$$13a<13b=4b+9b<4b+27<4b+28.$$

66. Докажи дека $\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$.

Решение. Имаме $2<4$, па затоа $\sqrt{2}<\sqrt{4}=2$, од каде добиваме $2+\sqrt{2}<2+2=4$. Според тоа, $\sqrt{2+\sqrt{2}}<\sqrt{4}=2$.

67. За реалните броеви a и b важи $a-b\geq 2$. Докажи дека $a^4+b^4\geq 2$.

Решение. Од $a-b\geq 2$ следува $a^2-2ab+b^2\geq 4$. Ако последното неравенство го собереме со неравенството $a^2+2ab+b^2\geq 0$ добиваме $2a^2+2b^2\geq 4$, т.е. $a^2+b^2\geq 2$. Ако последното неравенство го квадрираме и добиеното неравенство го собереме со неравенството $(a^2-b^2)^2\geq 0$, добиваме $a^4+b^4\geq 2$.

68. Даден е полиномот $P(t)=t^4-t+\frac{1}{2}$. Докажи дека $P(t)>0$ за секој реален број t.

Решение. Имаме

$$P(t)=t^4-t+\frac{1}{2}=t^4-t^2+\frac{1}{4}+t^2-t+\frac{1}{4}=(t^2-\frac{1}{2})^2+(t-\frac{1}{2})^2.$$

Бидејќи броевите $t^2-\frac{1}{2}$ и $t-\frac{1}{2}$ не се истовремено еднакви на нула, заклучуваме дека $P(t)>0$ за секој реален број t.

69. Определи ги реалните броеви a,b,c,d така што изразот

$$a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)$$

ќе прими најмала вредност.

Решение. Имаме

$$a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2,$$

па затоа дадениот израз прима најмала вредност за $a=b=c=d$.

70. Даден е полиномот

$$P=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx.$$

Определи за кои вредности на x,y,z овој полином не е позитивен.

Решение. Последователно добиваме

$$P=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$
$$2P=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx$$
$$2P=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2.$$

Квадрат на реален број е ненегативен реален број, па затоа збирот на тртите квадрати на десната страна во последното равенство не е пзоитивен ако и само ако трите броја се еднакви на нула, т.е. ако и само ако $x=y=z$.

71. За која вредност на променливите x,y,z вредноста на изразот

$$A=-2x-6z+x^2+y^2+z^2+4y$$

е најмала? Определи ја оваа вредност.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=-2x-6z+x^2+y^2+z^2+4y\\&=x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2-6z+9-14\\&=(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2-14.\end{aligned}$$

Јасно, вредноста на дадениот израз е најмала ако и само ако $x-1=0$, $y+2=0$ и $z-3=0$, т.е. $x=1, y=-2$ и $z=3$. Притоа $A_{\min}=-14$.

72. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$a^2+b^2-ab-a-b.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}2(a^2+b^2-ab-a-b)&=a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1-2\\&=(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2-2\geq -2.\end{aligned}$$

Знак за равенство во последното неравенство важи за $a=b=1$, што значи дека најмалата вредност на изразот

$$a^2+b^2-ab-a-b$$

е еднаква на -1.

I.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

73. Определи ја вредноста на изразот $P(x,y)=x^{1989}+1989y$, ако за броевите x и y важи $x^2+y^2+2x-6y+10=0$.

Решение. Од $x^2+y^2+2x-6y+10=0$ следува $(x+1)^2+(y-3)^2=0$, па затоа $x=-1, y=3$. Според тоа, бараната вредност е

$$P(-1,3)=(-1)^{1989}+1989\cdot 3=-1+5967=5966.$$

74. Реши ја равенката

$$x^{1988}+y^6+z^4+146=2x^{994}+16y^3+18z^2.$$

Решение. Последователно добиваме

$$x^{1988}+y^6+z^4+146=2x^{994}+16y^3+18z^2$$
$$x^{1988}-2x^{994}+1+y^6-16y^3+64+z^4-18z^2+81=0$$
$$(x^{994}-1)^2+(y^3-8)^2+(z^2-9)^2=0$$

од каде следува

$$x^{994}-1=0,\ y^3-8=0,\ z^2-9=0,$$

односно $x=\pm1, y=2, z=\pm3$, па затоа

$$(x,y,z)\in\{(1,2,3),(1,2,-3),(-1,2,3),(-1,2,-3)\}.$$

75. За вредноста на променливата $x=101987$ определи ја вредноста на функцијата $f(x)=x^2-1988x+1987$.

Решение. Ако искористиме дека

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2-1988x+1987=x^2-x-1987x+1987\\ &=x(x-1)-1987(x-1)=(x-1)(x-1987) \end{aligned},$$

добиваме

$$\begin{aligned} f(101987)&=(101987-1)(101987-1987)\\ &=101986\cdot 100000=10198600000. \end{aligned}$$

76. Определи ја вредноста на изразот
$$x^{19}-23x^{18}+23x^{17}-23x^{16}+...+23x^3-23x^2+23x+5,$$
ако $x=22$.

Решение. Имаме:
$$\begin{aligned}P(x)&=x^{19}-23x^{18}+23x^{17}-23x^{16}+...+23x^3-23x^2+23x+5\\&=x^{19}-22x^{18}-x^{18}+22x^{17}+x^{17}-22x^{16}+...\\&\quad -x^4+22x^3+x^3-22x^2-x^2+22x+x+5\\&=x^{18}(x-22)-x^{17}(x-22)+x^{16}(x-22)+...\\&\quad -x^3(x-22)+x^2(x-22)-x(x-22)+x+5.\end{aligned}$$
Затоа $P(22)=22+5=27$.

77. Нека $\frac{a+b}{b}=1{,}5$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{b-a}{a}$.

Решение. Од $\frac{a+b}{b}=1{,}5$ следува $\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{3}{2}$, т.е. $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$. Значи, $\frac{b}{a}=2$, па затоа $\frac{b-a}{a}=\frac{b}{a}-\frac{a}{a}=2-1=1$.

78. За реалните броеви a и b важи $\frac{a+b}{b}=2-\sqrt{2}$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{a^2+b^2}{ab}$.

Решение. Од равенството $\frac{a+b}{b}=2-\sqrt{2}$ следува $\frac{a}{b}+1=2-\sqrt{2}$, односно $\frac{a}{b}=1-\sqrt{2}$. Според тоа, $\frac{b}{a}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=-(1+\sqrt{2})$, па затоа
$$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1-\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})=-2\sqrt{2}.$$

79. Ако е $x\sqrt{2}-y\sqrt{2}=\sqrt{18}$, определи ја вредноста на изразот $\frac{x\sqrt{3}}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}$.

Решение. Од $x\sqrt{2}-y\sqrt{2}=\sqrt{18}$ следува $(x-y)\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, па затоа $x-y=3$. Според тоа,
$$\frac{x\sqrt{3}}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{x\sqrt{3}}{3}-\frac{y\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3=\sqrt{3}.$$

80. Нека x е реален број таков што $x+\frac{1}{x}=3$. Определи ја вредноста на изразот $x^4+\frac{1}{x^4}$.

Решение. Ако $x+\frac{1}{x}=3$, тогаш $x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$, т.е. $x^2+\frac{1}{x^2}=7$. Според тоа, $x^4+2+\frac{1}{x^4}=49$, па затоа $x^4+\frac{1}{x^4}=47$.

81. Ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$, определи ја вредноста на изразот $a^4+b^4+c^4$.

Решение. Од $0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ следува

$$2(ab+bc+ca)=-(a^2+b^2+c^2)=-1\text{ , т.е. } ab+bc+ca=-\frac{1}{2}.$$

Ако го квадрираме последното равенство добиваме

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\frac{1}{4}\text{, т.е. } a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}1&=(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\&=a^4+b^4+c^4+2\cdot\frac{1}{4}=a^4+b^4+c^4+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

па затоа $a^4+b^4+c^4=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

82. Определи ја ведноста на изразот

$$\sqrt{(3x-2)(x-2)-2x(x-2)}-\sqrt{2}\text{, за } x=3-\sqrt{2}.$$

Решение. Имаме:

$$\sqrt{(3x-2)(x-2)-2x(x-2)}-\sqrt{2}=\sqrt{(x-2)(x-2)}-\sqrt{2}=|x-2|-\sqrt{2},$$

па затоа бараната вредност е

$$|3-\sqrt{2}-2|-\sqrt{2}=|\sqrt{2}-1|-\sqrt{2}=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-1.$$

83. Позитивните рационални броеви се запишани во низа:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\dots.$$

Откриј го правилото според кое се запишуваат броевите. На кое место е запишан бројот $\frac{1996}{1995}$?

Решение. Членовите на низата се подредени во групи кои имаат еден член со збир на броевите во броителот и именителот 2, два члена со збир на броителот и именителот 3, три члена со збир на броителот и именителот 4 итн. Во дропката $\frac{1996}{1995}$ збирот на броителот и именителот е 3991. Тоа значи дека пред неа има $1+2+...+3989=\frac{3990\cdot 3989}{2}$ членови со збир помал од 3991. Во последната група (со збир 3991) пред бараната дропка се членовите со броители 3990, 39989, ..., 1997, што значи уште $3990-1996=1994$ дропки. Според тоа, бараната дропка се наоѓа на $1995\cdot 3989+1994+1=7960050$ место.

84. Низата броеви $2, 2, 0, 2, -2, ...$ е зададена на следниов начин:

$$a_1=2, a_2=2, a_3=a_1-a_2, a_4=a_2+a_3, a_5=a_3-a_4, a_6=a_4+a_5, ...$$

Определи го збирот на првите 100 члена на оваа низа.

Решение. Членовите на низата се

$$\begin{aligned}
&a_1=2,\\
&a_2=2,\\
&a_3=a_1-a_2=2-2=0,\\
&a_4=a_2+a_3=2+0=2,\\
&a_5=a_3-a_4=0-2=-2,\\
&a_6=a_4+a_5=2+-2=0,\\
&a_7=a_5-a_6=-2-0=-2,\\
&a_8=a_6+a_7=0+(-2)=-2,\\
&a_9=a_7-a_8=-2-(-2)=0,\\
&a_{10}=a_8+a_9=-2+0=-2,\\
&a_{11}=a_9-a_{10}=0-(-2)=2,\\
&a_{12}=a_{10}+a_{11}=-2+2=0,\\
&a_{13}=a_{11}-a_{12}=2-0=2,\\
&a_{14}=a_{12}+a_{13}=0+2=2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Според тоа, во низата циклични се повторува група од 12 броеви, и тоа: $2, 2, 0, 2, -2, 0, -2, -2, 0, -2, 2, 0$. Збирот на броевите во оваа група е еднаков на $4\cdot 2+4\cdot(-2)+4\cdot 0=0$. Понатаму, од $100=8\cdot 12+4$ следува дека збирот на првите 100 членови е еднаков на

$$8\cdot 0+2+2+0+2=6.$$

85. Реши го бројниот ребус: $(5c+1)^2=\overline{abca}$, во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Од $999<(5c+1)^2=\overline{abca}<10000$ следува $31<5c+1<100$, па затоа $6<c$, т.е. $c\in\{7,8,9\}$. Тогаш $(5c+1)^2\in\{1296,1681,2116\}$, па условите на задачата ги задоволува само бројот $(5\cdot 8+1)^2=1681$.

86. Дешифрирај го бројниот ребус

$$\overline{ccb}\cdot b=\overline{ab5b},$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Јасно, $a,c\neq 0$. Понатаму, бидејќи цифрата на единиците на производот $b\cdot b$ е b, заклучуваме дека b е некој од броевите 1, 5 и 6.

Ако $b=1$, тогаш $\overline{cc1}\cdot 1=\overline{a151}$, што не е можно, бидејќи левата страна во послдното равенство е трицифрен број, а десната страна е четирицифрен број.

Ако $b=5$, тогаш $\overline{cc5}\cdot 5=\overline{a555}$, па затоа цифрата на десетките на производот $\overline{cc5}\cdot 5$ е цифрата на единиците на бројот $5c+2$, што значи дека таа е или 2 или 7. Меѓутоа, цифрата на десетките на бројот $\overline{a555}$ е 5, што е противречност.

Ако $b=6$, тогаш $\overline{cc6}\cdot 6=\overline{a656}$. Сега цифрата на десетките на производот $\overline{cc6}\cdot 6$ е еднаква на цифрата на единиците на производот $6c+3$ и како таа е еднаква на 5, заклучуваме дека цифрата на единиците на производот $6c$ е 2. Последнотѕо значи дека $c=2$ или $c=7$. За $c=2$ добиваме $226\cdot 6=1356\neq\overline{a656}$, а за $c=7$ добиваме $776\cdot 6=4356$, што значи дека $a=2$.

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Определи ја цифрата на единициите на збирот $3^{2019}+7^{122}$.
Решение. Имаме
$$\begin{aligned}3^{2019}+7^{122}&=3^{2016}\cdot 3^3+7^{120}\cdot 7^2\\&=27\cdot(3^4)^{504}+49\cdot(7^4)^{30}\\&=27\cdot 81^{504}+49\cdot 2401^{30}.\end{aligned}$$
Цифрата на единиците на производот $27\cdot 81^{504}$ е еднаква на 7, а цифрата на единиците на производот $49\cdot 2401^{30}$ е еднаква на 9. Според тоа, цифрата на единиците на збирот $3^{2019}+7^{122}$ е еднаква на 6.

2. Телефонскиот број на Ѓурѓа се состои од два трицифрени броја, напишани едноподруго. Секој од нив е делив со 45, а средната цифра им е 8. Одреди го телефонскиот број, ако трицифрениот број што е запишан од лево во телефонскиот број е помал од трицифрениот број од десно.
Решение. Нека бараниот телефонски број е $\overline{a8bc8d}$. Ако секој број $\overline{a8b}$ и $\overline{c8d}$ е делив со 45, тогаш тие мора да се деливи со 5 и со 9. Следува последната цифра е 5 или 0. Ако последната цифра е 5, тогаш и првата цифра мора да е 5, бидејќи само 585 е делив со 9. Ако последната цифра е 0, тогаш првата цифра е 1. Бидејќи првиот број (запишаниот од лево) е помал, бараниот број е 180585.

3. Определи го најголемиот природен број таков што било кои негови две соседни цифри запишани во истиот редослед формираат двоцифрен број кој е делив со 23.
Решение. Двоцифрени броеви деливи со 23 се 23, 46, 69 и 92. Затоа најголемиот број кој ги задоволува условите на задачата е 46923.

4. При делење на броевите 280 и 240 со природниот број n се добиени остатоци 21 и 18, соодветно. Определи го бројот n.
Решение. Имаме $280=kn+21$ и $240=mn+18$, т.е. $kn=259$ и $mn=222$. Според тоа, $kn-mn=37$, односно $(k-m)n=37$ и како $n>1$ заклучуваме дека $n=37$.

5. Производот на првите 2004 природни броеви $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2003\cdot 2004$ е делив со број a чии сите прости множители се еднакви на 3. Колку најмногу тројки може да има бројот a во разложувањето на прости множители?

Решение. Треба да определиме колку има броеви кои се деливи со 3, 9, 27, 81, ... Имаме $2004=3\cdot 668$, што значи дека има 668 броеви кои се деливи со 3. Понатаму, $2004=9\cdot 222+6$ заклучуваме дека има 222 броеви кои се деливи со 9. На сличен начин заклучуваме дека има 74 броеви кои се деливи со 27, 24 броеви кои се деливи со 81, 8 броеви кои се деливи со 243 и 2 броја кои се деливи со 729. Според тоа, бараниот број a може да има најмногу

$$668+222+74+24+8+2=998 \text{ тројки.}$$

6. Даден е природниот број n кој е запишан со 60 седумки и определен број нули. Докажи дека вредноста на дропката $\frac{n-27}{3}$ е цел број, а вредноста на дропката $\frac{n+27}{9}$ не е цел број.

Решение. Збирот на цифрите на бројот n е $60\cdot 7=420$, што значи дека тој е делив со 3, но не е делив со 9. Но, $3|27$, па затоа $3|(n-27)$. Од друга страна, ако $9|(n+27)$, бидејќи $9|27$ следува $9|n$,што е противречност, па затоа $9\nmid (n+27)$.

7. Должините на страните на еден правоаголен триаголник се изразени со природни броеви. Дали е можно должините на катетите да бидат изразени со непарни броеви? (Одговорот да се образложи)

Решение. Нека $a=2p+1$ и $b=2s+1$, $p,s\in\mathbb{N}$ се катети на правоаголниот триаголник. Тогаш, за хипотенузата имаме

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2=(2p+1)^2+(2s+1)^2=4p^2+4p+1+4s^2+4s+1 \\ &=4(p^2+p+s^2+s)+2 \end{aligned}$$

што не е можно, бидејќи ако $c=2k$, тогаш $c^2=4k^2$, а ако $c=2k+1$, тогаш $c^2=4k(k+1)+1$, т.е. квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1.

8. Докажи дека за секој трицифрен број важи: или тој број е делив со 3 или некој двоцифрен, односно едноцифрен број, составен од неговите цифри е делив со 3.

Решение. Ако некоја од цифрите на трицифрениот број е делива со 3, тогаш тврдењето е докажано. Нека претпоставиме дека ниту една од цифрите x, y, z на трицифрениот број не е делива со 3. Тоа значи дека остатоците при делење на x, y, z се 1 или 2. Ако сите три остатоци се еднакви меѓу себе, тогаш збирот $x+y+z$ при делење со 3 дава остаток 0, што значи дека трицифрениот број е делив со 3. Ако постојат две цифри, на пример x и y, кои при делење со 3 даваат различни остатоци, тогаш збирот $x+y$ е делив со 3, што значи дека двоцифрените броеви $\overline{xy}$ и $\overline{yx}$ се деливи со 3. Со тоа тврдењето е докажано.

9. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што

$$2\cdot\overline{abc}=\overline{bcd}.$$

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во видот

$$2\cdot(100a+\overline{bc})=10\overline{bc}+d,$$

од каде добиваме $d=8(25a-\overline{bc})$. Бидејќи десната страна на последното равенство е делива со 8, а d е цифра заклучуваме дека $d=0$ или $d=8$.

а) Ако $d=0$, тогаш $25a=\overline{bc}$, па затоа a е 1, 2 или 3.

За $a=1$ добиваме $\overline{bc}=25$, па бараниот број $\overline{abcd}$ е 1250.

За $a=2$ добиваме $\overline{bc}=50$, па бараниот број $\overline{abcd}$ е 2500.

За $a=3$ добиваме $\overline{bc}=75$, па бараниот број $\overline{abcd}$ е 3750.

а) Ако $d=8$, тогаш $25a=\overline{bc}+1$, па затоа a е 1, 2, 3 или 4.

За $a=1$ добиваме $\overline{bc}=24$, па бараниот број $\overline{abcd}$ е 1248.

За $a=2$ добиваме $\overline{bc}=49$, па бараниот број $\overline{abcd}$ е 2498.

За $a=3$ добиваме $\overline{bc}=74$, па бараниот број $\overline{abcd}$ е 3748.

За $a=4$ добиваме $\overline{bc}=99$, па бараниот број $\overline{abcd}$ е 4998.

10. Докажи дека збирот на четири последователни природни броја не е делив со 4. Докажи дека збирот на четири последователни парни броеви е делив со 4. Докажи дека збирот на четири последователни непарни броеви е делив со 8.

Решение. Тврдењата на задачата следуваат од равенствата:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6=4(n+1)+2,$$

$$2m+(2m+2)+(2m+4)+(2m+6)=8m+12=4(2m+3) \text{ и}$$

$$2k+1+(2k+3)+(2k+5)+(2k+7)=8k+16=8(2k+2).$$

11. Докажи дека шестцифрениот број $\overline{abcabc}$ е делив со 7, 11 и 13.

Решение. Имаме

$$\overline{abcabc} = \overline{abc000} + \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc}$$
$$= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc},$$

од каде следува дека бројот $\overline{abcabc}$ е делив со 7, со 11 и со 13.

12. Даден е четирицифрен природен број $\overline{abcd}$ чии цифри a,b,c,d се четири последователни природни броја ($a<b<c<d$). Докажи дека бројот $\overline{bacd}$ е делив со 11.

Решение. Според условот на задачата имаме $b=a+1, c=a+2$ и $d=a+3$, па затоа

$$\begin{aligned}\overline{bacd} &= 1000b+100a+10c+d\\ &= 1000(a+1)+100a+10(a+2)+(a+3)\\ &= 1111a+1023 = 11(101a+93),\end{aligned}$$

од каде што следува $11 | \overline{bacd}$.

13. Нека $\overline{xyy}$ е трицифрен број делив со 7. Докажи дека збирот на цифрите на бројот $\overline{xyy}$ е делив со 7.

Решение. Го запишуваме бројот $\overline{xyy}$ во обликот

$$\overline{xyy} = 100x+10y+y = 7(14x+y)+2(x+2y),$$

каде x,y се цифри. Бидејќи $\overline{xyy}$ е делив со 7, од последното равенство следува дека $7 | 2(x+2y)$, и како $NZD(2,7)=1$ добиваме дека $7 | x+2y$, што и требаше да се докаже.

14. Определи го трицифрениот број запишан со различни цифри и таков што бројот е делив со 7 и збирот на цифрите со кои е запишан е делив со 7.

Решение. Нека бараниот број е $x=\overline{abc}$. Тогаш

$$x = 100a+10b+c = 7(14a+b)+(2a+3b+c),$$

па затоа важи $7 | (a+b+c)$ и $7 | (2a+3b+c)$. Затоа и разликата $2a+3b+c-(a+b+c)=b-c$ е делива со 7. Меѓутоа, цифрите b,c мора да се различни па затоа $b-c=\pm 7$ и како и цифрата a мора да биде различна добиваме дека единствени броеви кои го задоволуваат условот на задачата се броевите 518, 581, 329 и 392.

15. Бројот $\overline{6ababab}$ е содржател на бројот 18. Ако ја избришеме првата и последната цифра ќе добиеме петцифрен број кој е делив со 6. Кои броеви од зададениот вид го имаат ова својство?

Решение. Бројот $\overline{6ababab}$ е содржател на бројот 18, што значи дека е делив со 2 и со 9. Заради деливоста со 2 цифрата b на бројот $\overline{6ababab}$ може да биде 0, 2, 4, 6 или 8. Понатаму, заради деливоста со 9 на бројот $\overline{6ababab}$, збирот на неговите цифри мора да е делив со 9, т.е. $6+3a+3b=9k, k\in\mathbb{N}$. Според условот на задачата бројот $\overline{ababa}$ е делив со 6, што значи дека е делив со 2 и со 3. Заради деливоста на $\overline{ababa}$ со 2, цифрата a може да биде 2, 4, 6 или 8 (0 не може да биде бидејќи тогаш $\overline{ababa}$ не е петцифрен број). Заради деливоста на $\overline{ababa}$ со 3, збирот на неговите цифри мора да еделив со 3, т.е. $3a+2b=3m, m\in\mathbb{N}$. Од последното равенство следува $b=0,3,6$ или 9. Но, цифрата b мора да е парна, па затоа $b=0$ или $b=6$.
Со замена во $6+3a+3b=9k$ за $b=0$ добиваме $6+3a=9k$, т.е. $2+a=3k$. За $k=1$ следува $a=1$, за $k=2$ следува $a=4$, за $k=3$ следува $a=7$.
Со замена во $6+3a+3b=9k$ за $b=6$ добиваме $24+3a=9k$, т.е. $12+a=3k$. За $k=3$ следува $a=1$, за $k=4$ следува $a=4$, за $k=5$ следува $a=7$.

Во двата случаја, заради деловоста со 2 на бројот $\overline{ababa}$, цифрата a може да биде само 4, па затоа бараните броеви се 6404040 и 6464646.

16. Докажи дека меѓу пет непарни последователни природни броеви секогаш постои барем еден број кој не е делив ниту со 3, ниту со 5, ниту со 7.

Решение. Од пет последователни непарни броеви најмногу два се деливи со 3. Имено, ако првиот број е делив со 3, тогаш само уште четвртиот број е делив со 3, а ако вториот број е делив со 3, тогаш само уште петтиот број е делив со 3. Понатаму, само еден од овие броеви е делив со 5 и само еден може да е делив со 7. Според тоа, меѓу пет последователни непарни природни броеви најмногу четири се деливи со 3, 5 или 7, што значи дека барем еден не е делив ниту со 3, ниту со 5, ниту со 7.

17. Докажи дека секој природен број поголем од 7 може да се запише како збир на еден природен број делив со 3 и еден природен број делив со 5.

Решение. Секој природен број кој е поголем од 7 е од видот $3k+8$, $3k+9$ или $3k+10$. Затоа, за да го докажеме тврдењето доволно е броевите 8, 9 и 10 да ги запишеме како збир на два броја од кои едниот е делив со 3, а другиот е делив со 5. Имаме, $8=5+3$, $9=3\cdot 3+0$ и $10=2\cdot 5+0$.

18. Докажи дека збирот на квадратите на кои било пет последователни цели броеви е делив со 5, но не е делив со 25.

Решение. Нека $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ се пет последователни цели броеви. Тогаш

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=5(n^2+2),$$

па затоа збирот е делив со 5. За да збирот биде делив со 25 потребно и доволно е n^2+2 да биде делив со 5, што значи цифрата на единиците да е 0 или 5. Но, цифрата на единиците на n^2 е 0, 1, 4, 5, 6 или 9, па затоа цифрата на единиците на n^2+2 е 2, 4, 7, 8 или 1, соодвено, што значи дека збирот n^2+2 не е делив со 5, па затоа $5(n^2+2)$ не е делив со 25.

19. Дадени се 1991 последователни непарни броеви. Докажи дека нивниот збир е делив со 1991.

Решение. Нека $2n+1$ е првиот од дадените последователни непарни броеви. Тогаш 1991-виот непарен број е $2n+2\cdot 1991-1=2n+3981$. Според тоа, бараниот збир е

$$\begin{aligned} S &= 2n+1+2n+3+2n+5+...+2n+3981 \\ &= 1991\cdot 2n+(1+3+5+...+3981). \end{aligned}$$

Ако искористиме дека $1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$, добиваме $S=1991\cdot 2n+1991^2=1991\cdot(2n+1991)$, па затоа $1991\,|\,S$.

20. Докажи дека за секој природен број n вредноста на изразот $\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}$ е цел број.

Решение. Имаме

$$\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}=\frac{1}{6}n(3n-4+n^2)=\frac{1}{6}n(n^2+3n+2-6)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)-n.$$

Бидејќи производот на три последователни броја е делив со 6, добиваме дека првиот собирок на десната страна во последното равенство е цел број, па затоа и вредноста на изразот $\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}$ е цел број.

21. Докажи дека 3 е делител на $n(n^2+2)$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. При делење со 3 можни остатоци се ±1 и 0.

Ако $n=3k$, тогаш $n(n^2+2)=3k(9k^2+2)$ и е делив со 3.

Ако $n=3k\pm1$, тогаш $n(n^2+2)=3(3k\pm1)(3k^2\pm2k+1)$ и е делив со 3.

22. Докажи дека не постои цел број n таков што бројот n^2-8 е делив со 5.

Решение. Цифрата на единиците на бројот n^2 е 0, 1, 4, 5, 6 или 9, па затоа цифрата на единиците на бројот n^2-8 е 2, 3, 6, 7, 8 или 1. Бидејќи цифрата на единиците на бројот n^2-8 е различна од 0 и 5 заклучуваме дека тој не е делив со 5 за ниту еден цел број n.

23. Нека n е парен природен број. Докажи дека бројот $n^3-1990n$ е делив со 6.

Решение. Имаме

$$n^3-1990n=n^3-n-1989n=n(n-1)(n+1)-3\cdot663n.$$

Бидејќи $n(n-1)(n+1)$ е производ на три последователни броја, тој е делив со 3 и како бројот n е парен заклучуваме дека $6|n(n-1)(n+1)$. Јасно, 2 и 3 се делители на $3\cdot663n$, т.е. $6|3\cdot663n$. Конечно, од $6|n(n-1)(n+1)$ и $6|3\cdot663n$ следува $6|(n^3-1990n)$.

24. Природните броеви m и n се такви што изразот $m^2+5mn+n^2$ е делив со 49. Докажи дека m и n се деливи со 7.

Решение. Според условот на задачата важи $m^2+5mn+n^2=49k$, за некој природен број k. Значи,

$$49k=m^2+5mn+n^2=m^2-2mn+n^2+5mn+2mn=(m-n)^2+7mn,$$

од каде следува дека $7|(m-n)^2$. Но, 7 е прост број, па затоа $7|m-n$, т.е. $m-n=7p$, за некој природен број p. Сега,

$$49k=49p^2+7mn,\text{ т.е. } 7k=7p^2+mn,$$

од каде следува дека $7|mn$. Но, 7 е прост број, па затоа $7|m$ или $7|n$. Ако $7|m$, тогаш $m=7q$, за некој природен број q, па затоа од $m-n=7p$ следува $7p=7q-n$, што значи $7|n$, со што доказот е завршен.

25. Докажи дека производот $101\cdot 102\cdot 103\cdot ...\cdot 200$ е делив со 2^{100}.
Решение. Имаме:

$$101\cdot 102\cdot 103\cdot ...\cdot 200=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100\cdot 101\cdot 102\cdot 103\cdot ...\cdot 200}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100}=\frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 199)(2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 200)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100}$$
$$=\frac{2^{100}(1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 199)(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100}=2^{100}(1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 199),$$

со што тврдењето е докажано.

26. Докажи дека бројот $7^{1996}-1$ е делив со 10.
Решение. Бројот 7^2 завршува на цифрата 9, па затоа бројот 7^4 завршува на цифрата 1. Понатаму, бидејќи $7^{1996}=(7^4)^{449}$ заклучуваме дека бројот 7^{1996} на цифрата 1, што значи дека бројот $7^{1996}-1$ завршува на цифрата 0, па затоа тој е делив со 10.

27. Докажи дека разликата $43^{1995}-37^{1993}$ е делива со бројот 5.
Решение. Имаме $43^{1995}=43^{4\cdot 498+3}$, па затоа овој број завршува на цифрата 7. Понатаму, $37^{1993}=37^{4\cdot 498+1}$, па затоа овој број завршува на цифрата 7. Конечно, разликата $43^{1995}-37^{1993}$ завршува на цифрата 0, што значи дека таа е делива со 5.

28. Докажи дека 33 е делител на 16^5+2^{15}.
Решение. Имаме

$$16^5+2^{15}=(2^4)^5+2^{15}=2^{4\cdot 5}+2^{15}=2^{20}+2^{15}=2^{15}\cdot 2^5+2^{15}$$
$$=2^{15}\cdot(2^5+1)=2^{15}\cdot(32+1)=33\cdot 2^{15}$$

па затоа $33|16^5+2^{15}$.

29. Докажи дека разликата $10^{1989}-7$ е делива со 3, но не е делива со 27.
Решение. Имаме:

$$10^{1989}-7=1\underbrace{00...00}_{1989}-7=\underbrace{99...99}_{1988}3.$$

Според тоа, сите цифри на разликата $10^{1989}-7$ се деливи со 3, па затоа збирот на цифрите е делив со 3, што значи дека дадената разлика е делива со 3. Ако разликата е делива со 27, тогаш таа е делива и со 9, што значи дека збирот на нејзините цифри е делив со 9. Но, збирот на цифрите на разлката $10^{1989}-7$ е еднаков на $1988\cdot 9+3$ и бидејќи не е делив со 9, заклучуваме дека разликата $10^{1989}-7$ не е делива со 9, т.е. не е делива со 27.

30. Докажи дека збирот $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}, n\in\mathbb{N}$ е делив со 14.

Решение. Имаме:

$$2^n+2^{n+1}+2^{n+2}=2^n\cdot(1+2+2^2)=7\cdot 2^n.$$

Според тоа, $7|(2^n+2^{n+1}+2^{n+2})$, за секој $n\in\mathbb{N}$ и како $2^n\geq 2$, за секој $n\in\mathbb{N}$ следува $2|(2^n+2^{n+1}+2^{n+2})$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Конечно, од

$$7|(2^n+2^{n+1}+2^{n+2}) \text{ и } 2|(2^n+2^{n+1}+2^{n+2})$$

следува $14|(2^n+2^{n+1}+2^{n+2})$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

31. Докажи дека $155|(5^n+5^{n+1}+5^{n+2})$, за секој природен број n.

Решение. Од $5^n+5^{n+1}+5^{n+2}=5^n(1+5+5^2)=31\cdot 5^n$ и $5^n\geq 5$ следува $31|(5^n+5^{n+1}+5^{n+2})$ и $5|(5^n+5^{n+1}+5^{n+2})$. Сега, бидејќи броевите 5 и 31 се заемно прости следува дека $155=5\cdot 31|(5^n+5^{n+1}+5^{n+2})$.

32. Докажи дека 30 е делител на бројот $A=2+2^2+2^3+...+2^{1988}$.

Решение. Тврдењето на задачата следува од:

$$\begin{aligned}A&=2(1+2+2^2+2^3)+2^5(1+2+2^2+2^3)+...+2^{1985}(1+2+2^2+2^3)\\&=(1+2+2^2+2^3)(2+2^5+...+2^{1985})\\&=2(1+2+2^2+2^3)(1+2^4+...+2^{1984})\\&=30(1+2^4+...+2^{1984}).\end{aligned}$$

33. Нека $2n=2+2^2+2^3+...+2^{1989}+2^{1990}$.

а) Докажи дека $n=2^{1990}-1$.

б) Докажи дека $93|n$.

Решение. а) Од

$$2n=2+2^2+2^3+...+2^{1989}+2^{1990}$$

следува

$$n=1+2+2^2+2^3+...+2^{1989}.$$

Затоа

$$n=2n-n=2+2^2+2^3+...+2^{1989}+2^{1990}-(1+2+2^2+2^3+...+2^{1989})$$
$$=2^{1990}-1.$$

б) Имаме:

$$n=1+2+2^2+2^3+...+2^{1989}=(1+2)+2^2\cdot(1+2)+...+2^{1988}\cdot(1+2)$$
$$=3\cdot(1+2^2+...+2^{1988})$$

па затоа $3|n$. Понатаму,

$$n=(1+2+2^2+2^3+2^4)+2^5\cdot(1+2+2^2+2^3+2^4)+...$$
$$+2^{1985}\cdot(1+2+2^2+2^3+2^4)$$
$$=(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+2^5+2^{10}+...+2^{1985})$$
$$=31\cdot(1+2^5+2^{10}+...+2^{1985}),$$

па затоа $31|n$. Конечно, од $3|n$, $31|n$ и $NZD(3,31)=1$ следува $93|n$.

34. Нека $S=2+2^2+2^3+...+2^{1995}$. Докажи дека:

а) $S=2(2^{1995}-1)$ и

б) $434|S$.

Решение. а) Имаме $2S=2^2+2^3+...+2^{1995}+2^{1996}$, па затоа

$$S=2S-S=2^2+2^3+...+2^{1995}+2^{1996}-(2+2^2+2^3+...+2^{1995})$$
$$=2^{1996}-2=2(2^{1995}-1).$$

б) Јасно, $2|S$. Бидејќи бројот 1995 е делив со 3 и со 5, собирците можеме да ги групираме по 3 и по 5. Во првиот случај добиваме

$$S=2(1+2+4)+2^4(1+2+4)+...+2^{1993}(1+2+4)=7M,$$

а во вториот случај добиваме

$$S=2(1+2+4+8+16)+...+2^{1991}(1+2+4+8+16)=31N.$$

Конечно, бидејќи броевите 2, 7 и 31 се заемно прости заклучуваме дека $2\cdot7\cdot31|S$, т.е. $434|S$.

35. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот $3(n^2+n)+7$ е делив со 5.

Решение. При делење со 5 остатоците на бројот n се 0, 1, 2, 3, 4, па затоа при делење со 5 на бројот n^2+n се добиваат остатоците 0, 2, 1, 2, 0, соодветно. Понатаму, остатоците при делење со 5 на бројот $3(n^2+n)$ се 0, 1, 3, 1, 0, соодветно, што значи дека остатоците при делење со 5 на бројот $3(n^2+n)+7$ се 2, 3, 0, 3, 2, соодветно, т.е. бројот $3(n^2+n)+7$ е делив со 5 ако и само ако при делење на бројот n со 5 се добива остаток 2.

36. Определи ја најголемата вредност на природниот број n, така што бројот 39^n е делител на бројот $39!$. Одговорот да се образложи.

Решение. Имаме $39=3\cdot 13$. Во бројот $39!$, простиот број 13 се појавува као делител на 13, 26 и 39. Затоа најголемата вредност на бројот n е 3.

37. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот n^3-n+2^n е делив со 1992.

Решение. Од $1+9+9+2=21=3\cdot 7$ следува дека ако бројот е делив со 1992, тогаш тој е делив со 3. Понатаму, $n^3-n=n(n-1)(n+1)$ е производ на три последователни природни броја, па затоа е делив со 3. Според тоа, ако n^3-n+2^n е делив со 3, тогаш и бројот 2^n е делив со 3, што не е точно. Значи, не постои природен број n за кој бројот n^3-n+2^n е делив со 3, т.е. не постои природен број n за кој бројот n^3-n+2^n е делив со 1992.

38. Ако двоцифрениот број го поделиме со збирот на неговите цифри добиваме количник 6 и остаток 2. Ако истиот тој двоцифрен број го поделиме со производот на неговите цифри добиваме количник 5 и остаток 2. Кој е тој број?

Решение. Нека $\overline{ab}$ е бараниот двоцифрен број. Од условот на задачата следува $10a+b=6(a+b)+2$ и $10a+b=5ab+2$. Ако ги одземеме дадените равенки добиваме $6(a+b)=5ab$. Бидејќи левата страна на последното равенство е делива со 6, треба и десната страна да е делива со 6, а тоа е можно само ако подредениот пар (a,b) е еден од паровите $(1,6),(2,3),(3,2)$ и $(6,1)$.

Ако $a=1, b=6$, тогаш $10\cdot 1+6\neq 6\cdot(1+6)+2$, што значи дека бројот 16 не е решение на задачата

Ако $a=2, b=3$, тогаш $10\cdot 2+3\neq 6\cdot(2+3)+2$, што значи дека бројот 23 не е решение на задачата.

Ако $a=3, b=2$, тогаш $10\cdot 3+2=6\cdot(3+2)+2$ и $10\cdot 3+2=5\cdot 3\cdot 2+2$, т.е. бројот 32 е решение на задачата.

Ако $a=6, b=1$, тогаш $10\cdot 6+1\neq 6\cdot(10+1)+2$, што значи дека бројот 61 не е решение на задачата.

Според тоа, единствен двоцифрен број кој ги задоволува условите на задачата е бројот 32.

39. Нека n е природен број за кој е точно равенството

$$(\tfrac{2}{3})^{n+1}\cdot(\tfrac{2}{3})^{2}=\frac{6^2\cdot 128\cdot 81^6\cdot 2015^0}{(3^4)^5\cdot 8\cdot 27^4}.$$

Докажи дека $72\,|\,(63+n^6)$.

Решение. Имаме

$$(\tfrac{2}{3})^{n+1}\cdot(\tfrac{2}{3})^{2}=\frac{6^2\cdot 128\cdot 81^6\cdot 2015^0}{(3^4)^5\cdot 8\cdot 27^4}$$

$$(\tfrac{2}{3})^{n+3}=\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 2^7\cdot 3^{24}}{3^{20}\cdot 2^3\cdot 3^{12}}$$

$$(\tfrac{2}{3})^{n+3}=\frac{2^9\cdot 3^{26}}{2^3\cdot 3^{32}}=(\tfrac{2}{3})^{6}$$

$$n+3=6$$

$$n=3.$$

Според тоа,

$$63+n^6=63+3^6=3^2\cdot 7+3^6=3^2(7+3^4)=9\cdot 88=8\cdot 9\cdot 11=72\cdot 11,$$

па затоа $72\,|\,(63+n^6)$.

II.2. НАЈГОЛЕН ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

40. Докажи дека $\sqrt{5}$ е ирационален број.

Решение. Нека претпоставиме дека $\sqrt{5}$ е рационален број, т.е. $\sqrt{5}=\frac{p}{q}$, каде p и q се природни броеви и $\mathrm{NZD}(p,q)=1$. Ако го квадрираме последното равенство по средувањето добиваме $p^2=5q^2$. Според тоа, $5|p^2$ и како 5 е прост број заклучуваме дека $5|p$, односно $p=5k$. Сега со замена во претходното равенство добиваме $(5k)^2=5q^2$, т.е. $25k^2=5q^2$, од каде наоѓаме $5k^2=q^2$. Според тоа, $5|q^2$, па како и претходно заклучуваме дека $5|q$. Од досега изнесеното следува дека 5 е заеднички делител на p и q, што противречи на претпоставката дека p и q се заемно прости природни броеви. Конечно, од добиената противречност следува дека $\sqrt{5}$ е ирационален број.

41. Докажи дека бројот $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ е ирационален.

Решение. Нека $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ е рационален број, т.е. $\sqrt{7}-\sqrt{3}=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}$ и $\mathrm{NZD}(p,q)=1$. Тогаш $10-2\sqrt{21}=\frac{p^2}{q^2}$, што значи дека $\sqrt{21}$ е рационален број, односно $\sqrt{21}=\frac{r}{s}$, $r,s\in\mathbb{N}$ и $\mathrm{NZD}(r,s)=1$. Последното значи $21s^2=r^2$, што не е можно бидејќи производот на левата страна има прости множители на непарен степен, а тоа не е случај со десната страна. Конечно, од добиената противречност следува дека $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ е ирационален број.

42. Докажи дека $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ е ирационален број.

Решение. Нека претпоставиме дека $x=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ е рационален број. Ако квадрираме добиваме $x^2=7+2\sqrt{10}$, па затоа $\sqrt{10}=\frac{x^2-7}{2}$. По претпоставка x е рационален број, па затоа $\sqrt{10}$ е рационален број, што не е точно (Зошто?). Конечно, од добиената противречност следува дека x не е рационален број.

43. Определи го најмалиот природен број n за кој секоја од дропките

$$\frac{7}{n+9},\frac{8}{n+10},\frac{9}{n+11},\dots,\frac{30}{n+32},\frac{31}{n+33}$$

е нескратлива.

Решение. Секоја од дадените дропки можеме да ја запишеме во видот $\frac{a}{a+n+2}$. Дропката $\frac{a}{a+n+2}$ ќе биде нескратлива ако и само ако

$NZD(a,n+2)=1$. Очигледно $n+2=2k+1$, бидејќи за $n+2=2k$ и $a=2m$ важи $NZD(a,n+2)\geq 2\neq 1$. Исто така $n+2>31$. Имено, за $n+2\leq 31$ секогаш може да се најде број $a=n+2$ за кој дропката $\frac{a}{a+n+2}=\frac{a}{a+a}$ може да се скрати. За $n+2=33$ добиваме дека $n+2$ е делив со 3, па постои број, на пример $a=30$ за кој дропката $\frac{30}{30+33}$ може да се скрати. За $n+2=35$, заради деливоста со 5, постои број $a=30$ за кој дропката $\frac{30}{30+35}$ може да се скрати. Најмалиот број $n+2$ со својство $NZD(a,n+2)=1$ е бројот $n+2=37$ и тој е заемно прост со секој број помал или еднаков на 31. Затоа најмалиот број со неведеното својство е бројот $n=35$.

44. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $\underset{2018}{11...1}$ и 1111.

Решение. Да означиме $a=\underset{2018}{11...1}$ и $b=1111$. Од

$$2018=4\cdot 504+2,\ \underset{2018}{11...1}=\underset{2016}{11...1}00+11 \text{ и}$$

$$\underset{2016}{11...1}00=10^2\cdot\underset{2016}{11...1}=10^2\cdot\underbrace{11111111...1111}_{504\text{ пати по }1111}$$

$$=10^2\cdot 1111\cdot\underbrace{1\,0001\,0001...0001\,0001}_{504\text{ пати бројот }1},$$

$$=10^2\cdot 1111\cdot(1+10^4+10^8+...+10^{2012})$$

добиваме $a=bq+11$ за q природен број. Јасно е дека секој заеднички делител на a и b е делител на 11, што значи дека најголемиот заеднички делител на a и b е делител на $NZD(a,b)$. Бројот 11 е прост па единствени опции за $NZD(a,b)=1$ или 11. Јасно, 11 е делител на a и b па затоа $NZD(a,b)=11$.

II.3. ПРОСТИ БРОЕВИ

45. Збирот на првите n природни броеви е трицифрен број запишан со исти цифри. Определи го бројот n и збирот на првите n броеви.

Решение. Имаме $\overline{xxx}=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, па затоа

$$n(n+1)=2\cdot 111\cdot x=2\cdot 3\cdot 37\cdot x.$$

Бидејќи на левата страна имаме производ на два последователни природни броја, а на десната страна го имаме бројот 37 кој е прост број и x е едноцифрен број, т.е. $2\cdot 3\cdot x<60$, последното е можно само ако станува збор за производот $36\cdot 37$. Според тоа, $2\cdot 3\cdot 37\cdot x=36\cdot 37$, од каде добиваме $x=6$. Конечно, $n=36$ и $1+2+...+36=666$.

46. Докажи дека при делење на прост број со бројот 30 се добива остаток кој е прост број.

Решение. Нека при делење на простиот број p со бројот 30 се добива количник q и остаток r, т.е. $p=30q+r$, каде $0\leq r\leq 29$. Треба да докажеме дека r е прост број. Нека претпоставиме дека r е сложен број. Секој сложен број помал од 30 има делител барем еден од броевите 2, 3 и 5. Навистина, на секој парен број бројот 2 е прост делител, а непарни сложени броеви понмали од 30 се 9, 15, 21, 25 и 27 и секој од нив е делив со 3 или со 5. Последното значи дека r и 30 имаат барем еден заеднички прост делитл. Нека тој делител е q. Тогаш $30=qb$ и $r=qc$, каде b и c се природни броеви, па затоа $p=30a+r=1ba+1c=q(ab+c)$, т.е. $q\,|\,p$ што не е можно, бидејќи p е прост број. Конечно, од добиената противречност следува дека остатокот r кој се добива при делење на простиот број p со бројот 30 е прост број.

47. Докажи дека бројот $2018\cdot 2020-35$ е сложен број.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned}2018\cdot 2020-35&=(2019-1)(2019+1)-35=2019^2-1^2-35\\&=2019^2-36=2019^2-6^2=(2019-6)(2019+6)\\&=2013\cdot 2025,\end{aligned}$$

што значи дека $2018\cdot 2020-35$ е сложен број.

48. Определи го најмалиот природен број кој помножен со бројот 2646 дава точен куб на некој природен број.

Решение. Имаме $2646=2\cdot 3^3\cdot 7^2$. Бидејќи треба производот да е точен куб на природен број, сите степени на простите множители треба да се деливи со 3, а ако се бара најмалиот број тоа треба да се најмалите степени. Значи треба да помножиме со 2^2 и со 7, т.е. бараниот најмал множител е $2^2\cdot 7=28$. Притоа имаме

$$2646\cdot 28=(2\cdot 3^3\cdot 7^2)\cdot(2^2\cdot 7)=2^3\cdot 3^3\cdot 7^3=(2\cdot 3\cdot 7)^3=42^3.$$

49. Производот на два двоцифрени броја е запишан само со помош на цифрата 4. Определи ги овие броеви.

Решение. Производот на два двоцифрени броја е поголем или еднаков на $10\cdot 10=100$, а е помал или еднаков на $99\cdot 99=9801$, па затоа можни се само броевите 444 и 4444. Од $444=2^2\cdot 3\cdot 37=12\cdot 37$, добиваме дека броевите 12 и 37 се едно решение на задачата. Понатаму, бидејќи $4444=4\cdot 11\cdot 101$ и бројот 101 е прост заклучуваме дека бројот 4444 не може да биде запишан како производ на два двоцифрени броја, па затоа задачата нема други решенија.

50. Производот на два трицифрени броја се запишува само со помош на неколку седумки. Определи ги овие трицифрени броеви.

Решение. Производ на два трицифрени броја е поголем или еднаков на $100\cdot 100=10000$, а е помал од $1000\cdot 1000=1000000$, што значи дека е петцифрен или шестцифрен број. Ако производот е петцифрен број, тогаш $77777=7\cdot 11111=7\cdot 41\cdot 271=287\cdot 271$, бидејќи броевите 7, 41 и 271 се прости. Ако производот е шестцифрен број, тогаш добиваме $777777=7\cdot 111111=3\cdot 7\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$. Најмалиот трицифрен број кој може да се формира со добиените прости множители е 111, а најголемиот е 777. Во првиот случај производот на останатите прости множители е еднаков на 7007, а во вториот случја е еднаков на 1001, па затоа не постојат трицифрени броеви чиј производ е еднаков на 777777.

51. Ако p е прост број поголем од 2, тогаш $p^{1987}+1987^p$ е сложен број. Докажи!

Решение. Нека p е прост број поголем од 2. Тогаш p е непарен број, па затоа p^{1987} е непарен број поголем од 2. Понатаму, 1987^p е непарен број поголем од 2, па затоа $p^{1987}+1987^p$ е парен број поголем од 4, што значи дека е сложен број.

52. Ако p е прост број, тогаш бројот $p^{1995}+1995^p+1996$ е сложен број. Докажи!

Решение. Ако $p=2$, тогаш

$$p^{1995}+1995^p+1996=2^{1995}+1+1995^2+1995$$

$$=(2+1)(2^{1994}-2^{1993}+...+2^2-2+1)+1995\cdot(1995+1)$$
$$=3\cdot(2^{1994}-2^{1993}+...+2^2-2+1)+3\cdot665\cdot1996$$

т.е. $p^{1995}+1995^p+1996$ е сложен број. Ако $p>3$ е прост број, тогаш p^{1995} и 1995^p се непарни броеви, па затоа $p^{1995}+1995^p+1996$ е парен број поголем од 2, што значи е сложен број.

53. Определи ги сите прости броеви p такви што и бројот p^3+3^p е прост.

Решение. Нека $p=2$. Тогаш

$$p^3+3^p=8+9=17$$

е прост број. Нека $p>3$ прост број. Тогаш p е непарен број. Но, тогаш бројот p^3 е исто така непарен број, па затоа p^3+3^p е збир на два непарни броја, што значи дека е парен број. Според тоа, само простиот број $p=2$ ги задоволува условите на задачата.

54. Определи ги сите прости броеви p за кои $p^2+2p+11$ и p^2+p+13 се прости броеви.

Решение. За $p=2$ имаме $4+4+11=19$ и $4+2+13=19$. Значи, едно решение е $p=2$.

За $p=3$ имаме $9+6+11=26=2\cdot13$, па затоа $p=3$ не е решение на задачата.

Ако $p>3$, тогаш p е од облик $p=6k\pm1$. Нека $p=6k+1$. Тогаш

$$p^2+p+13=(6k+1)^2+6k+1+13=36k^2+18k+15=3(12k^2+6k+5)$$

и како $12k^2+6k+5\geq23$ заклучуваме дека p^2+p+13 е сложен број. Нека $p=6k-1$. Тогаш

$$p^2+2p+11=(6k-1)^2+2(6k-1)+11=36k^2+10=2(18k^2+5)$$

и како $18k^2+5\geq23$ заклучуваме дека $p^2+2p+11$ е сложен број. Следува $p=2$ е единствено решение на задачата.

55. Определи три прости броја така што нивниот производ е пет пати поголем од нивниот збир.

Решение. Нека p,q,r се бараните броеви. Според условот на задачата добиваме

$$pqr = 5(p+q+r),$$

од каде следува дека еден од бараните прости броеви е еднаков на 5, на пример $p=5$. Сега последователно добиваме

$$qr = 5+q+r$$
$$qr-q = r+5$$
$$q(r-1) = r+5$$
$$q = \frac{r+5}{r-1} = 1+\frac{6}{r-1}.$$

Значи, $r-1|6$, па затоа $r-1\in\{1,2,3,6\}$, т.е. $r\in\{2,3,4,7\}$. Но, r е прост број, па затоа $r\in\{2,3,7\}$. Непосредно се проверува дека може да биде $r=2$ и $q=7$ или обратно. Конечно, бараните прости броеви се 2, 5 и 7.

56. Определи природните броеви $n_1, n_2, ..., n_k$, ($k>1$) такви што

$$n_1+n_2+...+n_k = 1988 \text{ и } n_1\cdot n_2\cdot ...\cdot n_k = 1988.$$

Решение. Имаме $1988 = 2\cdot 2\cdot 7\cdot 71$ и $2+2+7+71=82$. Едно решение на задачата е

$$n_1\cdot n_2\cdot ...\cdot n_k = 2\cdot 2\cdot 7\cdot 71\cdot \underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot ...\cdot 1\cdot 1\cdot 1}_{1906 \text{ единици}}.$$

57. Даден е полиномот $P(x) = x^3+2x^2-x-2$.

а) Ако p е прост број поголем од 3, тогаш $P(p)$ е делив со 24. Докажи!

б) Определи го најмалиот прост број p таков што $P(p)$ е делив со 120.

Решение. а) Имаме

$$P(x) = x^3+2x^2-x-2 = x^2(x+2)-(x+2) = (x-1)(x+1)(x+2),$$

па затоа $P(p) = (p-1)(p+1)(p+2)$. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш p е од видот $6k-1$ или $6k+1$, Во првиот случај имаме:

$$P(6k-1) = 12k(3k-1)(6k+1),$$

па ако k е парен број, тогаш е јасно дека $24|P(p)$, а ако k е непарен број, тогаш $3k-1$ е парен број па затоа $24|P(p)$. Во вториот случај имаме:

$$P(6k+1) = 36k(3k+1)(2k+1),$$

па ако k е парен број, тогаш е јасно дека $24|P(p)$, а ако k е непарен број, тогаш $3k+1$ е парен број па затоа $24|P(p)$.

Производот $(p-1)(p+1)(p+2)$ е делив со $120=5\cdot 24$ ако некој од множителите $p-1, p+1$ или $p+2$ е делив со 5, т.е. ако припаѓа на множеството $\{5,10,15,...\}$. Најмал таков број е $p=11$.

II.4. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

58. Илија треба да реши 20 задачи. За секоја точно решена задача добива по 8 бода, за неточно решена задача му се одземаат по 5 бода, а задача која не е решена не се бодува. Илија освоил 13 бодови. Колку задачи решил точно Илија?

Решение. Нека Илија точно решил x задачи, неточно решил y задачи и не решил z задачи. Тогаш $x+y+z=20$ и $8x-5y=13$. Од втората равенка добиваме $y=x-2+3\cdot\frac{x-1}{5}$. Но, x и y се природни броеви и како 3и 5 се заемно прости од последната равенка следува $x=5k+1$. Но, $x\leq 20$, па од $x=5k+1$ добиваме дека $x\in\{6,11,16\}$.

Ако $x=6$, тогаш $5y+13=48$, па затоа $y=7$ и $z=7$.

Ако $x=11$, тогаш $5y+13=88$, па затоа $y=15$, што не е решение бидејќи $x+y=26>20$.

Ако $x=16$, тогаш $5y+12=128$, па $y=23>20$, што значи дека и во овој случај немаме решение.

Значи, единствено тжрепение е $x=6$, $y=7$ и $z=7$.

59. Во множеството цели броеви реши ја равенката $a(a-b)=b$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $a^2=b(a+1)$. Од $NZD(a,a+1)=1$ и $a+1|a^2$ следува $a+1=1$ или $a+1=-1$. Во првиот случај $a=0$ и $b=0$, а во вториот случај $a=-2$ и $b=-4$.

60. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$2mn-5m+3n=130.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$2mn-5m+3n=130$$
$$2mn+3n=5m+130$$
$$n(2m+3)=5m+130$$

$$n=\frac{5m+130}{2m+3}.$$

Сега, ако n е природен број, тогаш и $2n$ е природен број. Понатаму, важи

$$2n=\frac{10m+260}{2m+3}=\frac{5(2m+3)+245}{2m+3}=5+\frac{245}{2m+3},$$

па затоа мора да е $2m+3$ делител на 245. Од $245=5\cdot 7\cdot 7$, следува дека делители на бројот 245 се 1, 5, 7, 35, 49 и 245. Според тоа, имаме шест можности и тоа:

1) Ако $2m+3=1$, тогаш $m=-1$, што не е природен број.
2) Ако $2m+3=5$, тогаш $m=1$ и $n=27$.
3) Ако $2m+3=7$, тогаш $m=2$ и $n=20$.
4) Ако $2m+3=35$, тогаш $m=16$ и $n=6$.
5) Ако $2m+3=49$, тогаш $m=23$ и $n=5$.
6) Ако $2m+3=245$, тогаш $m=121$ и $n=3$.

61. Во множеството цели броеви реши ја равенката $xy-2x=5y-7$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$x(y-2)=5(y-2)+3,$$
$$(x-5)(y-2)=3.$$

Сега, бидејќи $3=1\cdot 3=(-1)(-3)$, добиваме

1) $x-5=1, y-2=3$, т.е. $x=6, y=5$,
2) $x-5=3, y-2=1$, т.е. $x=8, y=3$,
3) $x-5=-1, y-2=-3$, т.е. $x=4, y=-1$ и
4) $x-5=-3, y-2=-1$, т.е. $x=2, y=1$.

62. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2y=y^3+10.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$x^2=y^2+\frac{10}{y}.$$

Бидејќи x и y се цели броеви мора и $\frac{10}{y}$ да е цел број. Затоа $y|10$, т.е. $y\in\{\pm 1,\pm 2,\pm 5,\pm 10\}$. Со непосредна проверка добиваме дека решенија на задачата се $(x,y)=(3,2)$ и $(x,y)=(-3,2)$.

63. На почетокот на воената парада група војници се построила во облик на квадрат (n редови по n војници), а потоа се престроиле во право-

аголна формација при што бројот на редовите се зголемил за 5 ($n+5$ редови по m војници). Колку војници учествувале во парадата?

Решение. Од условот на задачата следува $n^2=m(n+5)$, па затоа

$$m=\frac{n^2}{n+5}=\frac{n^2-25+25}{n+5}=n-5+\frac{25}{n+5}.$$

Според тоа, за да m биде природен број потребно е $n+5\,|\,25$, па затоа $n+5$ може да биде еднаков на 1, 5 или 25. Но, n е природен број, па затоа единствена можност е $n+5=25$, т.е. $n=20$. Конечно, имало $20^2=400$ војници, кои прво биле построени во 20 реда со по 20 војници, а потоа биле построени во 25 реда со по 16 војници.

64. Определи ги сите цели броеви n за кои дропката $\frac{5n^2-9}{2n+6}$ е цел број.

Решение. Имаме, $\frac{5n^2-9}{2n+6}=\frac{5}{2}(n-3)+\frac{18}{n+3}$. За да вредноста на дропката биде цел број потребно е

а) $n-3$ да е парен број, т.е. n да е непарен број и

б) $n+3\in\{1,-1,2,-2,3,-3,6,-6,9,-9,18,-18\}$.

Бидејќи n е непарен број, добиваме дека $n+3$ е парен број, па затоа $n+3\in\{2,-2,6,-6,18,-18\}$, од каде добиваме $n\in\{-1,-5,3,-9,15,-21\}$.

65. Определи ги сите целобројни вредности на изразот $\frac{n^3-n^2+3}{n-1}, n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Дадената дропка е еквивалентна на изразот

$$\frac{n^3-n^2+3}{n-1}=\frac{n^2(n-1)+3}{n-1}=n^2+\frac{3}{n-1}, n\in\mathbb{Z}.$$

За да изразот прима целобројна вредност потребно и доволно е $n-1\,|\,3$, односно $n-1\in\{-1,1,-3,3\}$. Притоа $n\in\{0,2,-2,4\}$ и вредностите на изразот се: $\{-3,7,3,17\}$.

66. Определи го целиот број m за кој вредноста на дропката $\frac{m^2+2m-15}{m^2-9}$ е цел број.

Решение. Имаме

$$\frac{m^2+2m-15}{m^2-9}=\frac{m^2-9+2m-6}{m^2-9}=\frac{m^2-9}{m^2-9}+\frac{2m-6}{m^2-9}=1+\frac{2(m-3)}{(m-3)(m+3)}=1+\frac{2}{m+3}.$$

Според тоа, $\frac{m^2+2m-15}{m^2-9}$ е цел број ако и само ако $m+3\,|\,2$, односно $m+3\in\{-1,1,-2,2\}$, од каде добиваме $m\in\{-5,-4,-2,-1\}$.

67. Определи ги сите цели броеви m за кои $\frac{2m^2+7m-9}{m^2+m+1}$ е цел број.

Решение. Имаме

$$\frac{2m^2+7m-9}{m^2+m+1}=2+\frac{5m-11}{m^2+m+1}.$$

Според тоа, $\frac{5m-11}{m^2+m+1}$ мора да биде цел број. Бидејќи $m^2+m+1>0$, за секој цел број m, добиваме дека за $m\leq 2$ важи $\frac{5m-11}{m^2+m+1}<0$, а за $m\geq 3$ важи $\frac{5m-11}{m^2+m+1}>0$.

Нека $m\leq 2$. Тогаш $w=\frac{5m-11}{m^2+m+1}<0$. Бидејќи w е цел број, важи $\frac{5m-11}{m^2+m+1}\leq -1$, па затоа $5m-11\leq -m^2-m-1$, т.е. $m^2+6m-10\leq 0$, од каде добиваме $(m+3)^2\leq 19$. Значи, $-4\leq m+3\leq 4$, од каде што следува $m\in\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1\}$. Со непосредна проверка заклучуваме дека бараниот број е цел за $m\in\{-2,-1,0,1\}$.

Нека $m\geq 3$. Тогаш $\frac{5m-11}{m^2+m+1}\geq 1$, односно $5m-11\geq m^2+m+1$, т.е. $m^2-4m+12\leq 0$. Но, $m^2-4m+12=(m-2)^2+8\geq 8$, што значи дека во овој случај немаме решение на задачата.

Конечно, решението на задачата е $m\in\{-2,-1,0,1\}$.

68. а) Скрати ја дропката $R=\frac{n^2+2n-8}{n^2-4}$.

б) Определи ги сите цели броеви n за кои вредноста на R е цел број.

Решение. а) Имаме

$$R=\frac{n^2+2n-8}{n^2-4}=\frac{n^2+4n-2n-8}{(n-2)(n+2)}=\frac{n(n+4)-2(n+4)}{(n-2)(n+2)}=\frac{(n+4)(n-2)}{(n-2)(n+2)}=\frac{n+4}{n+2},\ n\neq\pm 2.$$

б) Имаме $R=\frac{n+4}{n+2}=\frac{n+2}{n+2}+\frac{2}{n+2}=1+\frac{2}{n+2}$. За да дропката R е цел број потребно е $n+2|2$, па затоа $n+2\in\{-2,-1,1,2\}$, од каде следува $n\in\{-4,-3,-1,0\}$ и притоа $R\in\{0,-1,3,2\}$.

69. Броевите 12 и 60 имаат интересно својство: нивниот производ е десет пати поголем од нивниот збир. Определи ги сите парови природни броеви кои го имаат ова својство.

