Периодично поплочавање равни

др Сузана Симић, **Крагујевац**

„Уз сву слободу индивидуалне маште, уметност се мора покоравати нужним законитостима; обрнуто, уз сву строгост своје логичке структуре, математика следи естетске законе.” Ferdinand Rudio

Од давнина су људи тежили да украшавају своје животне просторе (првобитне пећине, египатске пирамиде, подземне гробнице). Са развојем и напретком људске културе долази до развоја уметности, па самим тим је и потреба за лепим и складним постала израженија. Питагора је први говорио о складу и хармонији у свемиру: *све у природи је однос, мера и број.* Појам хармоније везује се за симетрију, правилност и идеалне облике. Различити геометријски елементи представљају део уметничког стваралаштва у смислу бављења формом уметничког дела или симболиком геометријских фигура и геометријских апстракција. Тако и настају цртежи на којима се фигуре периодично понављају, попримају геометријске облике са много симетрија и показују правилност какву у природи ретко сусрећемо. Леонардо да Винчи[1] показује велико интересовање за геометрију и математику уопште. То је јасно изражено у његовој изјави: *нема никакве сигурности тамо где се не може применити нека од математичких наука или нешто што је у вези са тим математичким наукама.* Његова дела се одликују геометријским редом и прецизно изграђеним простором у перспективи.

Слика 1. Леонардо да Винчи, Тајна вечера, 1498.

Геометрија је веома заступљена у орнаменталној уметности, мозаицима и уопште такозваним модуларним структурама у уметности. Ове структуре јављају се од праисторије до данас (код старих Египћана, Персијанаца, Грка, Римљана, а такође у Кини, Јапану и у другим старим цивилизацијама). Основни елементи ових дела (модули) и извођење различитих структура генерисаних помоћу њих могу се посматрати математички. Код њихове анализе често се користи теорија симетрија и геометријски проблем поплочавања равни.

У овом чланку бавићемо се периодичним поплочавањима равни правилним многоугловима. Тачке равни у којима се састају темена суседних правилних многоуглова називаћемо *чворовима*. Правилан чвор је онај код ког су сви углови многоуглова који се у њему састају

[1] *Leonardo da Vinci*, 1452–1519.

међусобно подударни. Два чвора су једнака ако је редослед многоуглова који се у њима састају исти (броји се прво многоугао са најмањим бројем страница, а затим остали у супротном смеру од смера кретања казаљке на часовнику). Поплочавање равни правилним многоугловима подразумева да су сви чворови једнаки.

Правилна поплочавања равни

Разматраћемо, прво, поплочавања код којих се користи једна врста правилних многоуглова. Како збир величина унутрашњих углова у произвољном n-тоуглу износи $(n-2)180°$, то у правилном n-тоуглу, где су сви унутрашњи углови међусобно једнаки, величина једног угла износи $(n-2)180°/n$. Проблем поплочавања равни правилним n-тоугловима се сада своди на алгебарски проблем изражен Диофантовом једначином

$$k\frac{(n-2)