Решение. Нека x и y се бараните броеви. Од условот на задачата следува

$$xy = 10(x+y).$$

Понатаму, со еквивалентни трансформации добиваме

$$\begin{aligned}
&xy = 10(x+y)\\
&xy - 10x - 10y = 0,\\
&xy - 10x - 10y + 100 = 100,\\
&(x-10)(y-10) = 100.
\end{aligned}$$

Но,

$$100 = 1\cdot 100 = 2\cdot 50 = 4\cdot 25 = 5\cdot 20 = 10\cdot 10,$$

па ако ги формираме и ги решиме соодветните системи од две равенки со две непознарти, добиваме дека бараните парови броеви се: 11 и 110, 12 и 60, 14 и 35, 15 и 30, 20 и 20.

70. Должините на страните на правоаголниот триаголник се природни броеви, при што должината на едната катета е 15. Определи ги должините на другите две страни на триаголникот. Колку различни правоаголни триаголници има со ова својство?

Решение. Нека a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата. Тогаш $c^2 - a^2 = 15^2$, па затоа

$$(c-a)(c+a) = 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5$$

и притоа важи $0 < c-a < c+a$. Последната равенка треба да ја решиме во множеството природни броеви, па затоа треба да ги решиме системите равенки

$$\begin{cases} c-a=1 \\ c-a=225 \end{cases} \qquad \begin{cases} c-a=3 \\ c+a=75 \end{cases} \qquad \begin{cases} c-a=5 \\ c+a=45 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} c-a=9 \\ c+a=25 \end{cases}$$

чии решенија се подредените парови $(112,113)$, $(36,39)$, $(20,25)$ и $(6,17)$. Според тоа, постојат четири различни правоаголни триаголници и тоа $(15,112,113)$, $(15,36,39)$, $(15,20,25)$ и $(8,15,17)$.

71. Природните броеви x, y и z го задоволуваат равенството

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6(x+y+z).$$

Определи ја најголемата можна вредност на бројот z.

Решение. Последователно имаме

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + z^2 - 6(x+y+z) = 0\\
&x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 6z + 9 = 27\\
&(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 27.
\end{aligned}$$

Од друга страна, равенството $1^2+1^2+5^2=27$ покажува дека е можно еден од броевите, т.е. било кој од нив да е еднаков на 5. Според тоа, $z-3=5$, т.е. $z=8$. Значи, бараната најголема вредност е 8.

72. Определи го бројот на подредените парови цели броеви (x,y) такви што

$$8x^2-6xy+y^2=5.$$

Решение. Од $8x^2-6xy+y^2=(2x-y)(4x-y)$ следува

$$(2x-y)(4x-y)=1\cdot 5=(-1)\cdot(-5),$$

односно

$$\begin{cases}2x-y=-5\\4x-y=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}2x-y=-1\\4x-y=-5,\end{cases}\quad\begin{cases}2x-y=5\\4x-y=1,\end{cases}\quad\begin{cases}2x-y=1\\4x-y=5.\end{cases}$$

Оттука наоѓаме дека $(x,y)=(2,9),(-2,-3),(2,3),(-2,-9)$, т.е. постојат четири подредени парови цели броеви кои го задоволуваат даденото равенство.

73. Даден квадрат е исечен на 100 квадрати така што плоштината на 99 од нив е еднаква на 1. Пресметај ја плоштината на дадениот квадрат.

Решение. Нека x е страната на дадениот квадрат а y е страната на квадратот што се добива со отфрлање на 99-те квадрати со плоштина 1. Тогаш y е цел број и важи $x^2-y^2=99$. Оттука

$$(x-y)(x+y)=1\cdot 3\cdot 3\cdot 11$$

па имаме

1) $x-y=1, x+y=99$ и оттука $x=50$, $y=49$

2) $x-y=3, x+y=33$ и оттука $x=18$, $y=15$

3) $x-y=9$, $x+y=11$ и оттука $x=10$, $y=1$

Значи, постојат три квадрати со даденото својство и тие имаат плоштини 2500, 324 и 100.

74. Определи ги сите парови прости броеви чија разлика на квадрати е еднаква на 120.

Решение. Нека $(x,y), x>y$ е бараниот пар прости броеви. Од условот на задачата следува $x^2-y^2=120$, т.е. $(x-y)(x+y)=120$. Очигледно $x-y+x+y=2x$ е парен број, па затоа двата множители мора да бидат со иста парност, а како производ на два непарни броеви е непарен број заклучуваме дека двата множители мора да бидат парни. Оттука следува дека се можни следниве случаи:

$$\begin{cases} x+y=60 \\ x-y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=30 \\ x-y=4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=20 \\ x-y=6 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=12 \\ x-y=10 \end{cases}.$$

Решенијата на првите три системи се и бараните подредени парови прости броеви (x,y), т.е. (31,29), (17,13) и (13,7), а додека последниот систем не дава решение, бидејќи се добива $x=11$ и $y=1$, а 1 не е прост број.

75. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$2x^2-y^2=y^2+1994.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $x^2-y^2=997$, т.е. на равенката $(x-y)(x+y)=997$. Бидејќи 997 е прост број, броевите $x-y$ и $x+y$ припаѓаат на множеството $\{1,-1,997,-997\}$ и имаме

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=997 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-997 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=997 \\ x+y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-997 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

Оттука добиваме

$$(x,y)\in\{(499,498),(499,-498),(-499,498),(-499,-498)\}.$$

76. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$m^2+n^2=2019.$$

Решение. Имаме $m^2+n^2=2019$, па затоа еден од броевите m и n е парен, а другот е непарен. Нека $m=2k$ и $n=2s+1$. Тогаш

$$4k^2+4s^2+4s+1=2019,$$

па затоа

$$4(k^2+s^2+s)=2018.$$

Во последното равенство левата страна е делива со 4, а десната страна не е делива со 4, па затоа не постојат цели броеви k и s за кои истото е исполнето. Конечно, почетната равенка нема решение во множеството цели броеви.

77. Докажи дека равенката $x^2-y^2=1990$ нема решенија во множеството цели броеви.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во видот

$$(x-y)(x+y)=2\cdot 995.$$

Ако броевите x и y се со различна парност, тогаш $x-y$ и $x+y$ се непарни броеви, па $(x-y)(x+y)$ е непарен број, а $2\cdot 995$ е парен број, што е противречност. Значи броевите x и y се со иста парност и тогаш $x-y=2n$ и $x+y=2m$, па затоа $4mn=2\cdot 995$, т.е. $2mn=995$, што не е можно. Конечно, од добиената противречност следува дека дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

78. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2y^2=3y^2+x^2.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}&x^2y^2=3y^2+x^2\\&x^2y^2-x^2-3y^2+3=3\\&x^2(y^2-1)-3(y^2-1)=3\\&(y^2-1)(x^2-3)=3.\end{aligned}$$

Разгледувајќи ги сите можности добиваме дека сите целобројни решенија на дадената равенка се: $(0,0),(2,2),(2,-2),(-2,2),(-2,-2)$.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ за чии цифри се исполнети равенствата $\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}$.

   Решение. Од $\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}$ следува:

   1) $\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}$, т.е. $b=3c-4a$,

   2) $\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}$, т.е. $c=4a-5b$ и

   3) $\frac{a+b}{3}=\frac{c+a}{5}$, т.е. $2a=3c-5b$.

   Од втората и третата равенка добиваме

   $$c=4a-5b=2\cdot 2a-5b=2(3c-5b)-5b=6c-15b\text{, т.е. } c=3b.$$

   Сега, од третата равенка следува $2a=3\cdot 3b-5b$, т.е. $a=2b$. Тоа значи, дека $\overline{abc}=100a+10b+c=213b$ и како a,b,c се цифри, од $a=2b$ и $c=3b$ следува дека $b\in\{1,2,3\}$ и бараните броеви се 213, 426 и 639.

2. Определи го најголемиот петцифрен парен број чии први три цифри формираат точен квадрат, а последните три цифри формираат точен куб на природен број?

   Решение. Трицифрени парни кубови, односно кандидати за последните три цифри се $8^3=512$ и $6^3=216$. Значи, бројот кој е формиран од првите три цифри завршува или на цифрата 5 или на цифрата 2. Но, квадрат на природен број не може да завршува на цифрата 2, па затоа последните три цифри на бараниот број се 512. Најголем број чиј квадрат е трицифрен број и завршува на цифрата 5 е 25. Од $25^2=625$ заклучуваме дека бараниот петцифрен број е 62512.

3. Збирот на четири броја е 396. Ако на првиот број му се додаде 5, од вториот се одземе 5, третиот се помножи со 5, а четвртиот се подели до 5, се добиваат четири еднакви броја. Кои се тие броеви?

   Решение. Имаме

   $$x+y+z+t=396 \text{ и } x+5=y-5=5z=\frac{t}{5},$$

   од каде добиваме $x=50, y=60, z=11, t=275$.

4. Збирот на два природни броја е 4923. Ако на едниот од тие два броја од десната страна му ја допишеме цифрата 7, а на другиот му ја избришеме цифрата на единиците, ќе добиеме два еднакви броја. Определи ги почетните броеви.

Решение. Нека x е еден од почетните броеви. Ако од десната страна му допишеме 7 го добиваме бројот $10x+7$. Со y да го означиме бројот кој го добиваме кога на вториот почетен број му ја бришеме цифрата на единиците, а таа избришана цифра да ја означиме со n. Според тоа, вториот почетен број е $10y+n$. Од првиот услов имаме $x+10y+n=4923$, а од вториот услов добиваме $10x+7=y$. Ако втората равенка ја помножиме со 10 и замениме во првата равенка добиваме $101x+n=4853$. Бидејќи n е цифра, тоа е еден од броевите 0, 1, 2, ...,9, што значи дека x е количникот, а n е остатокот при делење на 4853 со 101. Имаме $4853=101\cdot 48+5$, па затоа $x=48$ и $n=5$. Според тоа, $y=10\cdot 48+5=487$. Конечно, почетните броеви се 48 и 4875.

5. Определи го трицифрениот број кој е 12 пати поголем од збирот на своите цифри.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{abc}$. Од условот на задачата следува

$$100a+10b+c=12(a+b+c).$$

Добиената равенка е еквивалентна на равенката $2b=11(8a-c)$. Но, b е цифра, па затоа простиот број 11 е делител на $2b$ ако и само ако $b=0$. Тоа значи, $8a-c=0$, од каде заклучуваме $a=1$ и $c=8$. Според тоа, бараниот број е $\overline{abc}=108=12\cdot(1+0+8)$.

6. Определи ги сите двоцифрени броеви со својство збирот на тој број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е квадрат на некој природен број.

Решение. Нека $\overline{ab}$ е двоцифрен број со саканото својство. Имаме,

$$\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11(a+b),$$

па за да овој збир еквадрат на природен број потребно и доволно е да важи $a+b=11$. Според тоа, $\overline{ab}\in\{92,83,74,65,56,47,38,29\}$.

7. На таблата е запишан трицифрен број во чиј запис сите цифри се различни од нула. Од него се добиени три двоцифрени броеви, така што прво се пречкртува првата цифра на почетниот број, потоа се пречкр-

тува втората цифра на почетниот број и на крајот се пречкртува последната цифра на почетниот број. Збирот на така добиените броеви е еднаков на 293. Определи го почетниот број.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот број. Добиените двоцифрени броеви се $\overline{bc}, \overline{ac}$ и $\overline{ab}$. Според условот на задачата нивниот збир е еднаков на 293, па затоа

$$20a+11b+2c=293.$$

Понатаму, ако $a\le 8$, тогаш

$$293=20a+11b+2c\le 20\cdot 8+11\cdot +2\cdot 9=277,$$

што не е можно. Според тоа, мора да важи $a=9$. Сега имаме $11b+2c=113$. Слично се добива дека мора да е $b=9$, па оттука $99+2c=113$, т.е. $c=7$. Конечно, бараниот број е 997.

8. Даден е трицифрен број. Ако неговите цифра на единиците и цифра на десетките ги заменат местата, тогаш дадениот број се зголемува за 45, а ако цифрата на стотките и цифрата десетките ги заменат местата, тогаш дадениот број се намалува за 270. Што ќе се случи ако цифрата на стотките и цифрата на единиците ги заменат местата?

Решение. Нека $100x+10y+z$ е дадениот трицифрен број. Тогаш при замена на цифрите на десетките и единиците, добиваме

$$100x+10y+z+45=100x+10z+y, \text{ т.е. } y-z+5=0.$$

Ако цифрите на стотките и десетките ги заменат местата, добиваме

$$100x+10y+z=100y+10x+z+270, \text{ т.е. } x-y-3=0.$$

Ако ги собереме добиените равенства наоѓаме $x-z=-2$, Според тоа, ако цифрите на стотките и единиците ги заменат местата, добиваме

$$100x+10y+z-(100z+10y+x)=99(x-z)=99\cdot(-2)=-198,$$

што значи дека во овој случај бројот се зголемува за 198.

9. Разликата, збирот и производот на два броја се однесуваат како $1:7:24$. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се x и y. Според условот на задачата $(x-y):(x+y):xy=1:7:24$, т.е. $x-y=k, x+y=7k$ и $xy=24k$, за некој $k\neq 0$. Ако ги собереме првата и втората равенка добиваме $2x=8k$, т.е. $x=4k$, а ако од втората равенка ја одземеме првата равенка добиваме $2y=6k$, т.е. $y=3k$. Сега, со замена во третата равенка наоѓаме $3k\cdot 4k=24k$, па како $k\neq 0$ добиваме $k=2$. Според тоа, $x=4k=8$ и $y=3k=6$.

10. Определи ги броевите a,b,c ако нивниот збир е за $\frac{5}{2}$ поголем од a, за $\frac{59}{6}$ поголем од b и за $\frac{5}{3}$ поголем од c.

Решение. Од условот на задачата следуваат равенките
$$a+b+c=a+\frac{5}{2}, a+b+c=b+\frac{59}{6}, a+b+c=c+\frac{5}{3},$$
т.е. равенките $b+c=\frac{5}{2}, a+c=\frac{59}{6}, a+b=\frac{5}{3}$. Ги собираме последните три равенки и добиваме $2a+2b+2c=14$, т.е. $a+b+c=7$. Сега, $a=7-\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$, $b=7-\frac{59}{6}=-\frac{17}{6}$ и $c=7-\frac{5}{3}=\frac{16}{3}$.

11. Намалителот е еднаков на $\frac{8}{13}$ од намаленикот. На колку проценти од намалителот е еднаква разликата?

Решение. Намаленикот е $\frac{13}{8}$ од намалителот. Разликата е $\frac{5}{13}$ од намаленикот, што значи $\frac{5}{13}\cdot\frac{13}{8}=\frac{5}{8}=62,5\%$ од намалителот.

12. Ако броителот на една дропка се зголеми за 5%, а именителот се зголеми за 20%, дали вредноста на дропката ќе се зголеми или ќе се намали и за колку проценти?

Решение. Нека дадената дропка е $\frac{a}{b}$. По зголемувањето на броителот и именителот дропката го добива видот $\frac{1,05a}{1,20b}=\frac{7}{8}\cdot\frac{a}{b}$. Имаме,
$$\frac{a}{b}-\frac{7}{8}\cdot\frac{a}{b}=\frac{1}{8}\cdot\frac{a}{b},$$
што значи дека дропката се намалила за $\frac{1}{8}$ или $\frac{1}{8}\cdot 100\%=12,5\%$.

13. Замислив еден број, кој го помножив со бројот $\frac{5}{6}$ и на добиениот резултат го додадов бројот $\frac{3}{4}$, после што го добив бројот $\frac{5}{4}$. Кој број го замислив?

Решение. Имаме
$$x\cdot\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4} \quad\Leftrightarrow\quad 10x+9=15 \quad\Leftrightarrow\quad 10x=6 \quad x=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$
Значи, замислениот број е $\frac{3}{5}$.

14. Ако броителот на некоја дропка се намали за 8%, а именителот на дропката се зголеми за 8%, тогаш новата дропка ќе биде за 2 помала од почетната. Определи ја вредноста на почетната дропка.

Решение. Нека дадената дропка е $\frac{x}{y}$. Кога броителот ќе се намали за 8%, а именителот ќе се зголеми за 8%, ја добиваме дропката $\frac{0{,}92x}{1{,}08y}$, па затоа $\frac{x}{y}-\frac{0{,}92x}{1{,}08y}=2$, од каде добиваме $\frac{x}{y}(1-\frac{0{,}92}{1{,}08})=2$, т.е. $\frac{x}{y}\cdot\frac{16}{108}=2$. Според тоа, $\frac{x}{y}=2:\frac{16}{108}=2\cdot\frac{108}{16}=\frac{27}{2}$.

15. Во една дропка именителот е за три поголем од броителот. Ако броителот на оваа дропка го зголемиме за 2, а именителот го зголемиме трипати, тогаш збирот на така добиената дропка и почетната дропка е еднаков на 1. Определи ја почетната дропка.

Решение. Нека x е броителот на почетната дропка. Тогаш $x+3$ е нејзиниот именител, а $\frac{x}{x+3}$ е почетната дропка. После зголемувањето на броителот и именителот ја добиваме дропката $\frac{x+2}{3(x+3)}$. Според тоа, $\frac{x}{x+3}+\frac{x+2}{3(x+3)}=1$. Ако првата дропка ја прошириме со 3 и ги собереме добиените дропки последователно добиваме

$$\frac{3x}{3(x+3)}+\frac{x+2}{3(x+3)}=1$$
$$\frac{4x+2}{3(x+3)}=1$$
$$4x+2=3x+9$$
$$x=7.$$

Според тоа, почетната дропка е $\frac{x}{x+3}=\frac{7}{10}$.

16. Определи ги сите нескратливи вистински дропки кои се поголеми од $\frac{1}{3}$ и се такви што постои природен број x таков што вредноста на дропката не се менува ако броителот се зголеми за x, а именителот се помножи со x.

Решение. Нека бараната дропка е $\frac{a}{b}, b\neq 0$ и $\mathrm{NZD}(a,b)=1$. Тогаш $\frac{a}{b}=\frac{a+x}{bx}$, од каде добиваме $x=\frac{a}{a-1}=1+\frac{1}{a-1}$. Бидејќи x е природен број добиваме $a-1=1$, т.е. $a=2$ и затоа $x=2$. За дропките $\frac{2}{3}=\frac{2+2}{2\cdot 3}$ и $\frac{2}{5}=\frac{2+2}{2\cdot 5}$ се исполнети сите услови на задачата. Кај дропката $\frac{2}{4}$ броителот и именителот не се заемно прости, а за $b\geq 6$ важи $\frac{2}{b}\leq\frac{1}{3}$.

17. Дадени се 2015 броеви такви што ако секој од нив се замени со збирот на останатите, тогаш повторно се добиваат истите 2015 броеви. Докажи дека производот на дадените броеви е еднаков на нула.

Решение. Со S да го означиме збирот на дадените 2015 броеви. Тогаш бројот a се заменува со бројот $b=S-a$. Ако ги собереме дадените броеви добиваме

$$b_1+b_2+...+b_{2015}=2015S-(a_1+a_2+...+a_n).$$

Бидејќи

$$b_1+b_2+...+b_{2015}=a_1+a_2+...+a_n=S$$

важи $S=2015S-S$, па затоа $S=0$. Според тоа, за секој број a меѓу дадените броеви постои број $b=-a$. Така дадените броеви ги делиме на парови $(a,-a)$, па како имаме непарен број, т.е. 2015 броеви следува дека меѓу нив постои број a таков што $a=-a$, т.е. $a=0$. Конечно, производот на дадените броеви е еднаков на нула.

III.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

18. Цената на месото во една продавница се зголемила за 8%, а во друга се намалила за 8%. Определи ја почетната цена на месото ако сега разликата во цените на месото е 56 денари.

Решение. Ако цената на месото била x денари, тогаш во првата продавница таа била $1,08x$ денари, а во втората продавница била $0,92x$ денари. Разликата во цените е $0,16x$ денари, па затоа $0,16x=56$, од каде добиваме $x=350$ денари.

19. Во една продавница за облека цената на еден вид фармерки се покачила за 8%, а во друга продавница за облека истата цена ја намалиле за 8%. Сега фармерките во втората продавница се поевтини за 264 денари отколку во првата продавница. Определи ја пониската цената на фармерките во втората продавница.

Решение. Нека x е почетната цена на фармерките. Во првата продавница по покачувањето новата цена е $1,08x$, а во втората продавница по намалувањето на цената новата цена е $0,92x$. СПоред тоа, $1,08x-0,92x=264$, од каде добиваме $0,16x=264$, т.е. $x=1650$ денари. Значи, пониската цена на фармерките во втората продавница е $0,92\cdot 1650=1518$ денари.

20. Третина од некоја стока е продадена по цена која е за 10% повисока од планираната, а половина од истата стока е продадена за 15% поевтино од планираната цена. Со колку проценти над планираната цена треба да се продаде остатокот од стоката ако се сака на крајот наплатената сума пари за вкупната количина стока да биде еднаква на сумата која би се добила ако целата стока се продадеше по планираната цена?

    Решение. Нека k е вкупното количество стока, c е планираната цена и x е барaниот процент. Количеството стока кое останало непродадено е $k-\frac{k}{3}-\frac{k}{2}=\frac{k}{6}$, па од условот на задачата следува равенката $\frac{k}{3}\cdot 0,1c+\frac{k}{6}\cdot cx=\frac{k}{2}\cdot 0,15c$ чие решение е $x=0,25$, што значи дека бараниот процент е 25%.

21. Една четвртина од вкупното количество стока е продадено со 5% заработувачка, а $\frac{1}{2}$ од стоката е продадена со 10% загуба. Со колкав процент заработувачка треба да се продаде остатокот ос стоката за да се покрие веќе направената загуба?

    Решение. Останува непродадена $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ од стоката. Ако процентот на добивка со кој истата треба да се продаде е x, тогаш од условот на задачата следува равенката $\frac{1}{4}\cdot 105\%+\frac{1}{2}\cdot 90\%+\frac{1}{4}\cdot(100+x)=1$, од каде добиваме $x=15\%$.

22. Шестина од вкупното количество на некоја стока е продадена со заработувачка од 20%, а половината е вкупното количество на истата стока е продадена со загува од 10%. Со колкав процент на заработувачка треба да се продаде остатокот од стоката за да се покрие досега направената загуба?

    Решение. Нека k е вкупното количество стока, c е планираната цена и x е бараниот процент. Количеството стока кое останало непродадено е $k-\frac{k}{6}-\frac{k}{2}=\frac{k}{3}$, па од условот на задачата следува равенката $\frac{k}{6}\cdot 0,2c+\frac{k}{3}\cdot cx=\frac{k}{2}\cdot 0,1c$ чие решение е $x=0,05$, што значи дека бараниот процент е 5%.

23. За да купи нов компјутер на Горјан му недостасуваат уште 5% од парите кои ги има. Но, кога проверил во продавницата заклучил дека цената на компјутерот кој сакал да го купи е намалена за 5%. Тогаш

Горјан пресметал дека има доволно пари да го купи компјутерот при што му преостануваат 40 денари. Колку чинел компјутерот пред, а колку по намалувањето на цената?

Решение. Нека Горјан имал x денари. Значи, цената на комјутерот е $x+0,05x=1,05x$. По намалувањето цената на компјутерот изнесува $0,95\cdot 1,05x=0,9975x$. Затоа разликата $x-0,9975x=0,0025x$ е еднаква на 40 денари. Значи, $x=40:0,0025=16000$ денари. Цената на компјутерот пред намалувањето е $1,05x=16800$ денари, а по намалувањето е $16000-40=15960$ денари.

24. Цената на една книга, по зголемувањето за 20% е еднаква на $\frac{4}{5}$ од цената која би се добила ако почетната цена на книгата се зголеми за 50 денари. Определи ја почетната цена на книгата?

Решение. Нека x е почетната цена на книгата. Од условот на задачата следува равенката

$$x+\frac{20}{100}x=\frac{4}{5}(x+50), \text{ т.е. } x+\frac{1}{5}x=\frac{4}{5}x+40.$$

Решението на последната равенка е $x=100$ денари. Според тоа, почетната цена на книгата е 100 денари.

25. Во продавница за домашни апарати се продаваат правосмукалки и миксери. Миксерот е 300 денари поевтин од правосмукалката. На акција миксерот е намален за 5%, а правосмукалката за 10%. Елена со попустите купила и миксер и правосмукалка и за двата апарати платила 3600 денари. Определи ги цените на миксерот и правосмукалката пред намалувањето на истите.

Решение. Нека x е цената на миксерот. Тогаш цената на правосмукалката е $x+300$ денари. Миксерот е намален 5%, па неговата цена е $0,95x$, а правосмукалката е намалена 10%, па неговата цена е $0,9(x+300)$. Според тоа,

$$0,95x+0,9(x+300)=3600,$$

од каде добиваме $x=1800$ денари. Според тоа, цената на миксерто била 1800 денари, а на правосмукалката 2100 денари.

26. Марко на крајот на годината на $\frac{1}{3}$ од заработените пари платил 10% данок, а на $\frac{2}{5}$ од заработените пари платил 20% данок. На остатокот од парите, кој изнесувал 100000 денари Марко бил ослободен од плаќање данок. Колку пари платил данок Марко?

Решение. Нека x е сумата пари пред плаќањето на данокот. Оданочени се $\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}x=\frac{11}{15}x$, а не се оданочени $x-\frac{11}{15}x=\frac{4}{15}x$. Затоа $\frac{4}{15}x=100000$, од каде добиваме $x=375000$ денари. Од овие пари со 20% се оданочуваат $\frac{2}{5}\cdot 375000=150000$ денари, при што е платен данок $150000\cdot 0,2=30000$ денари. Со 10% се оданочени $\frac{1}{3}\cdot 375000=125000$ денари, при што е платен данок $125000\cdot 0,1=12500$ денари. Конечно Марко платил данок

$$30000+12500=42500 \text{ денари.}$$

27. Продавница за спортска опрема продава фудбалски топки кои ги набавува од производител. Заработувачката на продавницата по продадена топка е 10% од нејзината набавна вредност. Ако продавницата топките ги набавува по 10% пониска набавна цена, а ги продава со заработувачка од 20% од новата набавна цена, тогаш продажната цена би била за 15 денари помала. Определи ја продажната цена на топката?

Решение. Нека x е набавната цена на една топка, изразена во денари. Бидејќи заработувачката е 10%, т.е. $0,1x$ следува дека продажната цена е $1,1x$ денари. Ако набавната цена е оиниска за 10%, тогаш таа е $0,9x$ денари, па затоа заработувачката од 20% на таа набавна цена би била $0,9x\cdot 0,2=0,18x$ денари, т.е. во овој случај продажната цена е $0,9x+0,18=1,08x$ денари. Затоа важи неравенството $1,1x-1,08x=15$, од каде добиваме $x=750$ денари. Конечно, продажната цена на фудбалската топка е $750+75=825$ денари.

28. Кога цената на оревите е намалена за 20%, за 960 денари можело да се купи еден килограм ореви повеќе отколку што можело да се купат за 1080 денари пред намалувањето на цената. Определи ја цената на оревите пред намалувањето.

Решение. Нека x е цената на $1kg$ ореви пред намалувањето. По намалувањето цената на $1kg$ ореви била $0,8x$. Нека y е количеството ореви кое може да се купи за 1080 денари по цена x, што значи $xy=1080$. По намалувањето за 960 денари може да се купат $y+1$ килограми ореви, односно $0,8x(y+1)=960$. Според тоа,

$$0,8xy+0,8x=960$$
$$0,8\cdot 1080+0,8x=960$$
$$x=120.$$

Значи, цената на оревите пред намалувањето била 120 денари.

29. Цената на еден телевизор прво се зголемила за 20%, потоа се намалила за 10%, па се зголемила за 30% и сега телевизорот се продава за 70200 денари. Определи ја почетната цена на телевизорот?

Решение. Нека x е почетната цена на телевизорот. По првото зголемување за 20% цената на телевизорот е еднаква на $1,2x$. По намалувањето за 10% цената на телевизорот е $1,2x\cdot 0,9=1,08x$. По второто зголемување за 30% цената на телевизорот е $1,08x\cdot 1,3=1,404x$. Според тоа, $1,404x=70200$, односно $x=50000$ денари.

30. Цената на еден производ се намалила за 5%. Потоа цената се зголемила за 40% и сега е за 1352,06 денари помала од двократната почетна цена на производот. Определи ја почетната цена на овој производ.

Решение. Со x да ја означиме почетната цена. Тогаш важи

$$x-\frac{5x}{100}+\frac{40}{100}(x-\frac{5x}{100})=2x-1352,06$$
$$\frac{100x-5x}{100}(1+\frac{4}{10})=2x-1352,06$$
$$\frac{95x}{100}\cdot\frac{14}{10}=2x-1352,06$$
$$1330x=2000x-1352060$$
$$670x=1352060$$
$$x=2018.$$

Според тоа, почетната цена на производот била 2018 денари.

31. Горазд во книжарницата забележал дека гумата е за 20% поевтина од тетратката, а за 25% е поскапа од моливот. За купување на една гума, една тетратка и еден молив тој платил 610 денари. Определи ја цената на секој од купените предмети.

Решение. Нека x,y,z се цените на гумата, тетратката и моливот, соодветно. Тогаш $x=\frac{4}{5}y$ и $x=\frac{5}{4}z$, од каде добиваме $y=\frac{5}{4}x$ и $z=\frac{4}{5}x$. Значи, $x+y+z=610$, па затоа $x+\frac{4}{5}x+\frac{5}{4}x=610$, од каде добиваме $\frac{61}{20}x=610$, односно $x=200$ денари. Сега, $y=\frac{5}{4}\cdot 200=250$ денари и $z=\frac{4}{5}\cdot 200=160$ денари.

Според тоа, гумата чини 200 денари, тетратката чини 250 денари и моливот чини 160 денари.

32. Брат и сестра сакале да купат топка. Сам да ја купи топката, на братот му недостасувало $\frac{5}{19}$ од цената на топката, а на сестрата $\frac{1}{4}$ од цената на топката. Тие, заедно имале 185 денари повеќе од цената на топката. Топката ја купиле заедно така што братот платил 45%, а сестрата го платила остатокот од цената на топката. Колку пари му останале на братот, а колку на сестрата?

Решение. Ако цената на топката е x денари, тогаш од условот на задачата следува дека братот има $\frac{14}{19}x$, а сестрата има $\frac{3}{4}x$ денари. Според тоа,

$$\frac{14}{19}x+\frac{3}{4}x=x+185 \Leftrightarrow \frac{14}{19}x+\frac{3}{4}x-x=185 \Leftrightarrow \frac{56+57-76}{76}x=185 \Leftrightarrow$$
$$\frac{37}{76}x=185 \Leftrightarrow x=380.$$

Братот имал $\frac{14}{19}\cdot 380=280$ денари, а сестрата имала $\frac{3}{4}\cdot 380=285$. За топката братот платил $\frac{45}{100}\cdot 380=171$ денар, а сестрата платила $380-171=209$ денари.

Според тоа, на братот му останале $280-171=109$ денари, а на сестрата и останале $285-209=76$ денари.

33. Во едно далечно кралство некој човек имал сопруга и четири деца: два сина и две ќерки. Кога умрел, неговите златници биле поделени според тамошниот закон: имотот прво се делел меѓу семејството и државата во однос 2:1, потоа остатокот (семејниот дел) се дели меѓу децата и сопругата во однос 3:1. Својот дел децата го делат во однос 4:1 во полза на синовите, а потоа добиениот дел се дели меѓу постарото и помалото дете во однос 5:1. Определи колку пари добил постариот син ако помладиот син добил 300 златници помалку од мајката.

Решение. Најмалку златници добила најмладата ќерка. Нека таа добила x златници. Бидејќи најмладата ќерка ги поделила златниците со постарата ќерка во однос $1:5$, заклучуваме дека постарата ќерка добила $5x$ златници. Сестрите заедно добиле $6x$ златници. Овој износ го добиле откако златниците ги поделиле со браќата во однос $1:4$. Значи, браќата добиле четири пати повеќе, т.е. добиле $24x$ златници. Овие $24x$ златници браќата ги поделиле меѓу себе во однос $1:5$, па така помладиот син добил $4x$ златници, а постариот добил $20x$ златници. Децата заедно добиле $x+5x+4x+20x=30x$ златници. Овој износ го добиле по поделбата со мајката, во однос $3:1$. Според тоа, мајката добила $10x$ златници. Од условот на задачата добиваме $10x-4x=300$, т.е. $x=50$ златници. Според тоа, постариот син добил $20x=20\cdot 50=1000$ златници.

34. Се викам Марко, одам во седмо одделение и имам 13 години. Кога пред шест години бев првоодделенец, родителите на мојата година дена постара сестра и мене почнаа да ни даваат џепарлак. Парите ги делевме пропорционално на нашите години и се сеќавам дека мојот прв џепарлак беше 350 денари. На почетокот на секоја нова учебна година вкупниот износ на џепарлакот го зголемуваа за 200 денари, но ние и понатаму го делевме пропорционално на нашите години. Колку денари џепарлак добивам денес, во седмо одделение?

Решение. Пред 6 години, во прво одделение Марко имал 7 години, а неговата сестра имала 8 години. Џепарлакот бил поделен пропорционално на нивните години, па затоа Марко добил џепарлак $7k$ денари, а неговата сестра $8k$ денари. Бидејќи џепарлакот на Марко бил 250 денари, добиваме $7k=350$, т.е. $k=50$ денари. Значи, сестрата на Марко добила $8\cdot 50=400$ денари. Сега, пред шест години двајцата заедно добивале 750 денари месечен џепарлак. Денес, двајцата заедно добиваат $750+6\cdot 100=1350$ денари џепарлак и истиот го делат во однос $(7+6):(8+6)=13:14$. Според тоа, ако Марко добива y денари, тогаш $y:(1350-y)=13:14$, од каде добиваме $y=650$ денари. Значи, во седмо одделение Марко добива 650 денари месечен џепарлак.

35. Зоран, Горан и Ружа треба да поделат 2000 денари така што деловите на Зоран и Горан се однесуваат како $2:3$, а деловите на Горан и Ружа се однесуваат како $9:5$. По колку денари ќе добие секој од нив?

Решение. Ако Зоран добие $6x$ денари, тогаш Горан ќе добие $9x$ денари, а Ружа $5x$ денари. Заедно имаат $20x$ денари. Следува дека $20x=2000$, од каде $x=100$ денари. Значи, Зоран, Горан и Ружа треба да добијат 600, 900 и 500 денари, соодветно.

36. Ана потрошила $\frac{2}{3}$ од својот џепарлак, Борка потрошил $\frac{3}{4}$ од својот џепарлак и Цветанка потрошила $\frac{5}{6}$ од својот џепарлак. Потоа им останале еднакви суми пари.

Колку потрошило секое девојче ако на почетокот сите заедно имале 7800 денари?

Решение. Нека Ана, Борка и Цветанка имале x,y,z и. Тогаш $x+y+z=7800$ и $\frac{1}{3}x=\frac{1}{4}y=\frac{1}{5}z=k$. Имаме $x=3k, y=4k, z=5k$, па затоа $3k+4k+5k=7800$, од каде добиваме $k=600$. Значи, Ана имала $3\cdot 600=1800$ денари, Борка имала $4\cdot 600=2400$ денари и Цветанка имала $5\cdot 600=3000$ денари.

37. Тројца другари собирале хартија и заработиле 2660 денари. Се договориле парите да ги поделат во однос $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}$. Колку пари добил секој од нив?

Решение. Нека поединечните заработувачки на другарите ги означиме со a,b и c. Според условот на задачата има $a:b:c=\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}$. Ако трите дропки ги прошириме до најмалиот заеднички именител 60 добиваме $a:b:c=\frac{40}{60}:\frac{45}{60}:\frac{48}{60}$, односно $a:b:c=40:45:48$. Понатаму, добиваме $a:b=40:45$ и $b:c=45:48$, па затоа $a=\frac{40}{45}b$ и $c=\frac{48}{45}b$. Сега ако замениме во $a+b+c=2660$ добиваме $\frac{40}{45}b+b+\frac{48}{45}b=2660$, од каде наоѓаме $b=900$ денари. Конечно, $a=\frac{40}{45}b=800$ денари и $c=\frac{48}{45}b=960$ денари.

38. Дончо сака во банка да вложи 100 денари и сака по две години на сметката да има најмалку двапати повеќе пари отколку што вложил. Определи го најмалиот цел број проценти на годишната камата која тоа му го овозможува.

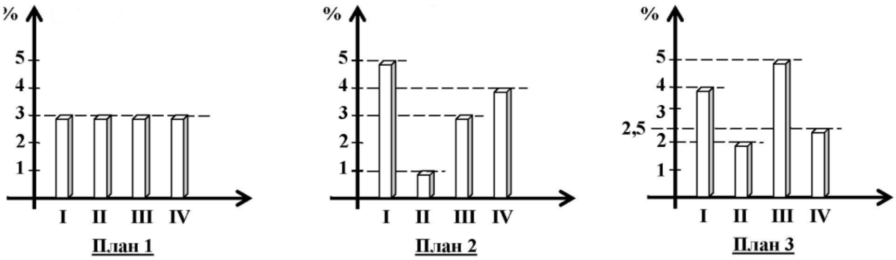
Решение. Нека бараната камата во проценти е природниот број k. Тогаш Дончо по првата година ќе има $100+k$ денари, а по втората година ќе има $(100+k)(100+k)\%=\frac{(100+k)^2}{100}>200$. Од последното неравенство следува $100+k>\sqrt{20000}=141,42$ денари. Значи, $k>41,42\%$, па затоа најмалиот цел број проценти е 42%.

39. Иван, Никола и Васил купиле еднаков број акции по една иста цена, така што Иван и Никола за таа цел потрошиле 100% и 50% соодветно од парите што ги имале, а на Васил му останала сума еднаква на $\frac{4}{5}$ од

парите кои ги платил за своите акции. По купувањето на акциите на тројцата вкупно им останале 90000 днари.

а) Колку денари имал секој пред купувањето на акциите:

б) По купувањето на акциите тројцата решиле да ги вложат акциите во фонд, кој има предлага три плана за инвестирање. Плановите се направени така што секој план ја прикажува добивката изразена во проценти за четирите тримесечија на годината и истите се прикажани на долните цртежи.



Определи ја вкупната добивка која може според секој од понудените планови да се оствари.

Решение. Со x да ја означиме сумата која Иван ја платил за акциите. Тој потрошил 100% од парите, што значи дека имал x денари и потрошил x денари. Никола купил акции за x и за нив потрошпил 50% од своите пари, што значи дека тој имал $2x$ денари. На Васил му останале $\frac{4}{5}x$ денари, што значи дека тој имал $x+\frac{4}{5}x=\frac{9}{5}x$ денари. Тројцата заедно имале $x+2x+\frac{9}{5}x=3x+\frac{9}{5}x$ денари и како потрошиле $3x$ денари им останале $\frac{9}{5}x$ денари. Според тоа, $\frac{9}{5}x=90000$, т.е. $x=50000$ денари. Сега лесно се добива дека Иван имал 50000 денари, Никола имал 100000 денари и Васил имал 90000 денари.

б) Според планот 1 добивката на годишно ниво е 12%, според планот 2 таа е 13% и според планот 3 добивката е 13,5%. Акциите кои ги купил Иван чинеле 50000 денари, што значи дека акциите на тројцата заедно вредат 150000 денари. Сега лесно се добива дека добивката според планот 1 е 18000 денари, според планот 2 е 19500 денари и според планот 3 е 20250 денари.

III.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

40. Сега е точно 9 часот. По колку минути стрелките на часовникот за прв пат ќе зафаќаат агол од 50°?

Решение. Во 9 часот малата стрелка и бега на големата за 270°. Аголот меѓу стрелките по 9 часот се намалува, за да во еден момент е 50°. Нека тоа се случило x минути по 9 часот. Понатаму, додека големата стрелка поминува $360^\circ : 60 = 6^\circ$ за една минута, малата стрелка поминува $360^\circ : (12 \cdot 60) = 0,5^\circ$ за една минута. Затоа треба да важи

$$270^\circ + 0,5^\circ \cdot x = 6^\circ \cdot x + 50^\circ,$$

од каде добиваме $x = 40$ минути.

41. Кога Зоран се разбудил забележал дека само што поминал 5 часот и дека стрелките на нејзиниот часовник се преклопуваат. Во колку часот се разбудил Зоран?

Решение. Во 5 часот малата стрелка се наоѓа на бројот 5 (5 часа), а големата на бројот 12 (0 минути). Нека x е времето (во минути) кое треба да помине до првото поклопување на стрелките. Големата стрелка за 60 минути поминува пат кој соодветствува на полн круг (360°), а за 1 минута поминува 6°. Малата стрелка за 60 минути поминува пат кој соодветствува на агол $360^\circ : 12 = 30^\circ$, а за една минута $30 : 60 = 0,5^\circ$. За саканите x минути малата стрелка ќе помине агол од $0,5^\circ x$, а големата ќе помине агол $6^\circ x$ кој е еднаков на $5 \cdot 30^\circ + 0,5^\circ x$. Според тоа, $6^\circ x = 150^\circ + 0,5^\circ x$, од каде добиваме $x = \frac{300}{11} = 27\frac{3}{11}\min$.

42. Во еден магацин книгите се ставени во кутии. Во секоја кутија има еднаков број книги. Магационерот вади една по една книга од кутија, ги пакува и ги адресира до претплатниците. Магационерот Илија цела кутија препакува за 3 часа и 36 минути, а магационерот Дончо иста таква кутија препакува за 2 часа и 6 минути, при што брзината на пакувањето на секој од нив е константна.

а) Ако за определено време Илија спакувал 63 книги, колку книги Дончо спакувал за истото тоа време?

б) Ако за пакување на една книга на секој од магационерите му треба цел број минути, колку најмногу книги може да се спакувани во една кутија?

Решение. Нека Дончо спакувал x книги. Бидејќи 3 часа и 36 минути се 216 минути и 2 часа и 6 минути се 126 минути, добиваме $216:126 = x:63$, па затоа $x = 108$. Јасно, најголемиот број книги кои може да се сместат во една кутија е еднаков на најголемиот заеднички делител на 216 и 126, а тоа е бројот $NZD(216,126) = 18$.

43. Иван излегол од дома неколку минути по 18 часот. Во моментот на излегување погледал на својот часовник и забележал дека неговите стрелки зафаќаат агол од 110°. Тој се вратил дома нешто пред 19 часот истиот ден, точно во моментот кога стрелките на часовникот повторно зафаќаат агол од 110°. Колку минути Иван бил отсутен од дома, ако се знае дека неговиот часовник е точен?

Решение. За една минута големата стрелка на часовникот поминува 6°, а малата стрелка поминува $0,5^\circ$. Нека x е времето изразено ви минути кое поминало од 18 часот до моментот кога Иван излегол од дома. За тоа време големата стрелка поминала $6x$ степени, а малата поминала $0,5x$ степени. Бидејќи во 18 часот стрелките зафаќаат агол од 180°, следува дека во моментот на излегување од дома тие зафаќале агол од $180-6x+0,5x$ степени, па затоа $180-6x+0,5x = 110$, од каде добиваме $x = 12\frac{8}{11}$. Според тоа, Иван излегол од дома $12\frac{8}{11}$ минути по 18 часот.

Со y да го означиме времето изразено во минути кое поминало од 18 часот до моментот кога Иван се вратил дома. За тоа време големата стрелка поминла $6y$ степеи, а малата поминала $0,5y$ степени. Бидејќи вослучајов големата стрелка ја поминува малата добиваме дека аголот меѓу стрелките е еднаков на $6y-(180+0,5y)$, па затоа $6y-(180+0,5y) = 110$, од каде добиваме $y = 52\frac{8}{11}$. Тоа значи дека Иван се вратил дома $52\frac{8}{11}$ минути по 18 часот. Конечно, времето кое тој бил надвор од дома е $52\frac{8}{11} - 12\frac{8}{11} = 40$ минути.

44. Располагаме со две свеќи со различна должина и дебелина. Подолгата свеќа целосно изгорува за 3,5 часа, а пократката за 5 часа. Свеќите се запалени истовремено, па откако гореле 2 часа, нивните должини биле еднакви. За колку проценти потанката свеќа е подолга од подебелата свеќа?

Решение. За 1 час изгорува $\frac{2}{7}$ од првата (подолга и потанка) и $\frac{1}{5}$ од втората (пократка и подебела) свеќа. По 2 часа изгорело $\frac{4}{7}$ од првата и $\frac{2}{5}$ од втората свеќа. Според тоа, преостанало $\frac{3}{7}$ од првата и $\frac{3}{5}$ од втората свеќа. Бидејќи должините на преостанатите делови се еднакви, заклучуваме дека $\frac{1}{7}$ од првата свеќа има еднаква должина како и $\frac{1}{5}$ од втората свеќа. Според тоа, првата свеќа има должина $7x$, а втората има должина $5x$, т.е. потанката свеќа е за 40% подолга од подебелата свеќа.

45. Дванаесет работници завршуваат една работа за 14 дена. По 2 дена од почетокот на работата се разболеле 3 работника, а останатите работници продолжиле да работат. За колку дена ќе биде завршена работата?

Решение. Нека x е бројот на деновите за кои преостанатите 9 работници ќе ја довршат работата. Тогаш важи $14 \cdot 12 = 12 \cdot 2 + 9x$, од каде добиваме $x = 16$. Според тоа, за завршување на целата работа се потребни $2 + 16 = 18$ дена.

46. Јас сега имам четирипати повеќе години отколку што имаше мојата сестра кога беше двапати помлада од мене. Колку години имам јас, а колку мојата сестра, ако по 6 години заедно ќе имаме 75 години?

Решение. Нека сестрата имала x години кога била двапати помлада од мене. Тогаш јас сум имал $2x$ години. Денес јас имам $4x$ години, па како бројот на моите години е зголемен за $2x$, мојата сестра има $3x$ години. Тоа значи дека по 6 години заедно ќе имаме $7x + 12$ години, па затоа $7x + 12 = 75$, од каде добиваме $x = 9$. Конечно, јас имам $4 \cdot 9 = 36$ години, а мојата сестра има $3 \cdot 9 = 27$ години.

47. Марко е 26 години постар од Велко, а по 10 години ќе биде три пати постар од Велко. Колку години има Марко, а колку години има Велко?

Решение. Нека во моментот Марко има x години, а Велко има y години. Во моментот Марко е постар од Велко 26 години, па затоа $x = y + 26$. По 10 години Марко ќе има $x + 10$, а Велко ќе има $y + 10$ години, па затоа $x + 10 = 3(y + 10)$. Според тоа,

$$y + 26 + 10 = 3(y + 10),$$

од каде добиваме $y=3$. Значи, $x=3+26=29$ години. Значи, Марко има 29 години, а Велко има 3 години.

48. Ана има 20% повеќе години отколку што имал Иван кога Ана имала толку години колку што сега има Иван. Кога Иван ќе има години колку што сега има Ана, заедно ќе имаат 150 години. Колку години има сега Ана, а колку Иван?

Решение. Да ги означиме годините на Ана и Иван како во табелата

	Ана	Иван
Претходно	y	x
Сега	$1,2x$	y
Потоа	$150-1,2x$	$1,2x$

Разликата во годините меѓу сега и претходно и кај Ана и кај Иван е еднаква, па затоа $1,2x-y=y-x$, т.е. $y=1,1x$. Слично добиваме $150-1,2x-1,2x=1,2x-y$,т.е. $y-3,6x-150$. Значи, $1,1x=3,6x-150$, од каде добиваме $x=60$. Тогаш $1,2x=1,2\cdot 60=72$ и $y=1,1\cdot 60=66$. Значи, Ана има 72 години, а Иван има 66 години.

49. Мојот прадедо е роден во XIX век. Која година тој го славел 60-тиот роденден, ако во годината x^2 имал точно x години?

Решение. Бидејќи $1900<x^2<2000$, добиваме $\sqrt{1900}<x<\sqrt{2000}$, т.е. $43,58898<x<44,72136$, што значи $x=44$. Според тоа, $x^2=44^2=1936$, т.е. прадедото својот 44 роденден го славел во 1936 година. Значи, тој е роден $1936-44=1892$ година, а својот 60-ти роденден го славел во $1892+60=1952$ година.

50. Во 1988 година Илија наполнил онолку години колку што е збирот на цифрите на годината во која е роден. Која година е роден Илија, ако се знае дека тој е роден во XX век?

Решение. Нека годината на раѓање на Илија е $\overline{19xy}$. Тогаш

$$1988-\overline{19xy}=1+9+x+y\text{, т.е. }88-10x-y=10+x+y.$$

Со средување на последната равенка добиваме $11x+2y=78$, од каде следува дека x е парен број. Бидејќи y е цифра, важи $y<10$, па затоа $58<11x<78$, па како x е парен број заклучуваме дека $x=6$. За $x=6$ наоѓаме $y=6$, што значи дека Илија е роден во 1966 година и тој во 1988 година имал $1+9+6+6=1988-1966=22$ години.

51. Павел во 2018 година ќе наполни онолку години колку што е збирот на цифрите од годината во која е роден. Колку години има Павел?

Решение. Ако Павел е роден во 20-тиот век, тогаш според условот на задачата, ја добиваме следната равенка:

$$2018-\overline{19ab}=1+9+a+b$$
$$2018-1900-10a-b=10+a+b$$
$$11a+2b=108$$

Оваа равенка нема решение такво што a и b се едноцифрени броеви. Ако, пак, Павел е роден во 21-виот век, тогаш ја имаме равенката:

$$2018-\overline{20ab}=2+0+a+b$$
$$2018-2000-10a-b=2+a+b$$
$$11a+2b=16$$

Последната равенка има единствено решение такво што a и b се едноцифрени броеви и тоа $a=0, b=8$, што значи дека Павел е роден во 2008 година и има 10 години.

III.4. ЗАДАЧИ СО РАБОТА

52. Ако садот се полни со првата славина, тогаш ќе се наполни за 18 минути, а ако се полни со втората славина ќе се наполни за 27 минути. Ако ги отвориме двате славини истовремено, за колку време ќе се наполнат $\frac{5}{9}$ од садот?

Решение. За една минута првата славина полни $\frac{1}{18}$ од садот, а втората славина полни $\frac{1}{27}$ од садот. Според тоа, за една минута двете славини полнат $\frac{1}{18}+\frac{1}{27}=\frac{5}{54}$ од садот. За да се наполнат $\frac{5}{9}$ од садот се потребни $\frac{5}{9}:\frac{5}{54}=6$ минути.

53. Еден сад може да се наполни со вода од три чешми. Од првата чешма се полни за 10 минути, од втората чешма се полни за 15 минути, а ако сите три чешми истовремено го полнат садот, тој се полни за 5 минути. За колку време ќе се наполни садот, ако истовремено го полнат втората и третата чешма?

Решение. Нека x е времето изразено во минути за кое садот се полни од третата чешма.

За 1 минута од првата чешма се полни $\frac{1}{10}$ од садот, од втората чешма се полни $\frac{1}{15}$ од садот, од третата чешма се полни $\frac{1}{x}$ од садот, а кога сите три чешми истовремено течат се полни $\frac{1}{5}$ од садот. Затоа, $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{x}=\frac{1}{5}$, од каде добиваме $x=30\min$. Според тоа, ако истовремено садот го полнат втората и третата чешма, тогаш за една минута ќе се наполни $\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{10}$ од садот, па затоа целиот сад ќе се наполни за 10 минути.

54. На едно тестирање за учество во квиз на знаење присуствувале 64 кандидати. По тестирањето тестовите на кандидатите ги прегледувале два професора. Секој од професорите прегледал по 32 теста и секој професор секој тест го прегледувал за исто време. Првиот професор прегледал 5 теста за исто време за кое вториот професор прегледал 4 теста. Првиот професор своите 32 теста ги прегледал за 1 час и 36 минути побрзо од вториот професор. Колку тестови за 1 час прегледувал првиот, а колку вториот професор?

Решение. Нека првиот професор прегледува еден тест за x минути. Тогаш за прегледување на 5 теста му се потребни $5x$ минути. Бидејќи вториот професор за исто време прегледува 4 теста, нему за прегледување на еден тест му се потребни $\frac{5x}{4}$ минути. За 32 теста на првиот професор му се потребни $32x$ минути, а на вториот професор $32\cdot\frac{5x}{4}=40x$ минути. Во 1 час и 36 минути имаме 96 минути, па затоа $40x-32x=96$, т.е. $x=12$ минути. Според тоа, на првиот проджфесор за прегледување на 1 тест му се потребни 12 минути, а на вториот му се потребни $\frac{5\cdot12}{4}=15$ минути.

55. Четиринаесет работници треба да завршат една работа за 10 дена. Меѓутоа, по два дена раководителот согледал дека работејќи со тоа темпо со извршувањето на работата ќе се доцни 4 дена. Затоа третиот ден тој ангажирал уште неколку работници со чија помош работата била завршена точно на време. Колку работници биле дополнително ангажирани?

Решение. Раководителот мислел дека целата работа може да се заврши за $14\cdot10=140$ надници. Меѓутоа, по 2 дена, тој утврдил дека покрај преостанатите $140-2\cdot14=112$ надници се потребни уште $4\cdot14=56$

надници. Значи, во преостанатите 8 дена треба да се реализираат 56 надници повеќе, па затоа бројот на дополнително ангажираните работници е $56:8=7$.

56. Дванаесет работници завршуваат една работа за 8 дена работејќи по 10 часа дневно. За колку дена истата работа ќе ја завршат 16 работници кои ќе работат 6 часа дневно?

Решение. За завршување на работата се потребни $12\cdot8\cdot10=960$ работни часа. Ако шеснаесет работници дневно работаат по 6 часа, тие дневно ќе остваруваат $16\cdot6=96$ работни часа, па за да ја завршат работата ќе им бидат потребни $960:96=10$ дена.

57. Симон може сам да заврши некоја работа за 8 дена, а Златко истата работа може да ја заврши за 12 дена. Прво Симон сам работел 3 дена, а потоа двајцата заедно ја довршиле работата. За колку дена е завршена целата работа?

Решение. Симон за 1 ден сработува $\frac{1}{8}$ од работата, а Златко за еден ден сработува $\frac{1}{12}$ од работата. Ако за да ја завршат работа заедно работеле x, тогаш $\frac{3}{8}+(\frac{1}{8}+\frac{1}{12})x=1$, од каде добиваме $x=3$. Според тоа, целата работа е завршена за 6 дена, од кои Симон сам работел 3 дена, а заедно со Златко работеле 3 дена.

58. Двајца работници можат заедно да завршат една работа за 24 дена. Тие заедно работеле 10 дена и едниот работник се разболел, па вториот работник сам продолжил да работи и ја завршил работата во следните 35 дена. За колку дена секој од работниците самостојно можел да ја заврши оваа работа?

Решение. По 10 дена заедничка работа работниците сработиле $\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$ од работата. Преостанатите $\frac{7}{12}$ од работата вториот работник ја завршил за 35 дена, што значи дека секој ден завршувал по $\frac{7}{12}:35=\frac{1}{60}$ од работата. Значи, вториот работник работата може да ја заврши за 60 дена. За 24 дена вториот работник сработува $\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$ од работата, а првиот работник сработува $\frac{3}{5}$ од работата. Според тоа, за еден ден првиот работник сработува $\frac{3}{5}:24=\frac{1}{40}$ од работата, што значи дека првиот работник целата работа може да ја заврши за 40 дена.

III.5. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

59. Колку литри 30-процентен алкохол и колку литри 10-процентен алкохол треба да се измешаат за да се добијат 600 литри 15-процентен алкохол?

Решение. Нека x е количеството (во литри) 30-процентен алкохол кој треба да се измеша. Тогаш имаме количество од $600-x$ (во литри) 10-процентен алкохол. Во првата смеша количеството алкохол е $0,3x$, а во втората смеша е $0,1(600-x)$. Според тоа, во настанатиот 15-процентен алкохол имаме $0,3x+0,1(600-x)$ алкохол. Но, во 600 литри 15-процентен алкохол имаме $0,15\cdot 600=90$ литри алкохол, па затоа $0,3x+0,1(600-x)=90$, од каде добиваме $x=150$ литри. Значи, треба да измешаме 150 литри 15-процентен алкохол и 450 литри 10-процентен алкохол.

60. Во еден базен од една цевка се влеваат $15\frac{1}{3}\,hl$, а од втора цевка се влева уште $18\frac{5}{6}\,hl$ вода на час. Истовремено од базенот од други две цевки истекуваат $13\frac{3}{4}\,hl$ и $16\frac{5}{8}\,hl$ вода на час. Колку литри вода ќе има во базенот по 2,4 часа?

Решение. За еден час во базенот се влеваат вкупно

$$15\frac{1}{3}+18\frac{5}{6}=\frac{46}{3}+\frac{113}{6}=\frac{92+113}{6}=\frac{205}{6}\,hl \text{ вода,}$$

а истекуваат вкупно

$$13\frac{3}{4}+16\frac{5}{8}=\frac{55}{4}+\frac{133}{8}=\frac{110+133}{8}=\frac{243}{8}\,hl \text{ вода.}$$

Значи, за еден час во базенот ќе има вкупно

$$\frac{205}{6}-\frac{243}{8}=\frac{205\cdot 4-243\cdot 3}{24}=\frac{820-729}{24}=\frac{91}{24}\,hl \text{ вода.}$$

Според тоа, за 2,4 часа во базенот ќе има вкупно

$$\frac{91}{24}\cdot 2,4=\frac{91}{24}\cdot\frac{24}{10}=\frac{91}{10}=9\frac{1}{10}\,hl \text{ вода.}$$

61. Воз минува преку мост долг $171m$ за 27 секунди, а покрај пешак кој се движи спротивно од насоката на возот со брзина $1m/s$, поминува за 9 секунди. Определи ја брзината на возот и неговата должина ако преминувањето на возот се смета од моментот кога локомотивата доаѓа на почетокот на мостот, до моментот кога последниот вагон слегува од мостот.

Решение. Нека x е должината на возот. Тогаш за брзината на возот добиваме $v=\frac{171+x}{27}$ и $v=\frac{x-9}{9}$. Според тоа, $\frac{171+x}{27}=\frac{x-9}{9}$, од каде добиваме $x=99\,m$. Според тоа, брзината на возот е $v=\frac{99-9}{9}\,m/s=10\,m/s$.

62. Двајца велосипедисти почнуваат тренинг истовремено. Едниот тргнува од Скопје, а другиот од Гевгелија, еден кон друг. Кога се на растојание од 180 *km* еден од друг, во тренингот се вклучува една мува. Таа стартува од рамото на едниот велосипедист и лета да го сретне другиот. Застанува на неговото рамо и се веднаш се враќа назад кон првиот велосипедист. Ова го повторува се додека двајцата велосипедисти не се сретнат. Мувата лета со брзина од 30 *km* на час, а велосипедистите се движат со брзина 15 *km* на час. Колку километри ќе прелета мувата за време на тренингот?

Решение. Од моментот кога мувата се приклучува во тренингот до моментот кога велосипедистите се сретнуваат ќе поминат $\frac{180km}{2\cdot 15km/h}=6h$.

Значи мувата ќе лета 6 *h*, односно таа ќе прелета $6\cdot 30km=180km$.

63. Првите $120\,km$ од некој пат автомобил се движи со брзина $90\,km/h$. Потоа брзината ја намалува на $64\,km/h$ и со оваа брзина вози 1 час и 15 минути. Со која брзина автомобилот треба да ја помине преостанатата шестина од патот за да просечната брзина на целиот пат биде $80\,km/h$.

Решение. Во првата етапа автмобилот возел $120\,km$ со брзина од $90\,km/h$. За тоа му биле потребни $120:90=\frac{4}{3}h$. Во втората етапа автомобилот возел $1h15\min=\frac{5}{4}h$ со брзина $64\,km/h$, па затоа поминал $\frac{5}{4}\cdot 64=80\,km$. Во двете етапи заедно поминал $120+80=200\,km$, а тоа се $\frac{5}{6}$ од целиот пат. Значи, целиот пат е $200:\frac{5}{6}=240\,km$, а од тоа во третата етапа му останале $240-200=40\,km$. Ако просечната брзина е $80\,km/h$, тогаш автомобилот возел $240:80=3\,h$. За првите две етапи тој потрошил $\frac{4}{3}+\frac{5}{4}=2\frac{7}{12}\,h$, па затоа третата етапа треба да ја помине за $3-2\frac{7}{12}=\frac{5}{12}\,h$. Значи, во третата етапа просечната брзина треба да биде $40:\frac{5}{12}=96\,km/h$.

64. Две свеќи имаат должини кои се разликуваат за $32\ cm$. Ако се запали подолгата во 15 часот, а пократката во 19 часот, тогаш во 21 часот ќе имаат иста должина. Подолгата целосно ќе изгори во 22 часот, а пократката на полноќ. Свеќите горат со константни брзини. Колкав е збирот на почетните должини на свеќите?

Решение. Бидејќи должините на свеќите во 21 часот се еднакви, подолгата наполно изгорува во 22 часот, а пократката на полноќ, следува дека на подолгата и треба 1 час, а на пократката 3 часа за да изгори еднаква должина. Затоа, подолгата свеќа гори 3 пати побрзо од пократката. Нека од пократката свеќа изгоруваат $x\ cm$ на час, тогаш од подолгата ќе изгоруваат $3x\ cm$ на час. Од 15 до 21 часот, од подолгата свеќа се изгорени $6\cdot 3x\ cm$, т.е $18x\ cm$. Од 19 часот до 21 часот, од пократката свеќа ќе изгорат $2\cdot x\ cm$. Во 21 часот имаат еднаква должина, што значи дека $18x-2x=32$ и оттука $x=2\ cm$. Тогаш, должината на подолгата свеќа е $7\cdot 3x=42\ cm$, бидејќи за 7 часа целосно изгорува, а на пократката, која изгорува за 5 часа е $5x=10\ cm$.

65. Авион лета од Скопје за Белград и се враќа назад. При какви временски услови авионот побрзо ќе го помине целиот пат: со ветер кој постојано со иста брзина дува од Скопје кон Белград, или при мирно време без ветер?

Решение. Нека s е растојанието од Скопје до Белград, v_a е брзината на авионот и v_v е брзината на ветерот. Тогаш при мирно време авионот патот го поминува за време $t_1=\frac{2s}{v_a}$, а кога има ветер авионот патот го поминува за време $t_2=\frac{s}{v_a-v_v}+\frac{s}{v_a+v_v}$. Според тоа,

$$t_2=\frac{s}{v_a-v_v}+\frac{s}{v_a+v_v}=\frac{sv_a+sv_v+sv_a-sv_v}{v_a^2-v_v^2}=\frac{2sv_a}{v_a^2-v_v^2}>\frac{2sv_a}{v_a^2}=\frac{2s}{v_a}=t_1\,.$$

Според тоа, при мирно време авионот побрзо го поминува предвидениот пат.

66. Двајца туристи тргнале истовремено еден кон друг по планинарска патека од точките A и B и се сретнале во 11:54 часот. Без да застануваат тие продолжиле по патеката и туристот кој тргнал од точката A простигнал во B во 12:30 часот, а другиот турист пристигнал во точката A во 15:39 часот. Ако туристите се движеле со постојани брзини, определи:

а) во колку часот тргнале туристите,

б) односот на нивните брзини.

Решение. Со C да ја означиме точката во која се сретнале туристите. Нека брзината на туристот кој тргнал од точката A е v, а брзината на туристот кој тргнал од точката B е w. Времето за кое првиот турист го поминал патот од C до B е еднакво на

$$12:30-11:54=36\min=\tfrac{3}{5}h,$$

а поминатиот пат е $s_{BC}=\frac{3}{5}v$. Времето за кое вториот турист го поминал патот од C до A е $15:39-11:54=3h\,45\min=\frac{15}{4}h$, а поминатиот пат е $s_{AC}=\frac{15}{4}w$.

Од друга страна времето на секој турист до средбата е t, па затоа $s_{AC}=vt$ и $s_{BC}=wt$. Според тоа, $\frac{15}{4}w=vt$ и $\frac{3}{5}v=wt$. Значи, $\frac{5t}{3}=\frac{v}{w}=\frac{15}{4t}$, од каде добиваме $t^2=\frac{9}{4}$, т.е. $t=\pm\frac{3}{2}$ и како $t>0$ добиваме $t=\frac{3}{2}=1h\,30\min$. Според тоа, туристите еден кон друг тргнале во 10:24 часот. Односот на нивните брзини е $\frac{v}{w}=\frac{5t}{3}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

67. Десет работници, работејќи 4 дена по 9 часа дневно, ископале канал со должина од $100\,m$, ширина $1m$ и длабочина $0{,}6\,m$. За колку дена 18 работници, работејќи 6 часа дневно, ќе ископаат канал со должина $36\,m$, ширина $3m$ и длабочина $0{,}5\,m$.

Решение. За копање на првиот канал кој имал волумен $100\cdot1\cdot0{,}6=60\,m^3$ се потрошени $10\cdot4\cdot9=360$ работни часа, што значи дека за $1m^3$ се потрошени $360:60=6$ работни часа. Вториот канал има волумен $36\cdot3\cdot0{,}5=54\,m^3$, што значи дека за да се ископа се потребни $54\cdot6=324$ работни часа. Бидејќи на него работат 18 работници по 6 часа дневно, тие дневно имаат $18\cdot6=108$ работни часа, па затоа за копање на каналот им се потребни $324:108=3$ дена.

68. Од Скопје по реката Вардар тргнува чамец, кој има сопствена брзина $12km/h$. Еден час покасно од Скопје тргнува друг чамец, чија сопствена брзина е за 25% поголема од брзината на првиот чамец. Ако

брзината на течението на Вардар е $3km/h$, после колку време растојанието меѓу двата чамци ќе биде $9km$?

Решение. Можни се четири случаи во зависност од насоката на движење на чамците. Нека x часа после тргнувањето на првиот чамец растојанието меѓу чамците е $9km$. Од условот следува дека $x>1$.

Прв случај. Двета чамци се движат по течението:

	S	V	t
I чамец	$15x$	15	x
II чамец	$18(x-1)$	18	$x-1$

1.1. $18(x-1)-15x=9$, т.е. $x=9h$.

1.2. $15x-18(x-1)=9$, т.е. $x=3h$.

Втор случај. Двата чамци се движат спроти течението:

	S	V	t
I чамец	$9x$	9	x
II чамец	$12(x-1)$	12	$x-1$

2.1. $12(x-1)-9x=9$, т.е. $x=7h$

2.2. $9x-12(x-1)=9$, т.е. $x=1h$.

Трет случај. Првиот чамец се движи спроти течението, а вториот по течението:

	S	V	t
I чамец	$9x$	9	x
II чамец	$18(x-1)$	18	$x-1$

$$18(x-1)+9x=9, \text{ т.е. } x=1h$$

Четврт случај. Првиот чамец се движи по течението, а вториот спроти течението:

	S	V	t
I чамец	$15x$	15	x
II чамец	$12(x-1)$	12	$x-1$

$$12(x-1)+15x=9, \text{ т.е. } x=\tfrac{7}{9}h=46'40''.$$

69. Во три вреќи има $64,2\,kg$ брашно. Во првата вреќа има 20% помалку брашно отколку во втората, а во третата има 42,5% од количеството брашно во првата вреќа. Колку брашно има во секоја вреќа?

Решение. Нека во втората вреќа има x килограми брашно. Тогаш во првата вреќа има $0,8x$ килограми брашно, а во третата вреќа има $0,8x\cdot 0,425=0,34x$ килограми брашно. Според тоа, точна е равенката

$0,8x+x+0,34=64,2$, чие решение е $x=30\,kg$. Значи, во првата вреќа има $0,8\cdot 30=24\,kg$ брашно, во втората вреќа има $30\,kg$ брашно и во третата вреќа има $0,34\cdot 30=10,2\,kg$ брашно.

70. Златар има две различни легури од сребро и злато. Во едната среброто и златото се во соодвеос $2:3$, а во другата се во соодвос $5:3$. Колку килограми од секоја легура треба да земеме за да добиеме $9\,kg$ нова легура во која има еднакво количество злато и сребро.
Решение. Нека масата што треба да ја земе од првата легура е x. Тогаш масата што треба да ја земе од втората легура е $9-x$. Тогаш во првата легура масата на среброто е $\frac{2x}{5}$, а во втората легура е $\frac{5(9-x)}{8}$. Според тоа, важи $\frac{2x}{5}+\frac{5(9-x)}{8}=4,5$, од каде добиваме $x=5\,kg$. Значи, од првата легура треба да се земат $5\,kg$, а од втората $4\,kg$.

71. Во еден магацин имало $1000\,kg$ јагоди кои содржат 92% вода. По извесно време количеството вода во јагодите се намалило на 90%. Определи ја сега масата на јагодите.
Решение. Бидејќи $1000\,kg$ свежи јагоди содржат 92% вода, заклучуваме дека $920\,kg$ е вода, а $80\,kg$ е сува материја. Според тоа, во по неколку дена овие $80\,kg$ сува материја ќе претставуваат 10% од јагодите. Значи, 1% од јагодите тежи $8\,kg$, па затоа сега јагодите имаат маса $800\,kg$.

72. Свежо грозје содржи 70% вода, а суво грозје содржи 18% вода. Колку килограми свежо грозје треба да се исуши за да се добијат $24\,kg$ суво грозје?
Решение. Во $24\,kg$ суво грозје има 82% сува материја, односно $24:0,82=19,68\,kg$. Овие $19,68\,kg$ се 30% од вкупната количина свежо грозје, па затоа е потребно $19,68:0,3=65,6\,kg$ свежо грозје за да се добие $24\,kg$ суво грозје.

73. Свежи печурки содржат 95% вода, а суви печурки содржат 14% вода. Колку свежи печурки треба да се наберат за да се добијат $50\,kg$ суви печурки?
Решение. Свежи печурки содржи 95% вода и 5% сува материја, а суви печурки содржат 14% вода и 86% сува материја. Во $50\,kg$ суви печур-

ки има $50\cdot\frac{86}{100}=43\,kg$ сува материја. Значи и свежи печурки треба да содржат $43\,kg$ сува материја. Ако количеството свежи печурки е x, тогаш $\frac{5}{100}x=43$, односно $x=860\,kg$.

74. Влажноста на свежа тукуштo искосена трева е 60%, а на сеното е 20%. Колку сено ќе се добие од $1t$ свежо искосена трева?

Решение. Бидејќи $1000kg$ свежа трева содржи 60% вода, заклучуваме дека 40%, односно $400kg$ е сува материја. Сеното содржи 20% вода, што значи дека 80% е сува материја. Сега, бидејќи 80% е $400kg$, заклучуваме дека 20% сено е $100\,kg$, односно 100% или масата на сеното е $500kg$.

75. Во еден вид челик има 5% никел, а во друг вид челик има 40% никел. По колку тони треба да се земе од секој вид челик за да се добијат $140\,t$ челик во кој ќе има 30% никел?

Решение. Нека земеме x тони челик во кој има 5% никел. Тогаш треба да земеме $140-x$ тони челик во кој има 40% никел, па затоа е точна равенката

$$0,05x+0,40\cdot(140-x)=0,30\cdot 140,$$

од каде наоѓаме $x=40\,t$. Според тоа, треба да $40\,t$ челик со 5% никел и $100\,t$ челик со 40% никел.

76. Во три гајби има $72\,kg$ јаболки. Во првата гајба има $\frac{4}{5}$ пати повеќе јаболки отколку во втората, а во третата има 12 килограми помалку јаболки отколку во втората. По колку килограми јаболки има во секоја гајба?

Решение. Нека со x,y и z ја означиме масата на јаболките кои се наоѓаат во првата, втората и третата гајба, соодветно. Тогаш, $x+y+z=72$ и $x=\frac{4}{5}y$ и $z=y-12$. Според тоа, $\frac{4}{5}y+y+y-12=72$, од каде добиваме $2y+\frac{4}{5}y=84$, т.е. $y=30\,kg$. Конечно, $x=\frac{4}{5}\cdot 30=24$ kg $y=30\,kg$ и $z=30-12=18\,kg$.

77. Мартин, Марио, Горјан и Самоил се ученици од исто оделение. Еден дена на час по физичко образование ја мереле својата маса. Мартин, Марио и Горјан заедно имаат $138kg$, Мартин, Марио и Самоил заедно

имаат $146kg$, Мартин, Горјан и Самоил заедно имаат $131kg$, а Марио, Горјан и Самоил заедно имаат $143kg$. Определи ја масата на секој од нив.

Решение. Со x, y, z и t да ги означиме тежините на Мартин, Марио, Горјан и Самоил, соодветно. Тогаш, од условот на задачата следува дека $x+y+z=138$, $x+y+t=146$, $x+z+t=131$ и $y+z+t=143$. Ако ги собереме овие четири равенки, добиваме $3(x+y+z+t)=558$, т.е. $x+y+z+t=186$ и тоа е вкупната маса на сите ученици. Сега од првата и последната равенка добиваме $138+t=186$, т.е. $t=48$. Аналогно наоѓаме $146+z=186$, т.е. $z=40$, $131+y=186$, т.е. $y=55$ и $143+x=186$, т.е. $x=43$. Конечно, Мартин има $43kg$, Марио има $55kg$, Горјан има $40kg$ и Самоил има $48kg$.

III.6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

78. Кожна фудбалска топка е сошиена од делови на кожа во форма на правилни петаголници и правилни шестаголници. На топката има вкупно 32 парчиња кожа. Секое парче кожа во форма на петаголник по страните е поврзано само со делови на кожа во форма на шестаголник. Секое парче кожа во форма на шестаголник е поврзано со три петаголници и три шестаголници. Колку парчиња кожа на топката се во форма на петаголници, а колку се во форма на шестаголници?

    Решение. Нека x е бројот на деловите во облик на шестаголник. Бидејќи секој шестаголник со своите три страни е поврзан со петаголници, заклучуваме дека $3x$ е вкупниот број страни на сите петаголници. Од друга страна, бројот на деловите кожа во облик на петаголник е еднаков на $32-x$ и тие имаат вкупно $5(32-x)$ страни. Значи, $3x=5(32-x)$, од каде добиваме $x=20$. Значи, фудбалската топка е направена од 20 парчиња кожа во форма на шестаголник и 12 парчиња кожа во форма на петаголник.

79. Ангел има 80% повеќе сликички од Бранко. Бранко има $\frac{3}{5}$ од бројот на сликичкте кои ги има Дарко. Ако Бранко му даде 150 сликички на Дарко, тогаш Дарко ќе има три пати повеќе сликички од Бранко. Колку сликички имаат сите тројца заедно?

Решение. Нека бројот на сликичките на Дарко е x. Тогаш Бранко има $\frac{3}{5}x$ сликички. Ако Бранко му даде 150 сликички на Дарко, тогаш Дарко ќе има $x+150$ сликички, а на Бранко ќе му останат $\frac{3}{5}x-150$ сликички. Затоа важи $3(\frac{3}{5}x-150)=x+150$, од каде добиваме $x=750$. Значи, Дарко има 750 сликички, а Бранко има $\frac{3}{5}\cdot 750=450$ сликички, Конечно, Ангел има 80% повеќе сликички од Бранко, т.е. тој има $1{,}8\cdot 450=810$ сликички. Тројцата заедно имаат $750+450+810=2010$ сликички.

80. Во кутија се наоѓаат црвени и сини топчиња. Бројот на црвените топчиња се однесува спрема бројот на сините топчиња како $7:3$. За колку проценти треба да се зголеми бројот на црвените топчиња во однос на црвените точиња кои веќе се наоѓаат во кутијата за да новиот број црвени топчиња се однесува спрема бројот на сините топчиња како $14:5$?

Решение. Нека на почетокот во кутијата има x сини и y црвени топчиња, а по додавањето на црвените топчиња во кутијата има z црвени топчиња. Според тоа, $x:y=3:7$, т.е. $x=\frac{3}{7}y$. По додавањето на црвените топчиња важи $x:z=5:14$, т.е. $x=\frac{5}{14}z$. Затоа важи $\frac{3}{7}y=\frac{5}{14}z$, т.е. $z=\frac{6}{5}y=\frac{120}{100}y=120\%y$. Според тоа, потребно е бројот на црвените топчиња да се зголеми за 20%.

81. Една производна компанија минатата година го исполнила производствениот план со 112%. Определи колку проценти од оствареното производство претставува планираното производство.

Решение. Нека a е планираното производство, а b е оствареното производство. Тогаш важи $b=\frac{112a}{100}=\frac{28a}{25}$. Ако p е бараниот процент, тогаш $a=\frac{bp}{100}$, па затоа $p=\frac{100a}{b}=\frac{100a}{\frac{28a}{25}}=\frac{2500}{28}=\frac{625}{7}\%\approx 89{,}29\%$.

82. Во кутија се наоѓаат еднаков број сини и црвени топчиња. Ако во кутијата ставиме уште 3 црвени и 1 сино топче, тогаш односот на бројот на црвените топчиња и вкупниот број топчиња ќе биде поголем од 0,503. Определи го најголемиот можен број црвени топчиња во кутијата?

Решение. Ако со x го означиме бројот на црвените топчиња, тогаш во кутијата има вкупно $x+x=2x$ топчиња. Ако додадеме 3 црвени и 1 сино топче, тогаш во кутијата ќе имаме $x+3$ црвени и $2x+3+1=2x+4$ сини топчиња. Сега од условот на задачата следува $\frac{x+3}{2x+4}>0,503$, од каде добиваме $\frac{x+3}{2x+4}>\frac{503}{1000}$, односно

$$1000(x+3)>503(2x+4)\text{, т.е. } x<\frac{988}{6}.$$

Наголемиот природен број за кој е исполнето последното неравенство е $x=164$. Значи, во кутијата може да има најмногу 164 црвени топчиња. Навистина, $\frac{164+3}{328+4}=\frac{167}{332}>0,503$ и $\frac{165+3}{330+4}=\frac{168}{334}<0,503$.

83. Двајца трговци со јужно овошје вршат размена. Првиот трговец на вториот за 16 кивија му дал онолку лимони колку кивија што добил за три дузини лимони. Колку кивија ќе му даде вториот трговец на првиот за дузина (12 парчиња) лимони?

Решение. Нека 16 кивија вредат колку x лимони. Тогаш x кивија вредат колку 36 лимони. Затоа $16:x=x:36$, од каде добиваме

$$x^2=16\cdot36=4^2\cdot6^2=(4\cdot6)^2=24^2.$$

Според тоа, $x=24$. Според тоа, 16 кивија вредат колку 24 лимони, па затоа 12 лимони вредат колку 8 кивија.

84. Марко има три албуми со марки. Во првиот се наоѓаат петтина од сите марки, во вториот се наоѓаат неколку седмини од сите марки и во третиот се наоѓаат 303 марки. Колку марки има во сите три албуми?

Решение. Нека Марко има вкупно x марки. Од условот на задачата ја добиваме равенката $\frac{x}{5}+\frac{xy}{7}+303=x$, од каде добиваме $x=\frac{35\cdot303}{28-5y}$.

Бидејќи x и y се природни броеви од последната равенка следува $y=1,3$ или 5, при што целобројно решение за x се добива само за $y=5$ и тогаш $x=3535$.

85. Во театар со само два партери (лево и десно) во секој партер има толку редови, колку што во редот има столици. Во секој ред има еднаков број столици и во салата има 578 столици. Колку редови има во салата и колку столици има во секој ред?

Решение. Ако x е бројот на редовите, односно на столиците во еден ред, тогаш $2x^2=578$. Според тоа, $x^2=289$, па затоа $x=17$.

86. Секое од присутните момчиња има толку моливи колку што има вкупно момчиња. Милан пресметал дека сите заедно имаат 2116 моливи. Колку момчиња биле присутни?

Решение. Нека имало x момчиња. Тогаш Милан пресметал дека $x^2 = 2116$ и како $2116 = 46^2$ добиваме дека $x = 46$, т.е. биле присутни 46 момчиња.

87. Една вечер во училиште за танци имало вкупно 26 момчиња и девојки. Првата девојка играла со 9 момчиња, втората играла со 10, трета со 11 и секоја следна девојла играла со едно момче повеќе од претходната, се до последната присутна девојка која играла со сите присутни момчиња. Колку момчиња и колку девојки биле таа вечер во училиштето?

Решение. Нека x е бројот на девојките кои таа вечер биле присутни во училиштето за танци. Првата од нив играла со $9 = 8+1$ момчиња, втората со $10 = 8+2$ момчња, третата со $11 = 8+3$ момчиња итн. $x-$тата девојка играла со $8+x$ момчиња. Но, таа играла со сите момчиња, па затоа важи $x+(8+x) = 26$, т.е. $x = 9$. Значи, во училиштето биле присутни 9 девојки и $26-9 = 17$ момчиња.

88. Бројот на момчињата во едно одделение е еднаков на 60% од бројот на девојчињата во тоа одделение. Колкав процент од вкупниот број ученици во тоа одделение сочинуваат девојчињата?

Решение. Нека во одделението има x девојчиња. Тогаш бројот на момчињата е еднаков на $\frac{60x}{100} = \frac{3x}{5}$, што значи дека во одделението вкупно има $x + \frac{3x}{5} = \frac{8x}{5}$ ученици.Тоа значи дека процентот на девојчињата во одделението е еднаков на $\frac{x}{\frac{8x}{5}} \cdot 100\% = \frac{5}{8} \cdot 100\% = 62{,}5\%$ од вкупниот број ученици.

89. На општинскиот натпревар по математика учествувале 240 ученици. Половината од сите ученици се $\frac{3}{5}$ од сите девојчиња и $\frac{3}{7}$ од сите момчиња. Колку момчиња и колку девојчиња учествувале на натпреварот?

Решение. Нека x е бројот на девојчињата кои учествувале на натпреварот. Тогаш бројот на момчињата е еднаков на $240 - x$. Од условот на задачата следува $\frac{3}{5}x + \frac{3}{7}(240 - x) = 120$. Решение на последната равенка е $x=100$. Според тоа, на натпреварот учествувале 100 девојчиња и $240-100=140$ момчиња.

90. Една година на државните натпревари за учениците од основното образование во осмо одделение учествувале 86 ученици на натпреварот поо математика, 40 ученици на натпреварот по физика и 36 ученици на натпреварот по хемија. Притоа некои ученици учествувале само на еден од наведените три натпревари, некои на точно два, а некои учествувале на сите три натпревари. Бројот на учениците кои учествувале на точно два натпревари бил двапати помал од бројот на учениците кои учествувале само на еден натпревар, а бројот на учениците кои учествувале на сите три натпревари бил трипати помал од бројот на учениците кои учествувале само на еден натпревар. Колку ученици учествувале само на еден натпревар, колку на точно два натпревара и колку учествувале на сите три натпревари?

Решение. Нека x е бројот на учениците кои учествувале на само еден од трите натпревари. Тогаш $\frac{x}{2}$ е бројот на учениците кои учествувале на точно два натпревари и $\frac{x}{3}$ е бројот на учениците кои учествувале на трите натпревари. Затоа важи $x+2\cdot\frac{x}{2}+3\cdot\frac{x}{3}=86+40+36$, од каде добиваме $x=54$. Според тоа, само на еден натпревар учествувале 54 ученици, на точно два натпревари учествувале 27 ученици и на три натпревари учествувале 18 ученици.

91. Успехот на учениците на некое основно училипте на крајот на учебната година е прикажан со кружен дијаграм. На овој дијаграм 15 ученици упатени на дополнителна настава се претставени со кружен исечок со централен агол еднаков на $8^\circ 38'24''$. Определи го бројот на учениците во ова училиште.

Решение. Имаме $1^\circ=60'$ и $1'=60''$, па затоа $1^\circ=60\cdot 60=3600''$. Според тоа,

$$8^\circ 38'24''=8\cdot 3600''+38\cdot 60''+24''=31104'' \text{ и}$$

$$360^\circ=360\cdot 3600''=1296000''.$$

Од $\frac{31104''}{1296000''}=0,024=2,4\%$ заклучуваме дека гоемината на централниот агол на кружниот исечок е 2,4% од големината на полниот агол, што значи дека 2,4% од учениците на училиштето биле упатени на дополнителна настава. Според тоа, ако x е бројот на учениците во училиптето, тогаш $0,024x=15$, односно $x=15:0,024=625$. Значи, во училиштето учат 625 ученици.

92. Од вкупно запишаните ученици во осмо одделение на почетокот на учебната година 43% биле девојчиња. Во текот на годината училиштето го напуштиле 14 девојчиња и 36 момчиња, па на крајот на учебната година 46% од учениците во осмо одделение биле девојчиња. Колку ученици имало во осмо одделение на почетокот на учебната година? Колку момчиња учеле во осмо одделение на крајот на учебната година?

    Решение. Нека x е вкупниот број запишани ученици на почетокот на учебната година, а d е бројот на девојчињата. Тогаш $d=0,43x$. Во текот на годината се отпишале 14 девојчиња и 36 момчиња (вкупно 50 ученици) и на крајот 46% од учениците биле девојчиња, па затоа $0,46(x-50)=d-14$. Според тоа, $0,46(x-50)=0,43x-14$, од каде наоѓаме $x=300$. Вкупниот број запишани ученици во осмо одделение на почетокот на учебната година бил 300, од кои $0,43\cdot300=129$ биле девојчиња, а $300-129=171$ биле момчиња. На крајот на учебната година во училиштето во осмо одделение имало $171-36=135$ момчиња.

93. Во еден хотел во текот на 2018 година летувале 1200 мажи и жени. Во 2019 година, во однос на 2018 година, бројот на мажите кои летувале во хотелот се намалил за 10%, а бројот на жените се зголемил за 20%. Така во 2019 година вкупниот број гости во однос на 2018 година се зголемил за 75. Колку мажи, а колку жени летувале во овој хотел во 2019 година.

    Решение. Нека во 2018 година летовале x мажи. Тогаш бројот на жените кои летовале во 2018 година е $1200-x$. Од условот на задачата следува дека во 2019 година летовале $0,9x$ мажи и $1,2(1200-x)$ жени. Затоа важи $0,9x+1,2(1200-x)=1200+75$, од каде добиваме $x=550$. Според тоа, во 2019 година во хотелот летовале $0,9\cdot550=495$ мажи и $1275-495=780$ жени.

94. Еден ден 40% од учениците во претпладневната смена на некое училиште за ужина пиеле какао, 36% пиеле сок, а останатите се одлучиле за чај. Во попладневната смена на тоа училиште за ужина чај пиеле 37,5% ученици повеќе отколку во претпладневната смена, сок 75% ученици повеќе, а какао пиеле 75% ученици помалку отколку пре-

пладне. Дали бројот на учениците во попладневната смена е поголем или е помал во однос на бројот на учениците во претпладневната смена? За колку проценти?

Решение. Нека x е бројот на ичениците во претпладневната смена. За ужина какао пиеле $0,4x$ ученици, сок пиеле $0,36x$ ученици и чај пиеле $x-0,4x-0,36x=0,24x$ ученици. Во попладневната смена чај пиеле $0,24x\cdot 1,375=0,33x$ ученици, сок пиеле $0,36x\cdot 1,75=0,63x$ ученици и какао пиеле $0,4x\cdot 0,25=0,1x$ ученици. Според тоа, во попладневната смена имало $0,33x+0,63x+0,1x=1,06x$ ученици, што значи дека во попладневната смена имало 6% повеќе отколку во претпладневната смена.

95. Во неполн сад се наоѓа 85-процентен раствор на алкохол. Ако садот се дополни со 21-процентен раствор на алкохол, добиената течност добро ја измешаме, потоа одлееме онолку течност колку што сме долеале и повторно долееме 21-процентен раствор на алкохол, ќе добиеме 70-процентен раствор на алкохол, Колкав дел од садот бил полн пред долевањето?

Решение. Со $x, x<1$ да го означиме делот од садот кој е наполнет со 85-процентен раствор на алкохол. Бројот на процентите алкохол во садот е $85x$. Наполнетиот дел од садот е $1-x$ и толку ќе биде додаден 21-процентен алкохол, па неговиот удел ќе биде $21(1-x)\%$. Сега, бројот на процентите алкохол во садот е $21(1-x)+85x=21+64x$. Од садот одлеваме $1-x$ од растворот, па затоа количеството алкохол се намалило за $(1-x)(21+64x)$. Со второто долевање на 21-процентен алкохол количеството алкохол се зголемило за $21(1-x)$. На крајот добивме 70-процентен алкохол, што значи дека е точна равенката:

$$21+64x-(1-x)(21+64x)+21(1-x)=70.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенката $64x^2=49$, т.е. на равенката $x^2=\frac{49}{64}=(\frac{7}{8})^2$ и како $x>0$ заклучуваме дека $x=\frac{7}{8}$. Конечно, пред долевањето биле наполнети $\frac{7}{8}$ од садот.

96. Во текот на годината Мартин учествувал на неколку натпревари и на нив освојувал определен број бодови. Ако Мартин на следниот натпревар освои 89 бода, тогаш неговиот просек ќе биде 91 освоен бод по натпревар. Но, ако на следниот натпревар освои 64 бода, тогаш него-

виот просек ќе биде 86 освоени бода по натпревар. На колку натпревари учествувал Мартин до сега?

Решение. Нека n е бројот натпреварите на кои до сега учествувал Мартин, а x е збирот на освоените бодови на овие натпревари. Од условот на задачата следува $\frac{x+89}{n+1}=91$ и $\frac{x+64}{n+1}=86$, па затоа

$$x=91(n+1)-89 \text{ и } x=86(n+1)-64.$$

Според тоа, $91(n+1)-89=86(n+1)-64$, од каде добиваме $n=4$. Значи, Мартин до сега учествувал на 4 натпревари.

97. Откако за изградба на некоја станбена зграда е купен половина од планираниот материјал и се платени половина од предвидените трошоци за работа, материјалот поскапел за 15%, а цената на работната сила се зголемила за 8%. Во трошокот за изградба на таа зграда материјалот учествува со 60%, а работната сила учествува со 40%. Колку проценти се зголемил вкупниот трошок за изградба во однос на планираната цена за изградба на оваа зграда?

Решение. За изградба на втората половина од зградата материјалот кој учествува со 60% во градбата на зградата поскапел 15%, па затоа поскапувањето наградбата на зградата заради поскашување на материјалот изнесува $\frac{1}{2}\cdot 60\%\cdot 15\%=\frac{1}{2}\cdot\frac{60}{100}\cdot\frac{15}{100}=\frac{45}{1000}=4,5\%$. На сличен начин заради поскапување на работната рака изградбата на зградата поскапела за $\frac{1}{2}\cdot 40\%\cdot 8\%=\frac{1}{2}\cdot\frac{40}{100}\cdot\frac{8}{100}=\frac{16}{1000}=1,6\%$.

Конечно, целото поскапување на изградбата на зградата е еднакво на $4,5+1,6=6,1\%$.

98. Еден базен се полни со една цевка. Ако дотокот на водата во базенот се намали за 20%, за колку проценти ќе се зголеми времето на полнење на базенот?

Решение. Нека за 1 час од цевката во базенот истекуваа a литри вода и нека базенот се полни x часови. Тогаш волуменот на базенот е $V=ax$ литри. Ако дотокот на водата се намали за 20%, тогаш во базенот за 1 час ќе истекуваат $0,8a$ литри. Ако y е времето потребно за да во овој случај се наполни базенот, тогаш за волуменот на базенот имаме $V=0,8ay$. Според тоа, $ax=0,8ay$, од каде добиваме $10x=8y$, т.е. $y=1,25x=x+0,25x$, што значи дека со намален додток на вода за 20% времето на полнење на базенот ќе се зголеми за 25%.

99. Цената на влезниците за следење на натпреварите на еден фудбалски клуб се зголемила за 40%, но заработувачката се зголемила само 20%. За колку проценти се намалил бројот на гледачите?

Решение. Нека c е цената пред поскапувањето, C е цената по поскапувањето, z е заработувачката пред поскапувањето, Z е заработувачката по поскапувањето, n е бројот на гледачите пред поскапувањето и N е бројот на гледачите по поскапувањето. Цената на влезниците се покачила за 40%, па затоа $C=1,4c$, а заработувачката се зголемила 26%, па затоа $Z=1,26z$. Пред покачувањето на цената имаме $z=nc$, а по покачувањето на цената имаме $Z=CN$. Според тоа, $n=\frac{z}{c}$ и $N=\frac{Z}{C}=\frac{1,26z}{1,4c}$. Значи, $\frac{N}{n}=\frac{\frac{1,26z}{1,4c}}{\frac{z}{c}}=\frac{1,26}{1,4}=0,9$, од каде следува дека $N=0,9n=90\%n$, т.е. бројот на гледачите се намалил за 10%.

100. Во секоја од две овошни градини се одгледуваат само јаболка и круши. Бројот на јаболковите стебла е еднаков на 65% од бројот на стеблата во првата овошна градина и на 45% од бројот на стеблата во втората овошна градина, односно на 53% од бројот на стеблата во двете овошни градини заедно. Колкав процент од вкупниот број стебла во двете овошни градини заедно се овошните стебла од првата овошна градина?

Решение. Нека x е бројот на стеблата во првата, а y во втората овошна градина. Тогаш вкупниот број стебла во двете градини е $x+y$. Бројот на јаболкниците во првата градина е $0,65x$, во втората градина е $0,45y$, а во двете градини заедно е $0,53(x+y)$. Според тоа, точно е равенството $0,65x+0,45y=0,53(x+y)$, од каде добиваме

$$65x+45y=53(x+y), \text{ т.е. } 20x=8(x+y).$$

Од последното равенство следува $\frac{x}{x+y}=\frac{8}{20}=\frac{40}{100}$, што значи дека стеблата од првата градина се 40% од вкупниот број стебла во двете овошни градини.

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Дадени се 1995 броеви секој од кои е еднаков на 1 или на -1. Дали може дадените броеви да се поделат во две групи кои немаат заеднички елементи така што збирот на броевите во првата група да биде еднаков на збирот на броевите вовтората група?

   Решение. Дадени се 1995 броеви, па затоа во едната група ќе има непарен, а во другата група ќе има парен број броеви, на пример $2k+1$ и $1995-2k-1=1994-2k$ броеви. Бидејќи дадените броеви се 1 или -1, збировите на паровите броеви ќе бидат 2, 0 или -2. Затоа во групата со непарен број броеви збирот ќе биде непарен број, а во групата со парен број броеви збирот ќе биде парен број. Бидејќи непарен број не може да биде еднаков на парен број заклучуваме дека бараната поделба не е можна.

2. Во некој месец три саботи биле на парен датум. Кој ден од седмицата бил 25-тиот ден на тој месец?

   Решение. Бидејќи датумите на две соседни саботи се разликуваат за 5, заклучуваме дека овој месец имал 5 саботи, по еден непарен датум меѓу саботите со парен датум. Првата сабота била со парен датум и тоа на 2-ри во месецот, бидејќи ако таа е на 4-ти или 6-ти во месецот, тогаш последната сабота ќе биде на 32-ри или 34-ти, соодветно, што не е можно. Сега од $25=3\cdot 7+4$ заклучуваме дека 4-ти и 25-ти во месецот се во понеделник.

3. Природниот број x е таков што се точни две од тврдењата

   1) $x+7$ е точен квадрат,

   2) цифрата на единиците на x е 5,

   3) $x-12$ е точен квадрат.

   Определи го бројот x.

   Решение. Не е можно тврдењата 1) и 2) да се точни. Навистина, тогаш $x+7$ треба да биде точен квадрат кој завршува на 2, а точните квадрати завршуваат на една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Аналогно, не е можно тврдењата 2) и 3) да се точни, бидејќи тогаш $x-12$ треба да е точен квадрат кој завршува на цифрата 3. Според тоа, точни се тврдењата 1) и 3). Нека $x+7=m^2$ и $x-12=n^2$. Тогаш, $m^2-n^2=19$, т.е.

$(m-n)(m+n)=19$. Но, 19 е прост број, а $m-n$ и $m+n$ се негови природни делители, па бидејќи $m-n<m+n$ добиваме $m-n=1$, $m+n=19$. Според тоа, $m=10$ и $n=9$. Конечно, бараниот број е $x=m^2-7=93$.

4. Во семејството Јакопетрески има три деца: ќерки Ана и Бојана и син Горјан. Кое од децата е најмладо, а кое е најстаро ако е познато дека еден од следниве искази е лажен, а останатите три се вистинити:

   p : Ана е постара од Бојана.

   q : Горјан е помлад од Бојана.

   r : Горјан е постар од Ана.

   s : Бојана и Горјан заедно имаат двапати повеќе години од Ана.

   Решение. Нека Ана има x, Бојана има y и Горјан има z години. Исказите можеме да ги запишеме на следниов начин $p.\ x>y$, $q.\ z<y$, $r.\ z>x$ и $s.\ y+z=2x$. Можни се четири случаи:

   1) Нека претпоставиме дека исказот p е лажен, а останатите три искази се вистинити. Тогаш важи $x\le y, z<y, z>x$, т.е. $x<z<y$. Од овде следува $2x=y+z>x+x=2x$, што е противречност.
   2) Нека претпоставиме дека исказот q е лажен, а останатите три искази се вистинити. Тогаш важи $x>y$, $z\ge y$ и $z>x$, односно $y<x<z$.
   3) Нека претпоставиме дека исказот r е лажен, а останатите три искази се вистинити. Тогаш $x>y$, $z<y$ и $z\le x$. Затоа $z<y<x$, од каде следува дека $2x=y+z<x+x=2x$, што е противречност.
   4) Нека претпоставиме дека исказот s е лажен, а останатите три искази се вистинити. Тогаш $x>y, z<y, z>x$, па затоа важи $x<z<y<x$, што е противречност.

   Според тоа, единствено во вториот случај не добивме противречност, т.е. единствено вториот случај е можен, што значи дека Бојана е најмладо, а Горјан е најстаро дете во семејството Јакопетрески.

5. Црвени, сини и зелени деца се наредени на кружница. Кога учителот замолил црвените деца кои имаат зелен сосед да кренат рака, се подигнале 20 раце. Потоа учителот замолил сините деца кои имаат зелен сосед да кренат рака и се подигнале 25 раце. Докажи, дека некое од децата кои подигнале рака има два зелени соседи.

Решение. Ќе велиме дека неколку зелени деца (може и едно), распоредени последователно на кружницата, формираат група ако од двете нивни страни имаат соседи од различни бои. Тогаш децата кои подигнале рака се точно соседите на групите. Ако нема (црвени или сини) деца кои имаат два зелени соседи, тогаш бројот на оние кои подигнале рака е парен (по двајца за секој интервал меѓу групите). Последното е противречност, бидејќи според условот на задачата тој број е $20+25=45$.

6. На таблата се запишани сите природни броеви од 1 до 1991. Горјан последователно брише по два броја и на нивно место ја запишува апсолутната вредност на нивната разлика. Постапката ја повторува се додека на таблата не остане само еден број. Дали тоа може да биде бројот 1991?

   Решение. Нека се избрани броевите a и b, каде $a>b$. Тогаш збирот на броевите на таблата се намалува за
$$a+b-|a-b|=a+b-(a-b)=2b,$$
т.е. за парен број. Во почетокот зирот на броевите запишани на таблата е
$$1+2+3+...+1991=\tfrac{1991\cdot 1992}{2}=1991\cdot 996.$$
Бидејќи почетниот збир е парен број, во секој чекор збирот ќе биде парен број, што значи дека не е можно да се добие непарен збир, т.е. не е можно да се добие бројот 1991.

7. Во таблицата

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

   се заокружени 10 броеви и тоа по еден во секој ред и по еден во секоја колона. Докажи дека меѓу заокружените броеви барем два се еднакви.

Решение. Да забележиме дека секој број во табелата е еднаков на остатокот кој се добива при делење со 10 на збирот на првиот број во редот и првиот број во колоната каде се наоѓа разгледуваниот број. Тоа значи дека остатокот при делењето со 10 на збирот на заокружените броеви е еднаков на остаткот при делењето со 10 на збирот на броевите во првиот ред и првата колона, т.е. на

$$(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)+(9+8+7+6+5+4+3+2+1+0)=90,$$

а тоа е 0. Меѓутоа, ако заокружените броеви се различни, тогаш нивниот збир е

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45,$$

па остатокот при делење со бројот 10 би бил 5, што е противречност. Од добиената противречност следува дека меѓу заокружените броеви мора да има барем два еднакви.

8. На таблата се запишани броевите 1, 2, 3, 4, ..., 1994, 1995. Горјан бриши било кои два броја и наместо нив го запишува или нивниот збир или апсолутната вредност на нивната разлика. Постапката се повторува се додека на таблата не остане само еден број. Дали може последниот број да биде:

   а) 0, б) 1995?

   Решение. а) Нулата лесно се добива на следниов начин: 1 го оставаме, а од преостанатите 1994 броја формираме 997 парови соседни броеви и секој пар го заменуваме со апсолутната вредност на нивната разлика, т.е. со 1. Сега имаме $1+997=998$ единици. Со формирање на нови разлики ќе добиеме 499 нули, а од нив потоа се добива 0.

   б) Збирот на сите броеви е $S=1+2+...+1994+1995=1995\cdot 998$, т.е. е парен број. Кога бришеме два броја и наместо нив го запишуваме нивниот збир, тогаш вкупниот збир не се менува. Ако $b<a$ и ако наместо броевите a и b ја пишуваме апсолутната вредност на нивната разлика, тогаш целиот збир се менува за $a+b-|a-b|=2b$, што значи останува парен број. Затоа бројот 1995 никогаш не може да се добие.

9. Во група од 26 луѓе секој познава најмалку 13 луѓе. Докажи дека од групата може да се изберат 4 луѓе и да се разместат околу тркалезна маса така што секој седи меѓу свои познаници.

   Решение. Јасно, ако сите членови на групата меѓусебно се познаваат, тогаш тврдењето е точно. Во спротивно, две лица кои меѓусебно не се познаваат ќе ги поставиме еден наспроти друг. Нека тоа се лицата A и B. Меѓу преостанатите 24 лица има 13 познаници на лицето A и 13 познаници на лицето B, што значи дека најмалку $13+13-24=2$ познаника се заеднички. Двајцата заеднички познаници ќе ги сместиме меѓу A и B.

10. Шест броја се распоредени во темињата на правилен шестаголник. Збирот на сите броеви е 1 и секој од нив е еднаков на апсолутната вредност на разликата на претходните два броја, разгледувајќи ги броевите во насока на движењето на стрелката на часовникот. Определи ги овие броеви.

Решение. Од условот на задачата следува $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=1$, $a_3=|a_2-a_1|$, $a_4=|a_3-a_2|$, $a_5=|a_4-a_3|$, $a_6=|a_5-a_4|$, $a_1=|a_6-a_5|$ и $a_2=|a_1-a_6|$. Според тоа,

$$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+|a_4-a_3|+|a_5-a_4|+|a_6-a_5|+|a_1-a_6|=1.$$

Понатаму, дадените броеви се еднакви на апсолутни вредности на некои броеви, па затоа се ненегативни и меѓу нив има најголем број. Нека тоа е бројот a_1. Сега од равенството $a_1=|a_6-a_5|$ следува дека $\{a_6,a_5\}=\{a_1,0\}$. Ако е $a_6=a_1$ и $a_5=0$, тогаш добиваме $a_2=0$, $a_3=a_1$ и $a_4=0$. Ако е $a_6=0$ и $a_5=a_1$, тогаш добиваме $a_2=a_1$, $a_3=0$ и $a_4=a_1$. Притоа во двата случаја важи $4a_1=1$, па затоа $a_1=\frac{1}{4}$ и бараните броеви (во насока на вижењето на стрелките на часовникот) се $\frac{1}{4},\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},0$ или било циклична пермутација.

11. Во една соба има мачка и 10 глувци: 9 црни (означени со броевите од 1 до 9) и 1 бел (означен со бројот 10). Глувците трчаат во круг, секогаш во иста насока и притоа не го менуваат нивниот редоследот (1, 2, 3, ..., 9, 10). Мачката ги лови глувците еден по еден и секогаш кога ќе улови еден глушец покрај неа претрчуваат 4 глувци, а петтиот кој претрчува го лови. Се покажало дека белиот глушец е уловен последен. Кој глушец е прв уловен?

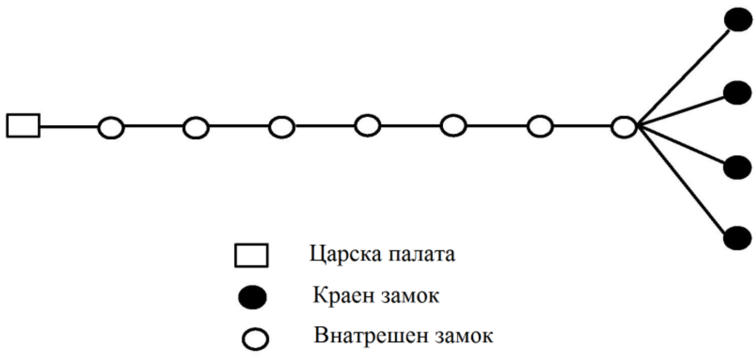
Решение. Нека претпоставиме дека мачката прво го уловила глушецот 1. Тогаш редоследот по кој ги лови глувците е 1, 6, 2, 8, 5, 4, 7, 10, 3, 9, па затоа последниот уловен глушец е црн. Меѓутоа, ако првиот уловен е лушецот број 2, тогаш редоследот по кој се уловени сите глувци е: 2, 7, 3, 9, 6, 5, 8, 1, 4 и 10, што значи дека последниот уловен глушец е белиот. Јасно, ова е единствениот таков случај, па затоа првиот уловен глушец е глушецот број 2.

12. Во едно царство има 12 замоци. Еден од нив е царската палата. Некои парови замоци се поврзани со царски пат. Од секој замок може да се стигне до царската палата на единствен начин, движејќи се само по царски патишта. Замок, различен од царската палата, го нарекуваме *„краен“*, ако е сврзан со точно еден од останатите замоци по царскиот пат.

а) Ако има 4 „крајни“ замоци, определи го максималниот број царски патишта од „краен“ замок до царската палата.

б) Ако нема царски пат, кој надминува $56km$, докажи, дека збирот на растојанијата од „крајните“ замоци до царската палата е помал од $2017km$.

Решение. а) Еден од останатите 8 замоци е царската палата, а другите ќе ги наречеме *„внатрешни“*. Максимален број царски патишта од *„краен“* замок до царската палата ќе имаме, ако треба да се премине низ сите 7 *„внатрешни“* замоци. Тогаш од тој *„краен“* замок ќе се минува по 8 од царските патишта. Пример е даден на долниот цртеж.



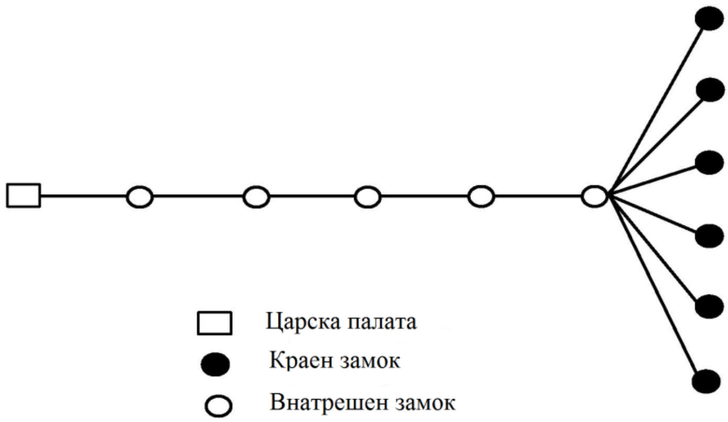
б) Нека n е бројот *„крајни“* замоци во царството. Тогаш од *„краен“* замок ќе се стигнува до царската палата по најмногу $12-n$ царски патишта. Така бараниот збир ќе содржи најмногу $n(12-n)$ царски патишта. Сега, ако искористиме, дека

$$n(12-n)=12n-n^2\leq 36,$$

за бараниот збир добиваме:

$$(12n-n^2)\cdot 56\leq 36\cdot 56=2016<2017.$$

Даден е пример, во кој има 6 *„крајни“* замоци, а збирот на растојанијата од „крајните“ замоци до царската палата се мери со 36 царски патишта:



13. Даден е квадрат со должина на страна $46cm$. Подели го овој квадрат на 1988 помали квадрати чии должини на страни изразени во сантиметри се целобројни.

Решение. Ќе покажеме дека дадениот квадрат може да се подели на 1988 квадрати со должини на страни $1cm$ и $3cm$. Нека x е бројот на квадратите чии должини на страни се $3cm$ и $1988-x$ е бројот на квадратите чии должини на страни се $1cm$. Тогаш од плоштината на квадратот добиваме

$$(1988-x)\cdot 1+9x=46^2=2116\text{, т.е. } 8x=2116-1988=128,$$

па затоа $x=16$. Според тоа, едно од можните решенија е 16 квадрати со должина на страна $3cm$ и 1972 квадрати со должина на страна $1cm$.

IV.2. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

14. Во квадрат со должина на страна $5cm$ произволно се избрани 77 точки. Докажи дека може да се конструира квадрат со плоштина $1cm^2$ во кој се наоѓаат најмалку четири од дадените точки.

Решение. Со прави паралелни на страните на дадениот квадрат истиот го делиме на $5\cdot 5=25$ складни квадрати со должина на страна $1cm$ и чија плоштина е еднаква на $1cm^2$. Бидејќи $77=3\cdot 25+2$ од обопштениот принцип на Дирихле следува дека постои квадрат во кој има најмалку 4 од дадените точки и тоа е бараниот квадрат.

15. Во квадрат со должина на страна $6cm$ на произволен начин се разместени 75 точки. Докажи дека може да се конструира квадрат со плоштина $1cm^2$ во кој се наоѓаат најмалку три од дадените точки.

Решение. Нека дадениот квадрат го поделиме на $6 \cdot 6 = 36$ квадрати со плоштини еднакви на $1cm^2$. Тогаш бидејќи $75 = 36 \cdot 2 + 3$, од принципот на Дирихле следува дека барем во еден од квадратите со плоштина $1cm^2$ има најмалку 3 точки.

16. На шаховско првенство учествувале 8 шахисти при што секој шахист со секој шахист одиграл по една партија. Докажи дека во секој момент на натпреварот постојат најмалку двајца шахисти со еднаков број до тогаш одиграни партии.

Решение. Бројот на партиите кои секој шахист ги одиграл во било кој момент, кога секој шахист одиграл барем една партија е елемент од множеството $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, а кога постои шахист кој не одиграл ниту една партија е елемент од множеството $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Бидејќи двете множества имаат по 7 елементи, а имаме 8 шахисти, од принципот на Дирихле следува дека во секој момент постојат најмалку двајца шахисти кои одиграле еднаков број партии.

17. Дали може броевите $-1,0,1$ да се распоредат во квадратна таблица со димензии 5×5 така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагоналка е различен?

Решение. Збирот на пет броја, секој од кои е еднаков на $-1,0$ или 1 е поголем или еднаков на -5, а е помал или еднаков на 5. Значи, имаме вкупно 11 можни збирови кои треба да се распоредат во $5+5+2=12$ редови, колони и дијагонали. Од принципот на Дирихле следува дека најмалку два збира мора да бидат еднакви, што значи дека одговорот на поставеното прашање е НЕ.

IV.2. ПРЕБРОЈУВАЊЕ

18. На кружницата се распоредени 1995 точки такви што 1994 точки се бели, а една точка е црна. Ги разгледуваме сте конвексни многуаголници со темиња во овие точки. Кои многуаголници се повеќе, оние кои имаат едно црно теме или оние кои немаат црно теме?

Решение. Нека конвексните многуаголници чии сите темиња се бели се $M_1, M_2, ..., M_k$. На секој од овие многуаголници му соодветствува по еден многуаголник $N_1, N_2, ..., N_k$ такви што едно теме е дадената црна точка, а останатите темиња се темињата на многуаголниците $M_1, M_2, ..., M_k$, соодветно. Меѓутоа, $N_1, N_2, ..., N_k$ не се сите многуаголници кај кои едно теме е црно, бидејќи секоја бела отсечка со црната точка формира триаголник со едно црно теме. Затоа многуаголниците кои имаат едно црно теме се повеќе од многуаголниците кои немаат црно теме.

19. Во единечните квадратчиња на квадратна табела 3×3 се запишуваат 9 различни природни броеви чиј збир е еднаков на S. Табелата ја нарекуваме „интересна", ако при прецртување на било кој ред и било која колона збирот на двата броја во дијагонални полиња е еднаков на збирот на другите два броја во дијагоналните полиња.
а) Докажи дека за $S=2018$ не постои интересна табела.
б) Најди го бројот на различните интересни табели кои ги содржат броевите 1, 2, 3, 5, 668 и за кои S е најмал можен број. (Две табели се различни, ако не се добиваат една од друга со вртење околу центарот на табелата.)

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Решение. а) Да разгледаме една интересна табела. Ако ги прецртаме вториот ред и втората колона, од условот имаме $a_1+a_9=a_3+a_7$ и ако на двете страни го додадеме a_5, добиваме

$$a_1+a_5+a_9=a_3+a_5+a_7,$$

т.е. збирот на броевите на секоја од дијагоналите е еднаков.

Нека тој збир е еднаков на a. Сега да ги прецртаме третиот ред и третата колона. Добиваме

$$a_1+a_5=a_2+a_4=a-a_9,\text{ т.е. } a_2+a_4+a_9=a.$$

На сличен начин, ако ги прецртаме првиот ред и првата колона, имаме $a_6+a_8=a_5+a_9=a-a_1$, т.е. $a_6+a_8+a_1=a$. Тогаш

$$S=(a_2+a_4+a_9)+(a_6+a_8+a_1)+(a_3+a_5+a_7)=3a.$$

Бидејќи бројот 2018 не е делив со 3, следува дека интересна табела со $S=2018$ не постои.

б) Ќе ги искористиме ознаките од а). Бидејќи бараме интересна табела со најмал можен збир S, задачата се сведува на наоѓање на најмалата вредност на a, каде a е некој од разгледуваните збирови во а). Природно е да работиме со броевите 1 и 666. Можеме да сметаме, дека $a_1 = 1$ и $a_9 = 668$. Тогаш задачата се сведува на наоѓаме на најмалата можна вредност на a_5. Од условот $a_1 + a_5 = a_2 + a_4$ следува, дека $a_5 \neq 2$ и $a_5 \neq 3$. Ќе докажеме, дека постои интересна табела со $a_5 = 4$. За неа $S = 3 \cdot (1+4+668) = 3.671 = 2019$. Освен тоа е јасно, дека во тој случај $a_2 = 2$ и $a_4 = 3$ или обратно, т.е. $a_2 = 3$ и $a_4 = 2$. За бројот 5 има две можности: при првата $a_6 = 5$ или $a_8 = 5$, а при втората бројот 5 е во аголно единечно квадратче на табелата, т.е. $a_3 = 5$ или $a_7 = 5$. Првата можност се отфрла со непосредна проверка, а при втората ги добиваме следните две табели:

1	2	5
3	4	7
664	665	668

1	2	664
3	4	666
5	6	668

Во а) докажавме, дека

$$a_1 + a_5 + a_9 = a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_9 = a_6 + a_8 + a_1 = a\,.$$

На потполно аналоген начин може да се докаже дека $a_2 + a_6 + a_7 = a$ и $a_4 + a_8 + a_3 = a$. Така, добиваме 6 збирови, во секој од кои има по еден претставник на секој ред и секоја колона од табелата. Оттука следува, дека од секоја од горните 2 табели можеме да добиеме 9 табели во зависност од бројот во центарот на табелата, за што има вкупно 9 можности. На секоја од тие 9 табели соодветствува по една, која се добива со замена на броевите во аголните полиња на една од дијагоналите. Останатите разместувања не водат до различни табели. Следствено вкупниот број на различни интересни табели е $9 \cdot 2 + 9 \cdot 2 = 36$.

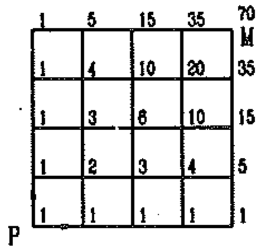
20. Пајак се движи по прозорска решетка во облик на квадратна мрежа со димензии 4×4. Движењето на пајакот е правоалиниски, чекор по чекор, од еден до друг јазол на решетката, но секогаш десно или горе, при што пајакот поаѓа од долниот лев агол на решетката и сака да стигне во горниот десен агол на решетката.

а) Колку чекори треба да направи пајакот до целта?

б) На колку различни начини може пајакот да стигне до целта?

Решение. а) На пајакот му требаат точно 8 чекори (4 хоризонтални и 4 вертикални) за да од точката P стигне во точката M.

б) На цртежот десно е прикажан бројот на различните начини на кои пајакот може да стигне до секој јазол на решетката, кој е еднаков на збирот на различните начини на кои пајакот може да стигне до претходните соседни јазли. Конечно, пајакот до целта може да стигне на 70 различни начини.



21. Иван пакува бомбони во кеси. На располагање има три вида бомбони: карамели, чоколадни бомбици и гумени бомбони. Во секоја кеса мора да има точно 6 бомбони и најмалку 1 бомбона од секоја вид. Определи го бројот на различните пакувања кои може да ги направи Иван.
Решение. Решението е едадено во следнава табела:

Карамели	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
Чоколадни	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1
Гумени	4	3	2	1	3	2	1	2	1	1

Според тоа, Иван може да направи 10 различни пакувања.

22. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се деливи со 3 и се запишуваат само со цифрите 1, 2, 3, 4, 5.
Решение. Имаме 5 броја со три исти цифри и тоа: 111, 222, 333, 444 и 555; потоа 12 броја со по две еднакви цифри (по 3 броја со цифрите 1, 1, 4, потоа 1, 4, 4, па 2, 2, 5 и 2, 5, 5) и 24 броја со три различни цифри (6 броја со цифрите 1, 2, 3; 6 броја со цифрите со цифрите 1, 3, 5; 6 броја со цифрите 2, 3, 4; и 6 броја со цифрите 3, 4, 5). Според тоа, имаме $5+12+24=41$ број кои го задоволуваат условот на задачата.

23. Определи го бројот на петцифрените броеви кои се поголеми од 88888 и чиј збир на цифри е еднаков на 42. Испиши ги овие броеви.
Решение. Петцифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 42 мора да се запишани со петорките цифри: $(9,9,9,9,6),(9,9,9,8,7),(9,9,8,8,8)$ запишани во некој редослед.
Броеви кои се поголеми од 88888 и се запишани со цифрите од првата петорка се: 99996, 99969, 99699, 96999.
Броеви кои се поголеми од 88888 и се запишани со цифрите од втората петорка се: 99987, 99978, 99897, 99879, 99798, 99789, 98997, 98979, 98799, 97998, 97989, 97899, 89997, 89979, 89799.
Броеви кои се поголеми од 88888 и се запишани со цифрите од третата петорка се: 99888, 98988, 98898, 98889, 89988, 89898, 89889, 88998, 88989, 88899.

Конечно, постојат $4+15+10=29$ броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

24. Определи го бројот на петцифрените броеви такви што: првата цифра е парен број, втората цифра е сложен број, третата цифра е непарен број, четвртата цифра е прост број и последната цифра е број кој е делив со бројот 3.

 Решение. За првата цифра имаме 4 можности (2, 4, 6 и 8), за втората цифра имаме 4 можности (4, 6, 8 и 9), за третата цифра имаме пет можности (1, 3, 5, 7 и 9), за четвртата цифра имаме 4 можности (2, 3, 5 и 7) и за петтата цифра имаме 4 можности (0, 3, 6 и 9). Според тоа, бараниот број броеви е еднаков на $4\cdot 4\cdot 5\cdot 4\cdot 4=1280$.

25. Определи го бројот на петцифрените броеви чија цифра на десетилјадите е парна, цифрата на стотките е непарна, а цифрата на единиците е прост број.

 Решение. Нека $\overline{xyztu}$ е број кој ги задоволува условите на задачата. Тогаш $x\in\{2,4,6,8\}$, т.е. имаме 4 можности, $y\in\{0,1,...,8,9\}$, т.е. имаме 10 можности, $z\in\{1,3,5,7,9\}$, т.е. имаме 5 можности, $t\in\{0,1,...,8,9\}$, т.е. имаме 10 можности и $u\in\{2,3,5,7\}$, т.е. имаме 4можности. Според тоа, постојат $4\cdot 10\cdot 5\cdot 10\cdot 4=8000$ петцифрени броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

26. Определи го бројот на четирицифрените броеви во кои постојат цифри кои се повторуваат.

 Решение. Има вкупно 9000 четирицифрени броеви. Ќе го определиме бројот на четирицифрените броеви во кои цифрите не се повторуваат. Нека $\overline{abcd}$ е четирицифрен број. Цифрата a може да се избере на 9 начини (една од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). По изборот на цифрата a за цифрата b имаме $10-1=9$ можности, па за цифрата c имаме $10-2=8$ можности и за цифрата d имаме $10-3=7$ можности. Конечно, четирицифрени броеви кај кои цифрите не се повторуваат има $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7=4536$, па бараниот број четирицифрени броеви е еднаков на $9000-4536=4464$.

27. Определи го бројот на петцифрените броеви запишани со цифрите 0, 1 и 2 такви што барем две соседни цифри им се еднакви.

 Решение. Бидејќи 0 не може да биде на прво место, вкупниот број на петцифрени броеви е еднаков на $2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=162$. Да ги преброиме оние броеви на кои соседните цифри им се различни: за местото на десетилјадитите имаме две можности (1 или 2), за секоја од нив за местото на илјадитите имаме две можности итн. Значи, броеви со различни соседни цифри се $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$, па затоа бараниот број броеви е $162-32=130$.

28. Определи го бројот на четирицифрените природни броеви кои запишани со помош на цифрите 0, 1, 3, 4, 5 и 8 и се такви што:
а) цифрите може да се повторуваат,
б) цифрите не може да се повторуваат,
в) цифрите може да се повторуваат, а бројот е делив со 5.
Решение. а) Бидејќи 0 не може да биде на прво место и цифрите се повторуваат бараниот број е еднаков на $5\cdot6\cdot6\cdot6=1080$.
б) Бидејќи 0 не може да биде на прво место и цифрите не се повторуваат бараниот број е еднаков на $5\cdot5\cdot4\cdot3=300$.
в) Бидејќи 0 не може да биде на прво место, за цифрата на единиците имаме 2 можности (Зошто?) и цифрите се повторуваат бараниот број е еднаков на $5\cdot6\cdot6\cdot2=360$.

29. Определи го бројот на шестцифрени броеви кои може да се формираат од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 така што секоја цифра во записот на бројот се јавува само еднаш и парните цифри се една до друга. (*Забелешка*: 0 е парна цифра.)
Решение. *Прв начин*. Ако 0 може да биде прва цифра, тогаш блокот на парните цифри и непарните цифри можеме да ги подредиме на $4!$ начини, при што на секој од тие распореди му соодветствуваат $3!$ распореди на парните цифри, т.е. би имале $4!\cdot3!=144$ распореди. Бидејќи 0 не може да биде на почетокот, треба да одземеме $2!\cdot3=12$ распореди, па затоа бараниот број распореди е $144-12=132$.
Втор начин. Кога ќе ги распоредиме парните цифри, непарните цифри на преостанатите три места можеме да ги распоредиме на $3\cdot2\cdot1=6$ начини. Имаме $2\cdot2\cdot1=4$ можности да ги распоредиме парните цифри на првите три места (0 не може да биде на првото место), а по $3\cdot2\cdot1=6$ можности да ги распоредиме од второто до четвртото, од третото до петтото место, или од четвртото до шестото место. Затоа бараниот број распореди е еднаков на $6\cdot(4+6+6+6)=132$.

30. Определи го бројот на петцифрените природни броеви во чиј запис барем една цифра е 5 и барем една цифра е 1.

Решение. Со P да го означиме множеството од сите петцифрени броеви кај кои ниту една цифра не е 5, а со J множеството петцифрени броеви кај кои ниту една цифра не е 1.

Петцифрен броеви кај кој има барем една цифра 5 не е во P и петцифрен број кај кој барем една цифра е 1 не е во J. Петцифрен број кој има барем една цифра 5 и има барем една цифра 1 не е ниту во P ниту во J. Значи, бројот на бараните петцифрени броеви се добива ако од бројот на сите петцифрени броеви се одземе бројот на петцифрените броеви кои се во P или J.

Нека x е бараниот број. Бројот на сите петцифрени броеви е еднаков на $n=9\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=90000$. Бројот на сите броеви во P е еднаков на $p=8\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9$, а бројот на сите броеви во J е $j=8\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9$. Понатаму, бројот на сите петцифрени броеви кои се и во P и во J е еднаков на $i=7\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8$. Според тоа, бројот на сите петцифрени броеви кои се наоѓаат во P или во J е

$m=p+j-i=2\cdot 8\cdot 9^4-7\cdot 8^4=76304$.

Конечно, бараниот број броеви е $x=n-m=90000-76304=13696$.

31. Определи го бројот на природните броеви n кои се помали од 2000 такви што збирот на цифрите на n и збирот на цифрите на $n+1$ се непарни броеви?

Решение. Нека $n=\overline{abcd}$ е број со бараните својства и нека збирот на неговите цифри е x, а збирот на цифрите на бројот $n+1$ е y. Јасно, $x=a+b+c+d$. Понатаму, е јасно дека мора да биде $d=9$, бидејќи во спротивно $n+1=\overline{abc(d+1)}$ и тогаш $y=x+1$ не е непарен број. Значи, бараме броеви од видот $n=\overline{abc9}$ такви што $x=a+b+c+9$ и y се непарни броеви, односно $z=a+b+c$ е парен број, а y е напрен број. Можни се два случаја:

1) Ако $c\in\{0,1,...,8\}$, тогаш $n+1=\overline{ab(c+1)0}$, па $y=a+b+c+1=z+1$ и овој број е непарен секогаш кога z е парен. Според тоа, во овој случај бараме броеви од видот $n=\overline{abc9}$ такви што $a\in\{0,1\}$, $b\in\{0,1,...,9\}$, $c\in\{0,1,...,8\}$ и z е парен број. Ако $a=0$, тогаш z е парен ако цифрите b и c се со иста парност. Ако цифрите b и c се парни, тогаш имаме $5\cdot 5=25$ можности, а ако цифрите b и c се непарни, тогаш тогаш имаме $5\cdot 4=20$ можности. Според тоа, во

случајот имаме $20+25=45$ броеви кои ги задоволуваат условите на задачата. Ако $a=1$, тогаш z е парен број ако цифрите b и c се со различна парност, т.е. едната е парна,а другата е непарна. Ако b е парна, а c е непарна, тогаш имаме $5\cdot 4=20$ можности, а ако b е непарна, а c е парна, тогаш имаме $5\cdot 5=25$ можности. Значи, и во овој случај имаме $20+25=45$ броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

2) Ако $c=9$, тогаш мора и $b=9$, бидејќи во спротивно имаме $n=\overline{ab99}$, $z=a+b+9$, $n+1=\overline{a(b+1)00}$ и $y=a+b+1=z-8$, што е парен број кога z е парен бброј. Конечно, од броевите од облик $n=\overline{a999}$ кои се помали од 2000 само бројот 999 ги задоволува условите на задачата.

Значи, имаме $45+45+1=91$ броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

32. На роденденот на Горјан сите се ракувале со Горјан и се ракувале меѓу себе. Имало вкупно 136 ракувања. Колку гости имал Горјан на неговиот роденден?

Решение. Нека на роденденот n гости. Тогаш на роденденот има $n+1$ лице и секое лице се ракувало со n лица. Бидејќи ракувањето на A и B го броиме двапати (A со B и обратно), добиваме дека вкупниот број ракувања е $\frac{n(n+1)}{2}$. Затоа $\frac{n(n+1)}{2}=136$, т.е. $n(n+1)=272=16\cdot 17$, од каде добиваме дека $n=16$. Според тоа, на роденденот на Горјан имало 16 гости.

33. Даден е конвексен многуаголник $P_1P_2...P_{49}P_{50}$. Од темето P_1 се повлечени дијагоналите до темињата P_3 и P_{49}, а потоа од дадениот многуаголник се отсечени триаголниците $P_1P_2P_3$ и $P_1P_{50}P_{49}$. Колку дијагонали има новодобиениот многуаголник?

Решение. После отстранувањето на триаголниците $P_1P_2P_3$ и $P_1P_{50}P_{49}$ добиениот многуаголник има 48 темиња. Според тоа, бројот на неговите дијагонали е $d_{48}=\frac{48(48-3)}{2}=1080$.

34. Страната на правилен многуаголник е со должина $1cm$. Колкав е периметарот на овој правилен многуаголник ако тој има 252 дијагонали?

Решение. Нека правилниот многуаголник има n страни. Тогаш бројот на неговите дијагонали е

$$\frac{n(n-3)}{2}=252, \text{ т.е. } n(n-3)=2^3\cdot 3^2\cdot 7=24\cdot 21.$$

Следува дека $n=24$, а периметарот изнесува $24cm$.

35. Ако збирот на аглите на многуаголникот се помножи со бројот на дијагоналите на многуаголникот се добива 97200°. Определи го бројот на страните на овој многуаголник.

Решение. Нека n е бројот на страните на многуаголникот. Тогаш од условот на задачата следува

$$(n-2)\cdot 180^\circ\cdot\frac{n(n-3)}{2}=97200^\circ,$$

па затоа $n(n-2)(n-3)=1080$. Но, $1080=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5=9\cdot 10\cdot 12$, па од $n(n-2)(n-3)=9\cdot 10\cdot 12$ следува $n=12$.

36. Определи го збирот на внатрешните агли на мноуаголник кој има 189 дијагонали.

Решение. Бројот на дијагоналите на $n-$аголник е еднаков на $\frac{n(n-3)}{2}$, па затоа $\frac{n(n-3)}{2}=189$, односно $n(n-3)=378$. Бидејќи

$$378=2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7=18\cdot 21,$$

добиваме

$$n(n-3)=21\cdot 18,$$

па затоа $n=21$. Конечно, збирот на внатрешните агли на многуаголникот е еднаков на $(n-2)\cdot 180^\circ=19\cdot 180^\circ=3420^\circ$.

37. Збирот на бројот на страните и бројот на дијагоналите на правилен многуаголник е еднаков на 153. Определи го внатрешниот агол на овој многуаголник.

Решение. Од условот на задачата следува дека $\frac{n(n-3)}{2}+n=153$. Според тоа, $n^2-n=306$, па затоа $n(n-1)=2\cdot 3\cdot 3\cdot 17=17\cdot 18$, што значи $n=18$. Конечно, бараниот внатрешен агол е $\frac{16\cdot 180^\circ}{18}=160^\circ$.

38. Бројот на дијагоналите на многуаголникот е 8 пати поголем од бројот на страните. Определи го збирот на внатрешните агли на овој многуаголник.

Решение. Треба да го определиме збирот на внатрешните агли на $n-$аголникот.

Бројот на дијагоналите е еднаков на $\frac{n(n-3)}{2}$, па затоа $\frac{n(n-3)}{2}=8n$, од каде добиваме $n=19$. Збирот на внатрешните агли на 19-аголникот е $(19-2)\cdot180^\circ=3060^\circ$.

39. Внатрешниот агол на правилен многуаголник е 12 пати поголем од придружениот надворешен агол. Определи го бројот на дијагоналите на овој многуаголник.

Решение. Нека n е бројот на страните на многуаголникот. Тогаш големината на внатрешниот агол на правилен $n-$ аголник е $\frac{(n-2)\cdot180^\circ}{n}$.

Понатаму, збирот на надворешните агли на многуаголникот е 360°, па затоа големината на надворешниот агол е $\frac{360^\circ}{n}$. Значи, $\frac{(n-2)\cdot180^\circ}{n}=12\cdot\frac{360^\circ}{n}$, од каде добиваме $n=26$. Според тоа, станува збор за 26-аголник и бројот на неговите дијагонали е еднаков на $\frac{(26-3)\cdot26}{2}=299$.

40. а) На колку различни начини 7 ученици може да седнат на 9 различни столици?

б) На колку различни начини на 5 столици може да седнат некои од 7 ученици?

Решение. а) Во случајов учениците избираат столици, па бројот на различните начини е $9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=181440$.

б) Во случајов столиците „избираат“ ученици, па бројот на различните начини е $7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=2520$.

41. Дванаесет витези на тркалезната маса треба да изберат двочлена делегација кој ќе го посети кралот Артур. На колку начини тоа може да се направи ако во делегацијата не смее да бидат два витеза кои на тркалезната маса седат еден до друг?

Решение. Секој од дванаесетте витези може да е во делегација со 9 од преостанатите витези (не може да се комбинира со своите два соседа и со самиот себе). Според тоа, вкупниот број делегации е еднаков на $\frac{12\cdot9}{2}=54$.

42. Даден е конвексен десетаголник. Колку триаголници се определени со темињата на дадениот десетаголник?

Решение. Десетте темиња определуваат $\frac{10\cdot9}{2}=45$ различни отсечки. Бидејќи меѓу темињата не постојат три кои се колинеарни, секоја од овие 45 отсечки е основа за 8 различни триагоници. Според тоа, вкупниот број триаголници е еднаков на $\frac{45\cdot8}{3}=120$, бидејќи секој триаголник ABC во производот $45\cdot8$ е броен трипати и тоа како триаголник со основа AB, како триаголник со основа BC и како триаголник со основа CA. Според тоа, вкупниот број триаголници определен со темињата на конвексен десетаголник е 120.

43. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржани во квадратна мрежа со димензии 8×8. Колку од нив се квадрати?

Решение. Квадратната мрежа со димензии 8×8 е формирана од 9 хоризонтални и 9 вертикални линии. Две хоризонтални и две вертикални линии формираат правоаголник. Значи, имаме $\frac{9\cdot8}{2}\cdot\frac{9\cdot8}{2}=1296$ правоаголници. Има 8 можности за избор на долниот и 8 можности за избор на левиот раб на квадрат со страна 1, 7 можности за избор на долниот и 7 можности за избор на левиот раб на квадрат со страна 2, ..., 1 можност за избор на долниот и 1 можност за избор на левиот раб на квадрат со страна 8. Според тоа, меѓу правоаголниците има $1^2+2^2+3^2+...+8^2=204$ квадрати.

44. Во потесен избор за државниот натпревар по математика Комисијата за задачи предложила 7 алгебарски и 5 геометриски задачи. На колку начини од предложените задачи може да се изберат 5 задачи за натпреварот, ако меѓу нив мора да има 3 алгебарски и 2 геометриски задачи? (*Напомена*. Редоследот на избраните задачи не е важен.)

Решение. Од седум различни алгебарски задачи се избираат три. Првата задача може да се избере на 7 начини, втората на 6 начини и третата на 5 начини. Значи, за избор на алгебарските задачи при што е земен во предвид редоследот на задачите постојат $7\cdot6\cdot5=210$ можности. Но, нам ни е важно само кои задачи се избрани, а не според кој редослед, па затоа бројот 210 треба да го поделиме со бројот на различните распореди на трите избрани задачи. Трите избрани задачи може да се распоредат на $3\cdot2\cdot1=6$ начини, што значи дека алгебарските задачи може да се изберат на $210:6=35$ различни начини.

Аналогно се пресметува и бројот на можностите за избор на две геометриски задачи, од предложените 5. Првата задача може да се избере на 5 начини, а втората на 4 начини. Значи имаме $5 \cdot 4 = 20$ можности во кои е важен редоследот на задачаите. Бидејќи распоредот на две задачи може да се направи на 2 начина, за геометриските задачи имаме $20:2 = 10$ различни избори.

Конечно, бројот на различните избори се добива така што било кој избор на алгебарските задачи се комбинира со било кој избор на геометриските задачи, па затоа вкупниот број начини на кои може да се изберат задачите е еднаков на $35 \cdot 10 = 350$.

45. Во работната соба на Митре на полицата се наоѓаат 12 различни книги, од кои 5 се од математика, 4 се од физика и 3 се од хемија. На колку различни начини може да се распоредат книгите на полицата ако се знае дека книгите од иста област мораат секогаш да бидат една до друга?

Решение. Математичките книги меѓусебно може да се распоредат на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ начини, книгите по физика на $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ начини и книгите по хемија на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начини. Понатаму, за трите области имаме $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начини на распоредување, па затоа вкупниот број распореди е еднаков на $6 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 120 = 103680$.

46. На колку различни начини околу тралезна маса може да седнат 3 момчиња и 3 девојчња така што две лица од ист пол да не седат едно до друго? (Распоредувањата кои се добиваат со ротација на едно распоредување околу масата ги сметаме за исти.)

Решение. Нека едно момче седне произволно околу масата. Останатите две момчиња можеме да ги распоредиме на два начина, а потоа девојчињата можеме да ги распоредиме на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начина. Според тоа, вкупниот број распоредувања е еднаков на $2 \cdot 6 = 12$.

47. Четири момчиња и три девојчиња сакаат да седнат на иста клупа. Определи го бројот на можностите:

а) на двата краја на клупата да седат лица од ист пол,

б) на двата краја на клупата да седат лица од спротивен пол.

Решение. Ќе го пресметаме број на сите можни начини на седнувања. На првото место може да седно било кое лице, што значи дека имаме 7 можности. Сега за второто место имаме 6 можности, за третото место имаме 5 можности итн. Според тоа, седум лица на седум места може да седнат на $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ начини.

а) Нека на краевите седат две момчиња. Од четирите момчиња изборот на овие две момчиња може да се направи на $4\cdot 3=12$. Ако на краевите седат две девојчиња, тогаш од трите девојчиња изборот на овие две може да се направи на $3\cdot 2=6$. Значи, изборот на двете деца кои седат на краевите може да се направи на $12+6=18$ начини. За секој од овие избори останатите пет деца во средината може да се распоредат на $54\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ начини. Според тоа, ако на двата краја седат лица од ист пол, тогаш имаме вкупно $18\cdot 120=2160$ распоредувања.

б) За да го добиеме бројот на сите распоредувања во кои на двата краја од клупата седат лица со различен пол, доволно е од вкупниот број распоредувања да го одземеме бројот на распоредувањата кога на двата краја седат лица од ист пол. Според тоа, бараниот број распоредувања е еднаков на $5040-2160=2880$.

48. Учесниците на математичкиот натпревар Кенгур се регистрираат со помош на шифра која содржи: одделение на ученикот, иницијали на ученикот и четирицифрен идентификационен број на ученикот. На пример, една од можните шифри е 7ВА2016. Колку најмногу ученици може да се регистрираат на овој начин, ако ознаката за IV одделение е 0, ознаката за V одделение е 1, ознаката за VI одделение е 2, ознаката за VII одделение е 3, ..., ознаката за IX одделение е 5, ознаката за I година средно е 6, ..., ознаката за IV средно е 9 и ако двајца различни учесници имаат различни шифри?

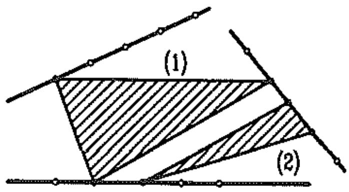
Решение. За одделението имаме 10 можности. Понатаму, македонската азбука има 31 буква па затоа за иницијалите имаме $31\cdot 31=961$ можност и за идентификациониот број имаме 9000 можности. Според тоа, вкупниот број на шифри е еднаков на $10\cdot 961\cdot 9000=86490000$

49. Во рамнината се дадени 10 црвени и 8 сини точки такви што било кои три точки не лежат на иста права. Определи го бројот на триаголниците со темиња во дадените точки кај кои сите темиња не се еднобојни.

Решение. Со 10 црвени точки може да се формираат $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ отсечки со црвени крајни точки. Секоја од овие отсечки се комбинира со секоја од 8-те сини точки и на тој начин се добиваат $45\cdot 8=360$ триаголници кои го задоволуваат условот на задачата. Слично имаме $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ отсечки со крајни сини точки, па истите се комбинираат со секоја од 10-те црвени точки и се добиваат $28\cdot 10=280$ триаголници кои го задоволуваат условот на задачата. Според тоа, вкупниот број триаголници кај кои темињата не се еднобојни е еднаков на $280+360=640$. Последното е точно, бидејќи кога темињата не се еднобојни тие може да бидат две црвени и едно сино, односно две сини и едно црвено.

50. Дадени се три различни прави и на секоја од нив по 5 различни точки. Определи го најголемиот број триаголници чии темиња се дадените точки.

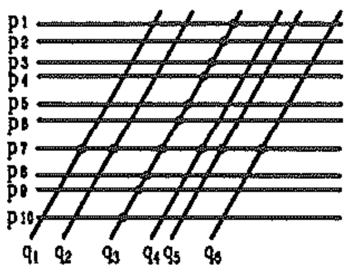
Решение. Најмногу триаголници има ако било кои три точки кои припаѓаат на различните прави не се колинеарни. Во случајов имаме два вида триаголници и тоа: триаголници кај кои



темињата припаѓаат на различните прави и такви триаголници има $5\cdot 5\cdot 5=125$ и триаголници кај кои две темиња припаѓаат на една права, а третото теме пришаѓа на другите две прави и такви триаголници има $3\cdot 10\cdot 10=300$ (по 10 можности за две темиња на една од трите прави и по 10 можности за третото теме на другите две прави). Значи, најголемиот можен број триаголници е еднаков на $125+300=425$.

51. Во рамнината се дадени две класи паралелни прави: $p_1, p_2, ..., p_{10}$ и $q_1, q_2, ..., q_6$. Правите од класата p ги сечат правите од класата q. Колку различни паралелограми се определени со овие прави? (Различни се оние паралелограми кои имаат барем две различни темиња.)

Решение. Кога правите од класата p ги сечеме со правите од класата q, тогаш на секоја права од класата q имаме по 10 делбениотсечки, а на секоја права од класата p имаме по 6 делбени отсечки (цртеж десно). На секоја права од класта q имаме по



$\frac{10\cdot 9}{2}=45$ отсечки, секоја од кои е основа на еден паралелограм. На секоја права од класта p имаме по $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ отсечки, секоја од кои може да се комбинира со секоја отсечка од претходната класа. Значи, вкупниот број паралелограми е еднаков на $15 \cdot 45 = 675$.

52. Чоколадна табла, која има $m \times n$ „коцки“ кои се распоредени во m редови и n колони, треба да се искрши на одделните „коцкички“. Кршењето е исклучиво така што некој правоаголен дел од таблата се крши по линија која разделува два негови соседни редови или две негови соседни колони. Докажи дека вкупниот број кршења не зависи од изборот на редоследот на кршењата.

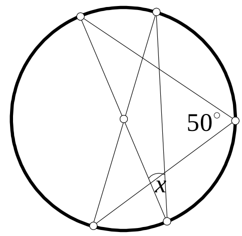
    Решение. Чоколадната табла треба да се искрши на mn „коцки“. Бидејќи со секое дозволено кршење бројот на деловите се зголемува за 1, потребни се $mn-1$ кршења, т.е. вкупниот број кршења не зависи од изборот на редоследот на кршењата.

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ЕЛЕМЕНТИ НА ТРИАГОЛНИК. СКЛАДНИ ТРИАГОЛНИЦИ

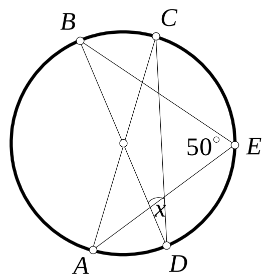
1. На кружница во насока на движењето на стрелките на часовникот последователно се земени точките A, B, C, D, E и F така што важи $\measuredangle ADF = \measuredangle BEC$. Докажи дека $AB \parallel CF$.

   Решение. Аглите $\measuredangle ADF$ и $\measuredangle ABF$ се еднакви како периферски агли над заедничка тетива (направи цртеж), а истото важи и за аглите $\measuredangle BFC$ и $\measuredangle BEC$. Сега од $\measuredangle ADF = \measuredangle BEC$, следува $\measuredangle ABF = \measuredangle BFC$, па затоа $AB \parallel CF$.



2. Определи го аголот x означен на цртежот десно.

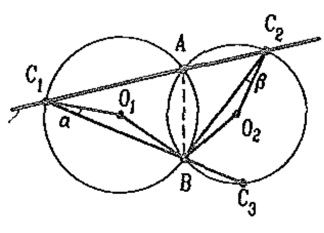
   Решение. Ќе ги означиме петте точки од кружницата што ги формираат аглите како на цртежот десно. Од условот на задачата имаме $\measuredangle AEB = 50^\circ$, а бидејќи тој е периферен агол, добиваме дека $\measuredangle AOB = 100^\circ$. Но, тогаш $\measuredangle DOC = 100^\circ$, како накрсен агол на аголот $\measuredangle AOB$. Триаголникот COD е рамнокрак со основа CD, па според тоа $x^\circ = \measuredangle ODC = \measuredangle OCD = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$.



3. Две кружници k_1 и k_2 со центри O_1 и O_2 се сечат во точките A и B. Произволна права која минува низ точката A ја сече k_1 во C_1, а k_2 во C_2. Докажи дека $\measuredangle BC_1O_1 = \measuredangle BC_2O_2$.

   Решение. Централниот агол е двапати поголем од перифериските, па затоа $\measuredangle C_1O_1B = 2\measuredangle C_1AB$ и

$$\begin{aligned}\measuredangle C_2O_2B &= 2\measuredangle C_2C_3B = 2(180^\circ - \measuredangle BAC_1)\\ &= 2\measuredangle C_1AB.\end{aligned}$$



Според тоа, $\measuredangle C_1O_1B=\measuredangle C_2O_2B$, па затоа

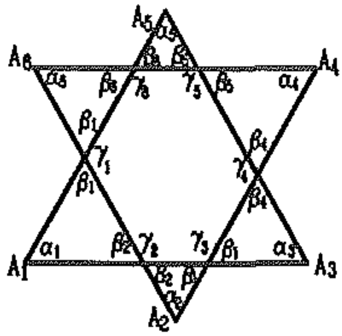
$$\measuredangle BC_1O_1=\frac{180^\circ-\measuredangle C_1O_1B}{2}=\frac{180^\circ-\measuredangle C_2O_2B}{2}=\measuredangle BC_2C_2,$$

што и требаше да се докаже.

4. Нацртај шесткрака ѕвезда, а потоа определи го збирот на нејзините конвексни внатрешни агли.

Решение. На цртежот десно е прикажана ѕвездата во која се означени само темињата на нејзините консвекдни агли. Од $\triangle A_1A_3A_5$ добиваме $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5=180^\circ$, а од $\triangle A_2A_4A_6$ следува $\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6=180^\circ$. Ако ги зобереме последните две равенства добиваме

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=360^\circ.$$



5. Нека x,y,z се агли на даден триаголник, (во степени). Докажи дека ако $\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}$ се рационални броеви, тогаш x,y,z се исто така рационални броеви.

Решение. Забележуваме дека важи

$$\frac{180}{x}=\frac{x+y+z}{x}=1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}.$$

Бројот $\frac{x}{y}$ е рационален, па затоа бројот $\frac{y}{x}=\frac{1}{\frac{x}{y}}$ е рационален. Според тоа, бројот $\frac{180}{x}$ е рационален, како збир на три рационални броеви. Оттука x е рационален број. На ист начин се докажува дека и y и z се рационални броеви.

6. Надворешните агли на правоаголниот триаголник (кои не се прави) се однесуваат како $7:11$. Определи ги острите агли на овој триаголник.

Решение. Во правоаголен триаголник еден надворешен агол е прав агол. Нека се α_1 и β_1 големините на преостанатите два надворешни агли на овој триаголник. Збирот на надворешните агли на триаголник е еднаков на 360°, па затоа $\alpha_1+\beta_1+90^\circ=360^\circ$, т.е. $\alpha_1+\beta_1=270^\circ$. Но, $\alpha_1:\beta_1=7:11$, па затоа постои број k таков што $\alpha_1=7k,\beta_1=11k$.

Според тоа, $7k+11k=270^\circ$, т.е. $k=15^\circ$. Значи, $\alpha_1=7\cdot15^\circ=105^\circ$ и затоа $\alpha=180^\circ-\alpha_1=75^\circ$, што значи $\beta=90^\circ-75^\circ=15^\circ$.

7. Големините на острите агли на правоаголен триаголник се однесуваат како $4:5$. Ако помалиот агол се намали за 8%, за колку проценти ќе се зголеми поголемиот агол?

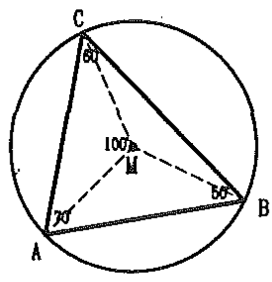
Решение. За острите агли α и β на правоаголниот триаголник важи $\alpha+\beta=90^\circ$. Од $\alpha=4k$ и $\beta=5k$ добиваме $4k+5k=90^\circ$, т.е. $k=10^\circ$. Значи, $\alpha=40^\circ,\beta=40^\circ$. Аголот α се намалил 8% па имаме $\alpha_1=0{,}92\cdot40^\circ=36{,}8^\circ=36^\circ48'$. Според тоа, $\beta_1=90^\circ-\alpha_1=53^\circ12'$, т.е. аголот β се зголемил за $3^\circ12'$. Бидејќи $3^\circ12':50^\circ=3.2:50=0{,}064$ заклучуваме дека аголот β се зголемил за за $0{,}064\cdot100\%=6{,}4\%$.

8. Определи ги аглите на триаголникот ако тие се однесуваат како $6:11:7$.

Решение. Бидејќи аглите се однесуваат како $6:11:7$, добиваме $\alpha=6k,\beta=11k,\gamma=7k$, па затоа $6k+11k+7k=180^\circ$, од каде добиваме $k=7{,}5^\circ=7^\circ30'$. Според тоа, $\alpha=45^\circ,\beta=82^\circ30',\gamma=52^\circ30'$.

9. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC=70^\circ$ и $\measuredangle ABC=50^\circ$. Точката M припаѓа на внатрешноста на $\triangle ABC$ и е таква што $\measuredangle MAC=\measuredangle MCA=40^\circ$. Определи ги $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle BMC$.

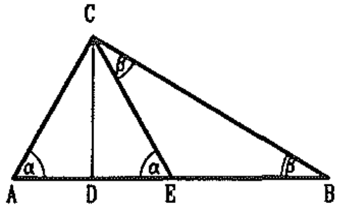
Решение. Јасно, $\measuredangle ACB=60^\circ$, а $\measuredangle AMC=100^\circ$. Бидејќи $\overline{AM}=\overline{MC}$ и $\measuredangle ABC=\frac{1}{2}\measuredangle AMC$, заклучуваме дека точката M е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Затоа бараните агли се:



$$\measuredangle AMB=2\measuredangle ACB=120^\circ \text{ и}$$
$$\measuredangle BMC=2\measuredangle BAC=140^\circ.$$

10. Во правоаголен триаголник висината повлечена кон хипотенузата ја дели хипотенузата на два дела чија разлика е еднаква на должината на едната катета. Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Нека ABC е дадениот правоаголен триаголник со прав агол во темето C и нека, на пример, $\overline{CA} < \overline{BC}$. Понатаму, нека D е подножјето на висината повлечена од темето C и нека E е точка на отсечката DB таква што



$\overline{DE} = \overline{AD}$. Тогаш $\triangle ACE$ е рамнокрак. Од условот на задачата слчедува $\overline{BE} = \overline{AC} = \overline{CE}$, па затоа $\triangle BCE$ е рамнокрак. Според тоа, $\alpha = \measuredangle ACE = 2\beta$ (види цртеж), па затоа од $\alpha + \beta = 90^\circ$ следува $3\beta = 90^\circ$, т.е. $\beta = 30^\circ$. Конечно, $\alpha = 2\beta = 60^\circ$.

11. Даден е $\triangle ABC$ во кој $\measuredangle BAC = 70^\circ$. На страната AB избрана е точка D, а на страната AC точка E така што $\measuredangle BDC = \measuredangle BEC$ и $\measuredangle EBC : \measuredangle DCB = 1:3$. Правите BE и CD се сечат во точката M, при што $\measuredangle BMD = 84^\circ$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$ и на $\triangle ADC$.

Решение. Да ги воведеме ознаките:

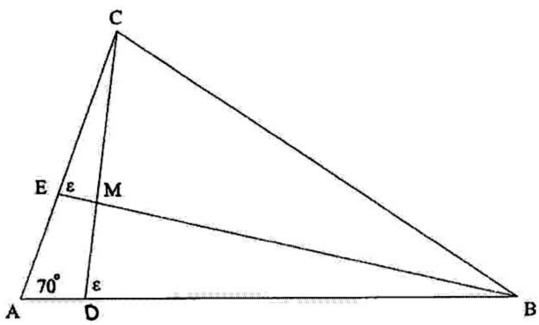
$\measuredangle BDC = \measuredangle BEC = \varepsilon$, $\measuredangle EBC = \beta_1$, $\measuredangle DCB = \gamma_1$, $\measuredangle ACD = \gamma_2$, $\measuredangle ABE = \beta_2$.

Тогаш важи

$\measuredangle EBC : \measuredangle DCB = 1:3$

$\beta_1 : \gamma_1 = 1:3$

$\gamma_1 = 3\beta_1$.



Аголот $\measuredangle BMD$ е надворешен за $\triangle BMC$, па затоа $\beta_1 + \gamma_1 = 84^\circ$, односно $\beta_1 + 3\beta_1 = 84^\circ$, па затоа $\beta_1 = 21^\circ$ и $\gamma_1 = 63^\circ$. Важи $\measuredangle BMC = 96^\circ$. Сега $\measuredangle BMC$ е надворешен за $\triangle EMC$ па затоа $\varepsilon + \gamma_2 = 96^\circ$. Аголот $\measuredangle BDC$ е надворешен за $\triangle ADC$ па затоа $\varepsilon = 70^\circ + \gamma_2$. Сега имаме: $70^\circ + \gamma_2 + \gamma_2 = 96^\circ$, т.е. $\gamma_2 = 13^\circ$ и затоа $\varepsilon = 70^\circ + \gamma_2 = 83^\circ$.

Аголот $\measuredangle BMC$ е надворешен за $\triangle BMD$, па затоа $\varepsilon + \beta_2 = 96^\circ$, т.е. $\beta_2 = 96^\circ - 83^\circ = 13^\circ$. Сега имаме

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 21^\circ + 13^\circ = 34^\circ \text{ и } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 63^\circ + 13^\circ = 76^\circ.$$

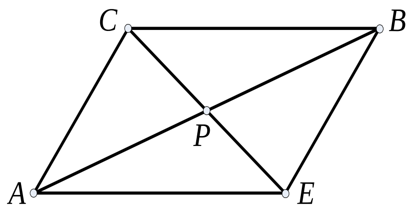
На крајот имаме $\measuredangle ADC = 180^\circ - 83^\circ = 97^\circ$.

12. Даден е тапоаголен триаголник ABC со тап агол во темето C. Нека точката P е средина на страната AB и нека $\measuredangle PCA = 90^\circ$, $\measuredangle BCP = 30^\circ$, $\overline{AC} = 3cm$. Определи ја должината на страната BC.

Решение. Триаголникот ABC го дополнуваме до паралелограм $AEBC$. Тогаш важи $\measuredangle AEC = 30^\circ$, што значи дека триаголникот AEC е половина од рамностран триаголник. Според тоа,

$$\overline{AE} = 2\overline{AC} = 2 \cdot 3 = 6,$$

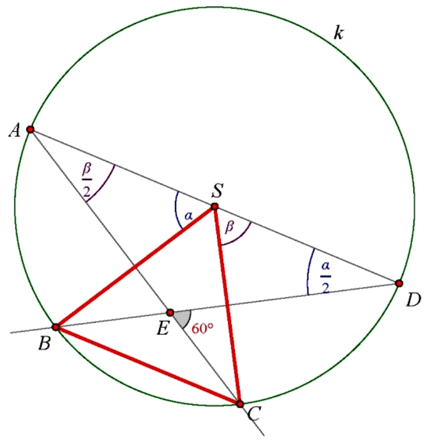
односно $\overline{BC} = 6cm$.



13. Нека AD е дијаметар на кружницата, а B и C се точки на кружницата такви што отсечките AC и BD се сечат под агол од 60°. Ако S е центарот на кружницата, докажи дека $\triangle BCS$ е рамностран.

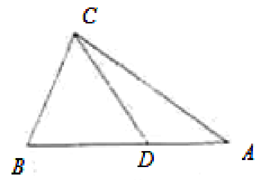
Решение. Да означиме $\measuredangle ASB = \alpha$. Тогаш $\measuredangle ADB = \frac{\alpha}{2}$. Понатаму, ако $\measuredangle CSD = \beta$, тогаш $\measuredangle CAD = \frac{\beta}{2}$.

Пресекот на тетивите AC и BD да го означиме со E. Да го разгледаме $\triangle AED$. Надворешниот агол во темето E е еднаков на 60°, па затоа $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 60^\circ$, од каде добиваме $\alpha + \beta = 120^\circ$. Да го разгледаме $\triangle BCS$. Имаме $\measuredangle CSB = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 60^\circ$. Значи, $\triangle BCS$ е рамнокрак ($\overline{BS} = \overline{CS}$) со агол при врвот еднаков на 60°, па затоа тој е рамностран.



14. Даден е разностран $\triangle ABC$. На најголемата страна AB земена е точка D таква што $\overline{BD} = \overline{BC}$. Докажи дека правата CD го дели $\measuredangle ACB$ на два агли при што едниот агол е еднаков на половината на збирот, а другиот на половината на разликата на аглите $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle BAC$.

Решение. Нека $\measuredangle BCD=y$ и $\measuredangle ACD=x$. Од $\overline{BD}=\overline{BC}$ следува дека триаголникот BCD е рамнокрак, па затоа $\measuredangle BDC=y$. Од триаголниците BCD и ABC следува

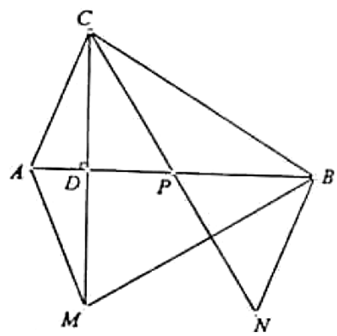


$$2y+\beta=\alpha+\beta+\gamma\text{, т.е. } y=\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Понатаму, $\measuredangle BDC$ е надворешен за $\triangle ADC$, па затоа $y=\alpha+x$. Сега, од $x+y=\gamma$, т.е. $y=\gamma-x$, добиваме $\alpha+x=\gamma-x$, односно $x=\frac{\gamma-\alpha}{2}$.

15. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle BAC=68^\circ$ и $\measuredangle ABC=32^\circ$. Точката D е подножјето на висината повлечена од темето C на страната AB, точката P е средина на страната AB, точката M е симетрична на точката C во однос на правата AB, а точката N е симетрична на точката C во однос на точката P. Определи го $\measuredangle MBN$.

Решение. Од условот на задачата следува $\overline{AP}=\overline{PB}$ и $\overline{CP}=\overline{PN}$, што значи дека четириаголникот $ANBC$ е паралелограм. Затоа важи $\measuredangle ABN=\measuredangle BAC=68^\circ$. Понтаму, $\measuredangle MBA$ е осносиметрична слика на $\measuredangle CBA$ во однос на правата AB, па затоа $\measuredangle MBA=\measuredangle ABC=32^\circ$. Конечно, $\measuredangle MBN=\measuredangle ABN-\measuredangle MBA=68^\circ-32^\circ=36^\circ$.



16. Во $\triangle ABC$ страната AB е најдолга. На страната AB се избрани точки D и E такви што $\overline{AD}=\overline{AC}$ и $\overline{BE}=\overline{BC}$. Определи го $\measuredangle ACB$ ако $\measuredangle ECD=20^\circ$.

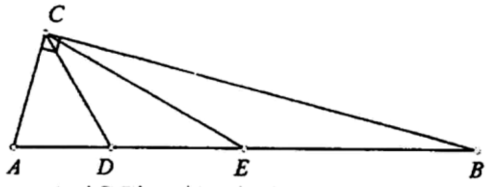
Решение. Ги воведуваме ознаките $\measuredangle BCD=x$ и $\measuredangle ACE=y$ (цртеж десно). Од рамнокракиот триаголник BCE добиваме $2(x+20^\circ)=180^\circ-\measuredangle EBC$, а од рамнокракиот триаголник ACD добиваме $2(y+20^\circ)=180^\circ-\measuredangle CAD$. Ги собираме последните две равенства и наоѓаме

$$2(y+20^\circ+x+20^\circ)=180^\circ+(180^\circ-\measuredangle CAD-\measuredangle EBC),$$

односно $2(\measuredangle ACB+20^\circ)=180^\circ+\measuredangle ACB$, па затоа $\measuredangle ACB=140^\circ$.

17. Даден е правоаголен триаголник ABC. Нека точката E е средина на хипотенузата AB, а точката D е пресечната точка на симетралата на правиот агол $\measuredangle ACB$ и хипотенузата. Определи ги аглите на триаголникот CDE, ако триаголникот CDE е рамнокрак.

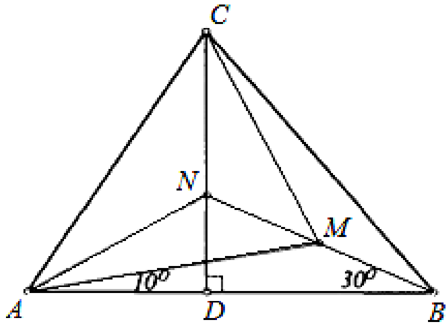
Решение. Триаголникот CDE е рамнокрак, па затоа $\overline{CD}=\overline{DE}$. Со x да ги означиме аглите $\measuredangle DEC$ и $\measuredangle DCE$, а со y аголот $\measuredangle CDE$. Во триаголникот AEC важи $\overline{AE}=\overline{EC}$, бидејќи точката E е центар на опишаната кружница околу правоаголниот триаголник ABC. Затоа важи $\alpha=45^\circ+x$ и $2\alpha+x=180^\circ$. Од последните две равенки наоѓаме $x=30^\circ$. Конечно, во триаголникот CDE важи $2x+y=180^\circ$, од каде добиваме $y=120^\circ$.



18. Нека S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, а M е средината на лакот AB на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ кој не ја содржи C. Докажи дека $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MS}$.

Решение. Правата CM е симетрала на $\measuredangle ACB$, па затоа $S\in CM$. Бидејќи M е средина на лакот AB заклучуваме дека $\overline{MA}=\overline{MB}$. Затоа доволно е да докажеме дека $\overline{MA}=\overline{MS}$. Во триаголникот ACS со внатрешни агли $\measuredangle SAC=\frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle ACS=\frac{\gamma}{2}$, аголот $\measuredangle ASM$ е надворешен, па затоа $\measuredangle ASM=\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}$. Понатаму, $\measuredangle SAM=\measuredangle SAB+\measuredangle BAM$, па како $\measuredangle SAB=\frac{\alpha}{2}$, а $\measuredangle BAM=\measuredangle BCM=\frac{\gamma}{2}$ (периферискиагол над ист лак), добиваме дека $\measuredangle SAM=\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}$. Значи, $\measuredangle ASM=\measuredangle SAM$, па затоа $\overline{MA}=\overline{MS}$.

19. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, таков што $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle ACB=80^\circ$. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ е избрана точка M таква што $\measuredangle MBA=30^\circ$ и $\measuredangle MAB=10^\circ$. Определи го $\measuredangle AMC$.



Решение. Нека D е подножјето на висината спуштена од темето C на основата AB, а N е пресекот на висината CD и правата BM. Од условот на задачата следува

$\measuredangle CAB = 50^\circ$ и $\measuredangle ACD = 40^\circ$.

Бидејќи точката N припаѓа на висината CD, т.е. на симетралата на основата AB на рамнокракиот $\triangle ABC$, заклучуваме дека $\triangle ABN$ е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle NAB = \measuredangle NBA = 30^\circ \text{ и } \measuredangle ANB = \measuredangle ANM = 120^\circ.$$

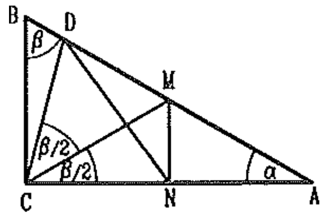
Тоа значи, дека $\measuredangle CAN = 20^\circ$, па затоа $\measuredangle ANC = 120^\circ$. Според тоа, $\triangle ANC \cong \triangle ANM$, бидејќи AN е заедничка страна,

$$\measuredangle CAN = \measuredangle NAM = 20^\circ \text{ и } \measuredangle ANC = \measuredangle ANM = 120^\circ.$$

Од докажаната складност следува дека $\overline{AC} = \overline{AM}$, што значи дека $\triangle AMC$ е рамнокрак, па бидејќи $\measuredangle CAM = 40^\circ$, добиваме дека

$$\measuredangle ACM = \measuredangle AMC = 70^\circ.$$

20. Даден е правоаголен триаголник ABC. На хипотенузата AB е земена точка M таква што $\overline{BM} = \overline{BC}$ и на катетата AC е земена точка N таква што отсечката CN е еднаква на висината повлечена кон хипотенузата. Докажи дека $\measuredangle CNM = 90^\circ$.



Решение. Нека $\measuredangle CBA = \beta$ (види цртеж). Од $\overline{BM} = \overline{BC}$ следува дека $\triangle BCM$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle BCM = \measuredangle BMC = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$.

Бидејќи $\measuredangle BCD = 90^\circ - \beta$ добиваме

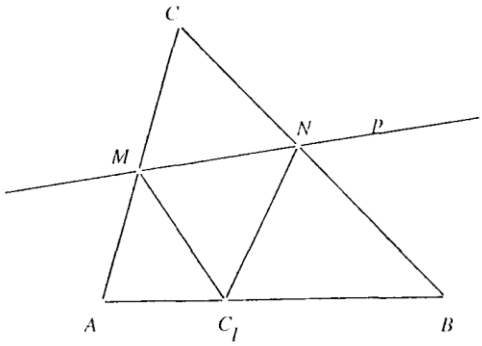
$$\measuredangle DCM = \measuredangle BMC - \measuredangle BCD = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - (90^\circ - \beta) = \frac{\beta}{2}.$$

Понатаму, од $\measuredangle ACD = 90^\circ - \alpha = \beta$ следува $\measuredangle NCM = \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$. Сега за триаголниците CMD и CMN страната CM е заедничка, $\measuredangle DCM = \measuredangle MCN = \frac{\beta}{2}$ и $\overline{CD} = \overline{CN}$, па затоа тие се складни, од што следува $\measuredangle CNM = \measuredangle ADM = 90^\circ$.

21. Страните AC и BC на $\triangle ABC$ правата p ги сече во точките M и N соодветно, така што осносиметричната слика C_1 на темето C во однос на таа права p лежи на страната AB и притоа $\overline{AC_1}=\overline{AM}$ и $\overline{BC_1}=\overline{BN}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. Заради осната симетрија добиваме

$$\gamma=\measuredangle ACB=\measuredangle MC_1N.$$



Според условот на задачата триаголниците AC_1M и BNC_1 се рамнокраки. Затоа

$$\measuredangle AC_1M=\measuredangle AMC_1=\frac{180^\circ-\alpha}{2}$$

и

$$\measuredangle BC_1N=\measuredangle BNC_1=\frac{180^\circ-\beta}{2}.$$

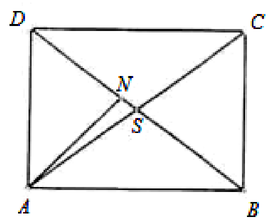
Имаме $\measuredangle AC_1M+\measuredangle MC_1N+\measuredangle NC_1B=180^\circ$, па затоа

$$\frac{180^\circ-\alpha}{2}+\gamma+\frac{180^\circ-\beta}{2}=180^\circ, \text{ т.е. } 2\gamma-\alpha-\beta=0.$$

Но, $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, па ако ги собереме последните две равенства добиваме $\gamma=60^\circ$, односно $\measuredangle ACB=60^\circ$.

22. Во правоаголникот $ABCD, \overline{AB}>\overline{BC}$ е повлечена симетралата AN на $\measuredangle BAD$, $N\in BD$. Ако $\measuredangle CAN=20^\circ$ определи ги аглите на $\triangle AND$.

Решение. Со S да го означиме пресекот на дијагоналите на правоаголникот. Бидејќи AN е симетрала на правиот агол добиваме $\measuredangle DAN=45^\circ$ и $\measuredangle BAS=45^\circ-20^\circ=25^\circ$. Понатаму, $\triangle ASB$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle SBA=\measuredangle SAB=25^\circ$, т.е. $\measuredangle ASB=180^\circ-2\cdot 25^\circ=130^\circ$.



Сега $\measuredangle ASN=2\cdot 25^\circ=50^\circ$, како надворешен агол за $\triangle ABS$. Но, и $\measuredangle AND$ е надворешен за $\triangle ANS$, па затоа $\measuredangle AND=20^\circ+50^\circ=70^\circ$. Конечно, третиот агол на $\triangle AND$ е

$$\measuredangle ADN=180^\circ-45^\circ-70^\circ=65^\circ.$$

23. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ во кој $\measuredangle ABC=80^\circ$. На кракот AC избрана е точка D, а на кракот BC точка E така што $\measuredangle DBE=30^\circ$ и $\measuredangle DAE=40^\circ$. Определи ги аглите $\measuredangle BDE$ и $\measuredangle AED$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\measuredangle EAB=\measuredangle CAB-\measuredangle DAE=80^\circ-40^\circ=40^\circ,$$

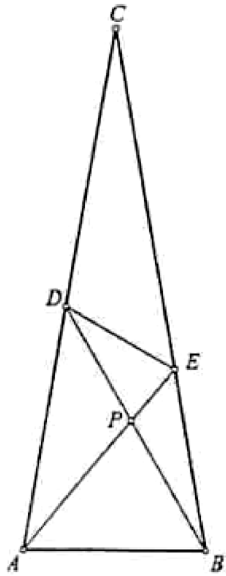
$$\measuredangle ABD=\measuredangle ABC-\measuredangle DBE=80^\circ-30^\circ=50^\circ \text{ и}$$

$$\measuredangle BDA=180^\circ-\measuredangle DAB-\measuredangle ABD=50^\circ,$$

што значи дека $\triangle ABD$ е рамнокрак и важи $\overline{AB}=\overline{AD}$. Понатаму, од $\measuredangle EAB=\measuredangle DAE$, $\overline{AB}=\overline{AD}$ и AE е заедничка страна за триаголниците ABE и ADE следува дека $\triangle ABE\cong\triangle ADE$. Затоа

$$\measuredangle AED=\measuredangle AEB=180^\circ-\measuredangle EAB-\measuredangle ABE=60^\circ.$$

Од докажаната складност следува $\overline{BE}=\overline{ED}$, што значи дека $\triangle DBE$ е рамнокрак. Затоа важи $\measuredangle BDE=\measuredangle DBE=30^\circ$.



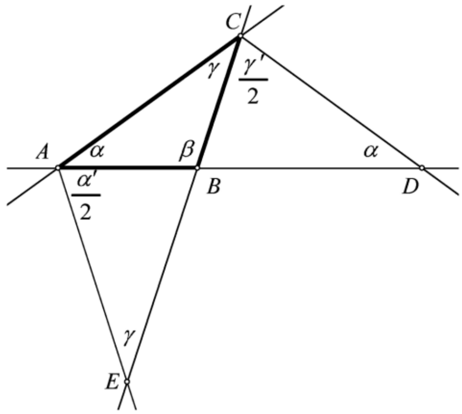
24. Даден е тапоаголен триаголник ABC со тап агол во темето B. Симетралата на надворешниот агол при темето C ја сече правата AB во точката D, а симетралата на надворешниот агол во темето A ја сече правата BC во точката E. Притоа важи $\overline{AE}=\overline{AC}=\overline{CD}$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Нека $\measuredangle BAC=\alpha$, $\measuredangle CBA=\beta$, $\measuredangle ACB=\gamma$ и нека соодветните надворешни агли се α',β',γ'. Имаме,

$\alpha'=180^\circ-\alpha$, т.е. $\frac{\alpha'}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$,

$\gamma'=180^\circ-\gamma$, т.е. $\frac{\gamma'}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$.

Триаголникот CAE е рамнокрак со основа CE, па затоа важи $\measuredangle CEA=\measuredangle ACB=\gamma$. Бидејќи



$$\measuredangle EAB=\frac{\alpha'}{2} \text{ и } \measuredangle ACE+\measuredangle EAC+\measuredangle CEA=180^\circ,$$

добиваме $\gamma+\alpha+\frac{\alpha'}{2}+\gamma=180^\circ$, т.е. $2\gamma+\alpha+90^\circ-\frac{\alpha}{2}=180^\circ$, па затоа $\alpha=180^\circ-4\gamma$. Триаголникот ADC е рамнокрак со основа AD, па затоа важи $\measuredangle BAC=\measuredangle CDA=\alpha$. Бидејќи

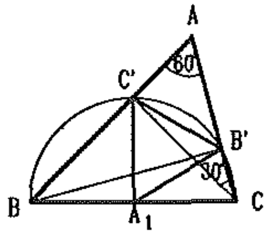
$$\measuredangle BCD=\frac{\gamma'}{2} \text{ и } \measuredangle DAC+\measuredangle ACD+\measuredangle CDA=180^\circ,$$

добиваме $\alpha+\gamma+\frac{\gamma'}{2}+\alpha=180^\circ$, т.е. $2\alpha+\gamma+90^\circ-\frac{\gamma}{2}=180^\circ$, па затоа $\gamma=180^\circ-4\alpha$.

Според тоа, $\gamma=180^\circ-4(180^\circ-4\gamma)$, од каде добиваме $\gamma=36^\circ$. Значи,

$$\alpha=180^\circ-4\cdot36^\circ=36^\circ \text{ и } \beta=180^\circ-36^\circ-36^\circ=108^\circ.$$

25. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle CAB=60^\circ$. Нека A_1 е средина на страната BC, а B' и C' се подножјата на висините повлечени од темињата B и C. Докажи дека $\triangle A_1B'C'$ е рамностран.



Решение. Триаголници BCB' и BCC' се правоаголни и имаат заедничка хипотенуза, па затоа околу нив може да се опише заедничка кружница чиј центар е средината на хипотенузата BC и тоа е точката A_1 (цртеж десно). За дадената кружница аголот $\measuredangle B'CC'=30^\circ$ е периферискиагол над тетивата $B'C'$, па затоа соодветниот централен агол е $\measuredangle B'A_1C'=60^\circ$. Бидејќи $\overline{A_1B'}=\overline{A_1C'}$ (должини на радиус на кружницата), триаголникот $B'A_1C'$ е рамнокрак и како $\measuredangle B'A_1C'=60^\circ$ тој е рамностран.

26. Даден е рамностран $\triangle ABC$. На страната AB избрани се точки M и N такви што $\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}$, а на страната AC точка P таква што $\overline{CP}=\overline{AM}$. Определи го збирот $\measuredangle PMC+\measuredangle PNC$.

Решение. Нека a е должината на страната на $\triangle ABC$. Според условот на задачата

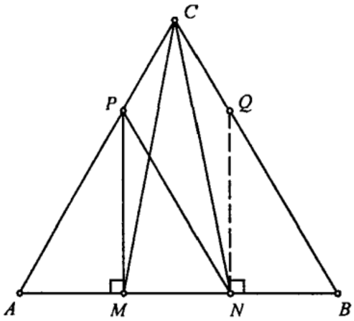
$$\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}=\overline{PC}=\frac{a}{3} \text{ и } \overline{AN}=\overline{MB}=\overline{AP}=\frac{2a}{3}.$$

На страната BC земаме точка Q таква што $\overline{CQ}=\frac{a}{3}$, т.е. $\overline{BQ}=\frac{2a}{3}$. Од

$$\overline{AC}=\overline{BC},\ \overline{AP}=\overline{BQ},\ \overline{AM}=\overline{BN} \text{ и}$$

$$\measuredangle CAM = \measuredangle PAM = \measuredangle QBN = \measuredangle CBN = 60^\circ$$

следува дека $\triangle CAM \cong \triangle CBN$ и $\triangle AMP \cong \triangle BNQ$. Затоа $\overline{CM} = \overline{CN}$ и $\overline{PM} = \overline{QN}$, па од $\overline{CP} = \overline{CQ}$ следува дека $\triangle CPM \cong \triangle CQN$. Според тоа, $\measuredangle PMC = \measuredangle QNC$. Понатаму, од $\overline{AP} = \overline{AN}$ и $\measuredangle PAN = 60^\circ$ следува дека $\triangle ANP$ е рамностран и како точката M е средина на AN добиваме



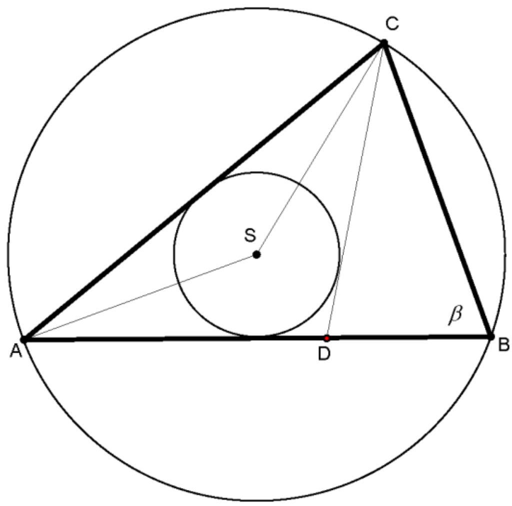
$$\measuredangle ANP = 60^\circ \text{ и } \measuredangle ANQ = \measuredangle BNQ = \measuredangle AMP = 90^\circ .$$

Конечно,

$$\measuredangle PMC + \measuredangle PNC = \measuredangle QNC + \measuredangle PNC = \measuredangle PNQ$$
$$= \measuredangle ANQ - \measuredangle ANP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

27. Нека D е пресечната точка на страната AB на $\triangle ABC$ и симетралата на аголот на триаголникот во темето C. Центарот на впишаната кружница на $\triangle ADC$ се совпаѓа со центарот на опишаната кружница на $\triangle ABC$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Нека S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ADC$ и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и нека $\measuredangle ABC = \beta$. Од својствата на централниот и периферискиот агол над иста тетива AC следува $\measuredangle ASC = 2\beta$. Од рамнокракиот $\triangle ASC$ следува



$$\measuredangle SAC = \measuredangle SCA = 90^\circ - \beta.$$

Понатаму, правата AS е симетрала на $\measuredangle CAD$, па затоа

$$\alpha = \measuredangle CAB = 2\measuredangle CAS = 2(90^\circ - \beta) = 180^\circ - 2\beta .$$

Аналогно се докажува дека $\measuredangle ACD = 180^\circ - 2\beta$.

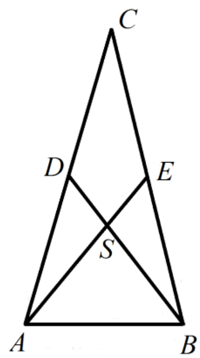
Правата CD е симетрала на аголот на триаголникот при темето C, па затоа $\gamma=\measuredangle ACB=2(180^\circ-2\beta)=360^\circ-4\beta$. Според тоа,

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$
$$180^\circ-2\beta+\beta+360^\circ-4\beta=180^\circ$$
$$\beta=72.$$

Значи, $\alpha=180^\circ-2\cdot72^\circ=36^\circ$ и $\gamma=180^\circ-(36^\circ+72^\circ)=72^\circ$.

28. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ таков што должината на кракот е двапати поголема од должината на основата, т.е. $\overline{AC}=\overline{BC}=2\overline{AB}$. Нека точките D и E се средините на краците AC и BC, соодветно. Правите AE и BD се сечат под агол од 76°. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Нека S е пресекот на правите AE и BD. Од $\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{BE}$ и $\measuredangle BAD=\measuredangle ABE$, според признакот САС добиваме дека $\triangle ABD\cong\triangle ABE$. Затоа $\measuredangle ABD=\measuredangle BAE$. Сега, прво треба да определиме кој од двата соседни агли со теме S е еднаков на 76°. Ако $\measuredangle ASD=76^\circ$, тогаш од $\triangle ABS$ следува



$$\measuredangle ABS+\measuredangle BAS=76^\circ$$

и како $\measuredangle ABS=\measuredangle BAS$, добиваме $2\measuredangle ABS=76^\circ$, т.е. $\measuredangle ABS=38^\circ$. Но, $\triangle BDA$ е рамнокрак со основа BD, па затоа $\measuredangle ADB=\measuredangle ABD=38^\circ$, од што следува дека $\measuredangle BAD=\measuredangle ABE=104^\circ$, што не е можно. Затоа $\measuredangle ASB=76^\circ$, од што следува дека

$$\measuredangle ABS=\measuredangle BAS=52^\circ\text{, т.е. }\measuredangle BAE=\measuredangle ABD=52^\circ.$$

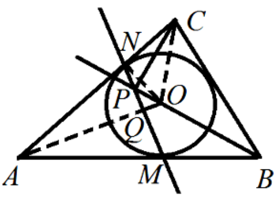
Бидејќи $\measuredangle ASB=76^\circ$ е надворешен агол за $\triangle ASD$, важи

$$\measuredangle SAD+\measuredangle ADS=76^\circ,$$

а од $\measuredangle ADS=\measuredangle ADB=\measuredangle ABD=52^\circ$ следува $\measuredangle SAD+52^\circ=76^\circ$, т.е. $\measuredangle SAD=24^\circ$. Значи, $\measuredangle BAD=\measuredangle BAS+\measuredangle SAD=52^\circ+24^\circ=76^\circ$. Конечно, аглите на $\triangle ABC$ се 76°, 76° и 28°.

29. Нека M и N се допирните точки на впишаната кружница во $\triangle ABC$ со страните AB и AC, а P е пресечната точка на правата MN со симетралата на $\measuredangle ABC$. Докажи дека $\measuredangle BPC=90^\circ$.

Решение. Од $\overline{AM} = \overline{AN}$ следува дека $\triangle AMN$ е рамнокрак. Правата AO е симетрала на $\measuredangle MAN$, па затоа $AO \perp MN$. Нека $AO \cap MN = \{Q\}$. Тогаш $\measuredangle PNC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, односно $\measuredangle POC = \frac{\beta+\gamma}{2}$. Според тоа, $\measuredangle PNC + \measuredangle POC = 180^\circ$, што значи дека четириаголникот $NPOC$ е тетивен. Понатаму, $\measuredangle OPC$ и $\measuredangle ONC$ се периферни агли над иста тетива, па затоа тие се еднакви, што значи $\measuredangle OPC = \measuredangle ONC = 90^\circ$.

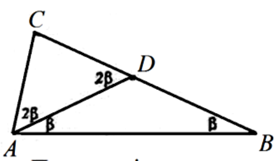


Случајот кога точката P не е во внатрешноста на $\triangle ABC$ се разгледува аналогно.

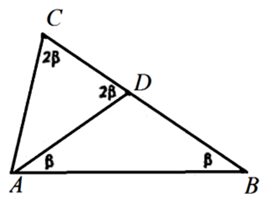
30. Даден е $\triangle ABC$ во кој $\measuredangle BAC = 78^\circ$. На страната BC земена е точка D таква што правата AD го дели $\triangle ABC$ на два рамнокраки триаголници, при што отсечката AB е основа на $\triangle ABD$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Со оглед на еднаквоста на страните на $\triangle ACD$ можни се три случаи.

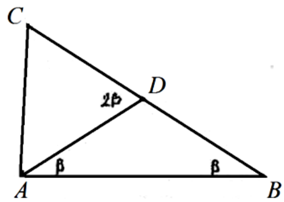
Прв случај. Нека ABD и ADC се рамнокраки триаголници такви што $\overline{AC} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} = \overline{BD}$ и нека $\measuredangle ABC = \measuredangle ABD = \beta$. Тогаш $\measuredangle BAD = \beta$ и $\measuredangle ADC = 2\beta$, како надворешен агол за $\triangle ABD$. Значи, $\measuredangle DAC = 2\beta$ и бидејќи $\measuredangle BAC = 78^\circ$ добиваме $3\beta = 78^\circ$, т.е. $\beta = 26^\circ$. Затоа $\measuredangle ACD = 180^\circ - 78^\circ - 26^\circ = 76^\circ$ т.е. аглите на $\triangle ABC$ се $78^\circ, 26^\circ, 76^\circ$.



Прв случај



Втор случај



Трет случај

Втор случај. Нека ABD и ADC се рамнокраки триаголници такви што $\overline{AC} = \overline{AD}$ и $\overline{AD} = \overline{BD}$ и нека $\measuredangle ABC = \measuredangle ABD = \beta$. Тогаш $\measuredangle BAD = \beta$ и $\measuredangle ADC = 2\beta$, како надворешен агол за $\triangle ABD$. Значи, $\measuredangle ACD = 2\beta$. Од $\triangle ABC$ имаме $\beta + 2\beta + 78^\circ = 180^\circ$, т.е. $3\beta = 102^\circ$, па затоа $\beta = 34^\circ$. Според тоа, $\measuredangle ACB = \measuredangle ACD = 2\beta = 68^\circ$, т.е. аглите на $\triangle ABC$ се $78^\circ, 34^\circ, 68^\circ$.

Трет случај. Нека ABD и ADC се рамнокраки триаголници такви што $\overline{AD}=\overline{CD}$ и $\overline{AD}=\overline{BD}$ и нека $\measuredangle ABC=\measuredangle ABD=\beta$. Тогаш $\measuredangle BAD=\beta$ и $\measuredangle ADB=2\beta$, како надворешен агол за $\triangle ABD$. Во рамнокракиот $\triangle ACD$ имаме $\measuredangle DAC=\measuredangle DCA=90^\circ-\beta$, па затоа важи $\measuredangle BAC=90^\circ-\beta+\beta=90^\circ>78^\circ$, што противречи на условот на задачата.

31. Во триаголникот *ABC* еден од аглите е двапати поголем од другиот, а третиот агол е 120°. Симетралата на надворешниот аголот при темето *B* ја сече правата која минува низа темето *C* и е нормална на правата *AB*, во точка *Q*, а правата *AC* – во точка *P*. Определи ги аглите на триаголникот *CPQ*.

Решение. Нека аглите во триаголникот се $\measuredangle BAC=\alpha$, $\measuredangle ABC=\beta$ и $\measuredangle ACB=\gamma$. Имаме три можности за тапиот агол во триаголникот.

1. Нека $\gamma=120^\circ$ (цртеж 1). Тогаш за аглите на $\triangle CPQ$ наоѓаме:

$$\measuredangle CQP=90^\circ-(90^\circ-\tfrac{\beta}{2})=\tfrac{\beta}{2},\ \measuredangle QCP=90^\circ-\beta+60^\circ=150^\circ-\beta \text{ и}$$

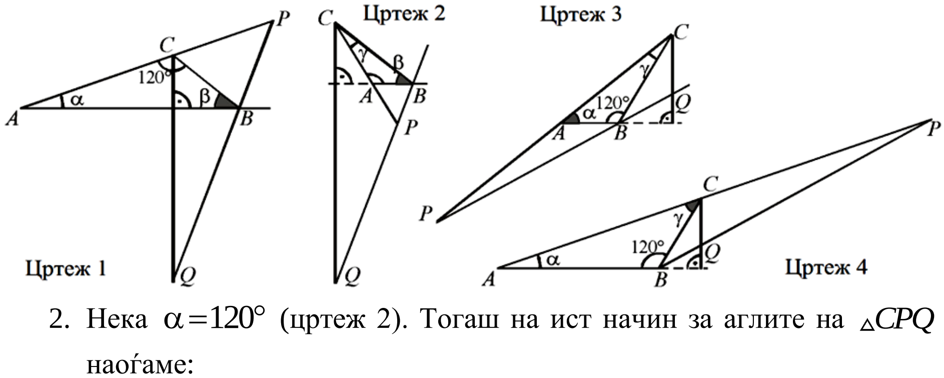
$$\measuredangle CPQ=30^\circ+\tfrac{\beta}{2}.$$

1.1. Ако $\alpha=20^\circ$, $\beta=40^\circ$, бараните агли се

$$\measuredangle CQP=20^\circ,\ \measuredangle QCP=110^\circ \text{ и } \measuredangle CPQ=50^\circ.$$

1.2. Ако $\alpha=40^\circ$, $\beta=20^\circ$, бараните агли се

$$\measuredangle CQP=10^\circ,\ \measuredangle QCP=130^\circ \text{ и } \measuredangle CPQ=40^\circ.$$



2. Нека $\alpha=120^\circ$ (цртеж 2). Тогаш на ист начин за аглите на $\triangle CPQ$ наоѓаме:

$$\measuredangle CQP=90^\circ-(90^\circ-\tfrac{\beta}{2})=\tfrac{\beta}{2},\ \measuredangle QCP=90^\circ-60^\circ=30^\circ \text{ и}$$

$$\measuredangle CPQ=150^\circ-\tfrac{\beta}{2}.$$

2.1. Ако $\beta = 40°,\ \gamma = 20°$, бараните агли се

$$\measuredangle CQP = 20°,\ \measuredangle QCP = 30° \text{ и } \measuredangle CPQ = 130°.$$

2.2. Ако $\beta = 20°,\ \gamma = 40°$, бараните агли се

$$\measuredangle CQP = 10°,\ \measuredangle QCP = 30° \text{ и } \measuredangle CPQ = 140°.$$

3. Имаме два случаја:

3.1. Нека $\beta = 120°$, $\alpha = 40°,\ \gamma = 20°$ (цртеж 3). За аглите на $\triangle CPQ$ наоѓаме:

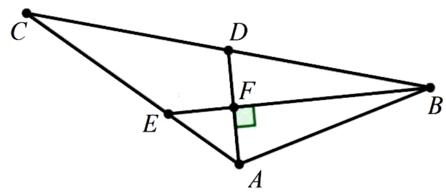
$$\measuredangle CQP = 90° + 30° = 120°,\ \measuredangle QCP = 90° - \alpha = 50° \text{ и } \measuredangle CPQ = 10°.$$

3.2. Нека $\beta = 120°$, $\alpha = 20°,\ \gamma = 40°$ (цртеж 4). За аглите на $\triangle CPQ$ наоѓаме:

$$\measuredangle CQP = 90° - 30° = 60°,\ \measuredangle QCP = 90° + \alpha = 110° \text{ и } \measuredangle CPQ = 10°.$$

32. Даден $\triangle ABC$ во кој тежишната линија AD и симетралата BE на $\measuredangle ABC$ се заемно нормални. Пресметај ја должината на страната AB, ако $\overline{BC} = 12\,cm$.

Решение. Нека $\{F\} = AD \cap BE$. Бидејќи $FB \perp AD$ и FB е симетрала на $\measuredangle ABC$ добиваме дека $\triangle ADB$ е рамнокрак. Според тоа, $\overline{AB} = \overline{BD}$. Понатаму, бидејќи точката D е средина на отсечката BC важи $\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{12}{2} = 6\,cm$, од каде наоѓаме $\overline{AB} = 6\,cm$.



33. Даден е триаголник $\triangle ABC$ со $\measuredangle BAC = 40°$, $\measuredangle ABC = 20°$ и $\overline{AB} - \overline{BC} = 5cm$. Ако симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече AB во точка M, да се пресмета должината на CM.

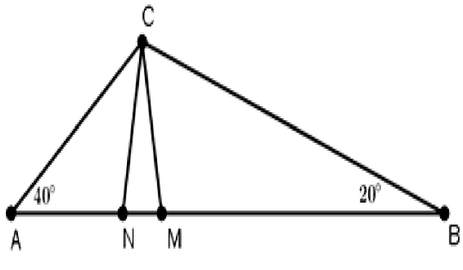
Решение. Нека $N \in AB$ е таква што $\overline{BC} = \overline{BN}$. Тогаш $\triangle BCN$ е рамнокрак па $\measuredangle BNC = \frac{180° - 20°}{2} = 80°$. Од CM е симетрала на $\measuredangle ACB = 120°$ следува $\measuredangle MCB = 60°$, односно

$$\measuredangle BMC = 180° - 20° - 60° = 100°$$

од каде добиваме дека

$$\measuredangle NMC = 180° - 100° = 80°.$$

Значи, $\triangle NCM$ е рамнокрак, па



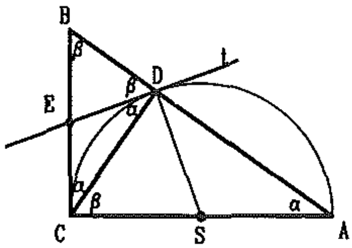
затоа $\measuredangle NCM = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$. Понатаму, од

$$\measuredangle ACN = \measuredangle ACM - \measuredangle NCM = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

следува дека $\triangle ANC$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AN} = \overline{NC}$. Тогаш

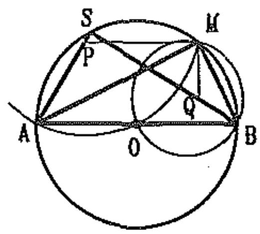
$$\overline{CM} = \overline{NC} = \overline{AN} = 5cm.$$

34. Даден е правоаголен триаголник ABC, $\measuredangle C = 90^\circ$ и $\overline{AC} > \overline{BC}$. Над катетата AC како над дијаметар е конструирана кружница која хипотенузата AB ја сече во точката D. Низ точката D е повлечена тангента t која катетата BC ја сече во точката E. Докажи дека $\overline{BE} = \overline{CE}$.



Решение. Нека $\measuredangle CAB = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$ (α и β се комплементни агли, цртеж десно). Тогаш $\measuredangle CDE = \measuredangle CAB = \alpha$ (како агол меѓу тангентата и тетивата CD). Бидејќи $\measuredangle CDA = \measuredangle CDB = 90^\circ$, важи $\measuredangle BCD = \alpha$, па затоа $\overline{DE} = \overline{CE}$. Слично $\measuredangle EDB = \measuredangle ABD = \beta$, па е $\overline{DE} = \overline{BE}$. Конечно, $\overline{BE} = \overline{DE} = \overline{CE}$.

35. Нека k е кружница со дијаметар AB, OM е нејзин произволен радиус, а P и Q се центрите на кружниците опишани околу триаголниците AOM и BOM, соодветно. Правите AP и BP се сечат во точката S. Докажи дека S припаѓа на кружницата k.



Решение. Нека $\measuredangle AOM = \varphi$ (цртеж десно). Тогаш $\measuredangle BOM = 180^\circ - \varphi$, а од рамнокраките триаголници AOM и BOM следува

$$\measuredangle OAM = \measuredangle OMA = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} \text{ и}$$

$$\measuredangle OBM = \measuredangle OMB = \frac{\varphi}{2}.$$

Бидејќи $\measuredangle APM = 2(180^\circ - \varphi)$, од рамнокракиот триаголник AMP добиваме $\measuredangle MAP = \varphi - 90^\circ$. Според тоа:

$$\measuredangle BAS = \measuredangle BAP = \measuredangle BAM + \measuredangle MAP = \measuredangle OAM + \measuredangle MAP = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} + \varphi - 90^\circ = \frac{\varphi}{2}.$$

Слично, $\measuredangle BQM = 2(180^\circ - \varphi)$, а од рамнокракиот триаголник BQM добиваме $\measuredangle QMB = \varphi - 90^\circ$. Затоа важи

$$\measuredangle ABS=\measuredangle ABM-\measuredangle MBS=\measuredangle OBM-\measuredangle MBQ=\frac{\varphi}{2}-(\varphi-90^\circ)=90^\circ-\frac{\varphi}{2}.$$

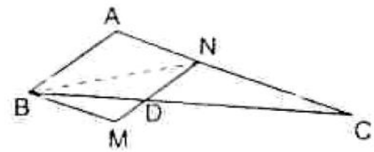
Конечно,

$$\measuredangle ASB=180^\circ-\measuredangle BAS-\measuredangle ABS=180^\circ-\frac{\varphi}{2}-(90^\circ-\frac{\varphi}{2})=90^\circ,$$

што значи дека точката S припаѓа на кружницата k.

36. Даден е $\triangle ABC$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AC во точката N. Во рамнината е избрана точка M така што точките A и M не лежат на иста страна на правата BC и така што $\measuredangle NBM=\measuredangle BNA$ и $\overline{BM}=\overline{AN}$. Нека точката D е пресекот на правата MN и страната BC. Докажи дека $\overline{BD}=\overline{DN}$.

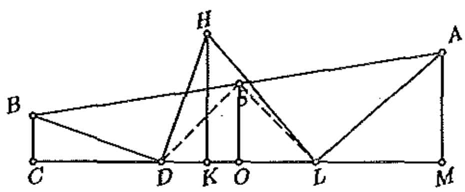
Решение. За триаголниците BMN и ABN важи BN е заедничка страна, $\measuredangle NBM=\measuredangle BNA$ и $\overline{BM}=\overline{AN}$, па затоа тие се складни. Од оваа складност следува $\measuredangle ABN=\measuredangle BNM$,



а бидејќи $\measuredangle ABN=\measuredangle NBC$, заклучуваме дека $\measuredangle NBC=\measuredangle BNM$, т.е. триаголникот BND е рамнокрак. Затоа $\overline{BD}=\overline{DN}$, што и требаше да се докаже.

37. На гусарската карта пишува: На ридот Лагатор, над Лозово, се наоѓат еден даб, една липа и една црница. Тргни од дабот и број чекори до липата, потоа заврти лево под прав агол и изброј исто толку чекори. Тука стави го првиот знак. Потоа тргни од дабот до црницата, па заврти десно под прав агол и изброј исто толку чекори. Тука стави го вториот знак. Определи ја средината меѓу првиот и вториот знак и копај. Тука ќе најдеш богатство. Еден гусар според картата го нашол Лагатор и на него ги нашол липата и црницата. Но, дабот го немало, па тој заминал без да го најде богатството. Меѓутоа, ако знаел геометрија гусарот можел да го пронајде богатството. Како?

Решение. Точките во кои се наоѓаат дабот, липата и црницата да ги означиме со H,L и D, соодветно (цртеж десно). Нека положбите на првиот и вториот знак се точките A и B, соодветно. Тогаш богатството се наоѓа во точката S која е



средина на отсечката AB. Подножјата на нормалите повлечени од точките B, H, A на правата DL да ги означиме со C, K, M, соодветно. Според претпоставката $\overline{HL} = \overline{AL}$ и како $\measuredangle KHL = \measuredangle MLA$ (агли со нормални краци) заклучуваме дека правоаголните триаголници HKL и LMA се складни, па затоа $\overline{AM} = \overline{KL}$. Слично се докажува дека правоаголните триаголници BCD и DKH се складни, па затоа $\overline{BC} = \overline{DK}$. Покрај тоа важи и $\overline{CD} = \overline{LM} = \overline{KH}$, па затоа средината O а отсечката DL се совпаѓа со средината на отсечката CM. Отсечката OS е средна линија на правоаголниот трапез $ABCM$, па затоа

$$\overline{OS} = \frac{\overline{BC} + \overline{AM}}{2} = \frac{\overline{DK} + \overline{KL}}{2} = \frac{\overline{DL}}{2}.$$

Јасно, отсечката OS е нормална на правата DL. Оттука следува дека триаголникот DSL е рамнокрак правоаголен триаголник (половина од квадрат), па затоа е можна следнава конструкција за наоѓање на точката S: во средината O на отсечката DL повлекуваме нормала и на неа определуваме точка S на растојание $\frac{\overline{DL}}{2}$ од точката O. Така определуваме две точки S' и S'' во кои гусарот требало да копа за да го најде богатството. Овие две места се двете темиња различни од D и L на споменатиот квадрат кој има дијагонала DL.

38. Над страните AC и BC на остроаголен $\triangle ABC$ во надворешноста на триаголникот се нацртани квадрати $ACMN$ и $CBED$. Докажи дека $\overline{AD} = \overline{BM}$ и $AD \perp BM$.

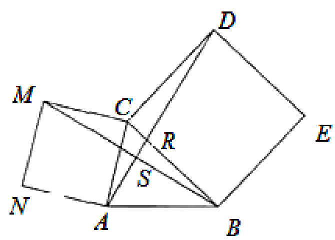
Решение. Имаме $\overline{AC} = \overline{CM}$ и $\overline{CD} = \overline{BC}$. Понатаму,

$\measuredangle ACD = \measuredangle ACB + \measuredangle BCD$ и

$\measuredangle BCM = \measuredangle ACB + \measuredangle ACM$,

па од $\measuredangle BCD = \measuredangle ACM = 90^\circ$ следува

$$\measuredangle ACD = \measuredangle ACB + 90^\circ = \measuredangle BCM.$$



Сега од признакот САС следува дека $\triangle ADC \cong \triangle MCB$ и затоа $\overline{AD} = \overline{BM}$. Нека S е пресекот на отсечките AD и BM, а R е пресекот на отсечките AD и BC. Од докажаната складност следува

$$\measuredangle RDC = \measuredangle ADC = \measuredangle MBC = \measuredangle SBR, \text{ т.е. } \measuredangle RDC = \measuredangle SBR,$$

а важи $\measuredangle NRS = \measuredangle DRC$ (накрсни агли), заклучуваме дека триаголниците BSR и DCR се слични, па затоа $\measuredangle BSR = \measuredangle DCR = \measuredangle DCB = 90^\circ$.

Според тоа, $AD \perp BM$.

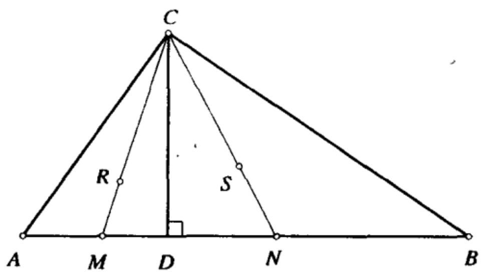
39. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Нека D е подножјето на всиината повлечена од темето C кон хипотенузата AB, точката R е центар на впишаната кружница во $\triangle ADC$ и точката S е центар на впишаната кружница во $\triangle BDC$. Ако правата CR ја сече хипотенузата AB во точката M, а правата CS во точката N, тогаш $\overline{AC} = \overline{AN}$ и $\overline{BC} = \overline{BM}$. Докажи!

Решение. Нека $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$. Имаме

$$\measuredangle ACD = \measuredangle ABC = \beta \text{ и}$$

$$\measuredangle BCD = \measuredangle BAC = \alpha$$

како остри агли со нормални краци. Понатаму, важи



$$\measuredangle BCN = \measuredangle NCD = \frac{\alpha}{2} \text{ и}$$

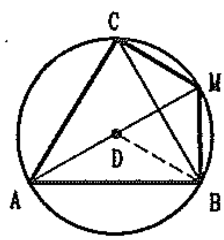
$$\measuredangle ACM = \measuredangle MCD = \frac{\beta}{2},$$

бидејќи правата CN е симетрала на $\measuredangle BCD$, а правата CM е симетрала на $\measuredangle ACD$. Аголот $\measuredangle ANC$ е надворешен за $\triangle BCN$, па затоа $\measuredangle ANC = \beta + \frac{\alpha}{2}$, а од $\measuredangle ACN = \beta + \frac{\alpha}{2}$ следува $\measuredangle ANC = \measuredangle ACN$, што значи дека $\triangle ACN$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AC} = \overline{AN}$.

На сличен начин се докажува и второто равенство. Имено, $\measuredangle BMC$ е надворешен за $\triangle AMC$, па затоа $\measuredangle BMC = \alpha + \frac{\beta}{2}$, а од $\measuredangle BCM = \alpha + \frac{\beta}{2}$ следува дека $\measuredangle BMC = \measuredangle BCM$, па затоа $\triangle BCM$ е рамнокрак, т.е. $\overline{BC} = \overline{BM}$.

40. Околу рамностран $\triangle ABC$ е опишана кружница. На лакот BC кој не ја содржи точката A дадена е произволна точка M. Докажи дека $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{AM}$.

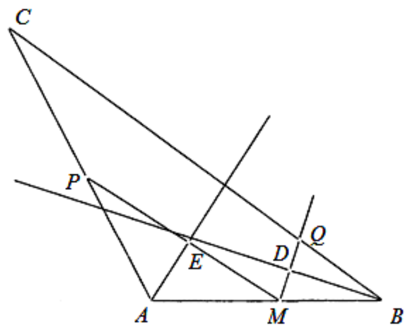
Решение. Нека D е точка на тетивата AM таква што $\overline{MD} = \overline{MB}$. Бидејќи $\measuredangle AMB = \measuredangle ACB = 60^\circ$ (периферискi агли над иста тетива), заклучуваме дека $\triangle BMD$ е рамностран, па затоа $\overline{BD} = \overline{MB}$. Понатаму, $\triangle ABD$ е складен со $\triangle BMC$ ($\overline{AB} = \overline{BC}$, $\measuredangle ADB = \measuredangle BMC = 120^\circ$ и $\overline{BD} = \overline{MB}$). Од складно-



ста следува $\overline{AD}=\overline{MC}$, па затоа $\overline{AM}=\overline{AD}+\overline{DM}=\overline{CM}+\overline{BM}$.

41. Даден е $\triangle ABC$, $\overline{AB}=9, \overline{BC}=18, \overline{CA}=12$. На страната AB е избрана точка M така што нормалата од точката M на симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната AC во точка P, нормалата во точката M на симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната BC во точка Q и притоа $\overline{CQ}=2\overline{CP}$. Во кој однос точката M ја дели страната AB.

Решение. Нека точката D пресек на нормалата MQ и симетралата на $\measuredangle ABC$, а точката E е пресек на нормалата MP и симетралата на $\measuredangle BAC$. Имаме, $\measuredangle MBD=\measuredangle QBD$, $\measuredangle BDM=\measuredangle BDQ=90^\circ$ и како BD е заедничка страна на $\triangle BDM$ и $\triangle BDQ$, заклучуваме дека овие три-



аголници се складни. Од складноста следува $\overline{BM}=\overline{BQ}$. Понатаму, $\measuredangle MAE=\measuredangle PAE$, $\measuredangle AEM=\measuredangle AEP=90^\circ$ и како AE е заедничка страна на $\triangle AME$ и $\triangle APE$, заклучуваме дека овие триаголници се складни, па затоа $\overline{AM}=\overline{AP}$.

Да означиме $\overline{AM}=\overline{AP}=m$, $\overline{BM}=\overline{BQ}=n$ и $\overline{CP}=x$. Тогаш $\overline{CQ}=2x$, а од $\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AB}$, $\overline{BQ}+\overline{QC}=\overline{BC}$ и $\overline{AP}+\overline{PC}=\overline{AC}$ точни се равенствата $m+n=9$, $n+2x=18$ и $m+x=12$. Решението на последниот систем е $x=7, m=5, n=4$. Според тоа, бараниот однос е

$$\overline{AM}:\overline{MB}=m:n \text{, т.е. } \overline{AM}:\overline{MB}=5:4.$$

V.2. ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

42. Определи ги должините на катетите на правоаголен триаголник со плоштина $24\,cm^2$, ако должините на катетите на триаголникот се природни броеви изразени во сантиметри.

Решение. Нека a и b, $a \leq b$ се должините на катетите на правоаголниот триаголник. Плоштината на триаголникот е $P = \frac{ab}{2}$, па затоа $24 = \frac{ab}{2}$,т.е. $ab = 48$. Од $48 = 1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$ следува

$$(a,b) \in \{(1,48), (2,24), (3,16), (4,12), (6,8)\}.$$

43. Нека $m > n > 0$. Докажи дека триаголникот со должини на страни $2mn,\ m^2 - n^2$ и $m^2 + n^2$ е правоаголен.

Решение. Имаме,

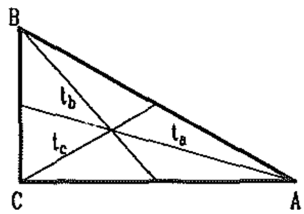
$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = 4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4$$
$$= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2,$$

па од обратната Питагорова теорема следува дека триаголникот со должини на страни $2mn,\ m^2 - n^2$ и $m^2 + n^2$ е правоаголен.

44. Во правоаголен триаголник (со прав агол во темето C) должините на тежишните линии се t_a, t_b и t_c. Докажи дека $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$.

Решение. Од Питагоровата теорема следува:

$$t_a^2 = b^2 + (\tfrac{a}{2})^2,\ t_b^2 = a^2 + (\tfrac{b}{2})^2,\ t_c^2 = (\tfrac{c}{2})^2.$$



Затоа,

$$t_a^2 + t_b^2 = b^2 + (\tfrac{a}{2})^2 + a^2 + (\tfrac{b}{2})^2$$
$$= 5\frac{a^2+b^2}{4} = 5\frac{c^2}{4} = 5(\tfrac{c}{2})^2 = 5t_c^2.$$

45. Односот на должините на хипотенузата и едната катета ма правоаголен триаголник е еднаков на $101:99$. Определи го односот на должините на хипотенузата и другата катета.

Решение. Ако се a, b, c должините на катетите и хипотенузата на дадениот триаголник, тогаш $c:a = 101:99$, што значи $c = 101t$ и $a = 99t$ за некој број t. Сега од Питагоровата теорема следува

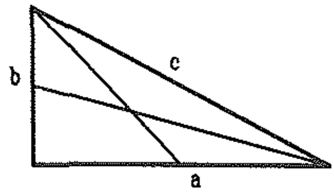
$$b = \sqrt{(101t)^2 - (99t)^2} = \sqrt{10201t^2 - 9801t^2} = \sqrt{400t^2} = 20t.$$

Според тоа, $c:b = 101:20$.

46. Должините на тежишните линии на правоаголен триаголник повлечени од темињата со остри агли се еднакви на $7\,cm$ и $4\,cm$. Определи ја должината на хипотенузата на овој триаголник.

Решение. Имаме

$$a^2+(\tfrac{b}{2})^2=16 \text{ и } b^2+(\tfrac{a}{2})^2=49.$$



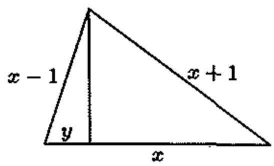
Ако ги собереме горните равенства добиваме $\frac{5(a^2+b^2)}{4}=65$, од каде наоѓаме $c^2=a^2+b^2=52$, односно $c=2\sqrt{13}\,cm$.

47. Определи го радиусот на кругот впишан во правоаголен триаголник со катети $a=30\,cm$ и $b=40\,cm$.

Решение. За хипотенузата на правоаголниот триаголник добиваме $c=\sqrt{30^2+40^2}=50\,cm$. Понатаму, $a-r+b-r=c$ (Зошто?), од каде добиваме $30-r+40-r=50$, односно $r=10\,cm$.

48. Должините на страните на триаголникот се три последователни природни броја. Докажи дека висината повлечена на страната со средна должина ја дели оваа страна на две отсечки кои по должина се разликуваат за 4.

Решение. Нека должините на страните на триаголникот се $x-1, x$ и $x+1$ (цртеж десно). Дополнително ќе претпоставиме дека триаголникот е остроаголен, што важи за секој $x>4$. Ја повлекуваме висината од темето формирано од страните со должини $x-1$ и $x+1$. Нека истата ја дели третата страна на делови y и $x-y$. Од Питагоровата теорема следува



$(x-1)^2-y^2=(x+1)^2-(x-y)^2$, па затоа $y=\frac{x}{2}-2$ и $x-y=\frac{x}{2}+2$.

Јасно, разликата меѓу овие две отсечки е 4.

49. Должините на страните на правоаголен триаголник се $a, a-b$ и $a+b$ каде a и b се реални броеви и $a>b$. Докажи дека односот на должините на катетатите на овој триаголник е еднаков на $4:3$.

Решение. Јасно, должината на хипотенузата е $a+b$. Од Питагоровата теорема следува

$$(a+b)^2=a^2+(a-b)^2$$
$$a^2+2ab+b^2=a^2+a^2-2ab+b^2$$
$$a^2=4ab$$
$$a=4b.$$

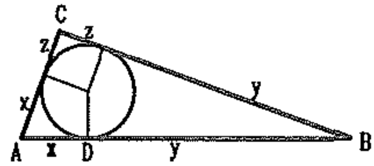
Според тоа, должините на катетите се $4b$ и $4b-b=3b$, па затоа нивниот однос е

$$4b:3b=4:3.$$

50. Нека D е точката во која впишаната кружница во правоаголниот $\triangle ABC$ ја допира хипотенузата AB. Докажи дека

$$\overline{AC}\cdot\overline{BC}=2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}.$$

Решение. Нека x,y,z се должините на тангентните отсечки од темињата A,B,C, соодветно. Тогаш од Питагоровата теорема следува



$$(x+z)^2+(y+z)^2=(x+y)^2,$$

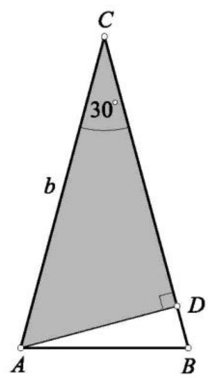
од каде последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&xz+yz+z^2=yx\\
&yx+xz+yz+z^2=2yx\\
&x(y+z)+z(y+z)=2xy\\
&(x+z)(y+z)=2xy\\
&\overline{AC}\cdot\overline{BC}=2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}.
\end{aligned}$$

51. Даден е рамнокрак триаголник со должина на кракот $7,5\,cm$ и агол при основата 75°. Определи ја плоштината на триаголникот.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\begin{aligned}
&\overline{AC}=\overline{BC}=b=7,5\,cm,\\
&\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=75^\circ\\
&\measuredangle ACB=30^\circ.
\end{aligned}$$



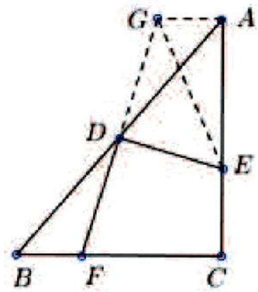
Нека точката D припаѓа на страната BC и нека $AD\perp BC$, види цртеж. Тогаш AD е висина на триаголникот ABC и е катета на правоаголниот триаголник $\triangle ADC$, наспроти агол од 30°, па затоа

$$\overline{AD}=\tfrac{1}{2}\overline{AC}=\tfrac{1}{2}\cdot 7,5=3,75\,cm.$$

Според тоа,

$$P_{\triangle ABC}=\tfrac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\tfrac{1}{2}\cdot 7,5\cdot 3,75=14,0625\,cm^2.$$

52. Во правоаголен $\triangle ABC$ точката D е средина на хипотенузата, а E и F се точки на катетите AC и BC соодветно такви што важи $DE \perp DF$. Докажи дека $\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BF}^2$.



Решение. Низ точката A повлекуваме права паралелна со BC и нека точката G е пресекот на оваа права со правата DF.

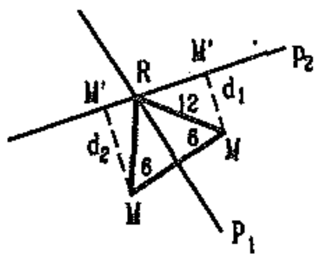
Имаме $\overline{AD} = \overline{BD}$, $\measuredangle ADG = \measuredangle BDF$ (накрсни агли) и $\measuredangle DAG = \measuredangle DBF$ (наизменични агли), па затоа $\triangle BDF \cong \triangle ADG$. Од складноста следува $\overline{DG} = \overline{DF}$. Понатаму, за правоаголните триаголници EDF и EDG важи ED е заедничка страна, $\overline{DG} = \overline{DF}$ и $\measuredangle EDF = \measuredangle EDG = 90^\circ$, па затоа тие се складни. Од оваа складност следува $\overline{EG} = \overline{EF}$. Значи, $\overline{EG}^2 = \overline{EF}^2$, па со примена на Питагоровата теорема на триаголникот EGA добиваме

$$\overline{EF}^2 = \overline{EG}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BF}^2,$$

што и требаше да се докаже.

53. Два праволиниски пата p_1 и p_2 се сечат под агол од 75°. Местото M од патот p_1 е оддалечено $6\,km$, а од раскрсницата R е оддалечено $12\,km$. Определи колку е оддалечено местото M од патот p_2.

Решение. Ќе разликуваме два случаја (цртеж десно). Ако точката M е во внатрешноста на остриот агол што го определуваат правите p_1 и p_2, тогаш лесно се докажува дека триаголникот MRM' е рамнокрак правоаголен, па затоа $\overline{MM'} = 6\sqrt{2}\,km$. Ако точката M е во внатрешноста на тапиот агол, тогаш од правоаголниот триаголник $MM'R$ во кој $\overline{MR} = 12\,km$ и $\measuredangle MRM' = 75^\circ$ се добива



$$\overline{MM'} = 6\sqrt{2+\sqrt{3}}\,km$$

54. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. Должината на висината повлечена од темето C кон основата AB е $6\,cm$, а периметарот на триаголникот е еднаков на $20\,cm$. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$.

Решение. Нека должината на кракот на $\triangle ABC$ е b, а должината на основата е a. Од Питагоровата теорема применета на правоаголниот $\triangle AC'C$ (C' е подножјето на висината повлечена од темето C), следува $b^2 = \frac{a^2}{4} + 36$. Освен тоа, $a + 2b = 20$, т.е. $a = 20 - 2b$, па со замена во претходното равенство добиваме

$$b^2 = \frac{(20-2b)^2}{4} + 36$$

$$b^2 = \frac{400-80b+4b^2}{4} + 36$$

$$b^2 = 100 - 20b + b^2 + 36$$

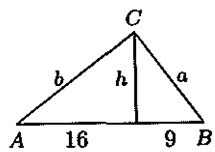
$$20b = 136$$

$$b = 6{,}8\,cm$$

па затоа $a = 20 - 2\cdot 6{,}8 = 6{,}4\,cm$.

55. Висината која соодветствува на хипотенузата на правоаголен триаголник ја дели хипотенузата на два дела: $x = 16\,cm$ и $y = 9\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на овој триаголник.

Решение. Нека h е висината повлечена кон хипотенузата (цртеж десно). Тогаш од Питагоровата теорема следува $a^2 = h^2 + 9^2$ и $b^2 = h^2 + 16^2$, а $c^2 = a^2 + b^2 = h^2 + 9^2 + h^2 + 16^2$. Но, $c = 25\,cm$, па затоа $25^2 = h^2 + 9^2 + h^2 + 16^2$, од каде добиваме $h = 12\,cm$. Сега, наоѓаме $a = 15\,cm$ и $b = 20\,cm$. Според тоа, периметарот на триаголникот е $L = 60\,cm$, а плоштината е $P = \frac{25\cdot 12}{2} = 150\,cm^2$.



56. Определи ја плоштината на правоаголен триаголник со периметар $36\,cm$таков што за катетите a и b и хипотенузата c важи $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$.

Решение. Од $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$ следува $a + b = \frac{7}{5}c$, па затоа ако замениме во $a+b+c=36$, довиваме $\frac{7}{5}c + c = 36$, односно $c = 15$. Според тоа, $a + b = 21$, па затоа $(a+b)^2 = 21^2$, од каде добиваме

$$a^2 + b^2 + 2ab = 21^2.$$

Конечно, за плоштината на триаголникот добиваме

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{1}{4}(21^2 - (a^2 + b^2)) = \frac{1}{4}(21^2 - c^2) = \frac{1}{4}(21^2 - 15^2) = \frac{6\cdot 36}{4} = 54\,cm^2.$$

57. Во правоаголен триаголник ABC, $\measuredangle A=90^\circ$ вписана е кружница која хипотенузата ја допира во точката M. Ако $\overline{BM}=m$ и $\overline{MC}=n$, докажи дека плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на mn.

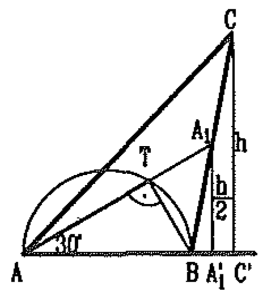
Решение. Нека S е центарот на вписаната кружница во триаголникот ABC со радиус r. Нека N и P се допирните точки на вписаната кружница со страните AC и AB (направи цртеж). Тогаш $\overline{BP}=m$, $\overline{CN}=n$ и $\overline{AP}=\overline{AN}=r$ (еднакви тангентни отсечки). Ако P е плоштината на триаголникот ABC, тогаш

$$2P=(m+r)(n+r)=mn+mr+nr+r^2.$$

Триаголниците $PSB, BSM, MSC, CSN, NSA, ASP$ имаат висина r и нивните основи се m,m,n,n,r,r,па затоа збирот на нивните плоштини е $P=mr+nr+r^2$. Конечно, од последните две равенства следува $P=mn$.

58. Тежиштето T на $\triangle ABC$ се наоѓа на кружницата конструирана над страната $AB, \overline{AB}=12\,cm$ како над дијаметар. Определи ја плоштината на $\triangle ABC$ ако $\measuredangle TAB=30^\circ$.

Решение. Во $\triangle ABT$ (цртеж десно) важи $\overline{AB}=12\,cm, \measuredangle TAB=30^\circ$ и $\measuredangle ATB=90^\circ$, па затоа $\overline{AT}=\frac{12\sqrt{3}}{2}\,cm=6\sqrt{3}\,cm$. Бидејќи T е тежиште, добиваме $\overline{A_1T}=\frac{1}{2}\overline{AT}=3\sqrt{3}\,cm$, па затоа $\overline{AA_1}=\overline{AT}+\overline{A_1T}=9\sqrt{3}\,cm$. Тогаш

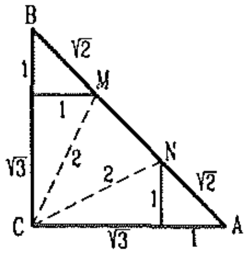


$$\overline{A_1'A_1}=\frac{1}{2}\overline{AA_1}=\frac{9\sqrt{3}}{2}\,cm=\frac{\overline{CC'}}{2} \text{ и}$$

$$P_{\triangle ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CC'}}{2}=\frac{12\cdot 9\sqrt{3}}{2}=54\sqrt{3}\,cm^2.$$

59. На хипотенузата AB на рамнокрак правоаголен триаголник ABC се дадени точки M и N такви што $\overline{MC}=\overline{NC}=2\,cm$. Растојанието од секоја од точките M и N до нејзе поблиската катета е еднакво на $1cm$. Определи ги плоштината на триаголникот ABC и должината на отсечката MN.

Решение. Според условот на задачата имаме



$$\overline{BM}=\overline{AN}=\sqrt{1^2+1^2}=2\,cm,$$

$$\overline{AC}=\overline{BC}=1+\sqrt{2^2-1^2}=1+\sqrt{3}\,cm \text{ и}$$

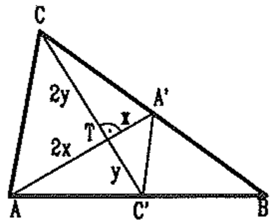
$$\overline{MN}=\overline{AB}-2\overline{AN}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}-2\overline{AN}$$

$$=(1+\sqrt{3})\sqrt{2}-2\sqrt{2}=(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}\,cm.$$

Плоштината на триаголникот е $P=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}\,cm^2$.

60. За триаголникот ABC важи $\overline{AB}=32\,cm$, $\overline{BC}=24\,cm$ и тежишните линии AA' и CC' се заемно нормални. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

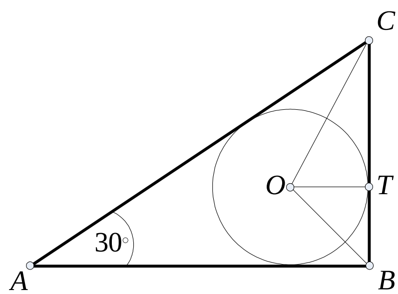
Решение. Нека $AA'\cap CC'=T$ (цртеж десно). Ако $\overline{AA'}=3x$ и $\overline{CC'}=3y$, тогаш од правоаголните триаголници CTA' и ATC' следуваат равенствата



$$x^2+4y^2=144 \text{ и } 4x^2+y^2=256.$$

Ги собираме последните равенства и добиваме $5x^2+4y^2=400$, од каде следува $\overline{A'C'}^2=x^2+y^2=80$, т.е. $\overline{A'C'}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}\,cm$. Бидејќи $A'C'$ е средна линија на $\triangle ABC$ добиваме $\overline{AC}=2\overline{A'C'}=8\sqrt{5}\,cm$. Според тоа, периметарот на $\triangle ABC$ е $L=(56+8\sqrt{5})\,cm$, а плоштината е $P=64\sqrt{11}\,cm^2$.

61. Вписаната кружница $k(O,r)$ во триаголник ABC ја допира страната BC во точката T. Определи ја должината на страната BC, ако $\measuredangle BAC=30^\circ$ и $\frac{\measuredangle BOT}{\measuredangle COT}=\frac{3}{4}$.



Решение. Нека $\measuredangle BOT=3\alpha$. Тогаш

$$\measuredangle COT=4\alpha,\ \measuredangle TBO=90^\circ-3\alpha \text{ и}$$

$$\measuredangle TCO=90^\circ-4\alpha.$$

За аглите во триаголникот ABC важи

$$30^\circ+(180^\circ-6\alpha)+(180^\circ-8\alpha)=180^\circ.$$

Од тука добиваме $14\alpha=210^\circ$, т.е. $\alpha=15^\circ$. Значи,

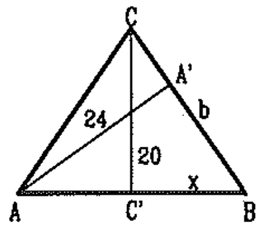
$$\measuredangle ABC = 90^\circ = 180^\circ - 6\alpha \text{ и } \measuredangle BCA = 60^\circ = 180^\circ - 8\alpha .$$

Бидејќи $\overline{OT} = r$, $\overline{OC} = 2r$ а $\overline{TC} = r\sqrt{3}$, наоѓаме

$$\overline{BC} = \overline{BT} + \overline{TC} = r(1+\sqrt{3}) .$$

62. Должината на висината CC' која соодветствува на основата на рамнокракиот триаголник е еднаква на $20\,cm$, а должината на висината AA' која соодветствува на кракот е еднаква на $24\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на овој триаголник.

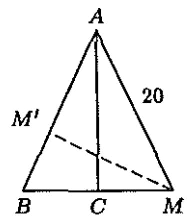
Решение. Нека $\overline{AC} = \overline{BC} = b$ и $\overline{BC'} = x$ (цртеж десно). Од $P_{ABC} = 20x = 12b$ следува $x = \frac{3b}{5}$. Сега од Питагоровата теорема применета на $\triangle BCC'$ добиваме $b^2 - x^2 = 20^2$, односно $b^2 - \frac{9b^2}{25} = 400$, од каде следува $b = 25\,cm$. Според тоа, $x = 15\,cm$, па затоа



$$P_{ABC} = 20 \cdot 15 = 300\,cm^2 \text{ и } L = 2b + 2x = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 13 = 80\,cm .$$

63. Должината на хипотенузата на еден правоаголен триаголник е $20\,cm$, а еден од острите агли е еднаков на четвртина од правиот агол. Определи ја плоштината на овој триаголник.

Решение. Нека дадениот правоаголен триаголник е ABC, $\measuredangle A = 90^\circ : 4 = 22^\circ 30'$. Нека M е симетричната точка на темто B во однос на страната AC и MM' е висината на рамнокракиот $\triangle BMA$. Тогаш $\measuredangle BAM = 45^\circ$, па бидејќи $\triangle AMM'$ е правоаголен добиваме $\measuredangle AMM' = 45^\circ$, т.е. $\triangle AMM'$ е рамнокрак правоаголен. Според тоа, $\overline{MM'} = \frac{\overline{AM}}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}\ cm$. Значи, плоштината на $\triangle BMA$ е $P_{\triangle BMA} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{MM'}}{2} = 100\sqrt{2}\ cm^2$, па затоа



$$P_{\triangle ABC} = \tfrac{1}{2} P_{\triangle BMA} = 50\sqrt{2}\ cm^2 .$$

64. Нека h_a, h_b, h_c се висните на триаголник ABC. Ако

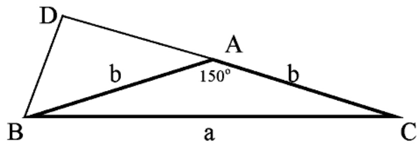
$$(\tfrac{h_c}{h_a})^2 + (\tfrac{h_c}{h_b})^2 = 1 ,$$

тогаш триаголникот ABC е правоаголен. Докажи!

Решение. Имаме $h_a = \frac{2P}{a}, h_b = \frac{2P}{b}$ и $h_c = \frac{2P}{c}$, па со замена во даденото равенство добиваме $(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1$, односно $a^2 + b^2 = c^2$. Сега тврдењето следува од обратната Питагорова теорема.

65. Нека a е должината на основата, а b е должината на кракот на рамнокрак триаголник со агол при врвот еднаков на 150°. Докажи дека $a^2 = b^2(2+\sqrt{3})$.

Решение. Нека ABC е рамнокракиот триаголник и BC е неговата основа (цртеж десно). Ако BD е висината на $\triangle ABC$,



тогаш $\measuredangle BAD = 30^\circ$, па затоа $\triangle BAD$ е половина од рамностран триаголник што значи дека $\overline{BD} = \frac{b}{2}$ и $\overline{AD} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Сега, од Питагоровата теорема применета на $\triangle BCD$ следува

$$a^2 = (\tfrac{b}{2})^2 + (b + \tfrac{b\sqrt{3}}{2})^2$$

$$a^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4}(2+\sqrt{3})^2$$

$$a^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4}(7+4\sqrt{3})$$

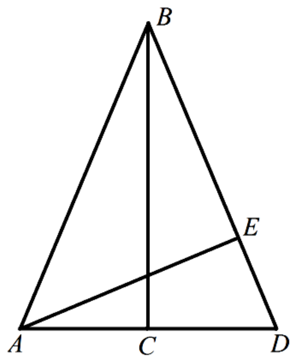
$$a^2 = b^2(2+\sqrt{3})$$

што и требаше да се докаже.

66. Должината на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC е $7\,cm$, а еден внатрешен агол е еднаков на четвртина од правиот агол. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Четвртина од правиот агол е еднаква на $22{,}5^\circ$. Нека $\measuredangle ABC = 22{,}5^\circ$. На продолжението на страната AC преку темето C земаме точка D таква што $\overline{AC} = \overline{CD}$ (види цртеж). Правоаголните триаголници ACB и DCB имаат заедничка страна BC и важи $\overline{AC} = \overline{CD}$, па затоа тие се складни. Според тоа, $\measuredangle ABC = \measuredangle DBC = 22{,}5^\circ$, па затоа $\measuredangle ABD = 45^\circ$ и $\overline{AB} = \overline{BD}$.

Нека E е подножјето на висината во триаголникот ABD повлечена од темето A. Тогаш триаголникот AEB е рамнокрак правоаголен со хипотенуза $\overline{AB}=7cm$. Затоа $\overline{AB}=\overline{AE}\sqrt{2}$, т.е. $\overline{AE}=\frac{\overline{AB}\sqrt{2}}{2}$, односно



$$\overline{AE}=\frac{7\sqrt{2}}{2}\,cm.$$

Конечно, за плоштината на триаголникот ABC добиваме

$$P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}P_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{AE}=\frac{49\sqrt{2}}{8}\;cm^2.$$

67. На страните AB, BC и CA на рамностраниот триаголник ABC се земени точки M, N и P, соодветно такви што

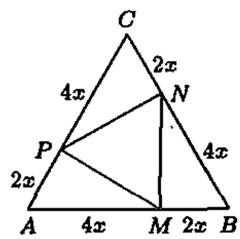
$$\overline{AM}:\overline{MB}=\overline{BN}:\overline{NC}=\overline{CP}:\overline{PA}=2:1.$$

Докажи дека и триаголникот MNP е рамностран и определи ги односите на периметрите и плоштините на триаголниците ABC и MNP.

Решение. Од

$$\overline{AP}=\overline{MB}=\overline{NC}=2x,\;\overline{AM}=\overline{BN}=\overline{CP}=4x \text{ и}$$

$$\measuredangle PAM=\measuredangle MBN=\measuredangle NCP=60^\circ$$



следува $\triangle AMP\cong\triangle BMN\cong\triangle CNP$ (цртеж десно). Од докажаната складност следува

$$\overline{MN}=\overline{NP}=\overline{PM}=2x\sqrt{3},$$

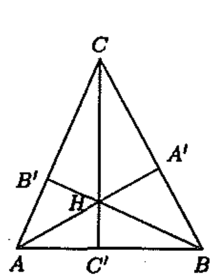
што значи дека триаголникот MNP е рамностран. За односот на периметрите добиваме

$$L_{ABC}:L_{MNP}=6x:2x\sqrt{3}=\sqrt{3}:1,$$

а за односот на плоштините добиваме

$$P_{ABC}:P_{MNP}=(6x)^2:(2x\sqrt{3})^2=36:12=3:1.$$

68. Ортоцентарот H на триаголникот ABC ја дели висината AH така што $\overline{AH}:\overline{HA'}=1:1$, а висината BB' ја дели така што $\overline{BH}:\overline{HB'}=2:1$. Определи го односот $\overline{CH}:\overline{HC'}$ во кој H ја дели висината CC'.



Решение. Нека P е плоштината на триаголникот ABC (цртеж десно). Од условот на задачата следува $P_{\triangle BCH}=\frac{a\frac{h_a}{2}}{2}=\frac{P}{2}$. Слично, $P_{\triangle ACH}=\frac{b\frac{h_b}{3}}{2}=\frac{P}{3}$. Значи,

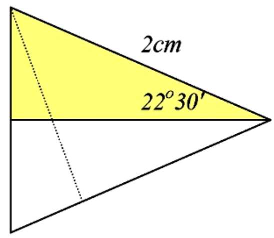
$$P_{\triangle ABH}=P-\frac{P}{2}-\frac{P}{3}=\frac{P}{6}.$$

Според тоа,

$$\overline{CH}:\overline{CC'}=6:1,\ \text{т.е.}\ \overline{CH}:\overline{HC'}=5:1.$$

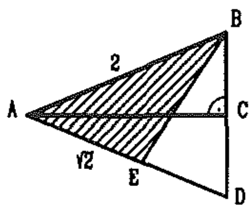
69. Определи ја плоштината на правоаголен триаголник со агол $\alpha=22^\circ30'$ и хипотенуза $c=2\,cm$.

Решение. Дадениот триаголник симетрично да го пресликаме во однос на катетата која го формира аголот $\alpha=22^\circ30'$ (цртеж десно). Тогаш почетниот триаголник и неговата слика формираат рамнокрак триаголник со краци $c=2\,cm$ и агол меѓу нив од 45°. Понатаму, висината која му соодветствува на кракот е еднаква на катетата на рамнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза $c=2\,cm$, па затоа нејзината должина е $h=\frac{c\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,cm$. Значи, плоштината на дадениот триаголник е еднаква на $\frac{1}{2}\cdot\frac{ch}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,cm^2$.



70. Определи ги катетите на правоаголоен триаголник кај кој еден од внатрешните агли е еднаков на $22^\circ30'$, а должината на хипотенузата е еднаква на $2\,cm$.

Решение. Нека триаголникот е ABC, $\measuredangle C=90^\circ$ и $\measuredangle B=22^\circ30'$ (цртеж десно). Ако D е симетричната точка на B во однос на C и E е подножјето на нормалата повлечена од B на AD, тогаш $\measuredangle BAE=2\cdot 22^\circ30'=45^\circ$, па затоа $\overline{AE}=\overline{BE}=\sqrt{2}\,cm$. Според тоа, $\overline{DE}=2-\sqrt{2}\,cm$, па затоа



$$\overline{BD}^2=\overline{BE}^2+\overline{DE}^2=(\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2=8-4\sqrt{2}.$$

Според тоа, $\overline{BD}=2\sqrt{2-\sqrt{2}}$, па затоа $\overline{BC}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$, што значи $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=2+\sqrt{2}$, т.е. $\overline{AC}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

71. Должините на катетите AC и BC на правоаголен $\triangle ABC$ се $20\,cm$ и $15\,cm$, соодветно. Нека CD е висината на $\triangle ABC$. Определи ја плоштината на $\triangle BCD$.

Решение. Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25\,cm.$$

Понатаму, за плоштината на триаголникот добиваме

$$P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2},$$

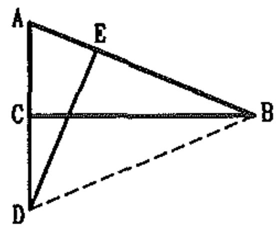
па затоа $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{BC}$, од каде добиваме $\overline{CD}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}}=12\,cm$. Сега повторно од Питагоровата теорема следува

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9\,cm.$$

Конечно, плоштината на $\triangle BCD$ е $P'=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{2}=\frac{9\cdot 12}{2}=54\,cm^2$

72. Во правоаголен триаголник едниот остар агол е трипати поголем од другиот, а должината на хипотенузата е $c=8\,cm$. Определи ја плоштината на овој триаголник.

Решение. Нека ABC е дадниот правоаголен триаголник. Јасно, острите агли на дадениот правоаголен триаголник се $22^\circ 30'$ и $67^\circ 30'$. Ако $\triangle ABC$ го дополниме со нему складниот $\triangle BCD$, добиваме рамнокрак $\triangle ABD$ во кој $\overline{AB}=\overline{BD}=8\,cm$ и



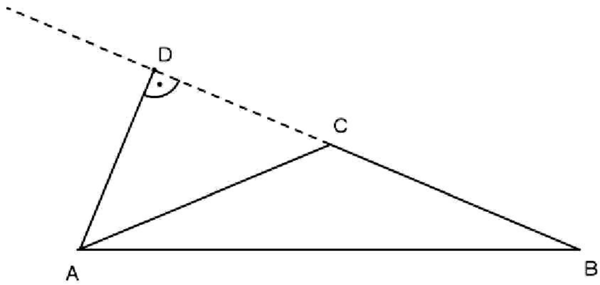
$\measuredangle ABD=2\measuredangle ABC=2\cdot 22^\circ 30'=45^\circ$. Плоштината на $\triangle ABD$ е $P_{ABD}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{DE}}{2}=4\overline{DE}$ и како $P_{ABD}=2P_{ABC}$, добиваме $P_{ABC}=2\overline{DE}$.

Но, $\triangle BDE$ е рамнокрак правоаголен, па затоа $\overline{BE}^2+\overline{DE}^2=\overline{BD}^2$, од каде добиваме $\sqrt{2}\cdot\overline{DE}=\overline{BD}$, т.е. $\overline{DE}=\frac{\overline{BD}}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}\,cm$. Затоа

$$P_{ABC}=2\overline{DE}=2\cdot 4\sqrt{2}\,cm^2=8\sqrt{2}\,cm^2.$$

73. Должината на кракот на рамнокрак триаголник е еднаква на $8\,cm$, а аголот меѓу краците е еднаков на 135°. Определи ја плоштината на овој триаголник.

Решение. Нека AB е основата, а AD е висината на триаголникот повлечена од темето A на страната BC. Имаме дека $P=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}{2}$.



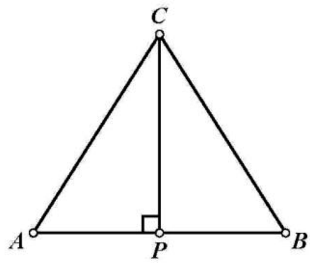
Сега, од $\measuredangle ACB=135^\circ$, следува $\measuredangle ACD=45^\circ$, па затоа $\measuredangle CAD=45^\circ$. Значи, $\triangle ADC$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AD}=\overline{DC}$, па затоа

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=2\overline{AD}^2, \text{ т.е. } 2\overline{AD}^2=8^2.$$

Според тоа, $\overline{AD}=4\sqrt{2}\ cm$. Според тоа, $P=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}{2}=\frac{8\cdot4\sqrt{2}}{2}=16\sqrt{2}\ cm^2$.

74. Во триаголникот ABC познати се должините на страните $\overline{AB}=48\,cm$ и $\overline{AC}=30\,cm$, како и должината на тежишната линија $\overline{CP}=18cm$. Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Да го разгледаме триаголникот APC. Неговите страни имаат должини $\overline{AP}=24\,cm$, $\overline{PC}=18\,cm$ и $\overline{CA}=30\,cm$. Имаме



$$\begin{aligned}\overline{CA}^2&=30^2=900=324+576\\&=18^2+24^2\\&=\overline{PC}^2+\overline{AP}^2,\end{aligned}$$

па од обратната Питагорова теорема следува триаголникот APC е правоаголен со прав агол при темето P, види цртеж. Триаголниците APC и BPC се правоаголни, имаат заедничка катета CP и според условот на задачата важи $\overline{AP}=\overline{BP}$. Сега од признакот за складност САС следува $\triangle APC\cong\triangle BPC$. Од складноста следува $\overline{CA}=\overline{CB}=30\,cm$. Периметарот на триаголникот е $O=48+2\cdot\leq30=108\,cm$, а како $CP\perp AB$ за плоштината добиваме

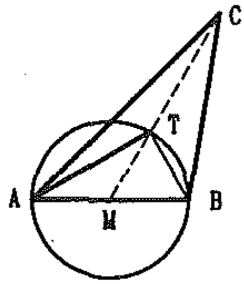
$$P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CP}}{2}=\frac{48\cdot18}{2}=432\,cm^2.$$

75. Во правоаголен триаголник со должини на катети $21cm$ и $28cm$ впиши квадрат чии две страни лежат на катетите, а темето кое не припаѓа на тие две страни припаѓа на хипотенузата на триаголникот. Определи ги должините на отсечките на кои хипотенузата е поделена со темето на квадратот.

Решение. Нека во правоаголниот триаголник ABC аголот во темето C е прав, $\overline{CA}=21cm$ и $\overline{CB}=28cm$. Нека во него е впишан квадрат $CDEF$, $D\in CB, E\in BA, F\in CA$. Ако должината на страната на квадратот е x, тогаш плоштината на триаголникот ABC е еднаква на збирот на плоштините на квадратот и два триаголника со катети x и $21-x$, односно x и $28-x$. Затоа $x^2+\frac{x(21-x)}{2}+\frac{x(28-x)}{2}=\frac{21\cdot 28}{2}$, од каде добиваме $x=12cm$. Должините на делбените отсечки на хипотенузата се $\sqrt{(21-12)^2+12^2}=15cm$ и $\sqrt{(28-12)^2+12^2}=20cm$.

76. Тежиштето T на триаголникот ABC припаѓа на кружницата конструирана над страната $AB, \overline{AB}=8cm$ како дијаметар и важи $\measuredangle TAB=30^\circ$. Определи ја плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Триаголникот ABT е правоаголен, па затоа $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{MT}=4cm$. Но, T е тежиште, па затоа $\overline{MC}=3\overline{MT}=12cm$. Понатаму, $\measuredangle TAB=30^\circ$, па затоа $\measuredangle TMB=60^\circ$. Нека C' е подножјето на висината повлечена од темето C. Тогаш триаголникот CMC' е половина од рамностран триаголник, па затоа

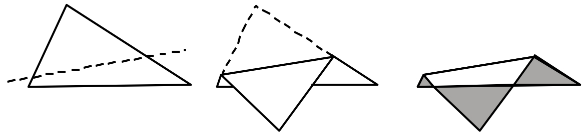


$$\overline{CC'}=\frac{\overline{CM}\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\,cm.$$

Конечно, плоштината на триаголникот ABC е

$$P_{\triangle ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CC'}}{2}=\frac{8\cdot 6\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}\,cm^2.$$

77. Триаголник од хартија е превиткан по испрекината линија, како што е прикажано на цртежот.

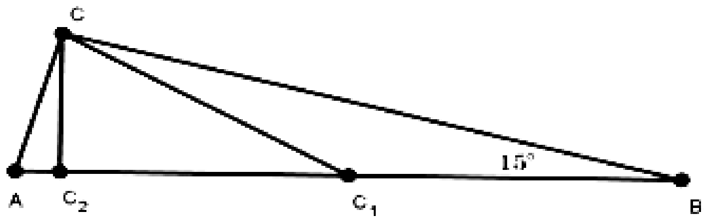


Плоштината на добиената фигура е еднаква на 80% од плоштината на триаголникот, а плоштината на затемнетиот дел е еднаква на 120 cm^2. Определи ја плоштината на триаголникот.

Решение. Плоштината на добиената фигура се состои од плоштината на сивиот дел и плоштината на белиот четириаголник, а додека плоштината на триаголникот се состои од плоштината на затемнетиот дел и двапати плоштината на белиот четириаголник. Според тоа, плоштината на белиот четириаголник е еднаква на $100-80=20\%$ од плоштината на триаголникот. Значи, плоштината на затемнетиот дел е еднаква на $80-20=60\%$ од плоштината на триаголникот. Конечно, ако со x ја означиме плоштината на триаголникот, добиваме $\frac{60}{100}x=120$, т.е. $x=200\,cm^2$.

78. Нека е даден правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и аголот во темето B е 15°. Ако $\overline{AB}=20cm$ да се пресмета плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека CC_1 е тежишна линија во $\triangle ABC$, а CC_2 е висина. Тогаш $\triangle CC_1B$ и $\triangle ACC_1$ се рамнокраки триаголници, со агли при основата од 15° и 75°, соодветно. Од $\measuredangle ACC_2=15^\circ$ и $\measuredangle ACC_1=75^\circ$ следува $\measuredangle C_2CC_1=60^\circ$ т.е. $\measuredangle CC_1C_2=30^\circ$.



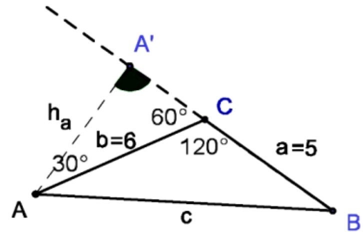
Триаголникот CC_1C_2 е правоаголен и CC_2 е катета спроти аголот од 30°, па е половина од хипотенузата т.е. $\overline{CC_2}=\frac{\overline{CC_1}}{2}=5cm$. Следува

$$P_{\triangle AC_1C}=\frac{\overline{AC_1}\cdot\overline{CC_2}}{2}=\frac{5\cdot 10}{2}=25cm^2.$$

Конечно $P_{\triangle ABC}=2P_{\triangle AC_1C}=50cm^2$.

79. Во еден триаголник две страни имаат должини $5\,cm$ и $6\,cm$ и истите зафаќат агол од 120°. Определи ги периметарот и плоштината на овој триаголник.

Решение. Нека ABC е дадениот триаголник, $\measuredangle ACB=120^\circ$, $\overline{AC}=6\,cm$, $\overline{BC}=5\,cm$ и AA' е висината повлечена од темето A. Правоаголниот триаголник ACA' е половина од рамностран триаголник, па затоа



$$\overline{CA'}=\tfrac{1}{2}\overline{CA}=3\,cm \text{ и } \overline{AA'}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{CA}=3\sqrt{3}\,cm.$$

За плоштината на $\triangle ABC$ добиваме

$$P=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AA'}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}\,cm^2.$$

Понатаму, од правоаголниот триаголник ABA' следува

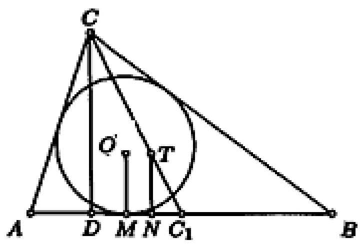
$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AA'}^2+\overline{A'B}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+8^2}=\sqrt{91}\,cm,$$

па периметарот на триаголникот ABC е

$$L=5+6+\sqrt{91}=11+\sqrt{91}\,cm.$$

80. Во триаголникот ABC важи $\overline{AC}+\overline{BC}=2\overline{AB}$. Докажи дека правата која минува низ тежиштето и центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC е паралелна со AB.

Решение. Нека O и T се центарот на впишаната кружница и тежиштето на триаголникот ABC, а точките D,M,N се подножјата на нормалите повлечени од точките C,O,T, соодветно на страната AB. За плоштината на триаголникот имаме



$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2}=P=\frac{\overline{OM}\cdot(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})}{2}=\frac{3\overline{OM}\cdot\overline{AB}}{2},$$

па затоа $\overline{CD}=3\overline{OM}$. Сега триаголниците CDC_1 и TNC_1 се слични и како $\overline{CC_1}=3\overline{TC_1}$, заклучуваме дека $\overline{CD}=3\overline{TN}$. Значи, $3\overline{OM}=3\overline{TN}$, т.е. $\overline{OM}=\overline{TN}$. Конечно, точките O и T се еднакво оддалечени од правата AB, па затоа $OT\parallel AB$.

81. Во $\triangle ABC$ најкратката страна е долга $5\,cm$. За должините на висините на овој триаголник важи $h_b=h_a+h_c$. Определи ги сите можни цело-

бројни должини на сите страни на триаголникот мерени во сантиметри.

Решение. Бидејќи на најдолгата висина и соодветствува најкратката страна, имаме $b=5cm$. Од $h_b=\frac{2P}{b}, h_a=\frac{2P}{a}$, $h_c=\frac{2P}{c}$, со замена во $h_b=h_a+h_c$ последователно добиваме $\frac{2P}{b}=\frac{2P}{a}+\frac{2P}{c}$, $\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$, $\frac{1}{5}=\frac{a+c}{ac}$, $ac=5a+5c$, $ac-5c=5a$, т.е, $c=\frac{5a}{a-5}$. Понатаму имаме

$$c=\frac{5a}{a-5}=\frac{5a-25+25}{a-5}=\frac{5(a-5)+25}{a-5}=5+\frac{25}{a-5}.$$

Бидејќи c е природен број, потребно е $a-5$ да е делител на 25, т.е. $a-5\in\{\pm1,\pm5,\pm25\}$.

За $a-5=1$, добиваме $a=6cm$ и $c=30cm$, што не е можно заради неравенството на триагоник.

За $a-5=5$, добиваме $a=10cm$ и $c=10cm$.

За $a-5=25$, добиваме $a=30cm$ и $c=6cm$, што не е можно заради неравенството на триаголник.

За $a-5=-1$ добиваме $a=4cm$ и $c=-20cm$, што не е можно.

За $a-5=-5$ добиваме $a=0cm$, што не е можно.

За $a-5=-25$ добиваме $a=-20cm$, што не е можно.

Според тоа, постои само еден триаголник кој ги задоволува условите на задачатаи должините на неговите страни се $a=6cm$, $b=5cm$ и $c=10cm$.

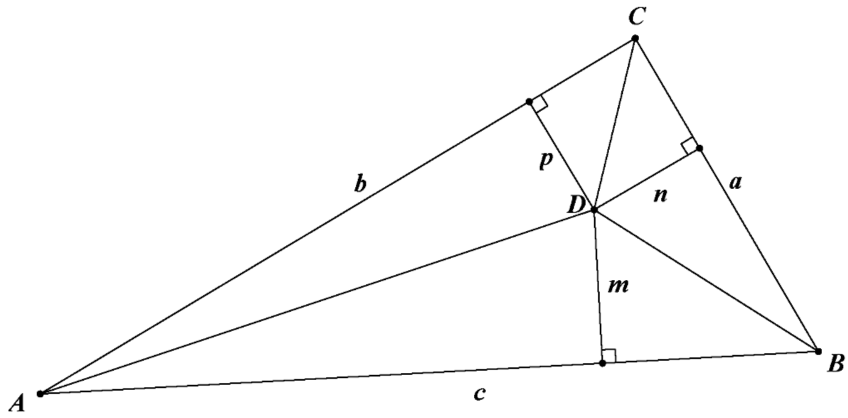
82. Даден е $\triangle ABC$ и точка D во неговата внатрешност. Ако растојанијата од точката D до страните AB, BC и CA се m,n и p, соодветно, а должините на висините повлечени кон страните AB, BC и CA се h_c, h_a и h_b, определи ја вредноста на изразот $\frac{m}{h_c}+\frac{n}{h_a}+\frac{p}{h_b}$.

Решение. Должината на висината на $\triangle ABD$ повлечена кон страната AB е еднаква на m, должината на висината на $\triangle BCD$ повлечена кон страната BC е еднаква на n и должината на висината на $\triangle ACD$ повлечена кон страната AC е p (види цртеж). Затоа од

$$P_{\triangle ABD}+P_{\triangle BCD}+P_{\triangle ACD}=P_{\triangle ABC}$$

следува

$$\frac{cm}{2}+\frac{an}{2}+\frac{bp}{2}=\frac{ch_c}{2}, \text{ т.е. } cm+an+bp=ch_c.$$



Ако последното равенство го поделиме со ch_c и земеме предвид дека $ah_a = bh_b = ch_c$ последователно добиваме

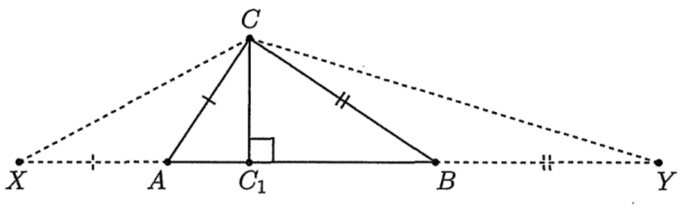
$$\frac{cm}{ch_c} + \frac{an}{ch_c} + \frac{bp}{ch_c} = 1$$

$$\frac{cm}{ch_c} + \frac{an}{ah_a} + \frac{bp}{bh_b} = 1$$

$$\frac{m}{h_c} + \frac{n}{h_a} + \frac{p}{h_b} = 1.$$

83. Нека CC_1 е висина на $\triangle ABC$, каде C_1 е точка од правата AB. Познато е дека збирот на квадратите на периметрите на $\triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$ е еднаков на квадратот на периметарот на $\triangle ABC$. Докажи, дека $\measuredangle ACB = 90^\circ$.

Решение. Бидејќи $O_{\triangle ACC_1} < O_{\triangle ABC}$ и $O_{\triangle BCC_1} < O_{\triangle ABC}$, заклучуваме дека точката C_1 лежи на отсечката AB. Нека X и Y се точки на правата AB такви што A е меѓу X и B, B е меѓу A и Y, $\overline{AX} = \overline{AC}$ и $\overline{BY} = \overline{BC}$. Тогаш условот на задачата го прима видот



$$(\overline{XC_1} + \overline{CC_1})^2 + (\overline{YC_1} + \overline{CC_1})^2 = \overline{XY}^2.$$

Ако двапати ја примениме Питагоровата теорема и формулата за плоштина добиваме

$$\overline{XC}^2+4P_{\triangle XCC_1}+\overline{YC}^2+4P_{\triangle YCC_1}=\overline{YX}^2 .$$

Од косинусната теорема за $\triangle XYC$ и равенството

$$P_{\triangle XCC_1}+P_{\triangle YCC_1}=P_{\triangle XCY}=\tfrac{1}{2}\overline{XC}\cdot\overline{YC}\sin\measuredangle XCY$$

следува дека $\cos\measuredangle XCY+\sin\measuredangle XCY=0$. Тогаш

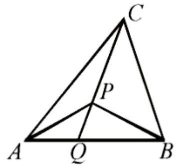
$$135^\circ=\measuredangle XCY=\measuredangle XCA+\measuredangle C+\measuredangle YCB=\tfrac{\measuredangle A}{2}+\measuredangle B+\tfrac{\measuredangle B}{2}=90^\circ+\tfrac{\measuredangle C}{2},$$

па затоа $\measuredangle C=90^\circ$

84. На страните *AC* и *BC* на триаголникот *ABC* земени се точки *M* и *N*, такви што $\overline{CM}=3\overline{AM}$ и $\overline{CN}=4\overline{BN}$. Пресечната точка на *AN* и *BM* е *O*. Определи ја плоштината на триаголникот *ABC*, ако плоштината на триаголникот *ABO* е $5cm^2$.

Решение. Прво ќе докажеме, дека $\frac{P_{\triangle APC}}{P_{\triangle BPC}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}$ (цртеж десно). Бидејќи

$$\frac{P_{\triangle AQC}}{P_{\triangle BQC}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} \text{ и } \frac{P_{\triangle AQP}}{P_{\triangle BQP}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}},$$



добиваме

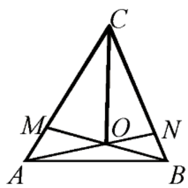
$$P_{\triangle AQC}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}P_{\triangle BQC} \text{ и } P_{\triangle AQP}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}P_{\triangle BQP}.$$

Имаме

$$P_{\triangle APC}=P_{\triangle AQC}-P_{\triangle AQP}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}P_{\triangle BQC}-\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}P_{\triangle BQP}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}P_{\triangle BPC}.$$

Значи, $\frac{P_{\triangle APC}}{P_{\triangle BPC}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}$.

Ако го искористиме ова својство за $\triangle ABC$ (цртеж десно), добиваме:



$$\frac{P_{\triangle COB}}{P_{\triangle AOB}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{AM}}=\frac{3}{1},$$

од каде наоѓаме $P_{\triangle COB}=3P_{\triangle AOB}=15cm^2$. Аналогно

$$\frac{P_{\triangle AOC}}{P_{\triangle AOB}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{BN}}=\frac{4}{1},\ P_{\triangle AOC}=4P_{\triangle AOB}=20cm^2.$$

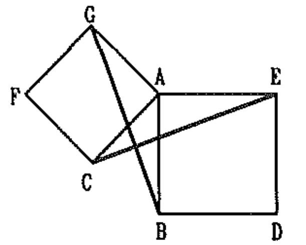
Значи,

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle AOC}+P_{\triangle BOC}+P_{\triangle AOB}=40cm^2.$$

V.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

85. Во рамнината се дадени два квадрати $AEDB$ и $ACFG$ кои се еднакво ориентирани и кои не се преклопуваат. Докажи дека $\overline{BG}=\overline{CE}$.

Решение. Бидејќи $\overline{AE}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$ и $\measuredangle CAE=\measuredangle BAG=\measuredangle CAB+90^\circ$, од признакот САС следува дека $\triangle CEA\cong\triangle GBA$. Конечно, од докажаната складност следува дека $\overline{BG}=\overline{CE}$



86. Во квадрат $ABCD$ точките M и N се средини на страните CD и AD, соодветно. Отсечките BM и CN се сечат во точката E. Докажи дека

а) $BM\perp CN$, б) $\overline{AE}=\overline{AB}$.

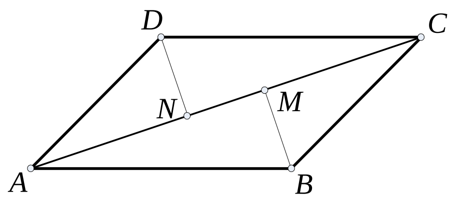
Решение. а) Триаголниците BCM и CDN се складни, па затоа $\measuredangle MBC=\measuredangle NCD$ (направи цртеж). Бидејќи $\measuredangle NCB+\measuredangle NCD=90^\circ$, добиваме $\measuredangle MBC+\measuredangle NCB=90^\circ$, од каде следува $\measuredangle BEC=90^\circ$

б) *Прв начин*. Ако P е средина на страната BC, тогаш $AP\parallel NC$, па затоа $AP\perp BE$. Правата AP ја полови отсечката BE, бидејќи ја содржи средината на страната BC и е паралелна со EC, па затоа ABE е рамнокрак триаголник, т.е. $\overline{AE}=\overline{AB}$.

Втор начин. Четириаголникот $ABEN$ е тетивен, па затоа $\measuredangle AEB=\measuredangle ANB$. Бидејќи $\measuredangle ANB=\measuredangle CMB=\measuredangle MBA$, заклучуваме дека триаголникот ABE е рамнокрак, т.е. $\overline{AE}=\overline{AB}$.

87. Докажи дека спротивните темиња на паралелограмот се еднакво оддалечени од дијагоналата на која не ѝ припаѓаат?

Решение. Нека $ABCD$ е паралелограм со дијагонали AC и BD. Нека M и N се подножја на нормалите повлечени од B и D кон AC (види цртеж). Правите AB и CD се паралелни, а AC е нивна трансферзала, па затоа

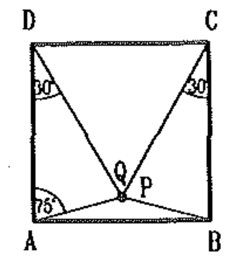


$$\measuredangle DAN=\measuredangle DAC=\measuredangle ACB=\measuredangle MCB.$$

Сега од $\measuredangle CMB = \measuredangle DNA = 90^\circ$ и $\overline{DA} = \overline{BC}$ имаме $\triangle DNA \cong \triangle BMC$. Од складноста на овие триаголници следува $\overline{DN} = \overline{BM}$ што ѝ требаше да се докаже.

88. Во внатрешноста на квадрат $ABCD$ е земена точка P таква што $\measuredangle ABP = \measuredangle BAP = 15^\circ$. Докажи дека триаголникот CDP е рамностран.

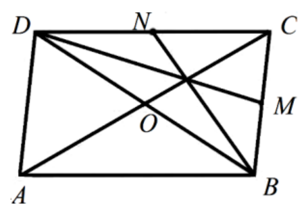
Решение. Нека Q е внатрешна точка на квадратот $ABCD$ таква што триаголникот CDQ е рамностран (цртеж десно). Тогаш $\measuredangle QDA = 30^\circ$. Од $\overline{CD} = \overline{CQ} = \overline{DQ} = \overline{DA}$ следува дека триаголникот AQD е рамнокрак. Затоа $\measuredangle DQA = \measuredangle DAQ = 75^\circ$, доносно важи $\measuredangle QAB = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$ и слично



$\measuredangle QBA = 15^\circ$. Но, според условот на задачата $\measuredangle ABP = \measuredangle BAP = 15^\circ$, па затоа $P \equiv Q$, т.е. триаголникот CDP е рамностран.

89. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека M и N се средини на страните BC и CD соодветно. Докажи дека правите DM и BN се сечат во точка од дијагоналата AC.

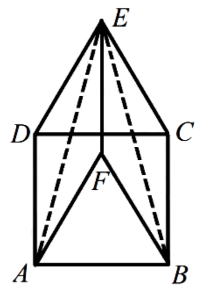
Решение. Ја повлекуваме дијагоналата BD. Нека дијагоналите се сечат во точка O (цртеж десно). Дијагоналите во паралелограм се преполовуваат. Тогаш M, N и O се средини на BC, CD и BD соодветно. Следува DM, BN и CO се тежишни линии во



$\triangle BCD$, па затоа се сечат во една точка. Според тоа, правите DM и BN се сечат во точка од дијагоналата AC.

90. Даден е квадрат $ABCD$ и точка E надвор од него, таква што триаголникот DCE е рамностран. Докажи дека радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABE е еднаков на должината на страната на квадратот.

Решение. Четириаголникот $ABCD$ е квадрат па затоа важи $\overline{AB} = \overline{AD}$. Внатре во квадратот земаме точка F таква што $\overline{AB} = \overline{AF} = \overline{BF}$. Тогаш триаголникот ABF е рамностран, па затоа $\measuredangle BAF = 60^\circ$.



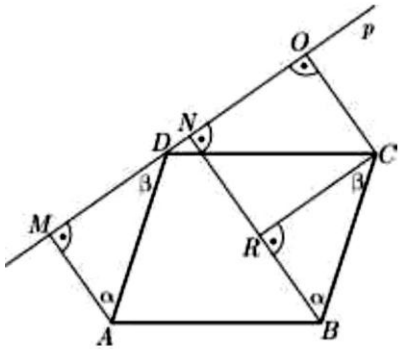
Сега, $\measuredangle BAF=\measuredangle CDE=60^{\circ}$ и $AB\parallel CD$, па затоа $AF\parallel DE$. Понатаму, бидејќи $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{AF}$ заклучуваме дека четириаголникот $AFED$ е паралелограм, што значи дека $\overline{AD}=\overline{FE}$. Според тоа, $\overline{AB}=\overline{BF}=\overline{AF}=\overline{FE}$, од што следува дека точката F е центар на кружницата опишана околу триаголникот ABE.

91. Нека за паралелограмот $ABCD$ и правата p имаат единствена заедничка точка D. Ако M,N,O се подножјата на нормалите повлечени од точките A,B,C на правата p, соодветно, тогаш $\overline{AM}+\overline{OC}=\overline{BN}$. Докажи!

Решение. Нека R е подножјето на нормалата на BN повлечена од C. Тогаш

$\measuredangle MAD=\measuredangle RBC$ и $\measuredangle MDA=\measuredangle RCB$

(агли со паралелни краци) и $\overline{AD}=\overline{BC}$, па следува дека $\triangle ADM\cong\triangle BCR$. Значи, $\overline{AM}=\overline{BR}$. Јасно, $RCON$ е правоаголник, па $\overline{NR}=\overline{OC}$. Сега имаме

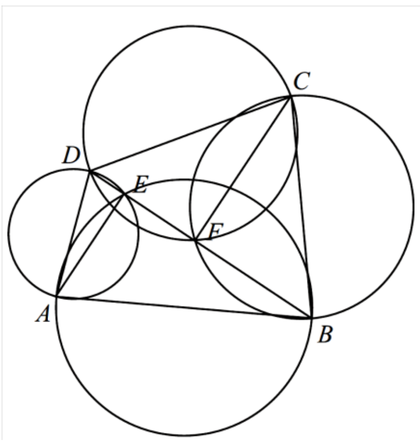


$$\overline{AM}+\overline{OC}=\overline{BR}+\overline{NR}=\overline{BN},$$

што и требаше да се докаже.

92. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Докажи, дека било која точка од четириаголникот $ABCD$ и неговата внатрешност лежи барем во еден од четирите кругови чии дијаметри се страните на тој четириагоник.

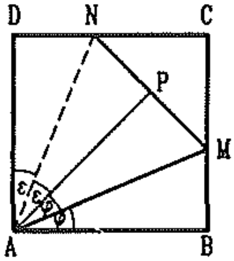
Решение. Нека точките E и F се подножја на висините спуштени од темињата A и C кон страната BD, соодветно. На овој начин со помош на дијагоналата BD и точките E и F, четириаголниот $ABCD$ е поделен на четири правоаголни триаголници. Според Талесовата теорема точката E лежи на кружницата со



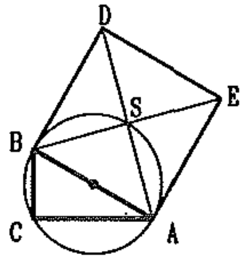
дијаметар AB. Следува секоја точка од триаголникот ABE лежи во кругот со дијаметар AB. Аналогно, останатите три правоаголници триаголници лежат во круговите со дијаметри BC, CD и DA.
Следува секоја точка од четириаголникот $ABCD$, лежи во барем еден четирите кругови, чии дијаметри се страните на тој четириаголник.

93. Даден е квадрат $ABCD$ и точка M на страната BC. Ако точката N од страната CD е таква што $\measuredangle AMB = \measuredangle AMN$, определи го $\measuredangle MAN$.
Решение. Нека $AP \perp MN$ (цртеж десно). Тогаш $\overline{AM} = \overline{AM}, \measuredangle ABM = \measuredangle APM$ и $\measuredangle AMB = \measuredangle AMN$, па затоа $\triangle ABM \cong \triangle APM$, што значи $\measuredangle BAM = \measuredangle PAM = \varphi$. Но, $\overline{AN} = \overline{AN}$, $\overline{AP} = \overline{AB} = \overline{AD}$ и $\measuredangle ADN = \measuredangle APN$, па затоа $\triangle ADN \cong \triangle APN$, што значи $\measuredangle DAN = \measuredangle PAN = \varepsilon$. Конечно,

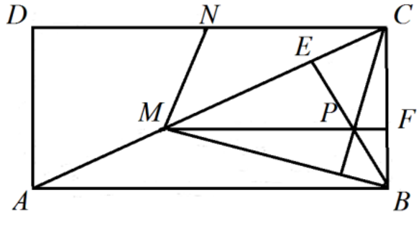
$$\measuredangle MAN = \varphi + \varepsilon = \tfrac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.$$



94. Над хипотенузата AB на правоаголниот $\triangle ABC$ во надворешноста на $\triangle ABC$ е конструиран квадрат $ABDE$. Докажи дека правата која го поврзува темето на правиот агол C со пресекот на дијагоналите на квадратот S е симетрала на правиот агол на $\triangle ABC$.
Решение. Триаголниците ABC и ABS се правоаголни со хипотенуза AB, па затоа околу нив може да се опише кружница чиј центар е средина на хипотенузата AB. Но, $\measuredangle ACS = \measuredangle ABS = 45^\circ$ како агли над тетивата AS и како $\measuredangle ACB = 90^\circ$, заклучуваме дека $\measuredangle BCS = 45^\circ$, т.е. CS е симетрала на $\measuredangle ACB$.



95. Во правоаголникот $ABCD$ точката E е подножје на нормалата повлечена од темето B кон дијагоналата AC. Ако точката M е средина на отсечката AE, а точката N е средина на страната CD, докажи дека $\measuredangle BMN = 90^\circ$.
Решение. Во $\triangle MBC$ од темето M ја повлекуваме висината MF (цртеж десно). Нека P е пресечната точка на висините MF и



BE во $\triangle MBC$, т.е. P е ортоцентарот на $\triangle MBC$. Според тоа, на правата CP лежи висината повлечена од темето C кон страната MB, т.е. $CP \perp MB$.

Бидејќи точката M е средина на страната AE, а $MP \| AB$ следува дека MP е средна линија во $\triangle ABE$. Според тоа,

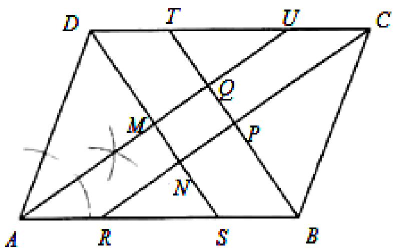
$$\overline{MP} = \tfrac{1}{2}\overline{AB} = \tfrac{1}{2}\overline{CD} = \overline{NC}$$

и како $MP \| CD$ заклучуваме дека четириаголникот $MPCN$ е паралелограм.

Конечно, од $CP \| MN$ и $CP \perp MB$ следува дека $MN \perp MB$, т.е. $\measuredangle BMN = 90^\circ$.

96. Даден е паралелограм $ABCD, \overline{AB} > \overline{BC}$ и се повлечени симетралите на четирите негови внатрешни агли. Докажи дека четириаголникот ограничен со овие симетрали е правоаголник.

Решение. При воведените ознаки на цртежот десно треба да докажеме дека четириаголникот $MNPQ$ е правоаголник. Остриот агол на паралелограмот да го означиме со α,а тапиот со β. Од $\alpha + \beta = 180^\circ$ следува $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$. Во $\triangle AMD$ важи

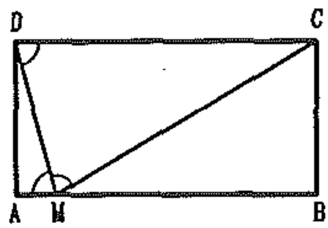


$$\measuredangle DAM + \measuredangle ADM + \measuredangle DMA = 180^\circ$$

и бидејќи $\measuredangle DAM + \measuredangle ADM = 90^\circ$, добиваме $\measuredangle DMA = 90^\circ$. Понатаму, $\measuredangle QMN = \measuredangle DMA$, како накрсни агли, па затоа $\measuredangle QMN = 90^\circ$. Аналогно се докажува дека и останатите агли на четириаголникот $MNPQ$ се прави, што значи дека тој е правоаголник.

97. Даден е правоаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. На страната AB земена е точка M таква што симетралата ба $\measuredangle AMC$ минува низ точката D. Определи го $\measuredangle AMD$.

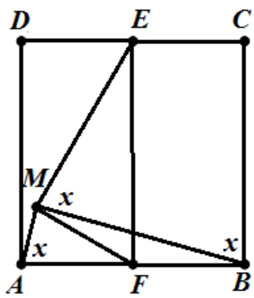
Решение. Имаме $\measuredangle AMD = \measuredangle CDM$, како наизменични агли, а $\measuredangle AMD = \measuredangle CMD$ бидејќи MD е симетрала на $\measuredangle AMC$. Затоа $\measuredangle CDM = \measuredangle CMD$, т.е. $\triangle CDM$ е рамнокрак



и $\overline{CM}=\overline{CD}=2\overline{BC}$. Според тоа, во правоаголниот триаголник BCM помалата катета е еднаква на половина од хипотенузата, па затоа овој триаголник е половина од рамностран триаголник. Затоа важи $\measuredangle BMC=30^{\circ}$, што значи $\measuredangle AMC=180^{\circ}-30^{\circ}=150^{\circ}$. Конечно, бараниот агол е $\measuredangle AMD=\frac{1}{2}\measuredangle AMC=75^{\circ}$.

98. Нека E е средина на страната CD на квадратот $ABCD$. Точка M во внатрешноста на квадратот е таква што $\measuredangle MAB=\measuredangle MBC=\measuredangle BME=x$. Определи го x?

Решение. Да го означиме $\measuredangle ABM$ со y. Бидејќи $\measuredangle ABC=x+y=90^{\circ}$, од триаголникот ABM добиваме дека $\measuredangle AMB=90^{\circ}$. Нека F е средината на страната AB. Тогаш од правоаголниот триаголник ABM добиваме $\overline{AF}=\overline{FB}=\overline{MF}$. Понатаму, $\measuredangle FMB=\measuredangle FBM=y$ од каде следува $\measuredangle EMF=x+y=90^{\circ}$. Триаголникот MFE е



правоаголен при што $EF=2MF$ од каде следува $\measuredangle MFE=60^{\circ}$ и

$$\measuredangle MBF=\frac{1}{2}\measuredangle MFA=\frac{1}{2}(90^{\circ}-\measuredangle MFE)=15^{\circ}.$$

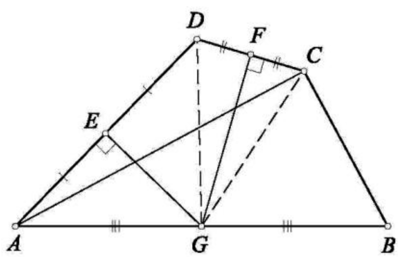
Конечно $x=75^{\circ}$.

99. Во конвексен четириаголник $ABCD$ точките E,F,G се средини на страните AD,DC,AB, соодветно. Притоа $GE\perp AD, GF\perp CD$. Определи го аголот $\measuredangle ACB$.

Решение. Од

$$\overline{AE}=\overline{ED}, \measuredangle GEA=\measuredangle DEG=90^{\circ}$$

и GE е заедничка страна на триаголниците $\triangle AGE$ и $\triangle DGE$, според признакот за складност САС следува $\triangle AGE\cong\triangle DGE$. Понатаму, од складноста следува $\overline{AG}=\overline{GD}$. Аналогно се докажува дека $\triangle GFD\cong\triangle GFC$, па е $\overline{GD}=\overline{GC}$.



Значи, $\overline{AG}=\overline{GD}=\overline{GC}$ и $\overline{AG}=\overline{GB}$, што значи дека $\overline{GC}=\overline{GB}$, т.е. $\triangle GBC$ е рамнокрак. Исто така, $\triangle AGC$ е рамнокрак.

Нека $\measuredangle CAG=\alpha$. Тогаш $\measuredangle GCA=\alpha$, па затоа

$$\measuredangle CGB=\measuredangle CAG+\measuredangle GCA=2\alpha .$$

Понатаму,

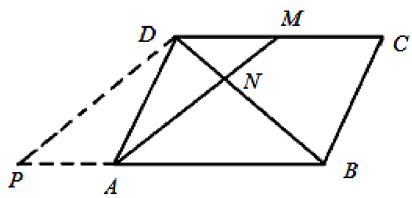
$$\measuredangle BCG=\measuredangle GBC=\frac{180^\circ-\measuredangle CGB}{2}=90^\circ-\alpha .$$

Конечно,

$$\measuredangle ACB=\measuredangle GCA+\measuredangle BCG=\alpha+90^\circ-\alpha=90^\circ .$$

100. Даден е паралелограм *ABCD*. Точката *M* е средина на CD и $BD\cap AM=\{N\}$. Пресметај $\overline{ND}:\overline{NB}$.

Решение. Од *D* повлекуваме полуправа паралелна со *AM*. Нека пресекот на таа полуправа со правата *AB* е точката *P*. Бидејќи четириаголникот *PAMD* е паралелограм, следува дека



$$\overline{PA}=\overline{DM}=\frac{\overline{AB}}{2}.$$

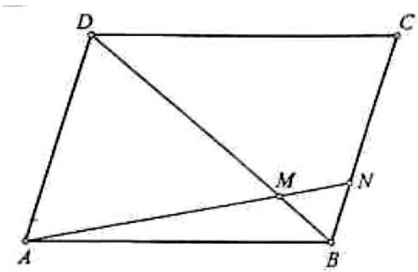
Од паралелноста на *PD* и *AM*, од Талесовата теорема, следува дека

$$\overline{ND}:\overline{NB}=\overline{PA}:\overline{AB}=\tfrac{1}{2}.$$

101. Даден е паралелограм $ABCD$. На дијагоналата BD земена е точка M таква што $\overline{BM}:\overline{MD}=2:7$. Правата AM ја сече страната BC во точката N. Во кој однос точката N ја дели страната BC?

Решение. Имаме $\measuredangle AMD=\measuredangle BMN$ (накрсни агли) и $\measuredangle DAM=\measuredangle MNB$ (агли со паралелни краци), па затоа $\triangle BMN\sim\triangle DMA$. Од докажана сличност и од условот на задачата следува

$$\overline{BN}:\overline{AD}=\overline{BM}:\overline{MD}=2:7 .$$



Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, па затоа $\overline{BC}=\overline{AD}$ и од последното равенство добиваме $\overline{BN}:\overline{BC}=2:7$. Според тоа,

$$\overline{NC}=\overline{BC}-\overline{BN}=\overline{BC}-\tfrac{2}{7}\overline{BC}=\tfrac{5}{7}\overline{BC}.$$

Конечно,

$$\overline{BN}:\overline{NC}=\tfrac{2}{7}\overline{BC}:\tfrac{5}{7}\overline{BC}=\tfrac{2}{7}:\tfrac{5}{7}=2:5,$$

што значи дека точката N ја дели страната BC во однос $2:5$.

102. Должината на едната страна на правоаголникот се намалува за 20%, а должината на другата страна се зголемува за 20%. За колку проценти ќе се промени плоштината на правоаголникот?

Решение. Ако a и b се должините на страните на правоаголниот, тогаш должините на новите страни се $0,8a$ и $1,2b$, па затоа плоштината на новиот правоаголник е $0,8a\cdot 1,2b=0,96ab$, што значи дека таа се намалува за 4%.

103. а) Докажи, дека $\triangle ABC$ е рамнокрак со основа AB ако и само ако за секоја точка P од страната AB збирот од растојанијата до страните AC и BC не зависи од точката P.

б) Конвексниот четириаголник $ABCD$ е таков, што за секоја внатрешна точка P збирот од растојанијата до четирите негови страни е константен. Докажи дека $ABCD$ е паралелограм.

Решение. а) Нека ABC е рамнокрак ($\overline{AC}=\overline{BC}$). Со x и y да ги означиме растојанијата од точката $P\in AB$ соодветно до страните AC и BC. Тогаш

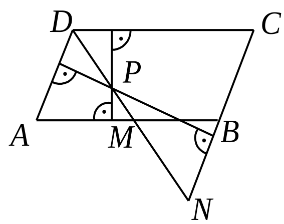
$$x+y=\frac{2P_{APC}}{\overline{AC}}+\frac{2P_{BPC}}{\overline{BC}}=\frac{2P_{ABC}}{\overline{AC}}=\text{const}\,.$$

Обратно, нека $P\neq Q$ се произволни точки од отсечката AB. Со x и y да ги означиме растојанијата од точката P соодветно до страните AC и BC, а со z и w растојанијата од точката Q соодветно до страните AC и BC. Тогаш важи $x+y=z+w$. Од друга страна

$$x\overline{AC}+y\overline{BC}=2P_{ABC}=z\overline{AC}+w\overline{BC}\,.$$

Од добиените равенства следува, дека $(y-w)(\overline{BC}-\overline{AC})=0$. Бидејќи AB и BC не се паралелни, важи $y\neq w$ и следствено $\overline{AC}=\overline{BC}$.

б) Можеме да претпоставиме, дека $\overline{AD}\leq\overline{AB}$ (случајот $\overline{AB}\leq\overline{AD}$ е аналоген). На страната AB избираме точка M таква што $\overline{AM}=\overline{AD}$. Нека N е пресечната точка на правата DM со правата BC и P е точка на отсечката DM, различна од нејзините крајни точки. Тогаш од а) следува, дека



збирот од растојанијата до страните AD и AM на $\triangle MDA$ не зависи од P, т.е. збирот од растојанијата до страните AD и AB на четириаголникот $ABCD$ не зависи од P. Но сега од условите на задачата следува дека збирот од растојанијата од P до страните BC и CD исто така не зависи от P. Од а) следува дека $\triangle DCN$ е рамнокрак ($\overline{CD}=\overline{CN}$). Ако $N\equiv B$, тогаш е јасно, дека $\measuredangle ADC=\measuredangle CBA$. Нека $N\neq B$. Тогаш

$\measuredangle CBA=\measuredangle BND+\measuredangle BMN=\measuredangle CDN+\measuredangle DMA=\measuredangle CDN+\measuredangle MDA=\measuredangle ADC$.

Аналогно се докажува, дека $\measuredangle DAB=\measuredangle BCD$. Од $\measuredangle ADC=\measuredangle CBA$ и $\measuredangle DAB=\measuredangle BCD$, па затоа $ABCD$ е паралелограм.

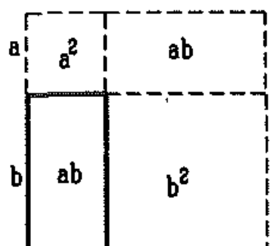
104. Должините на страните на еден правоаголник во сантиметри се изразени со природни броеви. Определи ги должините на страните на овој правоаголник ако мерниот број на неговата плоштина е еднаков на мерниот број на неговиот периметар.

Решение. Нека a и b се должините на страните на правоаголникот. Тогаш $ab=2(a+b)$, од каде добиваме $ab-2a-2b+4=4$, па затоа $(a-2)(b-2)=4$. Нека $b\leq a$. Тогаш можни се следниве случаи:

1) $a-2=2, b-2=2$, па затоа $a=b=4$ и

2) $a-2=4, b-2=1$, па затоа $a=6, b=3$.

105. Даден е правоаголник со должини на страни a и b. Ако a се продолжи за b и b се продолжи за a, се добива четириаголник со плоштина $100\,cm^2$. Определи го периметарот на добиениот четириаголник. Ако должините на страните почетниот правоаголник се целобројни, определи го правоаголникот со најмала плоштина.

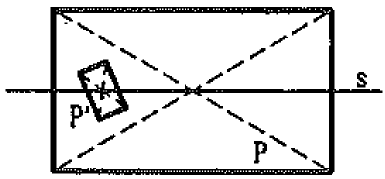


Решение. Според условот на задачата четириаголникот кој се добива е квадрат со должина на страна $a+b$. Затоа $(a+b)^2=100\,cm^2$, односно $a+b=10\,cm$. Според тоа, периметарот на добиениот четириаголник е еднаков на $4\cdot 10=40\,cm$, а периметарот на почетниот правоаголник е еднаков на $2(a+b)=20\,cm$.

Ако мерните броеви на должините на страните на почетниот правоаголник се цели броеви, тогаш најмала плоштна има правоагоникот со должини на страни $1\,cm$ и $9\,cm$ и таа плоштина е еднаква на $9\,cm^2$.

106. Во внатрешноста на правоаголник P даден е помал правоаголник P'. Конструирај права s која множеството точки $P \setminus P'$ ќе го подели на два дела со еднакви плоштини.

Решение. Бидејќи правоаголникот е централно симетрична фигура со центар на симетрија во пресекот на дијагоналите, секоја права која минува низ центарот на симетрија го дели правоаголникот на два дела со еднакви плоштини. Правата која минува низ центрите на симетрија на правоаголниците P и P' ги дели двата правоаголници на делови со еднакви плоштини, што значи дека и фигурата $P \setminus P'$ ја дели на два дела со еднакви плоштини (цртеж десно).

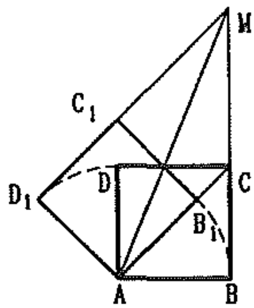


107. Квадратот $ABCD$ со должина на страна a ротира за агол од 45° околу темето A така што темето B_1 на добиениот квадрат $AB_1C_1D_1$ се наоѓа во внатрешноста на дадениот квадрат. Нека правите BC и C_1D_1 се сечат во точката M. Определи ја плоштината на квадратот со страна AM.

Решение. Дадената ротација е прикажана на цртежот десно. Ќе докажеме дека четириаголникот $ACMC_1$ е ромб. Правата BC, т.е. правата MC е нормална на AB. Бидејќи

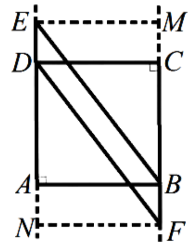
$$\measuredangle BAC + \measuredangle CAC_1 = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

заклучуваме дека и $C_1A \perp AB$. Според тоа, $C_1A \parallel CM$. Слично, $AC \parallel C_1M$ (како паралелни страни на квадратот $AB_1C_1D_1$). Но, $\overline{AC} = \overline{AC_1}$ (соодветни отсечки при ротација), па затоа четириаголникот $ACMC_1$ е ромб. Според тоа, $\overline{MC} = \overline{AC}$, па затоа



$$\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + (a + a\sqrt{2})^2 = 2a^2(2+\sqrt{2}).$$

108. Даден е квадрат $ABCD$ со страна $\overline{AB} = a$. На продолжението на страната AD преку темето D земена е точка E, а на продолжението на страната CB преку темето B земена е точка F така што $\overline{DE} = \overline{BF} = b$. Пресметај ги плоштината и периметарот на четириаголникот $DFBE$.



Решение. Од условот на задачата следува дека страните BF и DE на четириаголникот $DFBE$ се еднакви. Но, тие лежат на паралелните прави AD и BC, што значи дека се паралелни. Според тоа, четириаголникот $DFBE$ има спротивни страни кои се еднакви и паралелни, па затоа тој е паралелограм. Јасно, висината на паралелограмот е еднаква на должината a на страната на квадратот, а основата има должина b. Според тоа, $P_{DFBE} = ab$.

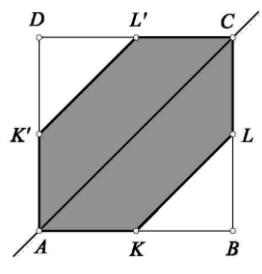
Низ точката E да повлечеме нормала на правата BC и пресечната точка да ја означиме со M. Тогаш. Од Питагоровата теорема применета на триаголникот BME следува $\overline{BE} = \sqrt{a^2 + (a+b)^2}$. Според тоа, $L_{DFBE} = 2(b + \sqrt{a^2 + (a+b)^2}$.

109. Разликата на периметрите на два квадрати е $24\,cm$, а должините на нивните страни се однесуваат како $3:2$. Определи ги плоштините на двата квадрата.

Решение. Од $a_1 : a_2 = 3:2$ следува дека постои k таков што $a_1 = 3k$ и $a_2 = 2k$. Според тоа, $24 = 4a_1 - 4a_2 = 12k - 8k = 4k$, па затоа $k = 4$. Значи, $a_1 = 3k = 18\,cm$ и $a_2 = 2k = 12\,cm$. Конечно, плоштините на квадратите се $P_1 = a_1^2 = 324\,cm^2$ и $P_2 = a_2^2 = 144\,cm^2$.

110. Нека отсечките AB и BC се заемно нормални и $\overline{AB} = \overline{BC} = a$. Нека K и L се средините на отсечките AB и BC, а K' и L' се нивните осносиметрични слики во однос на правата AC како оска на симетрија, соодветно. Определи ја плоштината на шестаголникот $AKLCL'K'$.

Решение. Нека сликата на $\triangle ABC$ при осната симетрија зададена со правата AC е триаголникот $\triangle ACD$. Од $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ и $AB \perp BC$ следува дека $\triangle ABC$ е рамнокрак правоаголен, па затоа и триаголникот $\triangle ACD$ е рамнокрак правоаголен. Според тоа, четириаголникот $ABCD$ е квадрат.



Бидејќи K и L се средини на отсечките AB и BC, добиваме дека нивните осносиметрични слики K' и L' се средини на отсечките AD и CD, соодветно. Очигледно, триаголниците

$\triangle KBL$ и $\triangle K'L'D$ се рамнокраки и правоаголни. Од досега изнесеното следува дека

$$P_{\triangle KBL}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{2}=\frac{a^2}{8}, P_{\triangle K'L'D}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{2}=\frac{a^2}{8}, P_{\square ABCD}=a^2$$

па затоа

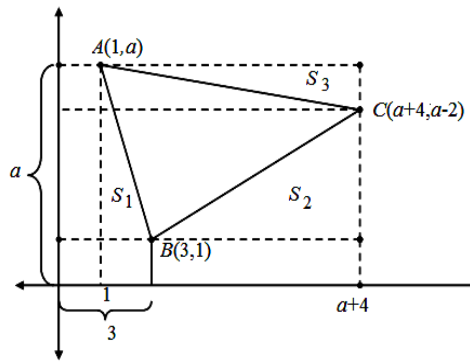
$$P_{AKLCL'K'}=P_{\square ABCD}-P_{\triangle KBL}-P_{\triangle K'L'D}=a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{8}=\frac{3}{4}a^2.$$

111. За цифрата b важи $\overline{bbb}:(b\cdot b)=37$. Во правоаголен координатен систем се дадени точките $A\,(1,\,a)$, $B\,(b,\,1)$ и $C\,(a+b+1,\,a-b+1)$, каде a е природен број поголем од b.

а) Изрази ја плоштината P_{ABC} на $\triangle ABC$ преку a.

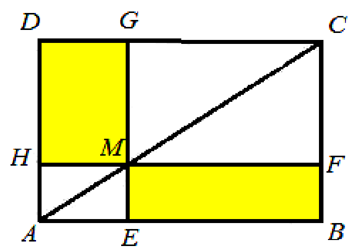
б) Определи ја најмалата можна целобројна вредност на P_{ABC}.

Решение. Од $\overline{bbb}:(b\cdot b)=37$ следува $111:b=37$, од каде добиваме $b=3$. Плоштината P_{ABC} ќе ја определиме кога од плоштината P на правоаголникот во кој се наоѓа бараниот триаголник ќе ги одземеме плоштините на три триаголници P_1, P_2 и P_3, види цртеж десно.



Наоѓаме, дека $P=(a+3)(a-1)$, $P_1=a-1$, $P_2=\frac{(a+1)(a-3)}{2}$ и $P_3=a+3$. Затоа, $P_{ABC}=P-(P_1+P_2+P_3)=\frac{a(a+2)-7}{2}$. Вредноста на добиениот израз е помала за помали вредности на a и е цел број ако a е непарен број. Од $a>b$, добиваме дека $a=5$ и тогаш $P=14$.

112. На цртежот десно е даден правоаголник $ABCD$. Низ точката $M\in AC$ се повлечени прави паралелни на страните на правоаголникот кои страните AB, BC, CD, DA ги сечат во точките E, F, G, H, соодветно. Кој од обоените делови има поголема плоштина.

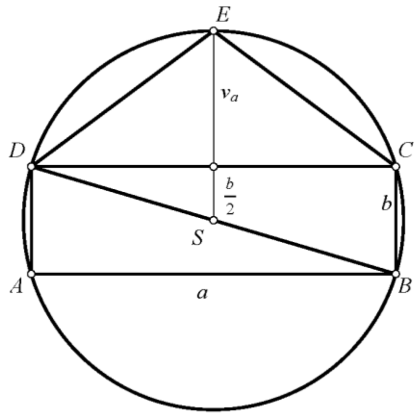


Решение. Дијагоналата AC го дели правоаголникот на два складни триаголници ABC и CDA, па затоа $P_{ABC}=P_{CDA}$. Понатаму, четириаголниците $AEMH$ и $MFCG$ се правоаголници, па затоа $P_{AEM}=P_{MHA}$ и $P_{MFC}=P_{CGM}$. Според тоа,

$$P_{EBFM}=P_{ABC}-(P_{AEM}+P_{MFC})=P_{CDA}-(P_{MHA}+P_{CGM})=P_{NMDG},$$

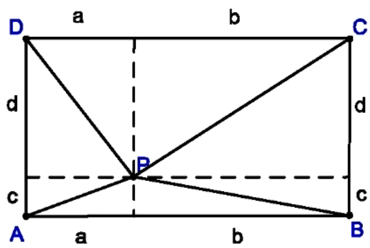
т.е. обоените делови имаат еднакви плоштини.

113. Околу правоаголник $ABCD$ со дијагонала со должина $20\,cm$ е опишана кружница. Страната CD на правоаголникот $ABCD$ е основа на рамнокрак триаголник чие трето теме се наоѓа на помалиот лак определен со тетивата CD на опишаната кружница околу правоаголникот $ABCD$. Плоштината на правоаголникот $ABCD$ е еднаква на плоштината на триаголникот DCE. Определи ја должината на страната AD.



Решение. Нека $\overline{AB}=\overline{CD}=a$, $\overline{BC}=\overline{DA}=b$ и нека v_a е должината на висината повлечена кон основата на триаголникот DCE. Понатаму, радиусот на опишаната кружница околу правоаголникот е $r=10\,cm$. Триаголникот DCE е рамнокрак со основа DC, па важи $\overline{SE}=r=v_a+\frac{b}{2}$. Значи, $v_a+\frac{b}{2}=10$. Од еднаквоста на плоштината на правоаголникот $ABCD$ и триаголникот DCE следува $ab=\frac{1}{2}av_a$, т.е. $v_a=2b$. Затоа важи $2b+\frac{b}{2}=10$, т.е. $b=\overline{DA}=4\,cm$.

114. Во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$ е дадена точка P таква што $\overline{AP}=5\,cm$, $\overline{BP}=10\,cm$ и $\overline{CP}=14\,cm$. Определи ја должината на отсечката DP.



Решение. Низ точката P повлекуваме прави паралелни на страните на правоаголникот кои страната AB ја делат на делови a и b, а страната AD ја делат на делови c и d (цртеж десно). Тогаш

$$c^2+b^2=100$$
$$d^2+b^2=196$$
$$c^2+a^2=25$$
$$a^2+d^2=\overline{DP}^2$$

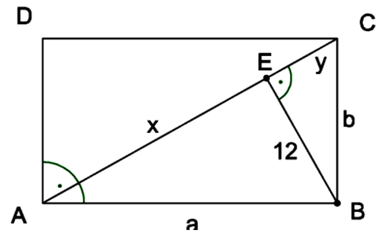
па затоа

$$\overline{DP}^2=a^2+d^2=a^2+c^2+d^2+b^2-(c^2+b^2)=25+196-100=121,$$

т.е. $\overline{DP}=11\,cm$.

115. Темето B на правоаголникот $ABCD$ е оддалечено од дијагоналата AC за $12\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот $ABCD$ ако $\overline{AC}=25\,cm$.

Решение. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од темето B на дијагоналата AC (цртеж десно). Имаме $\overline{AC}=25\,cm$ и $\overline{BE}=12\,cm$. Нека должините на страните на правоаголникот се a и b. Имаме



$$P_{ABCD}=2P_{\triangle ABC}=2\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BE}}{2}=25\cdot 12=300\,cm^2.$$

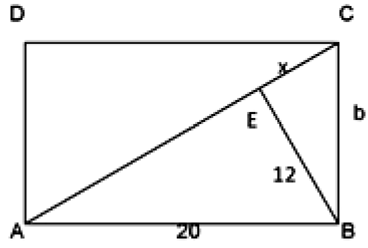
Според тоа, $ab=300$, а од Питагороватат теорема следува

$$a^2+b^2=25^2,\text{ т.е. } a^2+b^2=625.$$

Затоа $a^2+b^2+2ab=625+2\cdot 300$, т.е. $(a+b)^2=1225$, од каде добиваме $a+b=35$. Конечно, за париметарот на правоаголникот наоѓаме $L=2(a+b)=2\cdot 35=70\,cm$.

116. Даден е правоаголник $ABCD$, $\overline{AB}=20\,cm$. Должината на нормалата повлечена од темето B на дијагоналата AC е $12\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од точката B на дијагоналата AC. Според условот на задачата следува $\overline{AB}=20\,cm$ и $\overline{BE}=12\,cm$ (цртеж десно). Сега од



Питагоровата теорема применета на $\triangle ABE$ следува

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2 = 400 - 144 = 256, \text{ т.е. } \overline{AE} = 16\,cm.$$

Понатаму, повторно од Питагоровата теорема, при ознаки како на цртежот, применета на триаголниците BED и ABD добиваме:

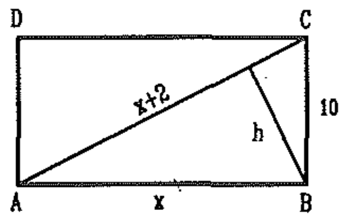
$$b^2 = x^2 + 12^2 \text{ и } b^2 = (16+x)^2 - 20^2.$$

Значи, $x^2 + 12^2 = (16+x)^2 - 20^2$, односно $32x = 288$, од каде добиваме $x = 9\,cm$. Според тоа, $b^2 = 9^2 + 12^2 = 225$, односно $b = 15\,cm$.

Конечно, $P = 20 \cdot 15 = 300\,cm^2$ и $L = 2(20+15) = 70\,cm$.

117. Дијагоналата AC на правоаголникот $ABCD$ е за $2\,cm$ подолга од поголемата страна AB, а помалата страна е $\overline{BC} = 10\,cm$. Пресметај го растојанието од темето B до дијагоналата AC.

Решение. Од правоаголниот $\triangle ABC$ (цртеж десно) следува $(x+2)^2 - x^2 = 10^2$, од каде добиваме $x = 24\,cm = \overline{AB}$. Според тоа, $\overline{AC} = 26\,cm$. Растојанието кое треба да го определиме е должината h на хипотенузата во $\triangle ABC$. Од плоштината на $\triangle ABC$ следува: $P = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2}$, т.е. $\frac{24 \cdot 10}{2} = \frac{26h}{2}$, од каде добиваме $h = \frac{24 \cdot 10}{26} = \frac{120}{13}\,cm$.



118. Должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се $\overline{AB} = 3$ и $\overline{BC} = 2$. Нека точките E и F се средини на страните AB и AD, соодветно. Нека G е пресекот на отсечките FC и DE, а H е пресекот на отсечките AC и DE. Определи ја плоштината на четириаголникот $AHGF$.

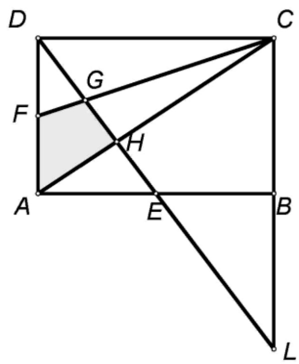
Решение. Имаме

$$\measuredangle EAH = \measuredangle DCH \text{ и } \measuredangle AEH = \measuredangle CDH$$

(Зошто?). Според тоа, $\triangle AEH \sim \triangle CDH$, па затоа $\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{AE} : \overline{CD} = 1:2$, од каде добиваме $\overline{AH} = \frac{\overline{CH}}{2} = \frac{\overline{AC}}{3}$, т.е.

$$P_{\triangle AHD} = \frac{1}{3} P_{\triangle ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 1\,cm^2.$$

Нека L е пресекот на правите DE и CB.



Имаме $\measuredangle AED = \measuredangle BEL$ како накрсни агли, $\measuredangle EAD = \measuredangle EBL = 90^\circ$ и $\overline{AE} = \overline{BE}$, па од признакот АСА следува $\triangle ADE \cong \triangle BLE$. Значи, $\overline{BL} = \overline{AD} = 2\,cm$, па затоа $\overline{CL} = \overline{CB} + \overline{BL} = 4\,cm$. Понатаму, $\measuredangle FDQ = \measuredangle CLG$ и $\measuredangle GFD = \measuredangle GCL$ (Зошто?). Според тоа, $\triangle DFG \sim \triangle LCG$, па затоа $\overline{FG} : \overline{CG} = \overline{DF} : \overline{LC} = 1:4$, од каде добиваме

$$\overline{FG} = \frac{\overline{CG}}{4} = \frac{\overline{CF}}{5}, \text{ т.е. } P_{\triangle DFG} = \tfrac{1}{5} P_{\triangle DFC} = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{3 \cdot 1}{2} = \tfrac{3}{10}\,cm^2.$$

Конечно,

$$P_{AHGF} = P_{\triangle AHD} - P_{\triangle DFG} = 1 - \tfrac{3}{10} = \tfrac{7}{10}\,cm^2.$$

119. Даден е правоаголник $ABCD$. Точките P и Q припаѓаат на страните BC и CD, соодветно и важи $\measuredangle AQP = 90^\circ$. На продолженијата на страните AD и CD преку точката D се земени точки M и N, соодветно за кои важи $\overline{DM} = \overline{CQ}$ и $\overline{DN} = \overline{CP}$.

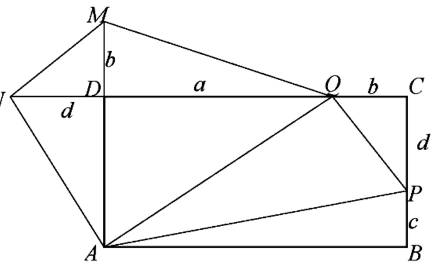
а) Докажи дека $P_{ABCD} = \overline{BP} \cdot \overline{DQ} + \overline{QP} \cdot \overline{AQ}$.

б) Докажи дека правите AQ и MN се паралелни.

Решение. а) Да ги воведеме ознаките:

$$\overline{DQ} = a, \overline{CQ} = \overline{DM} = b,$$
$$\overline{BP} = c, \overline{CP} = \overline{ND} = d,$$

(цртеж десно).



Имаме $\overline{BP} \cdot \overline{DQ} = ac$ и

$$\overline{QP} \cdot \overline{AQ} = 2P_{APQ} = 2(P_{ABCD} - P_{ABP} - P_{ADQ} - P_{CPQ})$$
$$= 2(a+b)(c+d) - (a+b)c - (a(c+d) - bd = ad + bc + bd.$$

Конечно,

$$P_{ABCD} = (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd = \overline{BP} \cdot \overline{DQ} + \overline{QP} \cdot \overline{AQ}.$$

б) Од Питагоровата теорема применета на триаголниците ADQ, CPQ и ABP следува:

$$\overline{AQ}^2 = (c+d)^2 + a^2, \overline{PQ}^2 = b^2 + d^2 \text{ и } \overline{AP}^2 = (a+b)^2 + c^2.$$

Од Питагоровата теорема применета на триаголникот APQ добиваме:

$$(c+d)^2 + a^2 + b^2 + d^2 = (a+b)^2 + c^2, \text{ т.е. } 2d^2 + 2cd = 2ab.$$

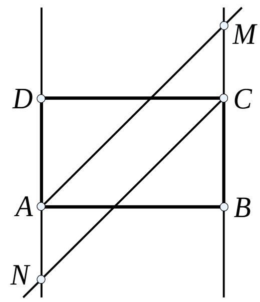
Од $d(c+d) = ab$, следува $P_{ADN} = P_{QDM}$. Затоа

$$P_{ADN}+P_{ADQ}=P_{QDM}+P_{ADQ},$$

од каде добиваме $P_{ANQ}=P_{AMQ}$. Но, триаголниците ANQ и AMQ имаат заедничка основа AQ и како имаат еднакви плоштини добиваме дека висините повлечени од точките M и N кон правата AQ се еднакви. Но, тоа значи дека правите AQ и MN се паралелни.

120. Должините на страните AB и BC на правоаголникот $ABCD$ се 5 *cm* и 3 *cm*, соодветно. Пресекот на правата која минува низ точките B и C и симетралата на аголот $\measuredangle BAD$ е точката $M,$ а пресекот на правата која ги содржи точките A и D и симетралата на аголот $\measuredangle BCD$ е точката $N.$ Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ANCM.$

Решение. Од AM е симетрала, следува дека $\measuredangle MAB=45°$, па затоа $\triangle ABM$ е рамнокрак правоаголен триаголник. Значи,



$$\overline{MC}=\overline{BM}-\overline{BC}=5-3=2cm.$$

Аналогно, $\triangle DCN$ е рамнокрак правоаголен триаголник и $\overline{AN}=2cm$. Триаголниците ABM и CDN се складни, бидејќи $\overline{AB}=\overline{CD}=5cm$, $\measuredangle ABM=\measuredangle CDN=90°$ и $\overline{BM}=\overline{DN}=5cm$. Од складноста следува дека $\overline{AM}=\overline{CN}$, па четириаголникот $ANCM$ има два пара спротивни еднакви страни, од каде заклучуваме дека четириаголникот е паралелограм. Значи, четириаголникот $ANCM$ е

$$P=\overline{AN}\cdot\overline{AB}=2\cdot 5=10cm^2.$$

121. Даден е $\triangle ABC$ со должината на страната AB е $24cm$ и должина на соодветната висина $18cm$. Во $\triangle ABC$ е вишан правоаголник $MNPQ$ така што темињата M и N припаѓаат на страната AB, темето P припаѓа на страната BC и темето Q припаѓа на страната AC. Определи ја плоштината на правоаголникот $MNPQ$ ако должината на една негова страна е еднаква на $12cm$.

Решение. Можни се два случаја. Ако $\overline{MN}=12\,cm$ и $\overline{NP}=b$ (направи цртеж), тогаш

$$P_{ABC}=P_{AMQ}+P_{NBP}+P_{MNPQ}+P_{QPC}$$
$$\frac{24\cdot 18}{2}=\frac{(24-12)\cdot b}{2}+12\cdot b+\frac{12\cdot(18-b)}{2}$$

$$b = 9\,cm.$$

Значи, $P_{MNPQ} = 108\,cm^2$. Ако $\overline{MN} = a$ и $\overline{NP} = 12\,cm$ (направи цртеж), тогаш

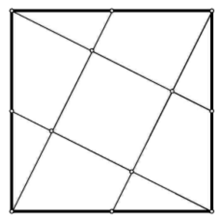
$$P_{ABC} = P_{AMQ} + P_{NBP} + P_{MNPQ} + P_{QPC}$$

$$\frac{24 \cdot 18}{2} = \frac{(24-a) \cdot 12}{2} + 12 \cdot a + \frac{a \cdot (18-12)}{2}$$

$$a = 8\,cm.$$

Значи, $P_{MNPQ} = 96\,cm^2$.

122. Даден е квадрат со должина на страна $10\,cm$. Средината на секоја негова страна е поврзана со едно теме како што е прикажано на цртежот десно, со што во внатрешноста на квадратот е добиен четириаголник. Определи ја плоштината на овој четириаголоник.



Решение. Имаме

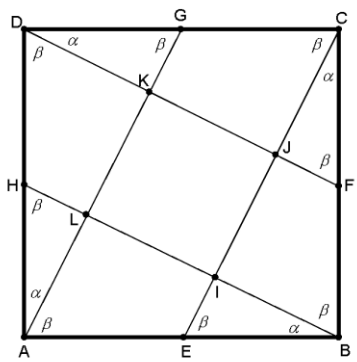
$$\overline{EB} = \overline{FC} = \overline{GD} = \overline{HA} = 5\,cm \text{ и}$$

$$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \overline{AB} = 10\,cm,$$

па затоа правоаголните триаголници ABC, FCD, CDA, HAB се складни. Според тоа,

$$\measuredangle HBA = \measuredangle ECB = \measuredangle FDC = \measuredangle GAD = \alpha \text{ и}$$

$$\measuredangle BEC = \measuredangle CFD = \measuredangle DGA = \measuredangle AHB = \beta.$$



Но, $\alpha + \beta = 90^\circ$, па затоа

$$\measuredangle GKD = \measuredangle HLA = \measuredangle EIB = \measuredangle FJC = 90^\circ,$$

т.е. четириаголникот $IJKL$ е правоаголник и $\measuredangle CBI = \measuredangle DCJ = \measuredangle ADK = \measuredangle BAL = \beta$. Значи, правоаголните триаголници ABL, BCI, CDJ, DAK се складни. Понатаму, $EC \parallel AG$ и $BH \parallel FD$. Отсечката JF е средна линија на $\triangle BCI$, па затоа $\overline{IJ} = \overline{JC} = \frac{1}{2}\overline{IC}$ и $\overline{JF} = \frac{1}{2}\overline{IB} = x$. Аналогно важи за должините на страните на триаголниците ABL, CDJ и DAK, а со тоа и за должините на страните на четириаголникот $IJKL$. Значи, $\overline{JF} = \overline{KG} = \overline{LH} = \overline{IE} = x$ и $\overline{CJ} = \overline{IJ} = \overline{DK} = \overline{KJ} = \overline{AL} = \overline{LK} = \overline{BI} = \overline{IL} = 2x$. Според тоа, четириаголникот $IJKL$ е квадрат со должина на страна $2x$. Останува да ја пресметаме плоштината на квадратот $IJKL$.

Од претходно изнесеното следува

$$\overline{EC}=\overline{EI}+\overline{IJ}+\overline{JC}=5x \text{ и } \overline{IC}=\overline{IJ}+\overline{JC}=4x,$$

па од сличноста на триаголниците EBC и BIC следува

$$\overline{EC}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{IC}, \text{ т.е. } 5x:10=10:4x$$

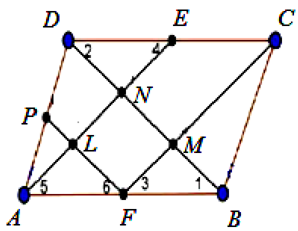
па затоа $x^2=5$. Конечно, $P_{IJKL}=(2x)^2=4x^2=4\cdot 5=20\,cm^2$.

123. Даден е четириаголник $ABCD$. Точките M,N,P и Q се средини на страните AB,BC,CD и DA соодветно. Ако отсечките MP и NQ се заемно нормални, докажи дека $\overline{AC}=\overline{BD}$.

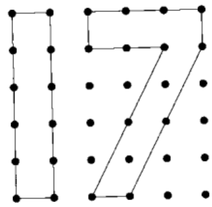
Решение. Според условот на задачата, отсечката MN е средна линија на триаголникот ABC, па затоа $MN \| AC$ и $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$. Аналогно QP е средна линија на триаголникот $ACD,$ па затоа $PQ \| AC$ и $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AC}$. Значи M, N, P и Q се темиња на паралелограм. Неговите дијагонали, според условот на задачата се заемно нормални, па затоа $MNPQ$ е ромб. Но тогаш $\overline{AC}=2\overline{MN}=2\overline{PQ}=\overline{BD}$, што требаше да се докаже.

124. Во паралелограмот $ABCD$ точките E и F се средини на спротивните страни AB и CD, соодветно. Докажи дека отсечките AE и FC ја делат дијагоналата BD на три еднакви дела.

Решение. Јасно, четириаголникот $AFCE$ е паралелограм. Со M и N да ги означиме пресечните точки на отсечките CF и AE соодветно со дијагоналата BD (цртеж десно). За триаголниците FBM и EDN имаме $\overline{FB}=\overline{ED}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\measuredangle 1=\measuredangle 2$ (наизменични агли) и $\measuredangle 3=\measuredangle 4$ (остри агли со паралелни краци), па затоа тие се складни. Од складноста следува $\overline{BM}=\overline{ND}$. Во точката F повлекуваме права паралелна на дијагоналата BD и нека P и L се пресечните точки на оваа права со AD и AE, соодветно. Сега четириаголникот $FMNL$ е паралелограм. За триаголниците AFL и FBM важи $\overline{FB}=\overline{AF}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\measuredangle 5=\measuredangle 3$ (согласни агли) и $\measuredangle 6=\measuredangle 1$ (согласни агли), па затоа тие се складни. Од оваа складност следува $\overline{BM}=\overline{FL}$ и како $\overline{FL}=\overline{MN}$ добиваме $\overline{BM}=\overline{ND}=\overline{MN}$.



125. Во квадратна мрежа од точки нацртан е број, при што должината на страната на квадратите е еднаква на a. Ако плоштината на цифрите е еднаква на $2028\,cm^2$, колкава е должината на страната a.

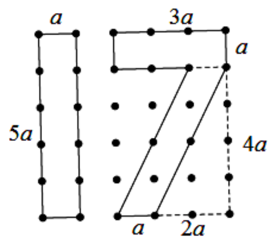


Решение. *Прв начин.* Очигледно цифрите покриваат 8 квадрати со страна a и четири паралелограми со основа a и висина a. Според тоа, цифрите покриваат плоштина

$$P=8a^2+4a\cdot a=12a^2.$$

Значи, $12a^2=2028$, од каде наоѓаме $a=13\,cm$.

Втор начин. Бараната плоштина е еднаква на збирот на плоштините:



- правоаголник со страни a и $5a$,
- правоаголник со страни a и $3a$,
- паралелограм со страна a и висина спуштена на таа страна $4a$.

Значи,

$$2028=a\cdot 5a+a\cdot 3a+a\cdot 4a=12a^2,$$

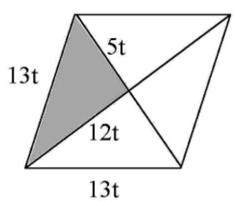
т.е. $a=13cm$.

126. Висините на паралелограмот се $h_a=4\,cm$ и $h_b=6\,cm$, а неговиот периметар е еднаков на $60\,cm$. Определи ја плоштината на овој паралелограм.

Решение. Имаме $L=2(a+b)$, па затоа $2a+2b=60\,cm$. Сега, за плоштината на паралелграмот добиваме $P=ah_a=bh_b$, па затоа $4a=6b$, т.е. $2a=3b$. Значи, $3b+2b=60$, па затоа $b=12\,cm$. Конечно, плоштината на паралелограмот е $P=bh_b=12\cdot 6=72\,cm^2$.

127. Определи ги должините на страните на ромб со плоштина $480\,cm^2$, кај кој односот на должините на страната и едната дијагонала е $13:10$.

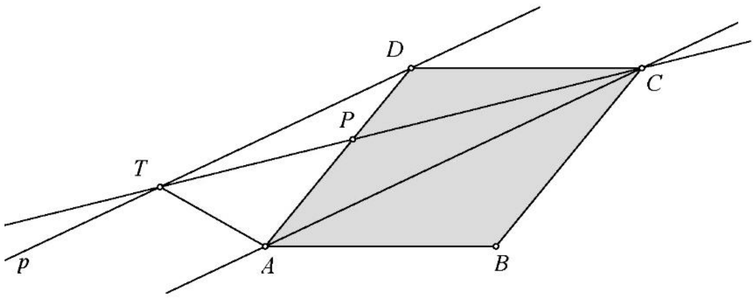
Решение. Нека должината на страна е a, а должината на едната дијагонала е d_1. Од условот на задачата следува дека должината на страната и половината од едната дијагонала се однесуваат како $13:5$. Според тоа, постои број t



таков што $a=13t$ и $\frac{d_1}{2}=5t$ (цртеж десно). Сега, од Питагоровата теорема следува дека половината од должината на другата дијагонала е $\frac{d_2}{2}=\sqrt{(13t)^2-(5t)^2}=12t$, што значи $d_2=24t$. Значи, плоштината на ромбот е $P=\frac{d_1d_2}{2}=\frac{10t\cdot 24t}{2}=120t^2$, па затоа $120t^2=480$, од каде добиваме $t=2$. Конечно, за должината на страната на ромбот добиваме $a=13\cdot 2=26\,cm$.

128. Даден е ромб $ABCD$. Низ темето D е повлечена права p паралелна на дијагоналата AC. На страната AD се наоѓа точка P за која важи $\overline{AP}:\overline{PD}=3:2$. Нека $p\cap CP=T$. Определи го односот на плоштините на триаголникот APT и ромбот $ABCD$.

Решение. Триаголниците ACD и ACT имаат заедничка страна AC и еднакви висина над оваа страна (темињата C и D лежат на правата



p која е паралелна на AC), па затоа $P_{\triangle ACD}=P_{\triangle ACT}$. Понатаму, од

$$P_{\triangle ACD}=P_{\triangle ACP}+P_{\triangle PCD} \text{ и } P_{\triangle ACT}=P_{\triangle ACP}+P_{\triangle APT},$$

следува $P_{\triangle APT}=P_{\triangle PCD}$. Важи $\overline{DP}=\frac{2}{5}\overline{DA}$, а должината на висината над страната DP во $\triangle PCD$ е еднаква на должината висината над страната DA во $\triangle ACD$. Затоа важи $P_{\triangle PCD}=\frac{2}{5}P_{\triangle ACD}$. Бдејќи дијагоналата го дели ромбот на два складни триаголника, имаме

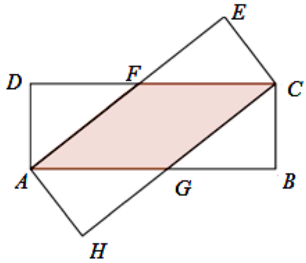
$$P_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}P_{ABCD},$$

па затоа

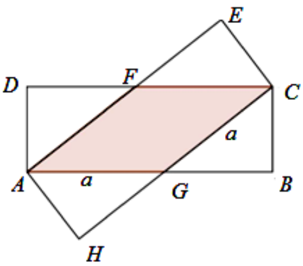
$$P_{\triangle PCD}=\frac{2}{5}P_{\triangle ACD}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}P_{ABCD}=\frac{1}{5}P_{ABCD},$$

што значи дека и $P_{\triangle APT}=\frac{1}{5}P_{ABCD}$, односно $P_{\triangle APT}:P_{ABCD}=1:5$.

129. Должините на страните два складни правоаголника кои се преклопуваат како на цртежот десно се $5cm$ и $12cm$. Определи ја плоштината на обоениот дел.



Решение. Лесно се докажува дека $\triangle AGH \cong \triangle CGB \cong \triangle CFE \cong \triangle AFD$, па затоа обоениот дел од фигурата е ромб со должина на страна a и висина еднаква на пократката страна на правоаголникот.



Имаме $\overline{GB} = \overline{AB} - a = 12 - a$. Сега, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{GC}^2 = \overline{GB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$a^2 = (12-a)^2 + 5^2$$

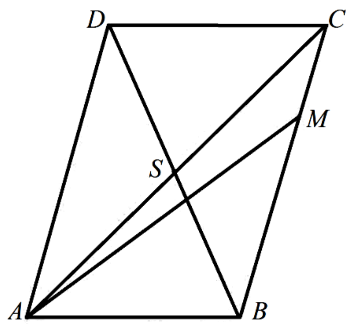
$$a^2 = 144 - 24a + a^2 + 25$$

$$a = \frac{169}{24}\, cm$$

Конечно, плоштината на обоениот дел е

$$P = ab = \frac{169}{24} \cdot 5 = \frac{845}{24}\, cm^2 .$$

130. Даден е паралелограм $ABCD$, за кој точката S е пресек на неговите дијагонали. Периметарот на триаголникот CDS е за $5{,}6cm$ помал од периметарот на триаголникот BCS. Симетралата на аголот $\measuredangle BAD$ ја сече страната BC во точка M така што $\overline{BM} : \overline{BM} = 7:4$.
Определи ја должината на страната и периметарот на паралелограмот $ABCD$.



Решение. Нека $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$ и нека $\overline{SB} = \overline{SD} = x, \overline{SA} = \overline{SC} = y$ (дијагоналите на паралелограмот се преполовуваат). Ако периметарот на триаголникот CDS е помал од периметарот на триаголникот BCS, тогаш точно е равенството

$$x + y + b = x + y + a + 5{,}6$$

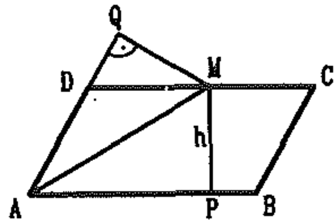
од каде следува $b = a + 5.6$.

Бидејќи $\overline{BM} : \overline{BM} = 7:4$ добиваме $\overline{BM} = 7k$ и $\overline{BM} = 4k$, за некој k. Од $b = \overline{BM} + \overline{MC}$ следува $b = 11k$. Понатаму, $\measuredangle DAM = \measuredangle BMA$ како агли на трансферзала, па од $\measuredangle DAM = \measuredangle BAM$ следува $\measuredangle BAM = \measuredangle BMA$, што значи дека триаголникот ABM е рамноикрак. Според тоа, $\overline{AB} = \overline{BM}$, т.е. $a = 7k$.

Сега, од $b = a + 5.6$ добиваме $11k = 7k + 5,6$, т.е. $k = 1,4$. Затоа, $a = 9,8cm$ и $b = 15,4cm$. Конечно, периметарот на паралелограмот $ABCD$ е еднаков на $50,4\,cm$.

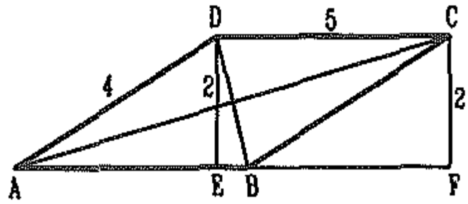
131. Должините на страните на ромбоидот се $7\,cm$ и $4\,cm$. Определи го односот на плоштините на деловите на кои овој ромбоид е поделен со симетралата на еден негов внатрешен агол.

Решение. Нека дадениот ромбоид е $ABCD$, $\overline{AB} = 7\,cm$ и $\overline{AD} = 4\,cm$ (цртеж десно). Ако M е пресекот на симетралата на аголот во темето A и страната CD, а P и Q се подножјата на нормалите повлечени од точката M на правите AB и AD, тогаш $\overline{MP} = \overline{MQ} = h$. Затоа $P_{ABCD} = 7h\,cm^2$ и $P_{ADM} = 2h\,cm^2$. Според тоа, $P_{ABCM} = 5h\,cm^2$ и бараниот однос е $P_{ABCM} : P_{ADM} = 5:2$.



132. Определи ги должините на дијагоналите и плоштината на ромбоидот $ABCD$ ако $\overline{AB} = 5\,cm$, $\overline{AD} = 4\,cm$ и $\measuredangle BAD = 30^\circ$.

Решение. Нека DE и CF се висините на ромбоидот (цртеж десно). Тогаш триаголниците ADE и BCF се складни, па затоа $\overline{AE} = \overline{BF}$. Понатаму, правоаголниот триаголник ADE е половина од рамностран триаголник со должина на страна $\overline{AD} = 4\,cm$, па затоа $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 2\,cm$ и $\overline{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AD} = 2\sqrt{3}\,cm = \overline{BF}$. Според тоа,



$$\overline{BE} = (5 - 2\sqrt{3})\,cm \text{ и } \overline{AF} = (5 + 2\sqrt{3})\,cm.$$

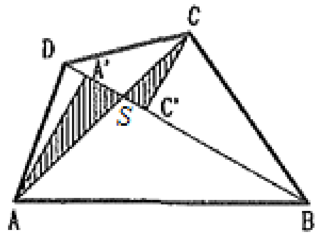
За плоштината на ромбоидот добиваме $P = \overline{AB} \cdot \overline{DE} = 10\,cm^2$, а за дијагоналите добиваме

$$\overline{DB} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{BE}^2} = \sqrt{2^2 + (5 - 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{41 - 20\sqrt{3}}\,cm \text{ и}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{CF}^2+\overline{AF}^2}=\sqrt{2^2+(5+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{41+20\sqrt{3}}\ cm.$$

133. Секоја од двете дијагонали на конвексниот четириаголник $ABCD$ ја дели неговата површина на два еднакви дела. Докажи дека овој четириаголник е паралелограм.

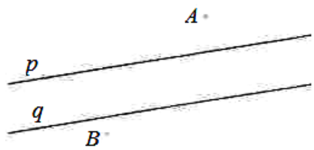
Решение. Нека дадениот четириаголник е $ABCD$ и нека $AC\cap BD=S$ (види цртеж). Од



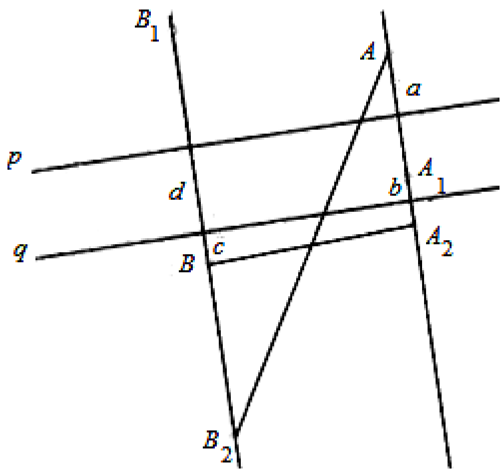
$$P_{\triangle ABD}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{AA'}}{2}=P_{\triangle BCD}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CC'}}{2}$$

следува $\overline{AA'}=\overline{CC'}$. Понатаму, бидејќи $\measuredangle A'SA=\measuredangle C'SC$ и $\measuredangle AA'S=\measuredangle CC'S=90^\circ$ добиваме $\measuredangle SAA'=\measuredangle SCC'$ и како $\overline{AA'}=\overline{CC'}$, од признакот АСА следува $\triangle AA'S\cong\triangle CC'S$. Сега, од докажаната складност следува $\overline{AS}=\overline{CS}$. На потполно ист начин се докажува дека $\overline{BS}=\overline{DS}$. Значи дека дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се половат, т.е. тој е паралелограм.

134. Дадени се две паралелни прави p и q и точки A и B како на цртежот десно. Нека A_1 е симетрина на A, а B_1 е симетрична на B во однос на правата p, па A_2 е симетрична на A_1, а B_2 е симетрична на B_1 во однос на правата q. Докажи дека отсечките AB_2 и BA_2 меѓусебно се половат.



Решение. Со d да го означиме растојанието меѓу паралелните прави p и q. Нека a е оддалеченоста од точката A до правата p, а b е оддалеченоста од точката A_1 до правата q. Од дефиницијата на осната симетрија следува $\overline{AA_1}$



$=2a$ и $\overline{A_1A_2}=2b$. Затоа $\overline{AA_2}=2a+2b$ и бидејќи $a+b=d$ добиваме $\overline{AA_2}=2d$.

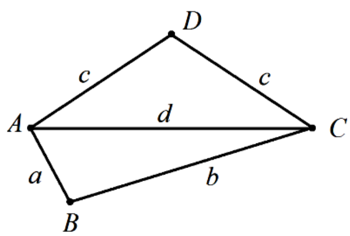
Нека c е растојанието на точката B до правата q. Тогаш растојанието на точката B до правата p е $c+d$, па затоа $\overline{BB_1}=2(c+d)$. Според тоа, растојанието на точката B_1 до правата q е еднакво на $2d+2c-c=2d+c$. Бидејќи точката B_2 од правата q е оддалечена $2d+c$, добиваме дека $\overline{BB_2}=2d+c-c=2d$. Според тоа $\overline{AA_2}=\overline{BB_2}$. Понатаму, од $AA_2\perp p$ и $BB_2\perp p$ следува дека $AA_2\parallel BB_2$, што значи дека четириаголникот ABB_2A_2 е паралелограм. Конечно, отсечките AB_2 и BA_2 се дијагонали на паралелограм, па затоа тие се половат.

135. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$ кој има два спротивни прави агли, при што две страни кои го зафаќаат едниот од нив се со еднаква должина и збирот на должините на другите две страни е еднаков на $10\,cm$.

Решение. Нека

$$\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{CD}=\overline{AD}=c \text{ и } \overline{AC}=d$$

(цртеж десно). Од условот на задачата следува $a+b=10$. Ако ја примениме Питагоровата теорема за правоаголните триаголници ABC и ACD добиваме



$$a^2+b^2=d^2 \text{ и } c^2+c^2=d^2,$$

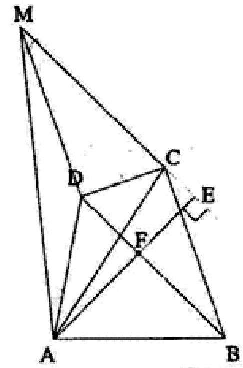
од каде следува $a^2+b^2=2c^2$. Од $a+b=10$, после квадрирањето добиваме $a^2+b^2=100-2ab$, па затоа $2c^2=100-2ab$, т.е. $c^2=50-ab$. Значи, $ab+c^2=50$ Конечно, за плоштината на четириаголникот добиваме

$$P_{ABCD}=P_{ABC}+P_{ACD}=\tfrac{ab}{2}+\tfrac{c^2}{2}=\tfrac{ab+c^2}{2}=25\,cm^2.$$

136. Дадени се конвексен четириаголник $ABCD$ и паралелограм $DBCM$. Докажи дека плоштината на $\triangle ACM$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $ABCD$.

Решение. Нека E подножјето на висината повлечена од темето A на страната CM на $\triangle ACM$ и нека $F=AE\cap BD$. Јасно,

$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD}$ и $P_{ACM} = \frac{\overline{CM} \cdot \overline{AE}}{2}$.



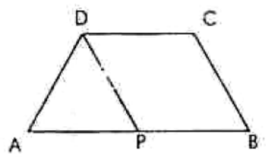
Бидејќи $P_{ABD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AF}}{2}$, а $P_{BCD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{FE}}{2}$, бидејќи $\triangle BCD$ е половина од паралелограмот $DBCM$, на кој EF му е висина, добиваме дека

$$P_{ABCD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AF}}{2} + \frac{\overline{BD} \cdot \overline{FE}}{2} = \frac{\overline{BD} \cdot (\overline{FE} + \overline{AF})}{2},$$

а бидејќи $\overline{AF} + \overline{EF} = \overline{AE}$ и $\overline{BD} = \overline{CM}$, добиваме дека $P_{ABCD} = \frac{\overline{CM} \cdot \overline{AE}}{2}$, што значи дека $P_{ABCD} = P_{ACM}$.

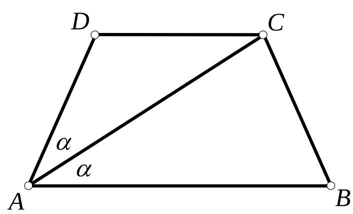
137. Определи ги аглите на трапезот со должини на страни $2\,cm, 2\,cm, 2\,cm$ и $4\,cm$.

Решение. Јасно, должината на едната основа е $4\,cm$, а другата основа и краците се со должина $2\,cm$. Според тоа, трапезот $ABCD$ е рамнокрак. Низ темето D повлекуваме права паралелна на кракот BC. Имаме $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{DP} = 2\,cm = (4-2)\,cm = \overline{AB} - \overline{BP} = \overline{AP}$, т.е. $\triangle APD$ е рамностран. Според тоа, $\measuredangle BAD = \measuredangle ABC = 60^\circ$ и $\measuredangle ADC = \measuredangle BCD = 120^\circ$



138. Периметарот на еден рамнокрак трапез е $34\,cm$, а кракот е за $10\,cm$ пократок од поголемата основа. Дијагоналата AC е симетрала на аголот A. Пресметај ги должините на страните на трапезот.

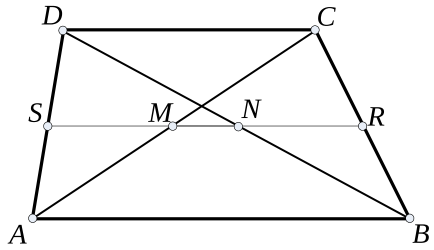
Решение. Ако AC е симетрала на аголот при темето A, тогаш $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD = \alpha$. Од друга страна $AB \| CD$, а AC е нивна трансферзала. Според тоа $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD$. Значи, триаголникот CDA е рамнокрак со основа AC. Сега, од условот на задачата следува $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{CB} = c$ и $\overline{AB} = c + 10$. Затоа $c + c + c + (c + 10) = 34$, т.е. $c = 6\,cm$. Според тоа, должините на страните на трапезот се еднакви на



$$a = 12\,cm,\ b = 6\,cm,\ c = 6\,cm.$$

139. Отсечката чии крајни точки се средините на дијагоналите на еден трапез, и разликата на должините на основите на тој трапез се однесуваат како $1:2$. Докажи!

Решение. Нека M е средина на дијагоналата на AC на трапезот $ABCD$ (види цртеж), а N е средина на дијагоналата BD. Нека S и R се средини на краците AD и BC. Отсечката SN е средна линија на триаголникот ABD, па затоа SN е паралелна

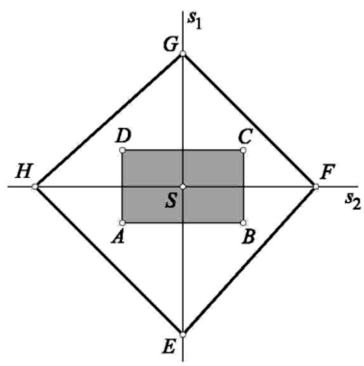


со AB. Слично, MR е средна линија на триаголникот ABC, па затоа MR е паралелна со AB. Од друга страна, SR е средна линија на трапезот, па затоа е паралелна со AB. Низ една точка што не лежи на една права може да се повлече само една права паралелна на дадена права. Од паралелноста на SR, MR и SN добиваме дека M и N лежат на правата SR.

Сега, од $\overline{MR}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\overline{NR}=\frac{1}{2}\overline{DC}$ (NR е средна линија на триаголникот BCD) имаме $\overline{MN}=\overline{MR}-\overline{NR}=\frac{1}{2}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}(\overline{AB}-\overline{CD})$, што и требаше да се докаже.

140. Даден е правоаголник $ABCD$. На симетралата на страната AB, односно BC се наоѓаат точките E и G, односно F и H така што $\overline{ES}=\overline{SH}$ и $\overline{FS}=\overline{SG}$, при што точката S е пресек на симетралите на страните AB и BC. Докажи дека четириаголникот $EFGH$ е рамностран трапез.

Решение. Нека s_1 е симетралата на страната AB, а s_2 е симетралата на страната BC. Од $s_1 \perp AB$, $s_2 \perp BC$ и $AB \perp BC$ следува $s_1 \perp s_2$. Бидејќи $\overline{ES}=\overline{SH}$ и $\measuredangle ESH=90^\circ$, добиваме дека $\triangle ESH$ е рамностран правоаголен, па затоа $\measuredangle HES=\measuredangle SHE=45^\circ$. Аналогно $\triangle FGS$ е рамнокрак право-



аголен, па затоа $\measuredangle SFG = \measuredangle FGS = 45^\circ$. Понатаму, бидејќи $\measuredangle FSE = 90^\circ$, добиваме дека $\triangle EFS$ е правоаголен, па затоа $\measuredangle SEF + \measuredangle EFS = 90^\circ$. Понатаму,

$$\begin{aligned}\measuredangle HEF + \measuredangle EFG &= (\measuredangle HES + \measuredangle SEF) + (\measuredangle EFS + \measuredangle SFG)\\ &= \measuredangle HES + (\measuredangle SEF + \measuredangle EFS) + \measuredangle EFG\\ &= 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ,\end{aligned}$$

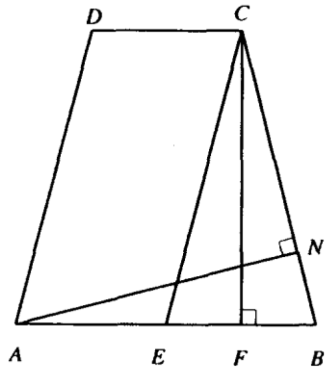
што значи дека $EH \parallel FG$, односно дека $\square EFGH$ е трапез.

Бидејќи $\overline{ES} = \overline{SH}$, $\measuredangle FSE = \measuredangle HSG = 90^\circ$ и $\overline{FS} = \overline{SG}$, од признакот за складност САС следува дека $\triangle EFS \cong \triangle HGS$. Сега, од складноста следува $\overline{EF} = \overline{HG}$, со што тврдењето е докажано.

141. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со основи AB и CD, таков што $\overline{AB} = \overline{BC} = 2\overline{CD}$. Ако точката N е подножје на нормалата повлечена од темето A на кракот BC, тогаш $\overline{BN} : \overline{NC} = 1:3$. Докажи!

Решение. Нека E е средината на основата AB на трапезот $ABCD$. Според условот на задачата важи

$$\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{CD} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}.$$



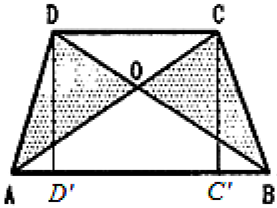
Низ точката C повлекуваме права паралелна со AD. Од $\overline{AE} = \overline{CD}$ следува дека оваа права ја сече основата AB во точката E. Од $ED \parallel CD$ следува дека четириаголникот $AECD$ е паралелограм, па значи $\overline{EC} = \overline{AD} = \overline{BC}$, т.е. $\triangle EBC$ е рамнокрак. Нека точката F е подножјето на висината повлечена од темето C на основата EB на $\triangle EBC$. Имаме

$$\overline{FB} = \overline{EF} = \tfrac{1}{2}\overline{EB} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\overline{AB} = \tfrac{1}{4}\overline{AB}.$$

Сега, $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\measuredangle ABN = \measuredangle CBF$ е заеднички агол и $\measuredangle ANB = \measuredangle CFB = 90^\circ$, па затоа $\triangle ANB \cong \triangle CFB$, што значи дека $\overline{BN} = \overline{FB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$, а заради $\overline{AB} = \overline{BC}$ важи $\overline{BN} = \frac{1}{4}\overline{BC}$, т.е. $\overline{NC} = \frac{3}{4}\overline{BC}$. Понатаму, од $\overline{BC} = 4\overline{BN}$ следува $\overline{NC} = \frac{3}{4}\overline{BC} = \frac{3}{4} \cdot 4\overline{BN} = 3\overline{BN}$, т.е. $\overline{BN} : \overline{NC} = 1:3$.

142. Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се сечат во точката O. Ако плоштината на триаголникот ADO е еднаква на плоштината на триаголникот BCO, тогаш четириаголникот $ABCD$ е трапез. Докажи!

Решение. Од $P_{ADO}=P_{BCO}$ следува



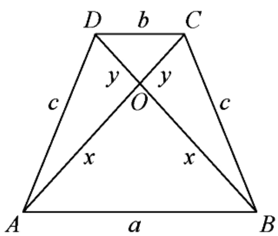
$P_{ABD}=P_{ABO}+P_{ADO}=P_{ABO}+P_{BCO}=P_{ABC}$. Значи, триаголниците ABC и ABC имаат еднакви плоштини, па како AB е нивна заедничка основа заклучуваме дека имаат и еднакви висини повлечени во темињата D и C, т.е. $\overline{DD'}=\overline{CC'}$. Затоа $AB \| CD$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е трапез.

143. Докажи дека средините на страните и подножјето на било која висина на разностран триаголник се темиња на рамнокрак трапез.

Решение. Нека е даден триаголникот ABC и нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB соодветно и D е подножјето на висината повлечена од темето A. Четириаголникот $B_1C_1DA_1$ е трапез бидејќи B_1C_1 е средна линија на триаголникот ABC и затоа е паралелна со страната BC. Од иста причина $\overline{B_1A_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. Понатаму, $\overline{C_1D}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ бидејќи C_1 е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABD.

144. Нека a и b се должините на основите AB и CD, а c е должината на кракот на рамнокрак трапез $ABCD$, чии дијагонали се заемно нормални. Докажи дека $c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Решение. При ознаки како на цртежот десно триаголниците ABO, CDO и BCO се правоаголни. Затоа од Питагоровата теорема следува



$$a^2=2x^2,\ b^2=2y^2,\ c^2=x^2+y^2.$$

Според тоа, $2c^2=2x^2+2y^2=a^2+b^2$, од каде добиваме $c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

145. Даден е трапез со прав агол меѓу неговите краци. Докажи дека збирот на квадратите на дијагоналите на овој трапез е еднаков на збирот на квадратите на основите.

Решение. Ако правите определени со краците на трапезот $ABCD$ (со основи AB и CD) се сечат во точката O, тогаш

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AO}^2+\overline{OC}^2+\overline{BO}^2+\overline{OD}^2.$$

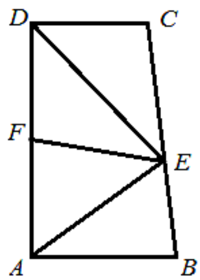
Од друга страна важи,

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2,$$

па затоа важи $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$.

146. Во трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ симетралите на внатрешните агли во темињата A и D се сечат во точка која лежи на кракот $\overline{BC}$. Докажи дека $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{CD}$.

Решение. Нека E е пресечната точка на симетралите и нека $F\in\overline{AD}$ така што $\measuredangle CED=\measuredangle DEF$ (таква точка постои бидејќи $\measuredangle AED=90^\circ$ и $\measuredangle CED$ е остар). Од тоа што $\triangle CDE\cong\triangle FDE$ ($\overline{CD}$ заедничка, $\measuredangle CED=\measuredangle DEF$ и $\measuredangle FDE=\measuredangle FDE$) следува дека $\measuredangle DCE=\measuredangle DFE$ и



$$\overline{DF}=\overline{CD}. \qquad (1)$$

Од друга страна, од

$$\measuredangle ABE=180^\circ-\measuredangle DCE=180^\circ-\measuredangle DFE=\measuredangle AFE,$$

и од

$$\measuredangle FEA=180^\circ-(\measuredangle AFE+\measuredangle FAE)=180^\circ-(\measuredangle ABE+\measuredangle EAB)=\measuredangle BEA,$$

следува дека $\triangle ABE\cong\triangle AFE$. Оттука следува дека

$$\overline{AB}=\overline{AF} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\overline{AD}=\overline{AF}+\overline{FD}=\overline{AB}+\overline{CD}$.

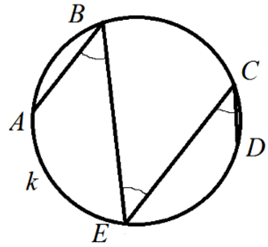
147. На кружницата последователно во насока на движењето на стрелката на часовникот се избрани точки A,B,C,D и E такви што

$$\measuredangle ABE=\measuredangle BEC=\measuredangle ECD=45^\circ.$$

Докажи дека

$$\overline{AB}^2+\overline{CE}^2=\overline{BE}^2+\overline{CD}^2. \qquad (1)$$

Решение. Од $\measuredangle ABE=\measuredangle BEC=45^\circ$ следува $AB\|EC$, што значи дека четириаголникот $ABCE$ е трапез. Исто така $BE\|CD$, па затоа четириаголникот $BEDC$ е трапез. Понатаму $\overline{AE}=\overline{BC}=\overline{ED}$ како тетиви над еднакви кружни лаци. Трапезите $AECB$ и $BEDC$ се рамнокраки, па затоа $\overline{AC}=\overline{BE}$ и $\overline{BD}=\overline{EC}$. Периферниот агол на лакот ED е $\measuredangle EBD=\measuredangle ECD=45^\circ$.



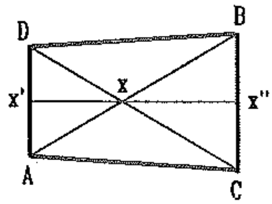
Според тоа, $\measuredangle ABD=90^\circ$, што значи дека AD е дијаметар на кружницата k и важи

$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2.$$

Сега бидејќи $\overline{AC}=\overline{BE}$ и $\overline{BD}=\overline{EC}$, од последното равенство следува равенството (1).

148. Нека X е произволна точка на отсечката $AB, \overline{AB}=d$. Нека C и D се точки на различни страни на правата AB и се такви што триаголниците AXD и XBC се рамнострани. Докажи дека четириаголникот $ACBD$ е рамнокрак трапез и определи ја неговата плоштина во зависност од d.

Решение. Од $\overline{AX}=\overline{DX}$, $\measuredangle AXC=\measuredangle BXD=120^\circ$ и $\overline{BX}=\overline{CX}$ следува дека $\triangle AXC\cong\triangle DXB$ (цртеж десно). Од докажаната складност следува $\overline{AC}=\overline{BD}$. Бидејќи $\measuredangle DAB=\measuredangle ABC=60^\circ$, добиваме $AD\|BC$, што заедно со $\overline{AC}=\overline{BD}$ дава дека четириаголникот $ACBD$ е рамнокрак трапез. Понатаму,



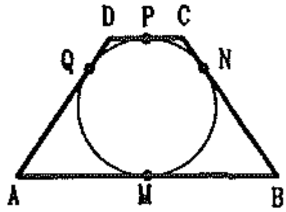
$$P_{ABCD}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\cdot\overline{X'X''}=\frac{\overline{AX}+\overline{BX}}{2}\cdot(\overline{XX'}+\overline{XX''})$$
$$=\frac{\overline{AB}}{2}\cdot\left(\frac{\overline{AX}\sqrt{3}}{2}+\frac{\overline{BX}\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\overline{AB}}{2}\cdot\frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2}=\frac{d^2\sqrt{3}}{4}.$$

149. Околу кружница со радиус $5\,cm$ е опишан трапез со плоштина $120\,cm^2$. Определи го збирот на краците на овој трапез.

Решение. Имаме,

$$\overline{AM}=\overline{AQ},\ \overline{MB}=\overline{BN},\ \overline{NC}=\overline{CP} \text{ и } \overline{PD}=\overline{DQ},$$

како тангентни отсечки од иста точка, па затоа



$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{CD}&=\overline{AM}+\overline{MB}+\overline{CP}+\overline{PD}\\&=\overline{AQ}+\overline{BN}+\overline{CN}+\overline{DQ}\\&=\overline{AD}+\overline{BC}.\end{aligned}$$

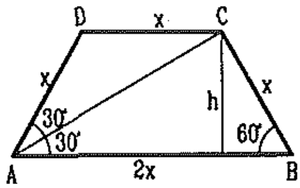
Плоштината на трапезот е $P=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h$, па затоа $120=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\cdot 2\cdot 5$ од каде добиваме $\overline{AD}+\overline{BC}=120:5=24\,cm$

150. Даден е трапез со должини на основи $6\,cm$ и $10\,cm$. Со три паралелни прави подели го трапезот на четири дела со еднакви плоштини.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот трапез, M_1 и N_1 се средини на основите AB и CD. Нека M_2 и M_3 се точки на основата AB такви што $\overline{M_1M_2}=\overline{M_1M_3}=2\,cm$ (направи цртеж). Правата M_1N_1 го дели трапезот на два трапези со еднакви плоштини, а правите низ M_2 и M_3 кои се паралелни на неа ги делат овие трапези на по два дела со еднакви плоштини. Навистина, добиените паралелограми имаат иста висина како и трапезите, а основата им е еднаква на полузбирот на основите.

151. Во трапезот $ABCD$ дијагоналата AC е нормална на кракот BC и го полови аголот $\measuredangle BAD$. Определи ја плоштината на трапезот ако $\measuredangle ABC=60^\circ$ и периметарот на трапезот е еднаков на $2\,m$.

Решение. Бидејќи AC е симетрала на $\measuredangle BAD$, заклучуваме дека $\triangle ACD$ е рамнокрак. Понатаму, $\triangle ABC$ е правоаголен и како $\measuredangle ABC=60^\circ$, следува $\measuredangle BAC=30^\circ$, па затоа $\measuredangle BAD=60^\circ$. Значи, аглите при основата на трапезот се еднакви, па затоа трапезот е рамнокрак. Од досега изнесеното следува дека $\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{CB}=x$ и $\overline{AB}=2x$, па затоа $5x=200$, т.е. $x=40\,cm$. Според тоа, $h=\frac{40\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}\,cm$ и $P=\frac{x+2x}{2}h=1200\sqrt{3}\,cm^2$.



152. Околу трапез со основи $a=24\,cm$ и $b=10\,cm$ е опишана кружница. Плоштината на трапезот е $P=289\,cm^2$.

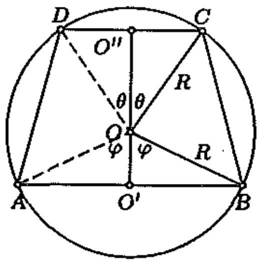
а) Докажи дека трапезот е рамнокрак.

б) Определи го радиусот на опишаната кружница околу трапезот.

в) Определи го аголот меѓу дијагоналата и основата на трапезот.

г) Определи го аголот меѓу дијагоналите на трапезот.

Решение. Нека O е центарот на кружницата опишана околу дадениот трапез $ABCD$ и нека O' и O'' се подножјата на нормалите повлечени од точката O кон основите AB и CD (цртеж десно). Тогаш $\triangle AOO' \cong \triangle BOO'$ и $\triangle COO'' \cong \triangle DOO''$. Од овие складности следува



$\measuredangle AOO' = \measuredangle BOO' = \varphi$ и $\measuredangle COO'' = \measuredangle DOO'' = \theta$.

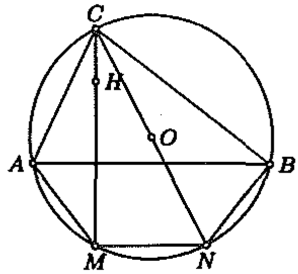
Оттука следува $\measuredangle AOD = 180^\circ - \varphi - \theta = \measuredangle BOC$, па затоа $\triangle AOD \cong \triangle BOC$. Конечно, од докажаната складност добиваме $\overline{AD} = \overline{BC}$, т.е. трапезот е рамнокрак.

Понатаму, според условот на задачата $P=289\,cm^2$ и $a+b=34\,cm$, па затоа за висината на трапезот добиваме $h=\frac{2P}{a+b}=\frac{289}{17}=17\,cm$. Имаме $x=\overline{OO'}$. Од Питагоровата теорема применета на триаголниците BOO' и COO'' следува равенката

$$x^2+5^2=R^2=(17-x)^2+12^2,$$

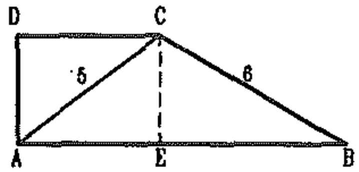
чие решение е $x=12\,cm$, па затоа $R=\sqrt{12^2+5^2}=13\,cm$. На крајот нека точката C' е подножјето на нормалата повлечена од точката C на основата AB. Имаме, $\overline{AC'}=b+\frac{a-b}{2}=17\,cm=\overline{CC'}$, па затоа триаголникот ACC' е рамнокрак, што значи декаголот меѓу основата и дијагоналата на трапезот е еднаков на 45°. Конечно, аголот меѓу дијагоналите на трапезот е еднаков на 90°.

153. Даден е разностран триаголник ABC со ортоцентар H и центар на опишана кружница O. Нека правите CH и CO по втор пат ја сечат опишаната кружница во точките M и N, соодветно. Докажи дека точките A,B,M и N се темиња на рамнокрак трапез.



Решение. Бидејќи H е ортоцентар важи $CM \perp AB$, а како CN е дијаметар на опишаната кружница важи $\measuredangle CMN = 90^\circ$, т.е. $CM \perp MN$. Според тоа, $AB \| MN$, т.е. четириаголникот $ABNM$ е трапез (цртеж десно). Ако $\measuredangle BAC = \alpha$, тогаш $\measuredangle ACM = 90^\circ - \alpha$, а $\measuredangle BOC = 2\alpha$. Според тоа, $\measuredangle NCB = 90^\circ - \alpha$, па затоа перифериските агли $\measuredangle ACM$ и $\measuredangle NCB$ се еднакви, што значи дека и соодветните тетиви се еднакви, односно $\overline{AM} = \overline{BN}$.

154. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголен трапез $ABCD$ со прав агол во темето A, пократка дијагонала $\overline{AC} = 5\,cm$, крак $\overline{BC} = 6\,cm$ и остар агол на трапезот $\measuredangle ABC = 30^\circ$.



Решение. Од $\overline{BC} = 6\,cm$ и $\measuredangle ABC = 30^\circ$ следува

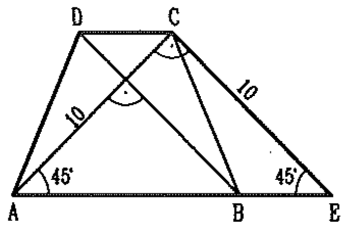
$\overline{CE} = \overline{AD} = 3\,cm$ и $\overline{BE} = 3\sqrt{3}\,cm$.

Сега

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CE}^2 = 25 - 9 = 16,$$

па затоа $\overline{CD} = \overline{AE} = 4\,cm$. Според тоа, $\overline{AB} = 4 + 3\sqrt{3}\,cm$, па затоа периметарот на трапезот е $4 + 3\sqrt{3} + 6 + 4 + 3 = 17 + 3\sqrt{3}\,cm$, а неговата плоштина е $\frac{4+3\sqrt{3}+4}{2} \cdot 3 = 12 + \frac{9\sqrt{3}}{2}\,cm^2$.

155. Дијагоналата на рамнокрак трапез е долга $10\,cm$ и со поголемата основа формира агол од 45°. Пресметај ја плоштината на овој трапез.

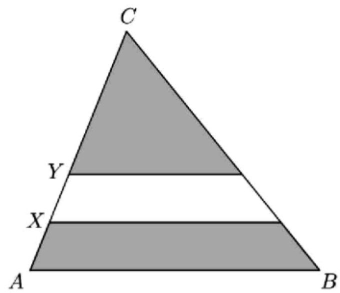


Решение. Нека рамнокракиот трапез е $ABCD$ и нека $CE \| DB$ (цртеж десно). Тогаш $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AB} + \overline{CD}$ и триаголникот AEC е рамнокрак правоаголен. Затоа $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AE} = 10\sqrt{2}\,cm$ и висината на трапезот е $h = \frac{\overline{AE}}{2} = 5\sqrt{2}\,cm$.

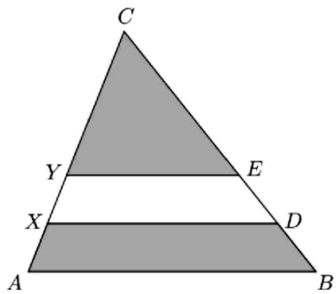
Конечно, плоштината на трапезот е

$$P=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h=50\,cm^2.$$

156. Во $\triangle ABC$ во точките X и Y на страната AC се повлечени отсечки паралелни со страната AB (цртеж десно). Точката X ја дели страната AC на два дела така што $\overline{AX}:\overline{XC}=1:4$. Ако плоштините на двата сиви делови на $\triangle ABC$ се еднакви, определи го односот $\overline{CY}:\overline{YA}$.



Решение. Низ точките X и Y повлекуваме прави паралелни на основата AB и нека D и E се пресечните точки на овие прави со страната BC (цртеж десно).



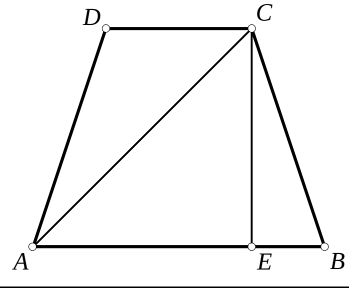
Бидејќи $\measuredangle CXD=\measuredangle CAB$ (агли со паралелни краци) и $\measuredangle AB=\measuredangle XCD$ добиваме дека $\triangle ABC\sim\triangle XDC$. Понатаму, од $\overline{AX}:\overline{XC}=1:4$ следува $\overline{AC}:\overline{CX}=5:4$, т.е. коефициентот на сличност е $k=\frac{4}{5}$. Понатаму, $P_{\triangle XDC}:P_{\triangle ABC}=(\frac{4}{5})^2=\frac{16}{25}$, т.е. $P_{\triangle XDC}=\frac{16}{25}P_{\triangle ABC}$. Да ја изразиме плоштината на четириаголникот $ABDX$. Имаме

$$P_{ABDX}=P_{\triangle ABC}-P_{\triangle XDC}=P_{\triangle ABC}-\frac{16}{25}P_{\triangle ABC}=\frac{9}{25}P_{\triangle ABC}.$$

Според условот на задачата $P_{\triangle YEC}=P_{ABDX}=\frac{9}{25}P_{\triangle ABC}$. Понатаму, триаголниците YEC и ABC се исто така слични и бидејќи важи $P_{\triangle YEC}:P_{\triangle ABC}=9:25$ следува дека $\overline{CY}:\overline{CA}=3:5$, од каде добиваме дека $\overline{CY}:\overline{YA}=3:2$.

157. Дијагоналата на рамнокрак трпез има должина $6\,cm$ и со поголемата основа зафаќа агол од 45°. Определи ја плоштината на трапезот.

Решение. Ќе повлечеме висината CE. Триаголникот AEC е рамнокрак правоаголен. Притоа $\overline{AE}=\frac{a+b}{2}$ и $\overline{CE}=h$. Бидејќи $\overline{AE}=\overline{CE}$, добиваме $\frac{a+b}{2}=h$.

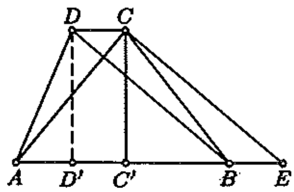


Плоштината на трапезот е еднаква на плоштината на квадрат со страна h. Бидејќи неговата дијагонала е $d=6\ cm$ добиваме

$$P=\frac{d^2}{2}=\frac{6^2}{2}=18\ cm^2.$$

158. Трапезот $ABCD$ не е рамнокрак и дијагоналите $\overline{AC}=20\,cm$ и $\overline{BD}=15\,cm$ се сечат под прав агол. Определи ги плоштината и периметарот на трапезот $ABCD$ ако должината на поголемата основа е $\overline{AB}=21\,cm$.

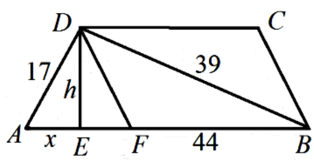
Решение. Низ темето C повлекуваме права паралелна со BD и нека истата ја сече правата AB во точката E. Тогаш $\overline{CE}=15\,cm$. Триаголникот ACE е правоаголен ($AC\perp DB$ и $DB\| CE$ па затоа $AC\perp CE$),



што според Питагоровата теорема значи дека неговата хипотенуза е $\overline{AE}=25\,cm$. Сега од $\overline{AB}=21\,cm$ следува $\overline{CD}=\overline{BE}=4\,cm$. Понатаму, $\overline{CC'}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{CE}}{\overline{AE}}=12\,cm$. Сега од правоаголниот триаголник $CC'E$ следува $\overline{C'E}=9\,cm$, па затоа $\overline{C'B}=5\,cm$. Според тоа, $\overline{BC}=13\,cm$ и како $\overline{AD'}=\overline{AE}-\overline{BE}-\overline{BC'}-\overline{C'D'}=12\,cm$, добиваме дека другиот крак е $\overline{AD}=12\sqrt{2}\,cm$. Според тоа, за периметарот на трапезот добиваме $L=(40+12\sqrt{2})\,cm$, а за плоштината добиваме $P=150\,cm^2$.

159. Должината на поголемата основа на рамнокрак трапез е $44\,cm$, должината на кракот е $17\,cm$, а должината на дијагоналата е $39\,cm$. Пресметај ја плоштината на трапезот.

Решение. Нека $h=\overline{DE}$ е должината на висината на трапезот $ABCD$ и $\overline{AE}=x$ (цртеж десно). Со примена на Питагоровата теорема на правоаголните триаголници AED и BED добиваме



$$h^2=17^2-x^2 \text{ и } h^2=39^2-(44-x)^2.$$

Од последните две равенки ја добиваме равенката

$$17^2-x^2=39^2-(44-x)^2,$$

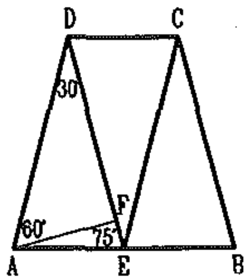
чие решение е $x=8cm$.

Според тоа, $h^2=17^2-8^2=225$, па затоа $h=15\,cm$. Триаголникот AFD е рамнокрак, па затоа $x=\frac{a-c}{2}$, т.е. $c=a-2x=44-16=28\,cm$. Конечно, за плоштината на трапезот наоѓаме

$$P=\frac{a+c}{2}h=\frac{44+28}{2}\cdot 15=540\,cm^2\,.$$

160. Аголот при основата на рамнокрак трапез е еднаков на 75°, а основите му се однесуваат како $2:1$. Ако должината на кракот е $10\,cm$, определи ја плоштината на дадениот трапез.

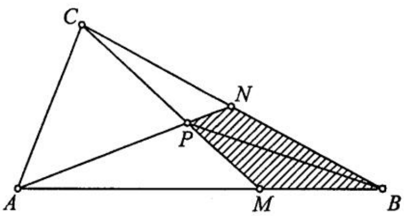
Решение. Нека E е средината на поголемата основа (цртеж десно). Тогаш триаголниците AED, CDE и EBC се складни (зошто?). Нека AF е висината на триаголникот AED. Тогаш бидејќи $\measuredangle ADF=180^\circ-2\cdot 75^\circ=30^\circ$, добиваме $\measuredangle DAF=60^\circ$, што значи дека триаголникот AED е половина од рамностран триаголник, па



затоа $\overline{AF}=\frac{\overline{AD}}{2}=5\,cm$. Значи, $P_{\triangle AED}=\frac{10\cdot 5}{2}=25\,cm^2$, па затоа плоштината на трапезот е $P_{ABCD}=3P_{\triangle AED}=3\cdot 25\,cm^2=75\,cm^2$.

161. Даден е $\triangle ABC$ со плоштина $60\,cm^2$. Нека точките M и N на страните AB и BC, соодветно се такви што $\overline{AM}=2\overline{MB}$ и $\overline{BN}=\overline{NC}$ и нека P е пресечната точка на AN и CM. Определи ја плоштината на четириаголникот $MBNP$.

Решение. Од условот на задачата следува $\overline{AM}=\frac{2}{3}\overline{AB}$, $\overline{MB}=\frac{1}{3}\overline{AB}$ и $\overline{BN}=\overline{NC}=\frac{1}{2}\overline{BC}$. Понатаму,



$$P_{MBNP}=P_{MBP}+P_{BNP}.$$

Да означиме $x=P_{MBP}$, $y=P_{BNP}$. Тогаш $P_{MBNP}=x+y$. Триаголниците ABP, AMP и MBP имаат заедничка висина од темето P. Ако должината на оваа визина ја означиме со v, тогаш

$$P_{ABP}=\frac{\overline{AB}\cdot v}{2},\, P_{AMP}=\frac{\overline{AM}\cdot v}{2}=\frac{2}{3}\frac{\overline{AB}\cdot v}{2}=\frac{2}{3}P_{ABP}\,,$$

$$P_{MBP}=\frac{\overline{MB}\cdot v}{2}=\frac{1}{3}\frac{\overline{AB}\cdot v}{2}=\frac{1}{3}P_{ABP}\,,$$

па затоа

$$P_{ABP}=3P_{MBP}=3x \text{ и } P_{AMP}=\tfrac{2}{3}P_{ABP}=\tfrac{2}{3}\cdot 3x=2x.$$

Бидејќи триаголниците BCP, BNP и NCP имаат заедничка висина од темето P со аналогни размислувања се добива $P_{BNP}=\frac{1}{2}P_{BCP}$, $P_{NCP}=\frac{1}{2}P_{BCP}$, т.е. $P_{BCP}=2P_{NCP}=2y$ и $P_{NCP}=y$. Сега да ги разгледаме триаголниците MBC и ABN. Имаме

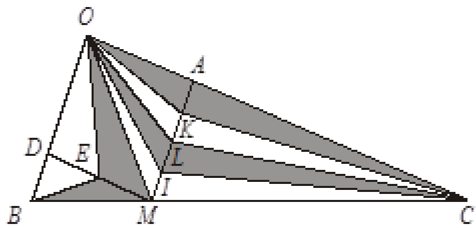
$$P_{MBC}=P_{MBP}+P_{BCP}=x+2y \text{ и } P_{ABN}=P_{ABP}+P_{BNP}=3x+y.$$

Од друга страна триаголниците ABC и MBC имаат заедничка висина од темето C, па затоа $P_{MBC}=\frac{1}{3}P_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot 60=20\,cm^2$. Исто така, заради заедничката висина од темето A за триаголниците ABC и ABN важи $P_{ABN}=\frac{1}{2}P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 60=30\,cm^2$. Според тоа,

$$\begin{cases} x+3y=20 \\ 3x+y=30 \end{cases}$$

па затоа $x=8\,cm^2, y=6\,cm^2$. Конечно, $P_{MBNP}=x+y=14\,cm^2$.

162. Градината на баба Милка има триаголна форма BCO, како што е прикажано на цртежот. Отсечките MA и MD са нормални соодветно на страните OC и OB. Точката E е средината на отсечката MD, а точките I, L и K ја делат отсечката MA на еднакви делови.



а) Ако $\overline{MI}=2{,}5m$, $\overline{MD}=10m$ и $\overline{OC}+\overline{OB}=51{,}4m$, определи ја плоштината на градината на баба Милка.

б) Во затемнетите делови *OMBE*, *ICLO* и *KCO* баба Милка одгледува овошје, а во другите делови на градината таа одгледува зеленчук. Што баба Милка одгледува на поголема површина, овошје или зеленчук.

Решение. а) Од условот $\overline{MI}=2{,}5m$ наоѓаме дека $\overline{MA}=10m$. Значи,

$$P_{OBC}=P_{OMC}+P_{OMB}=\frac{\overline{OC}\cdot\overline{MA}}{2}+\frac{\overline{OB}\cdot\overline{MD}}{2}=5\cdot(\overline{OC}+\overline{OB})=5\cdot 51{,}4=257m^2.$$

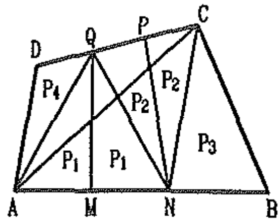
б) Триаголниците *DEO* и *MEO* имаат еднакви основи и заедничка висина од темето *O*. Следствено тие имаат еднакви плоштини. Аналогно триаголниците BED и *BME* имаат еднакви основи и заедничка висина од темето B. Така добиваме, дека $P_{OMBE} = P_{OBE}$. Триаголниците *MIO, ILO, LKO* и *KAO* имаат еднакви основи и заедничка висина од темето *O.* Следствено плоштините им се еднакви. Аналогно и плоштините на триаголниците *MIC, ILC, LKC* и *KAC* се еднакви. Следствено

$$P_{MCIO} = P_{ICLO} = P_{LCKO} = P_{KCO},$$

што значи дека баба Милка зеленчук и овошје одгледува на површини со еднакви плоштини.

163. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ со плоштина $1995\,cm^2$. На страната AB се земени точки M и N такви што $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NB}$, а на страната CD се земени точки P и Q такви што $\overline{CP} = \overline{PQ} = \overline{QD}$. Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.

Решение. Нека $P_{\triangle MNQ} = P_1$, $P_{\triangle NPQ} = P_2$, $P_{\triangle NBC} = P_3$ и $P_{\triangle AQD} = P_4$ (цртеж десно). Тогаш $P_{\triangle AMQ} = P_1$, бидејќи триаголниците AMQ и MNQ имаат еднакви основи AM и MN и еднакви висини. Слично $P_{\triangle NPC} = P_2$, бидејќи триаголниците NPQ и NPC имаат еднакви основи PC и PQ и еднакви висини. Според тоа,



$$P_{ABCD} = 2P_1 + 2P_2 + P_3 + P_4.$$

Понатаму имаме

$$P_{\triangle AQD} = P_4 = \tfrac{1}{3} P_{\triangle ACD},\ P_{\triangle NBC} = P_3 = \tfrac{1}{3} P_{\triangle ABC},$$

бидејќи $\overline{BN} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ и $\overline{QD} = \frac{1}{3}\overline{CD}$. Значи,

$$P_3 + P_4 = \tfrac{1}{3}(P_{\triangle ACD} + P_{\triangle ABC}) = \tfrac{1}{3} P_{ABCD}.$$

Според тоа,

$$P_{ABCD} = 2P_1 + 2P_2 + \tfrac{1}{3} P_{ABCD},$$

па затоа

$$\tfrac{2}{3} P_{ABCD} = 2(P_1 + P_2) = 2P_{MNPQ},$$

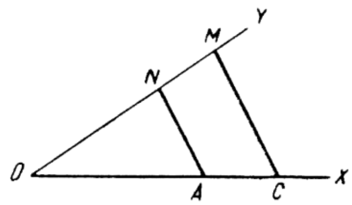
од каде добиваме

$$P_{MNPQ} = \tfrac{1}{3} P_{ABCD} = \tfrac{1}{3} \cdot 1995 = 665\,cm^2.$$

V.4. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

164. Да се подели дадена отсечка со должина a на две отсечки, кои се пропорционални на две дадени отсечки со должини m и n.

Решение. Конструираме произволен $\measuredangle XOY$ и на полуправата OX наоѓаме точка C таква, што $\overline{OC}=a$ (цртеж десно). Понатаму на полуправата OY наоѓаме точка N таква, што $\overline{ON}=n$ и на полуправата NY наоѓаме точка M



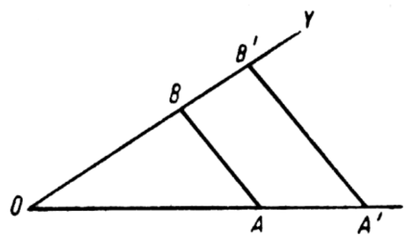
таква, што $\overline{NM}=m$. Ја повлекуваме правата MC и низ точката N повлекуваме права која е паралелна на правата MC и нека A е пресечната точка на оваа права и полуправата OX.

Јасно, $\triangle OAN \sim \triangle OCM$, па затоа $\overline{OA}:\overline{OC}=\overline{ON}:\overline{OM}$, од што следува дека $\overline{OA}:\overline{AC}=\overline{ON}:\overline{NM}=n:m$.

165. Да се конструира отсечка, која е четврта геометриска пропорционала на три дадени отсечки.

Решение. Нека се дадени три отсечки со должини a,b и a' и нека треба да се конструира отсечка за чија должина b' важи $a:a'=b:b'$.

Конструираме произволен $\measuredangle XOY$ и на полуправата OX наоѓаме точки A и A' такви, што $\overline{OA}=a$ и $\overline{OA'}=a'$, а на полуправата OY наоѓаме точка B таква, што $\overline{OB}=b$. Повлекуваме права низ точката A'



паралелна на правата AB и нека B' е пресекот на оваа права со полуправата OY. Јасно, $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$, па затоа $\overline{OA}:\overline{OA'}=\overline{OB}:\overline{OB'}$, од што следува дека $a:a'=b:\overline{OB'}$, т.е. $\overline{OB'}$ е бараната отсечка.

166. Дадени се отсечки со должини a и b. Конструирај отсечка со должина $x=ab$.

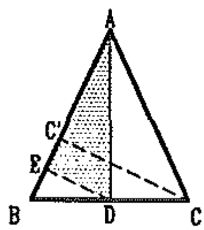
Упатство. Од $x=ab$ следува пропорцијата $e:a=b:x$, каде што e е единечната должина. Сега отсечката со должина x ја конструираме како во претходната задача.

167. Дадена е отсечка со должина a. Конструирај отсечка со должина $x = a^2$.

Упатство. Искористи ја претпдната задача, при услов $a = b$.

168. Конструирај рамнокрак триаголник кај кој должината на висината која соодветствува на основата е еднаква на $3cm$, а должината на висината која соодветствува на кракот е еднаква на $4cm$.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека $\triangle ABC$ е конструиран, D е средината на основата BC и нека E е подножјето на нормалата повлечена од D кон AB. Тогаш DE е средна линија на $\triangle BCC'$, па затоа $\overline{DE} = \frac{\overline{CC'}}{2} = 2\,cm$. Според тоа, за правоаголниот $\triangle ADE$ се познати хипотенузата $\overline{AD} = 3\,cm$ и катетата $\overline{DE} = 2\,cm$, па затоа тој може да се конструира.



Конструкција. Го конструираме помошниот правоаголен $\triangle ADE$ со хипотенуза $\overline{AD} = 3\,cm$ и катетата $\overline{DE} = 2\,cm$. Потоа во точката D повлекуваме нормална права p на AD и во пресекот на правите p и AE го наоѓаме темето B. Конечно, темето C го добиваме како симетрична точка на точката B во однос на правата AD.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

169. Конструирај правоаголен триаголник ABC за кој се познати должината на хипотенузата AB и должината на тежишната линија BB_1.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека задачата е решена (направи цртеж) и дека ABC е бараниот триаголник. Нека T е тежиштето на $\triangle ABC$ и C_1 е средината на хипотенузата AB. Тогаш точката T ја дели тежишната линија BB_1 во однос $2:1$, па затоа $\overline{BT} = \frac{2}{3}\overline{BB_1}$.

Понатаму, од сличнми причини

$$\overline{C_1T} = \frac{1}{3}\overline{CC_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{6}\overline{AB},$$

шро значи дека точката T се наоѓа во пресекот на кружниците $k(B, \frac{2}{3}\overline{BB_1})$ и $k'(C_1, \frac{1}{6}\overline{AB})$.

Конструкција. Ја нанесуваме хипотенузата AB и ја наоѓаме нејзината средина C_1.

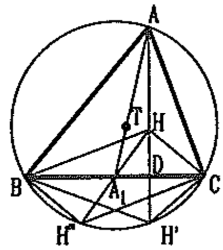
Ги конструираме кружниците $k(B,\frac{2}{3}\overline{BB_1})$ и $k'(C_1,\frac{1}{6}\overline{AB})$ и во нивниот пресек ја наоѓаме точката T. Конечно, темето C го наоѓаме во пресек на правата C_1T и кружницата $k^*(C_1,\frac{1}{2}\overline{AB})$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност ако $\frac{1}{2}\overline{AB} < \overline{BB_1} < \overline{AB}$, а во спротивнои нема решение.

170. Дадени се три неколинеарни точки A, T и H. Конструирај $\triangle ABC$ за кој точката A е негово теме, точката T е негово тежиште и точката H е негов ортоцентар.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека $\triangle ABC$ е конструиран. Нека A_1 е средина на страната BC и $D = AH \cap BC$. Нека H' и H'' се точките симетрични на точката H во однос на D и A_1, соодветно. Тогаш триаголниците BHC, $BH'C$ и $CH''B$ се складни, па затоа $\measuredangle BHC = \measuredangle BH'C = \measuredangle CH''B$. Понатаму, H е ортоцентар



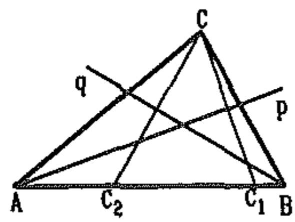
имаме т.е. $BH \perp AC$ и $CH \perp AB$, па затоа $\measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle BAC$, како остар и тап агол со нормални краци. Според тоа, $\measuredangle BH'C = \measuredangle CH''B = 180^\circ - \measuredangle BAC$ од каде што следува дека H' и H'' припаѓаат на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Конструкција. На правата AT наоѓаме точка A_1 таква што $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1}$. Потоа конструираме права n која минува низ точката A_1 и е нормална на правата AH и наоѓаме $n \cap AH = D$. Сега ги конструираме точките H' и H'' кои се симетрични на точката H во однос на D и A_1, соодветно. Сега ја конструираме опишаната кружница околу $\triangle AH'H''$ и во пресек на истата со правата n ги добиваме темињата B и C.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

171. Дадена е точка C и прави p и q кои се сечат. Конструирај $\triangle ABC$ кај кој правата p е симетрала на внатрешниот агол при темето A, а правата q е симетрала на внатрешниот агол при темето B.



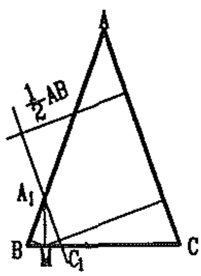
Решение. *Анализа.* Нека претоставиме дека $\triangle ABC$ е конструиран и нека C_1 е точката симетрилна на точката C во однос на правата p, а C_2 е точката симетрична на точката C во однос на правата q. Јасно, точките C_1 и C_2 припаѓаат на правата AB, што значи дека $C_1C_2 \cap q = B$ и $C_1C_2 \cap p = A$.

Конструкција. Ги конструираме точките C_1 и C_2 кои се симетрилни на точката C во однос на правите p и q, соодветно, а потоа наоѓаме $C_1C_2 \cap q = B$ и $C_1C_2 \cap p = A$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Во случај кога правата C_1C_2 ги сече правите p и q задачата има единствено решение, а ако C_1C_2 е паралелна или со правата p или со правата q задачата нема решение.

172. На основата BC на рамнокракиот остроаголен $\triangle ABC$ определи точка M таква што разликата на растојанијата од точката M до краците на $\triangle ABC$ е еднаква на половината од должината на кракот AB.



Решение. Конструираме права p паралелна на кракот AC на $\triangle ABC$, која е на растојание еднакво на половина од должината на кракот AB. Нека пресечните точки на оваа права со кракот AB и основата BC се A_1 и C_1, соодветно. Нека точката M е подножјето на нормалата повлечена од точката A_1 на основата BC. Ќе докажеме дека точката M ги задоволува условоите на задачата.

Нека M_1 и M_2 се подножјата на нормалите повлечени од точката M на краците A_1B и A_1C_1 на рамнокракиот триаголник A_1BC_1, соодветно, а M_3 е подножјето на нормалата повлечена од M на кракот AC. Бидејќи точката M е средина на соновата на триаголникот A_1BC_1, добиваме дека $\overline{M_1M} = \overline{M_2M}$. Затоа важи

$$\overline{M_3M} - \overline{M_1M} = \overline{M_2M} + \tfrac{1}{2}\overline{AB} - \overline{M_1M} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}\,.$$

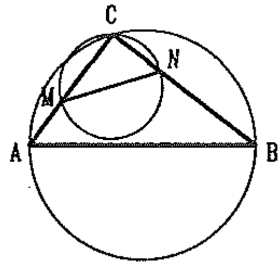
Пожелно е читателот самостојно да ги испише анализата, доказот и дискусијата.

173. Дадена е кружница $k(O, r = 3cm)$ и во нејзината внатрешност произволни точки M и N. Во дадената кружница впиши правоаголен триаголник ABC така што точката M ќе припаѓа на катетата AC, а точката N ќе припаѓа на катетата BC.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека задачата е решена. Бидејќи триаголникот ABC е правоаголен, заклучуваме дека

$$\measuredangle ACB = \measuredangle MCN = 90^\circ$$

(цртеж десно). Множеството точки од кои отсечката MN се гледа под прав агол е кружницата k_1 со дијаметар MN, па значи точката C е во пресекот на кружниците k и k_1.



Конструкција. Конструираме кружница k_1 со дијаметар MN и наоѓаме $k \cap k_1 = C$. Понатаму ги повлекуваме правите CM и CN и вторите пресечни точки на овие прави со кружницата k се темињата A и B, соодветно.

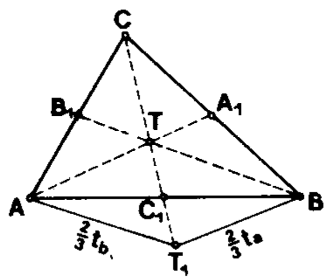
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има две, едно или нема решение.

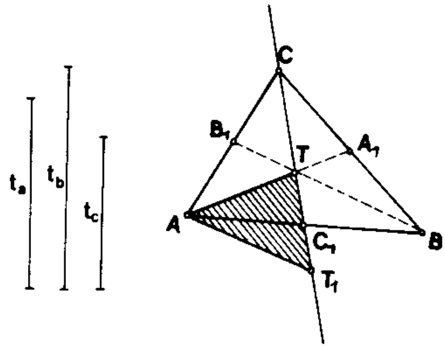
174. Конструирај триаголник со зададени тежишни линии t_a, t_b и t_c.

Решение. *Анализа*. Нека бараниот триаголник ABC со тежишни линии t_a, t_b и t_c е конструиран и нека T е неговото тежиште (цртеж десно).

Познато е дека тежиштето T ги дели тежишните линии во однос $2:1$ (тргнувајќи од темето). Да ја продолжиме тежишната линија t_c преку точката C_1 за $\frac{1}{3}t_c$. Ако добиената точка T_1 ја поврземе со темињата A и B, ќе добиеме паралелограм AT_1BT, за кој страните се $\frac{2}{3}t_a$ и $\frac{2}{3}t_b$, а дијагоналите се $\frac{2}{3}t_c$ и $\overline{AB} = c$. Според тоа, должините на страните на ΔAT_1T се $\overline{AT} = \frac{2}{3}t_a$, $\overline{AT}1 = \frac{2}{3}t_b$ и $\overline{TT}1 = \frac{2}{3}t_c$ и C_1 е средина на страната TT_1.



Конструкција. Го конструираме $\triangle AT_1T$ со страни $\overline{AT}=\frac{2}{3}t_a$, $\overline{AT}1=\frac{2}{3}t_b$ и $\overline{TT}1=\frac{2}{3}t_c$ и повлекува тежишна линија AC_1, која е половина од страна AB. Понатаму, ја продолжуваме страната AC_1 преку точката C_1 за должина $\overline{AC_1}$ и го наоѓаме темето B. Темето C ќе се добие ако страната TT_1 ја продолжиме преку темето T за должина $\overline{TT_1}=\frac{2}{3}t_c$ (цртеж десно).



Доказ. Доволно е да докажеме дека добиениот триаголник има тежишни линии t_a,t_b и t_c. Бидејќи C_1 е средина на страната AB добиваме дека CC_1 е тежишната линија на $\triangle ABC$ повлечена од темето C. Понатаму, од $\overline{TT_1}=\frac{2}{3}t_c$ и C_1 е средина на TT_1 следува дека точката T ја дели тежишната линија на $\triangle ABC$ повлечена од темето C во однос $2:1$, што значи T е тежиште на ΔABC. Конечно, од $\overline{BT}=\overline{AT_1}=\frac{2}{3}t_b$ и $\overline{AT}=\overline{BT_1}=\frac{2}{3}t_a$ следува дека $\triangle ABC$ има тежишни линии t_a,t_b и t_c.

Дискусија. Од неравенствата за страните на триаголник следува дека триаголникот $\triangle AT_1T$ со страни $\overline{AT}=\frac{2}{3}t_a$, $\overline{AT}1=\frac{2}{3}t_b$ и $\overline{TT}1=\frac{2}{3}t_c$ може еднозначно да се конструира ако и само ако

$$\tfrac{2}{3}t_a<\tfrac{2}{3}t_b+\tfrac{2}{3}t_c \text{ и } \tfrac{2}{3}t_a>|\tfrac{2}{3}t_b-\tfrac{2}{3}t_c|,$$

т.е. ако и само ако

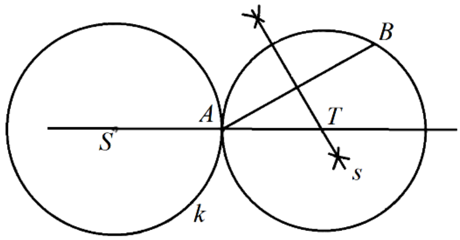
$$t_a<t_b+t_c \text{ и } t_a>|t_b-t_c|, \qquad (1)$$

а останатите елементарни конструкции се секогаш изводливи. Според тоа, задачата ќе има единствено решение ако и само ако отсечките t_a,t_b и t_c го задоволуваат условот (1).

175. Дадена е кружница k, точка A на кружницата k и точка B надвор од кружницата k. Конструирај кружница која минува низ точката B и ја допира кружницата k во точката A.

Решение. *Анализа*. Нека S е центарот на кружницата k и со T да го означиме центарот на бараната кружница. Бидејќи бараната кружница минува низ точките A и B, нејзиниот центар се наоѓа на симетралата s на отсечката AB. Понатаму, кружницата k и бараната кружница се допираат во точката A, па затоа точките S, A и T се колинеарни, т.е. T лежи на правата SA. Според тоа, $T = s \cap SA$ и $r = \overline{AT} = \overline{BT}$ е радиусот на бараната кружница.

Конструкција. Нека се дадени кружницата k и точките $A \in k$ и B надвор од k. Ја повлекуваме правата SA и ја конструираме симетралата s на отсечката AB. Наоѓаме, $T = s \cap SA$ и ја конструираме бараната кружница со центар во T и радиус $r = \overline{AT}$.

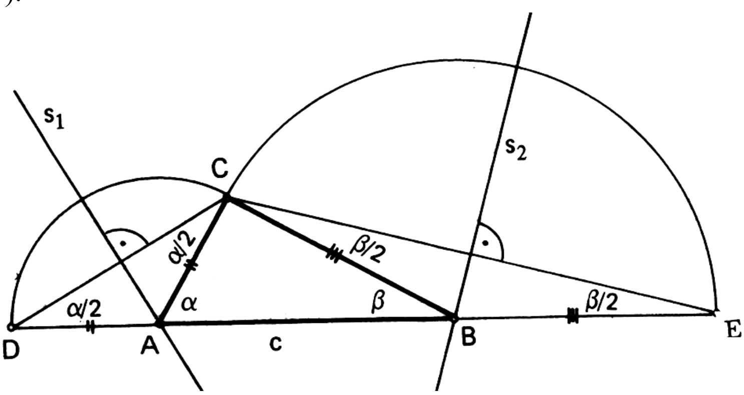


Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има едно или нема решение. Ако точките S, A и B се такви што $AB \perp SA$, тогаш симетралата s на отсечката AB и правата SA не се сечат, што значи дека во овој случај задачата нема решение, а во секој друг случај таа има единствено решение.

176. Конструирај триаголник ABC, ако се дадени $a+b+c, \alpha$ и β.

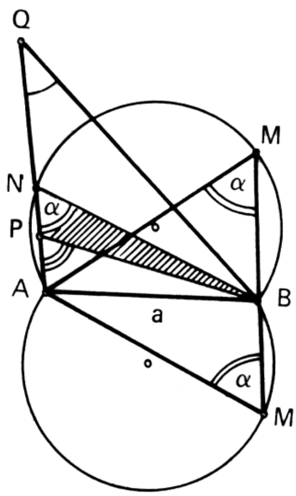
Решение. Ако ја продолжиме страната AB на двете страни за $\overline{AD} = \overline{AC} = b$ $\overline{BE} = \overline{BC} = a$ ги добиваме рамнокраките триаголници CDA и ECB, чии агли при основата се $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ соодветно, цртеж долу (зошто?).



Според тоа, за $\triangle DEC$ познати се една страна $a+b+c$ и двата прилегнати агли $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$, па затоа истиот може да се конструира (АСА). Понатаму, наоѓаме симетрала s_1 на страната DC и $A=s_1\cap DE$, а потоа наоѓаме симетрала s_2 на страната EC и $B=s_2\cap DE$.
Конечно, $\triangle ABC$ ги задоволува условите на задачата и тој е нејзино единствено решение ако $\alpha+\beta<180^\circ$, а задачата нема решение ако $\alpha+\beta\geq 180^\circ$.

177. Најди геометриско место на точки од кои отсечката AB се гледа под даден агол α.

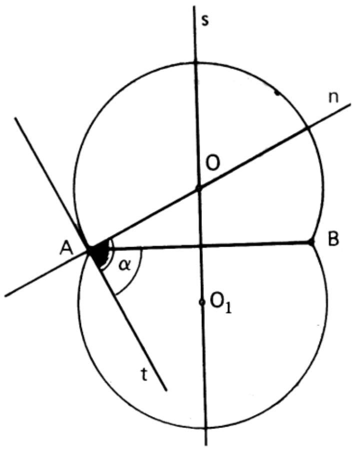
Решение. *Анализа.* Ќе го користиме својството дека сите периферијски агли во една кружница што се над ист лак, односно тетива, меѓусебно се еднакви.



Нека зададената отсечка AB и аголот α ($0^\circ<\alpha<180^\circ$) се нацртани така, што аголот $\measuredangle AMB=\alpha$ (цртеж десно), т.е. M е произволна точка од бараното геометриско место на точки. Опишуваме кружница околу $\triangle ABM$. Според споменатото својство на периферијските агли, следува дека секоја точка од лакот AMB, различна од A и B, може да биде теме на периферискиот агол α. Значи, од секоја точка на лакот AMB, без неговите краеви A и B, отсечката AB се гледа под агол α. Освен тоа отсечка AB се гледа под агол α и од точките на лакот $AM'B$, симетричен на лакот AMB во однос на правата AB (цртеж десно).
Доказ. Од анализата заклучивме дека секоја точка од лаците AMB и $AM'B$, различна од A и B, припаѓа на бараното геометриско место на точки. Ќе докажеме дека од секоја друга точка, отсечката AB се гледа под агол различен од α. Нека P е внатрешна точка за лакот AMB, а N пресечната точка на AP со лакот AMB (цртеж десно). За $\triangle BPN$ аголот APB е надворешен, па следува дека е поголем од секој внатрешен агол кој не му е соседен. Значи, $\measuredangle APB>\measuredangle ANB=\alpha$.

Слично, за точката Q, надворешна за лакот AMB, се докажува дека $\measuredangle AQB < \alpha$.

Значи, геометриското место на точки од кои отсечката AB се гледа под агол α, е фигурата образована од два лака на кружниците што минуваат низ точките A и B и се симетрични во однос на правата AB, без точките A и B.

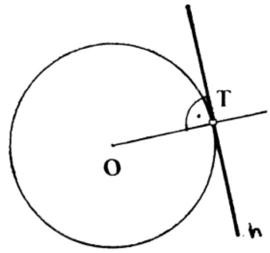


Конструкција. За конструкцијата на еден од лаците AMB или $AM'B$ ќе го користиме својството дека аголот меѓу тетивата и тангентата (повлечена од крајните точки на тетивата) е еднаков со периферниот агол над таа тетива.

На произволна полуправа ја нанесуваме дадената отсечка AB и во точката A го нанесуваме аголот α (цртеж лево), чиј втор крак е тангента на кружницата на која припаѓа лакот AMB. Ја повлекуваме нормалата n на тангентата t во точката A и симетралата s на отсечката AB. Нивниот пресек е центар на кружницата на која припаѓа лакот AMB. Ако α е остар агол тогаш бараното геометриско место е поголемиот од кружните лаци, а ако α е тап агол тогаш тоа е помалиот кружен лак.

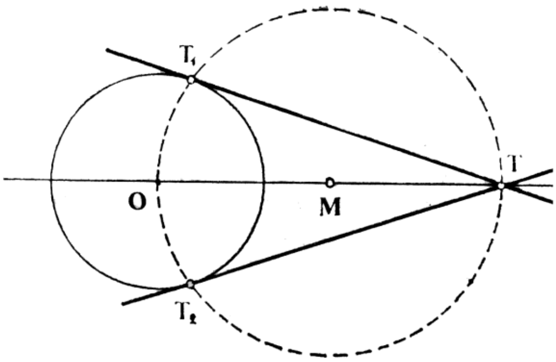
Дискусија. Ако $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, тогаш бараното геометриско место се два кружни лаци. Ако $\alpha = 0^\circ$, тогаш бараното геометриско место се состои од сите точки на правата AB, надворешни за отсечката AB. Ако $\alpha = 180^\circ$, тогаш бараното геометриско место се состои од внатрешните точки на отсечката AB. Ако $\alpha > 180^\circ$, тогаш задачата нема решение. Во случајот кога $\alpha = 90^\circ$, бараното геометриско место на точки е кружница со дијаметар AB, без точките A и B. ♦

178. Конструирај тангента на кружница $k(O,r)$ што минува низ дадена точка T.



Решение. а) Јасно, ако точката T е во внатрешноста на кружницата, т.е. $\overline{OT} < r$, тогаш задачата нема решение.

б) Ако точката T лежи на кружницата k, т.е. $\overline{OT}=r$, тогаш ја повлекуваме правата OT и во точката T конструираме нормала n на OT и тоа е бараната тангента (цртеж десно).



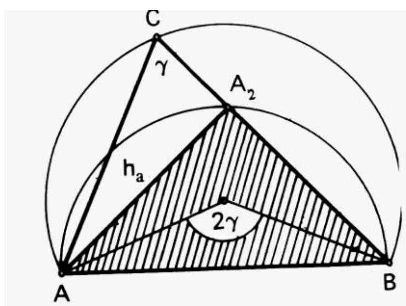
в) *Анализа*. Ако точката T е во надворешноста на кружницата, т.е. $\overline{OT}>r$, тогаш на кружницата треба да се определи таква точка T_1, што $\measuredangle TT_1O$ да е прав агол. Тоа значи дека треба да се определи точка T_1 од која отсечката OT се гледа под прав агол. Ако точката M е средина на отсечката OT, од пример 20 следува дека точката T_1 лежи на кружницата $k_1(M,\frac{\overline{OT}}{2})$.

Конструкција. Наоѓаме симетрала s на отсечката OT и во пресек со правата OT ја наоѓаме точка M. Потоа конструираме кружница $k_1(M,\frac{\overline{OT}}{2})$ и наоѓаме $k\cap k_1=\{T_1,T_2\}$. Ги повлекуваме правите TT_1 и TT_2 и тоа се бараните тангенти.

Забелешка. Покрај конструкцијата на тангента на кружница $k(O,r)$ што минува низ зададена точка T, при решавањето на конструктивни задачи често пати е потребно да се конструира тангента на кружница k паралелна на дадена права p. Оваа конструкција спаѓа меѓу елементарните конструкции и истата се изведува на следниот начин: од центарот O на кружницата k повлекуваме права n нормална на правата p, наоѓаме $k\cap p=\{T_1,T_2\}$ и во точките T_1 и T_2 конструираме тангенти на кружницата k (направи цртеж).

179. Конструирај триаголник зададен со R,γ,h_a.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека задачата е решена (цртеж десно). Бидејќи страната AB се гледа под агол γ, добиваме дека централниот агол е 2γ, па



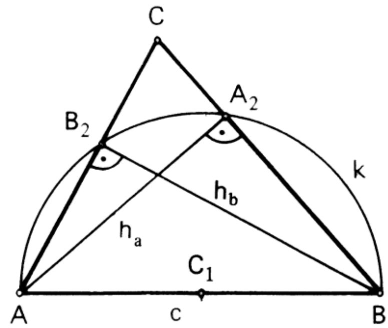
затоа должината на страната AB можеме да ја најдеме ако во кружница $k(O,R)$ конструираме произволен централен агол на 2γ и ги определиме пресечните точки A и B на неговите краци со кружницата k. Понатаму, од точката A_2 страната AB се гледа под прав агол и растојанието од точката A до точката A_2 е еднакво на h_a. Значи, A_2 е пресек на две геометриски места кои се кружницата k_1 конструирана над дијаметар AB и кружницата $k_2(A,h_a)$. Јасно, третото теме C е пресек на две геометриски места на точки и тоа, кружницата k и правата BA_2.

Конструкција. Конструираме кружница $k(O,R)$ и во неа централен агол со големина 2γ и ги наоѓаме точките A и B (направи цртеж). Над AB, како над дијаметар, конструираме кружница k_1 и конструираме кружница $k_2(A,h_a)$. Наоѓаме $A_2 = k_1 \cap k_2$. Ја повлекуваме правата BA_2 и во пресек со кружницата k ја определуваме точката C. Триаголникот ABC ги задоволува условите на задача, т.е. тој е решение на задачата.

Обиди се самостојно да ги реализираш доказот и дискусијата.

180. Конструирај триаголник зададен со c, h_a, h_b.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека задачата е решена (цртеж десно) и C_1 е средина на страната AB. Подножната точка A_2 на висината повлечена од темето A е пресек на две геометриски места на точки и тоа $k(A,h_a)$ и $k_1(C_1,\frac{c}{2})$, а подножната точка B_2 на висината повлечена од темето B е пресек на две геометриски места на точки и тоа $k_2(B,h_b)$ и $k_1(C_1,\frac{c}{2})$. Понатаму, точката C е пресек на правите BA_2 и AB_2.



Конструкција. Конструираме отсечка AB, $\overline{AB} = c$ и ја определуваме нејзината средина C_1. Потоа конструираме кружници $k(A,h_a)$ и $k_1(C_1,\frac{c}{2})$ и во нивниот пресек наоѓаме точка A_2 и конструираме кружница $k_2(B,h_b)$ која кружницата $k_1(C_1,\frac{c}{2})$ ја сече во точка B_2. Ги повлекуваме правите BA_2 и AB_2 и во нивниот пресек ја наоѓаме точката C. Триаголникот ABC ги задоволува условите на задачата. Обиди се самостојно да ги реализираш доказот и дискусијата.

181. Даден е рамностран триаголник со должина на страна a. Конструирај рамностран триаголник чија плоштина е трипати поголема од плоштината на дадениот триаголник.

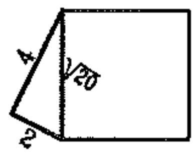
Решение. Ако плоштината на дадениот триаголник е $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а плоштината на бараниот квадрат е $P'=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=3P=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$, тогаш $b^2=3a^2$, т.е. $b=a\sqrt{3}$. Според тоа, должината на страната на бараниот триаголник е двапати поголема од висината на дадениот триаголник.

182. Дадени се два квадрата со должини на страни $3\,cm$ и $5\,cm$. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на дадените квадрати.

Решение. Плоштината на квадратот кој треба да го конструираме е еднаква на $3^2+5^2=9+25=34$. Според тоа, должината на неговата страна е еднаква на $\sqrt{34}$, што значи дека страната на бараниот квадрат е хипотенузата на правоаголниот триаголник со катети $3\,cm$ и $5\,cm$ (направи цртеж).

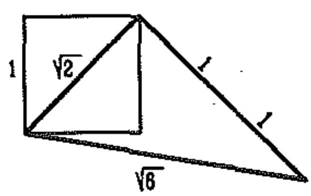
183. Конструирај квадрат со плоштина $20\,cm^2$.

Решение. Имаме $20=4^2+2^2$, па затоа за да ја конструираме страната на квадратот со плоштина $20\,cm^2$ доволно е да ја конструираме хипотенузата на правоаголниот триаголник со катети $4\,cm$ и $2\,cm$ (цртеж десно).



184. Конструирај квадрат со плоштина $6\,cm^2$.

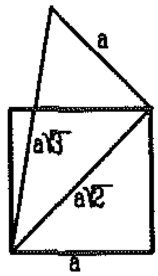
Решение. Треба да конструираме квадрат со должина на страна $\sqrt{6}\,cm$. Ако искористиме дека



$$\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2} \text{ и } \sqrt{6}=\sqrt{\sqrt{2}^2+2^2},$$

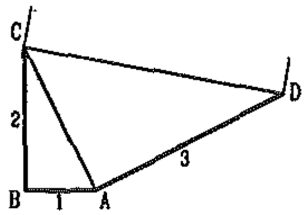
тогаш страната на квадратот ја конструираме последователно како што е прикажано на цртежот десно.

185. Даден е квадрат со страна a. Конструирај квадрат чија плоштина е три пати поголема од плоштината на дадениот квадрат.



Решение. Плоштината на дадениот квадрат е еднаква на a^2. Плоштината ка квадратот кој што треба да го конструираме е еднаква на $3a^2$, па затоа должината на неговата страна е еднаква на $a\sqrt{3}$. Од Питагоровата теорема следува дека дијагоналата на дадениот квадрат е еднаква на $\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$, па затоа прво конструираме отсечка со должина $a\sqrt{2}$, а потоа бидејќи $\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2}=a\sqrt{3}$ конструираме отсечка со должина $a\sqrt{3}$ (види цртеж). Сега конструираме квадрат со должина на страна $a\sqrt{3}$, т.е. го конструираме бараниот квадрат.

186. Дадени се три квадрати со должини на страни $1cm, 2cm$ и $3cm$. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на дадените квадрати.



Решение. Плоштината на бараниот квадрат е еднаква на $1+4+9=14cm^2$, па затоа должината на неговата страна е еднаква на $\sqrt{14}\,cm$. Страната на квадратот CD се конструира на следниов начин: конструираме правоаголен $\triangle ABC$ со катети $\overline{AB}=1cm$ и $\overline{BC}=2cm$, па неговата хипотенуза е $\overline{AC}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\,cm$. Потоа конструираме правоаголен $\triangle CAD$ со катети $\overline{AC}=\sqrt{5}\,cm$ и $\overline{AD}=3cm$, па неговата хипотенуза е $\overline{CD}=\sqrt{\sqrt{5}^2+3^2}=\sqrt{14}\,cm$.

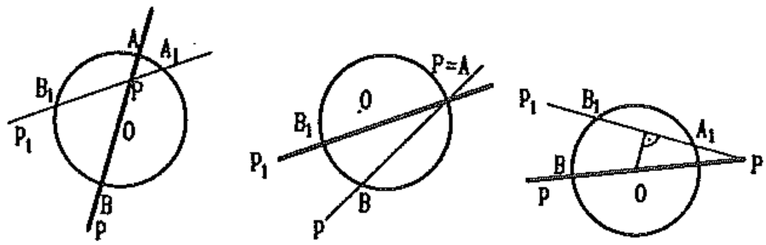
187. Најдолгата дијагонала на правилен многуаголник со парен број страни формира со страната на тој многуаголник агол од $67^\circ 30'$. Конструи-

рај го овој многуаголник така што должината на неговата најголема дијагонала е $4cm$.

Решение. Централниот агол на многуаголникот е еднаков на $180^\circ - 2\cdot 67^\circ 30' = 45^\circ$, па бидејќи $360^\circ : 45^\circ = 8$ заклучуваме дека многуаголникот е осумаголник $A_1A_2...A_8$. Конструираме кружница со дијаметар $\overline{A_1A_5} = 4cm$, а потоа точките A_2 и A_6, A_3 и A_7, A_4 и A_8 ги добиваме во пресекот на оваа кружница и правите кои минуваат низ средината на отсечката A_1A_5 и со неа формираат агли од 45° и 90°.

188. Дадена е кружница k и точка P во рамнината на кружницата. Конструирај права p која минува низ точката P и кружницата k ја сече во точки A и B такви што збирот $\overline{PA}+\overline{PB}$ е најголем.

Решение. Посебно ќе ги разгледаме случаите кога точката P е во внатрешноста на клружницииата, на кружницата или во надворешноста на кружницата.



Ако точката P е во внатрешноста на кружницата или на кружницата, тогаш $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{AB}$, па затоа збирот ќе биде најголем кога AB е дијаметар на кружницата, т.е. кога правата P минува низ центарот на кружницата.

Нека точката P е во надворешноста на кружницата и нека p_1 е произволна права која минува низ P и кружницата ја сече воточките A_1 и B_1. Со S да ја означиме средината на отсечката A_1B_1. Тогаш

$$\overline{PA_1} + \overline{PB_1} = \overline{PA_1} + (\overline{PA_1} + \overline{A_1S} + \overline{SB_1}) = 2\overline{PA_1} + 2\overline{SA_1} = 2\overline{PS} .$$

Затоа овој збир ќе биде најголем кога $S \equiv O$, т.е. кога правата p минува низ центарот на дадената кружница.

189. Конструирај квадрат зададен со збирот $a+d$ од страната a и дијагоналата d

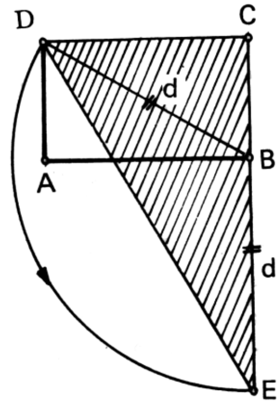
Решение. *Анализа*. Нека е даден квадрат со страна a .

Тогаш, неговата дијагонала е $d = a\sqrt{2}$, па затоа за да ја најдеме страната на квадратот доволно е збирот $a+d$ да го поделиме во однос $1:\sqrt{2}$.

Конструкција. Земаме отсечка со произволна должина m и конструираме отсечка со должина $m\sqrt{2} = \sqrt{m^2+m^2}$. Потоа ја делиме отсечката $a+d$ во однос $m:m\sqrt{2} = 1:\sqrt{2}$. Помалата отсечка од оваа поделба е страната на квадратот, а поголемата е неговата дијагонала. Конечно, конструираме квадрат со дадени страна и дијагонала (направи цртеж).

190. Конструирај правоаголник зададен со $a, b+d$.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека правоаголникот $ABCD$ е конструиран. Ако преку темето ја продолжиме страната BC за должина d, го добиваме правоаголниот триаголник ECD со катети a и $b+d$ (цртеж десно). Според тоа, $\triangle ECD$ можеме да го конструираме. Понатаму, $\triangle DEB$ е рамнокрак, па затоа темето B лежи на симетралата на страната DE.

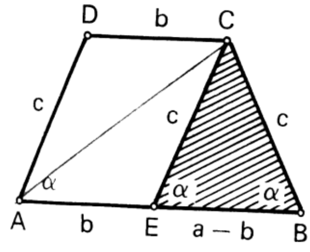


Конструкција. Конструираме правоаголен триаголник ECD со катети a и $b+d$. Потоа ја конструираме симетралата на хипотенузата DE на $\triangle ECD$ и во пресекот на симетралата и страната CE го определуваме темето B на правоаголникот. Темето A го наоѓаме во пресекот на кружниците $k_1(D,\overline{BC})$ и $k_2(B,\overline{CD})$.

Обиди се самостојно да ги изведеш конструкцијата, доказот и дискусијата.

191. Конструирај рамнокрак трапез зададен со a, b, c.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека трапезот $ABCD$ е конструиран. Ако низ темето C повлечеме права паралелна на страната AD и во пресек со основата AB ја најдеме точката E, го



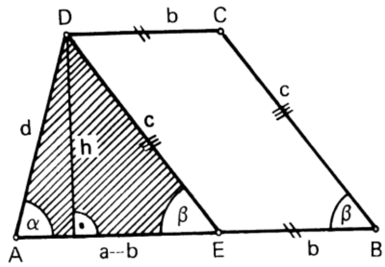
добиваме рамнокрак $\triangle EBC$ со основа $a-b$ и крак c.

Конструкција. Ја конструираме разликата на основите $a-b$. Потоа конструираме рамнокрак $\triangle EBC$ со основа $\overline{EB}=a-b$ и краци $\overline{EC}=\overline{BC}=c$. Преку темето E за должина b ја продолжуваме страната EB и ја добиваме точката A. Сега во точката C повлекуваме права паралелна на правата EB и во точката A повлекуваме права паралелна на правата EC. Во пресекот на овие прави ја наоѓаме точката D, со што е конструиран четириаголникот $ABCD$ кој е бараниот трапез.

Обиди се самостојно да ги изведеш конструкцијата, доказот и дискусијата.

192. Конструирај трапез зададен со a,b,c и h.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека трапезот $ABCD$ е конструиран. Ако во темето D повлечеме права паралелна на страната BC во пресекот со основата AB добиваме точка E (цртеж десно). За $\triangle AED$ познати се страните $\overline{AE}=a-b$, $\overline{DE}=c$ и висината h, па затоа може да се конструира.



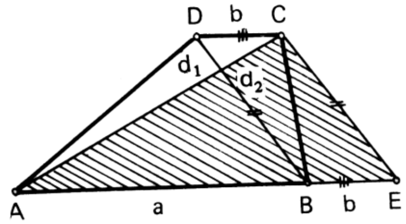
Конструкција. Ја наоѓаме разликата на основите $a-b$ и конструираме отсечка $\overline{AE}=a-b$. Потоа на растојание h од правата AE конструираме права $p\|AE$. Понатаму, конструираме кружница $k(E,c)$ и наоѓаме $k\cap p=D$. Преку точката E ја продолжуваме отсечката AE за должина b и ја наоѓаме точката B. Низ точката B повлекуваме права паралелна на ED, а низ точката D права паралелна со правата AE и во нивниот пресек ја наоѓаме точката C, со што е конструиран четириаголникот $ABCD$ кој е бараниот трапез.

Обиди се самостојно да го изведеш доказот.

Дискусија. Триаголникот AED може да се конструира ако и само ако $h<c$ и како останатите делови од конструкцијата се секогаш изводлив заклучуваме дека трапезот може да се конструира ако и само ако $h<c$.

193. Конструирај трапез зададен со основите a, b и дијагоналите d_1,d_2.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека трапезот $ABCD$ е конструиран (цртеж десно). Ако во темето C повлечеме права паралелна со правата BD, во пресек со правата AB ја наоѓаме точката E. Четириаголникот $BECD$ е паралелограм со страни b и d_2. Според тоа, $\triangle AEC$ имаме $\overline{AE}=a+b, \overline{EC}=d_1$ и $\overline{AC}=d_2$, па затоа истиот може да се конструира (ССС).

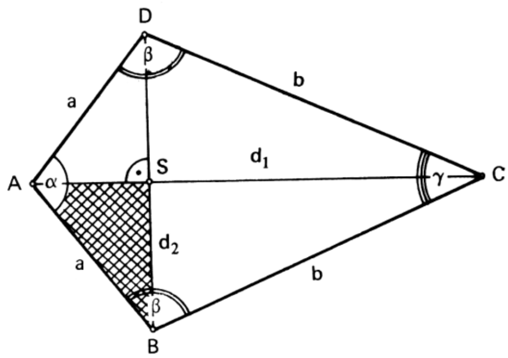


Конструкција. Конструираме $\triangle AEC$ со должини на страни $\overline{AE}=a+b, \overline{EC}=d_1$ и $\overline{AC}=d_2$. На страната AE наоѓаме точка B таква, што $\overline{AB}=a$. Низ точката B повлекуваме права паралелна со правата EC, а низ точката C повлекуваме права паралелна со правата AE и во пресек на овие прави ја наоѓаме точката D, со што е конструиран четириаголникот $ABCD$ кој е бараниот трапез.
Обиди се самостојно да го изведеш доказот.
Дискусија. Триаголникот AEC може да се конструира ако и само ако

$$|d_1-d_2|<a+b<d_1+d_2, \tag{1}$$

и како останатите делови од конструкцијата се секогаш изводливи заклучуваме дека трапезот може да се конструира ако и само ако е исполнет условот (1).

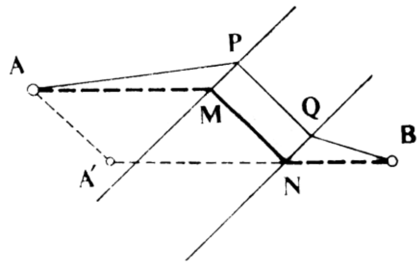
194. Конструирај делтоид ако се дадени неговите дијагонали и една страна.
Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека делтоидот $ABCD$ е конструиран (цртеж десно). Правоаголниот $\triangle BSA$ за кој се знаат $\overline{AB}=a,$ $\overline{BC}=\frac{d_2}{2}$ и $\measuredangle BSA=90^\circ$ може да се конструира. Потоа темињата C и D лежат на продолженијата на страните AS и BS преку темето на правиот агол и $\overline{BD}=d_2$, $\overline{AC}=d_1$. Сега лесно можеш да ги реализираш конструкци-



јата и доказот. Јасно, задачата има решение, ако и само ако $\frac{d_2}{2} < a$.

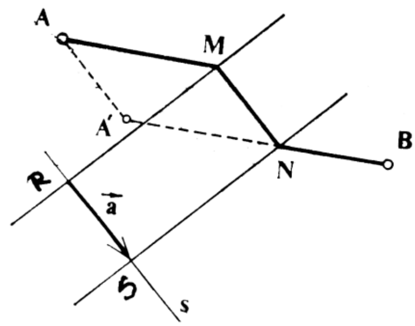
195. Местата A и B се наоѓаат на различни страни од канал со паралелни брегови p и q. Каде треба да се изгради мост на каналот (нормално поставен на бреговите), така што патот меѓу A и B да биде најкус.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена и нека мостот е PQ (цртеж десно). Ако $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, тогаш $\tau_{\vec{a}}(P) = Q$. Да земеме $\tau_{\vec{a}}(A) = A'$. Тогаш четириаголникот $APQA'$ е паралелограм, па $\overline{A'Q} = \overline{AP}$, Јасно, за да патот од



A до B е најкраток треба искршената линија $A'QB$ да е најкратка, а тоа е можно ако и само ако точките A', Q и B се колинеарни. Според тоа, $Q = A'B \cap q$.

Конструкција. Повлекуваме произволна права s нормална на правата p и нека $R = p \cap s$ и $S = q \cap s$. Наоѓаме $\tau_{\overline{RS}}(A) = A'$, ја повлекуваме правата $A'B$ и наоѓаме $N = A'B \cap q$. Во точката N конструираме права нормална на правата q и во пресекот на оваа права со правата p ја наоѓаме точката M.

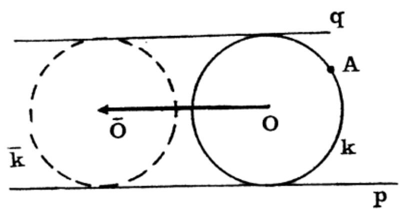


Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Бидејќи точката N е еднозначно определена, следува дека задачата секогаш има единствено решение.

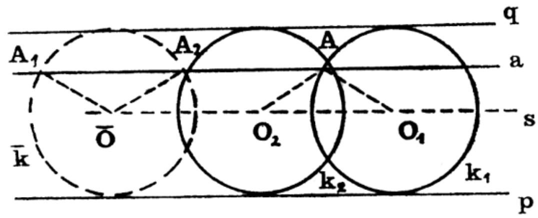
196. Да се конструира кружница која минува низ дадена точка и допира две паралелни прави.

Решение. *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена (цртеж десно). Ако $\vec{a}$ е вектор



паралелен со правата p, тогаш $\tau_{\vec{a}}(k)=\bar{k}$ е кружница, којашто пак ги допира правите p и q. Бидејќи една произволна кружница $\bar{k}$ што ги допира правите p и q можеме лесно да конструираме, со помош на една транслација неа можеме да ја пресликаме во бараната кружница.

Конструкција. Повлекуваме произволна права нормална на правите p и q која ги сече овие прави во дијаметрално спротивни точки на кружница $\bar{k}$ што ги допира правите p и q. Нејзиниот центар O лежи на правата s, што е паралелна со p и q и е еднакво оддалечена од нив. Низ точката A повлекуваме права a паралелна со p и q и ги наоѓаме пресечните точки A_1 и A_2 на a и $\bar{k}$ (ако такви постојат). Ако τ_1 е транслација на векторот $\overrightarrow{A_1A}$, а τ_2 е транслација на векторот $\overrightarrow{A_2A}$, тогаш $k_1=\tau_1(\bar{k})$ и $k_2=\tau_2(\bar{k})$ се кружници што ги задоволуваат условите на задачата (цртеѓ десно).



Дискусија. Можни се три случаи:

а) ако точката A е меѓу правите p и q, задачата има две решенија;

б) ако точката A лежи на некоја од правите, тогаш задачата има само едно решение и

в) во друг случај задачата нема решение.

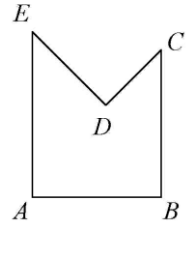
V.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

197. За петаголникот $ABCDE$ прикажан на цртежот е исполнето

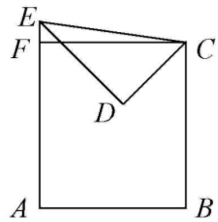
$$\overline{AE}=13\,cm, \overline{BC}=7\,cm, \overline{ED}=8\,cm,$$

$$\overline{CD}=6\,cm \text{ и } \measuredangle EAb=\measuredangle ABC=\measuredangle CDE=90^\circ.$$

Определи го периметарот на петаголникот $ABCDE$.



Решение. Од Питагоровата теорема применета на $\triangle EDC$ следува



$$\overline{EC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\,cm.$$

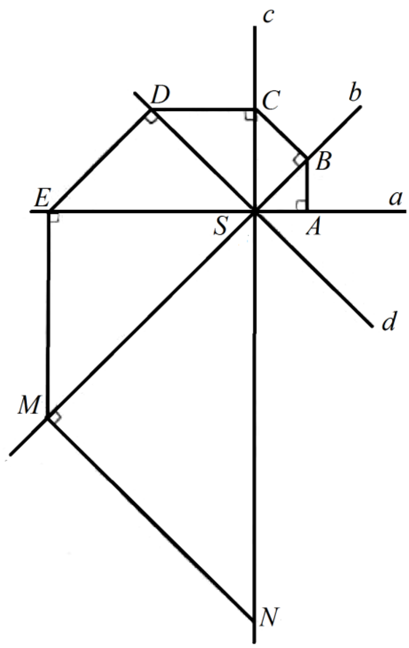
Понатаму, нека F е точка од AE таква што $\overline{AF} = \overline{BC}$ (цртеж десно). Значи, четириаголникот $ABCF$ е правоаголник, а $\triangle CEF$ е правоаголен триаголник. Оттука следува

$$\overline{AB} = \overline{CF} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,cm.$$

Конечно,

$$L_{ABCDE} = 8 + 7 + 6 + 8 + 13 = 42\,cm.$$

198. Дадени се две заемно нормални прави a и c кои се сечат во точката S. Нека b и d се симетралите на аглите кои ги зафаќаат правите a и c. На правата a избираме точка A таква што $\overline{SA} = 2$. Во точката A повлекуваме нормала на a и со B да го означиме нејзиниот пресек со правата b. Нека C е пресекот на нормалата на b во точката B и правата c, D е пресекот на нормалата на c во точката C и правата d, E е пресекот на нормалата на d во точката D и правата a, M е пресек на нормалата на a во точката E и правата b и N е пресек на нормалата на b во точката M и правата c. Пресметај ја плоштината на многуаголникот $SABCDEMN$.



Решение. Бидејќи правите b и d се симетрали на прави агли добиваме дека правите a и b, b и c, c и d, d и a се сечат под агод од 45° во точката S. Тоа значи дека сите шест триаголници се рамнокраки правоаголни триаголници со страни SA, SB, SC, SD, SE, SM, редоследно. Имаме,

$$\overline{SA}=2,\ \overline{SB}=\overline{SA}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$
$$\overline{SC}=\overline{SB}\sqrt{2}=4,\ \overline{SD}=\overline{SC}\sqrt{2}=4\sqrt{2},$$
$$\overline{SE}=\overline{SD}\sqrt{2}=8,\ \overline{SM}=\overline{SE}\sqrt{2}=8\sqrt{2}.$$

Според тоа, ако се искористи дека плоштината на рамнокрак правоаголен триаголник со катета a е еднаква на $\frac{a^2}{2}$ последователно добиваме дека

$$P_{SAB}=2,\quad P_{SBC}=4,$$
$$P_{SCD}=8,\quad P_{SDE}=16,$$
$$P_{SEM}=32,\ P_{SMN}=64.$$

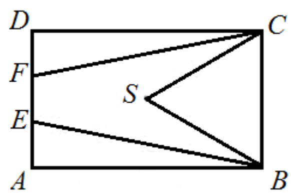
Конечно, $P_{SABCDEMN}=2+4+8+16+32+64=126$.

199. Колку страни има конвексен многуаглник кај кој сите внатрешни агли се еднакви, ако збирот на сите надворешни агли на тој многуаголник и два негови внатрешни агли е еднаков на 672°?

Решение. Нека многуагоникот има n страни. Тогаш збирот на внатрешните агли е еднаков на $(n-2)\cdot 180^\circ$, а збирот на надорешните агли е еднаков на $n\cdot 180^\circ-(n-2)\cdot 180^\circ=360^\circ$. Според тоа, збирот на двата внатрешни агли на многуаголникот е $672^\circ-360^\circ=312^\circ$, па затоа $2\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}=312^\circ$, од каде добиваме $180(n-2)=156n$, т.е. $n=15$. Значи, многуаголникот има 15 страници.

200. Даден е правоаголник $ABCD$ во кој точката S е пресек на неговите дијагонали. На страната AD земени се точки E и F такви што $\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FB}$. Определи го односот на плоштините на петаголникот $EBSCF$ и правоаголникот $ABCD$.

Решение. Нека $\overline{AB}=\overline{CD}=a, \overline{BC}=\overline{AD}=b$. Тогаш $\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FB}=\frac{b}{3}$. За $\triangle BCS$ должината на висината повлечена кон страната BC е еднаква на $\frac{a}{2}$, па затоа



$$P_{\triangle SBC}=\frac{1}{2}b\cdot\frac{a}{2}=\frac{ab}{4}.$$

Понатаму,

$$P_{\triangle BAE}=P_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{b}{3}=\frac{ab}{6},$$

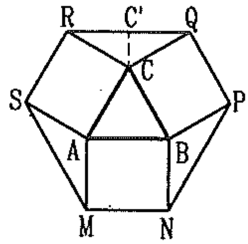
па затоа

$$P_{ABSCF}=P_{ABCD}-P_{\triangle BAE}-P_{\triangle CDF}-P_{\triangle SBC}=ab-\frac{ab}{6}-\frac{ab}{6}-\frac{ab}{4}=\frac{5}{12}ab.$$

Конечно, бараниот однос е $\frac{P_{ABSCF}}{P_{ABCD}}=\frac{5}{12}$.

201. Даден е рамностран $\triangle ABC$ со должина на страна a. Во надворешноста на триаголникот над неговите страни се конструирани квадрати $ABNM, BCQP$ и $ACRS$. Определи ги периметарот и плоштината на шестаголникот $MNPQRS$.

Решение. Според условот на задачата имаме $\overline{SR}=\overline{QP}=\overline{NM}=a$. Понатаму, $\triangle CQC'$ е половина од рамностран триаголник со должина на страна a, па затоа $\overline{C'Q}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ што значи дека $\overline{RQ}=\overline{PN}=\overline{MS}=a\sqrt{3}$. Според тоа, периметарот на шестаголникот $MNPQRS$ е



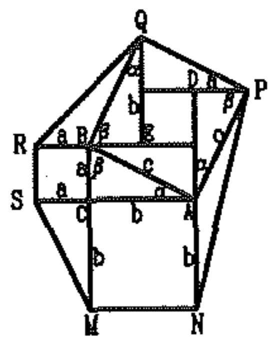
$$L=3a+3a\sqrt{3}=3a(1+\sqrt{3}).$$

Од претходните разгледувања следува дека триаголниците BAC, MAS, RQC, PNB имаат еднакви плоштини, па затоа плоштината на шестаголникот $MNPQRS$ е

$$P=3a^2+4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=a^2(3+\sqrt{3}).$$

202. Даден е правоаголен триаголник ABC, $\measuredangle C=90^\circ$, $\overline{BC}=a$ и $\overline{AC}=b$. Над страните на триаголникот, надвор од него, се конструирани квадрати $ACMN$, $ABQP$ и $BCSR$. Определи ја плоштината на шестаголникот $MNPQES$ во функција од a и b.

Решение. Бидејќи $\overline{AB}=\overline{AP}=\overline{BQ}=c$, $\measuredangle CAB=\measuredangle DAP=\measuredangle BQE=\alpha$ и $\measuredangle ABC=\measuredangle QBE=\measuredangle APD=\beta$ заклучуваме дека триаголниците ABC, BEQ и ADP се складни. Значи, $\overline{PQ}=a$ и $\overline{QE}=b$. Плоштината на шестаголникот е



$$P=a^2+b^2+c^2+4\cdot\frac{ab}{2}=2(a^2+b^2+ab)\ .$$

203. Правоаголен триаголник има хипотенуза со должина $5\,cm$ и висина повлечена кон хипотенузата $2{,}4\,cm$. Познато е дека мерните броеви на катетите на триаголникот изразени во сантиметри се природни броеви. Над страните на триаголникот, во неговата надворешност се нацртани три квадрати. Определи ги плоштината и периметарот на добиената фигура.

Решение. Плоштината на триаголникот е $P=\frac{ch}{2}=\frac{5\cdot 2{,}4}{2}=6\,cm^2$. Ако a и b се дожните на катетите на триаголникот, тогаш $P=\frac{ab}{2}$, па затоа $\frac{ab}{2}=6$, т.е. $ab=12$. Бидејќи мерните броеви a и b се природни броеви од последното равенство следува

$$(a,b)\in\{(1,12),(2,6),(3,4),(4,3),(6,2),(12,1)\}$$

и како должината на хипотенузата е $5\,cm$, со непосредна проверка од Питагоровата теорема следува дека должините на катетите се $3\,cm$ и $4\,cm$. Конечно, периметарот на добиената фигура е еднаков на

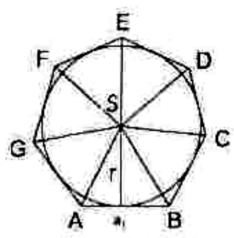
$$3(a+b+c)=3(3+4+5)=36\,cm,$$

а нејзината плоштина е еднаква на

$$\frac{ab}{2}+a^2+b^2+c^2=6+9+16+25=56\,cm^2\ .$$

204. Околу кружница со дијаметар $3\frac{1}{5}\,cm$ е опишан седумаголник (страните на седумаголникот ја допираат кружницата). Плоштината на седумаголникот е еднаква на $20\,cm^2$. Определи го периметарот на седумаголникот.

Решение. Нека седумаголникот е $ABCDEFG$. Радуисот на опишаната кружница е еднаков на $r=\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{5}=\frac{8}{5}\,cm$. За плоштината на седумаголникот добиваме



$$P=\frac{\overline{AB}\cdot r}{2}+\frac{\overline{BC}\cdot r}{2}+\frac{\overline{CD}\cdot r}{2}+\frac{\overline{DE}\cdot r}{2}+\frac{\overline{EF}\cdot r}{2}+\frac{\overline{FG}\cdot r}{2}+\frac{\overline{GA}\cdot r}{2}$$

па затоа $20=\frac{4}{5}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GA})$, т.е.

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GA}=25\,cm\ .$$

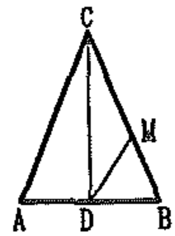
205. Симетралата на внатрешниот агол на триаголникот ја дели спротивната страна на две отсечки. Докажи дека секоја од овие отсечки е пократка од нејзината соседна страна.

Решение. Нека симетралата на $\measuredangle A$ на триаголникот ABC ја сече страната BC во точката E. Аголот $\measuredangle BEA$ е поголем од несоседниот внатрешен агол $\measuredangle CAE$ на триаголникот CAE, а аглите $\measuredangle CAE$ и $\measuredangle BAE$ се еднакви. Сега од $\measuredangle BEA > \measuredangle BAE$ следува $\overline{AB} > \overline{BE}$. Слично се докажува дека $\overline{AC} > \overline{CE}$.

206. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со основа AB и висна CD. Ако M е произволна точка од кракот BC, докажи дека разликата на отсечките CA и CM е поголема од разликата на отсечките DA и DM.

Решение. Имаме $\overline{CA} = \overline{CB}$, па затоа

$$\overline{CA} - \overline{CM} = \overline{CB} - \overline{CM} = \overline{BM}.$$



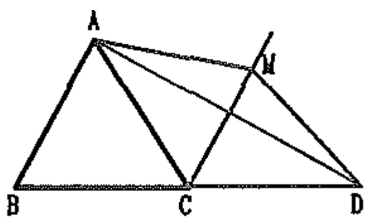
Во $\triangle BDM$ страната BM е поголема од разликата на страните DB и DM, односно $\overline{BM} > |\overline{DB} - \overline{DM}|$. Понатаму, бидејќи D е подножјето на висината повлечена кон основата важи $\overline{DA} = \overline{DB}$. Конечно,

$$\overline{CA} - \overline{CM} = \overline{BM} > |\overline{DB} - \overline{DM}| = |\overline{DA} - \overline{DM}|,$$

што и требаше да се докаже.

207. Даден е $\triangle ABC$. На симетралата на надворешниот агол кај темето C избрана е произволна точка M. Докажи дека

$$\overline{MA} + \overline{MB} > \overline{AC} + \overline{BC}.$$



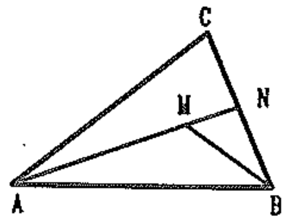
Решение. Нека D е точката на продолжението на страната BC преку темето C таква што $\overline{CD} = \overline{AC}$, т.е. точката D е симетрична на точката A во однос на CM (цртеж десно). Јасно, $\triangle ACM \cong \triangle DCM$, па затоа $\overline{MD} = \overline{AM}$. Според тоа,

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MD} + \overline{MB} > \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BC}.$$

208. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ е земена произволна точка M. Докажи:

а) $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$,

б) $\overline{AM} + \overline{MB} < \overline{AC} + \overline{CB}$.



Решение. а) Нека правата AN ја сече страната BC на $\triangle ABC$ во точката N. Бидејќи $\measuredangle AMB$ е надфворешен агол за $\triangle MNB$, а $\measuredangle MNB$ е надворешен агол за $\triangle ANC$, добиваме дека важи

$$\measuredangle AMB > \measuredangle MNB > \measuredangle ACN = \measuredangle ACB .$$

б) Во $\triangle MNB$ важи $\overline{MN} + \overline{NB} > \overline{MB}$, од каде добиваме

$$\overline{AN} + \overline{NB} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NB} > \overline{AM} + \overline{MB} . \tag{1}$$

Слично, во $\triangle ACN$ важи $\overline{AC} + \overline{CN} > \overline{AN}$, од каде добиваме

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CN} + \overline{NB} > \overline{AN} + \overline{NB} . \tag{2}$$

Сега, од (1) и (2) следува дека $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AN} + \overline{NB} > \overline{AM} + \overline{MB}$, што и требаше да се докаже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.(1991). Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I. (1988).: Primpremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd
3. Ilić, N. V. (1991). Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd
4. Kostić, Z. K. (1963). Između igre i matematike, Tehnička knjiga, Beograd
5. Mićić, V.; Kadelburg, Z. (1989). Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd
6. Stojanović, V. (1985). Matematiskop 2, Naučna knjiga, Beograd
7. Stojanović, V. (1999). Vodić za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd
8. Stojanović, V.; Zolić, A. (1991). Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole), DMS, Beograd
9. Tošić, R. (1990). Rešeni zadaci iz matematike za mlade matematičare, Naučna knjiga, Beograd
10. Tošić, R.; Vukoslavčević, V. (1995). Elementi teorije brojeva, Alef, Novi sad, 1995
11. Zbirka zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola Srbija u 1993 godini, DMS, Valjevo, 1993
12. Zolić, A. (1990). Zbirka rešenih konkursnih zadataka, Matematički list, Beograd
13. Андрић, В. (2006). Математика (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд
14. Андрић, В.; Ђорић, М.; Јовчић, М.; Љубић, Д.; Петровић, Љ.; Стојановић, В. (1997). 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1987-1996. године, ДМС, Београд
15. Аневска, К. (2014). Логички парадокси, Нумерус, Скоје
16. Аневска, К. (2014). Покривање на шаховска табла, Нумерус, Скопје
17. Аневска, К. (2018). Питагорови тројки, Нумерус, Скопје
18. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини I, Нумерус, Скопје

19. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини II, Нумерус, Скопје
20. Аневска, К., Гоговска, В. (2015). Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје
21. Аневска, К., Малчески, Р. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје
22. Аневска, К., Малчески, С. (2013). Геометриско пресметување на збирови, Нумерус, Скопје
23. Антонов, Н. П.; Выгодский, М. Я.; Никитин, В. В.; Санкин, А. И. (1961). Сборник задач по елементарной математике, Наука, Москва
24. Будуров, С.; Серафимов, Д. (1980). Математически олимпиади 2, Народна просвета, София
25. Василевска, Д. Немојте да се излажете, Хероновата формула помага, Нумерус, Скопје
26. Главче, М. (2016). Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје
27. Главче, М. (2016). Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
28. Главче, М. (2016). Пресметуваме збирови, Нумерус, Скопје
29. Главче, М. (2018). Една задача, повеќе начини на решавање, Нумерус, Скопје
30. Главче, М. (2018). Периметар и неравенство на триаголник, Нумерус, Скопје
31. Главче, М. (2018). Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје
32. Главче, М., Анѓелкоска, В. (2013). Магични квадрати и магична коцка, Нумерус, Скопје
33. Главче, М., Аневска, К. (2019). Решавање конструктивни задачи со помош на Питагорова теорема, Нумерус, СКопје
34. Главче, М., Малчески, С. (2019).Решавање на аритметички задачи со доведување до противречност, Нумерус, Скопје
35. Гоговска, В. Вкупен број можности, Нумерус, Скопје
36. Гоговска, В. Да започнеме од крајот, Нумерус, Скопје
37. Гоговска, В. Математички игри во кои се определува најголема и најмала вредност, Нумерус, Скопје
38. Гоговска, В. Неменливи големини, Нумерус, Скопје
39. Граврилов, Ј.; Давидов, Л. (1977). Делимост на числата, Народна просвета, София
40. Гроздев, С. Да побараме она што не се менува, Нумерус, Скопје

41. Гроздев, С. Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус, Скопје
42. Гроздев, С. Неравенство на Шур и примена, Нумерус, Скопје
43. Гроздев, С. Црвенката и Диофантовата равека од прв ред, Нумерус, Скопје
44. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Боиме броеви, Нумерус, Скопје
45. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Броиме со помош на графови, Нумерус, Скопје
46. Гроздев, С., Аневска, К. (2018). Патување на островот на витезите и лажговците, Нумерус, Скопје
47. Гроздев, С., Малчески, А. (2016). Малку математика на шаховска табла I, Нумерус, 2016
48. Гроздев, С., Малчески, А. (2017). Малку математика на шаховска табла II, Нумерус, 2016
49. Димовски, И. Број на делители, Нумерус, Скопје
50. Димовски, И. Проблемот на Швејк, Нумерсу, Скопје
51. Дојчев, С. Дали е можно Дали постои?, Нумерус, Скопје
52. Дојчев, С. Кој број е поголем?, Нумерус, Скопје
53. Дуденков, С.; Чакърян, К. (1999). Задачи по теория на числата, Регалия 6, София
54. Зубелевич, Г. И. (1967). Сборник задач московских математических олимпиад, Просвещение, Москва
55. Иванова, А., Велинов, Д. Златен пресек, омилена пропорција на архитектите, Нумерус, Скопје
56. Јанев, И. И броењето не е лесно, Нумерус, Скопје
57. Јанев, И. Пак броење, Нумерус, Скопје
58. Јанев, К.; Мишовски, К. (1985). Десет години републички натпревари по математика (основни училишта), Нумерус, Скопје
59. Јошеска Јованчева, Б. Функционални равенки, Нумерус, Скопје
60. Лесов, Х. Принцип на Дирихле, Нумерус, Скопје
61. Лукарески, М. Боиме и пребојуваме фигури, Нумерус, СКопје
62. Малчески, А. Адам Рис и лекомислениот геометар, Нумерус, Скопје
63. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Метод на Ферма за решавање Диофантови равенки, Нумерус, Скопје
64. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решаваме задачи со множества, Нумерус, Скопје
65. Малчески, Р. (1994). Математички игри 1, Нумерус, Скопје
66. Малчески, Р. (1994). Математички игри 2, Нумерус, Скопје

67. Малчески, Р. (1995). Математички игри 3, Нумерус, Скопје
68. Малчески, Р. (1995). Математички игри 4, Нумерус, Скопје
69. Малчески, Р. (1995). Стрелките на часовникот се движат, па што, Нумерус, Скопје
70. Малчески, Р. (1996, 2015). Две задачи за правилен шестаголник, Нумерус, Скопје
71. Малчески, Р. (1997). Како да и помогнете на мува која не знае геометрија, Нумерус, Скопје
72. Малчески, Р. (1998). За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово
73. Малчески, Р. (2001). Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје
74. Малчески, Р. (2002). Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје
75. Малчески, Р. (2003). Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София
76. Малчески, Р. (2003). Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје
77. Малчески, Р. (2004). И ова е лесно – алгоритам за решавање задачи со претурање, Нумерус, Скопје
78. Малчески, Р. (2004). Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје
79. Малчески, Р. (2005). Идентитетот на Софија Жермен, Нумерус, Скопје
80. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 1, Нумерус, Скопје
81. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 2, Нумерус, Скопје
82. Малчески, Р. (2012). Кралот Артур и тркалезната маса, Нумерус, Скопје
83. Малчески, Р. (2012). Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје
84. Малчески, Р. (2012). Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје
85. Малчески, Р. (2013). Историјата е добра учителка, Нумерус, Скопје
86. Малчески, Р. (2014). Пресметување на збирови од производи и степени, Нумерус, Скопје
87. Малчески, Р. (2015). Покривање рамностран триаголник со рамнострани триаголници, Математика+ (Нумерус), София (Скопје)
88. Малчески, Р. (2017). Пресметуваме периметри и плоштини, Нумерус, Скопје
89. Малчески, Р. (2018). Решаваме конструктивни задачи, Нумерус, Скопје

90. Малчески, Р. (2019). Пресметување плоштина на паралелограм и триаголник, Нумерус, Скопје
91. Малчески, Р. (2020). Занимливости со броеви, armaganka.org.mk
92. Малчески, Р. (2020). Расекување и составување геометриски фигури, armaganka.org.mk
93. Малчески, Р. (2020). Решавање на некои нелинеарни Диофантови равенки, armaganka.org.mk
94. Малчески, Р., (1998). Еден елементарен доказ на Хероновата формула, Сигма, Скопје
95. Малчески, Р., Аневска, К. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје
96. Малчески, Р., Аневска, К. (2016). Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје
97. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К. (1993). Вовед во теорија на броеви, ММM, Скопје
98. Малчески, Р., Малчески, А. (1995). За златниот пресек, Нумерус, Скопје
99. Малчески, Р., Малчески, А. (2017). Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
100. Малчески, Р., Малчески, А. (2018). Откривање на непознат број, магија или математика, Нумерус, Скопје
101. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решавање на текстуални задачи (четврто издание), Армаганка, Скопје
102. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје
103. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Збирка задачи по елементарна алгебра, Армаганка, Скопје
104. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). По патеките на шампионите за математика (второ издание), Армаганка, Скопје
105. Малчески, С. Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
106. Малчески, С. Конструкција на аритметичка, геометриска и хармониска средина на две отсечки, Нумерус, Скопје
107. Малчески, С. Неколку начини за докажување на едно неравенство, Нумерус, Скопје
108. Малчески, С., Аневска, К. (2013). Шаховските фигури и златниот пресек, Нумерус, Скопје
109. Малчески, С., Аневска, К. (2018). Една теорема многу начини на докажување, Нумерус, Скопје

110. Малчески, С., Лукарески, М. Пополнуваме табели со броеви, Нумерус, Скопје
111. Милошевиќ, Д. Еден проблем во врска со расекување на коцка, Нумерус, Скопје
112. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – втор дел, Нумерус, Скопје
113. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – прв дел, Нумерус, Скопје
114. Милошевиќ, Д. Квадрат и точка, Нумерус, Скопје
115. Милошевиќ, Д. Некои теореми за точки во рамнината на триаголникот, Нумерус, Скопје
116. Милошевиќ, Д. Основни својства на магичните квадрати од ред четири, Нумерус, Скопје
117. Михајлова, Е. Брзо множење, Нумерус, Скопје
118. Михајлова, Е. Како едноставно да решаваме текстуални задачи – вештина за составување равенки, Нумерус, Скопје
119. Младеновиќ, П. Правила на еднаков број, збир и производ, Нумерус, Скопје
120. Муминагиќ, А. За една олимписка задача, Нумерус, Скопје
121. Муминагиќ, А. Плоштина на правилен петаголник; Нумерус, Скопје
122. Муминагиќ, А., Карстенсен, Ј. Од страниците на забавната математика, Нумерус, Скопје
123. Муминагиќ, А., Сведрец, Р. Кои броеви недостасуваат, Нумерус, Скопје
124. Петревски, Н. Максимум и минимум во задачи од геометрија, Нумерус, Скопје
125. Петревски, Н. Ојлерова кружница, Нумерус, Скопје
126. Петровиќ, В. Натпревар во повеќебој, Нумерус, Скопје
127. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1993). Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София
128. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1995). Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София
129. Србиноска, Н. Повеќе начини на решавање на една задача, Нумерус, Скопје
130. Тренчевски, К. За младите логичари, Нумерус, Скопје
131. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д. (1994). Занимлива математика, МММ, Скопје

132. Тфекчиев, И.; Лесов, Х. (1988). Задачи за извнкласна работа по математака в IV и V клас, Софија
133. Филипоски, С. Неколку избрани задачи од неравенства, Нумерус, СКопје
134. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч. (1998). Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София
135. Цофман, Ј. Користење табели броеви за одредување на збировите на елементите на некои низи броеви, Нумерус, Скопје
136. Шариќ, Милан Метод на помошни фигури, Нумерус, Скопје
137. Шаркова, И. Последните цифри, Нумерус, Скопје
138. Шаркова, И., Караџова, Р. Бројните ребуси помагаат, Нумерсу, Скопје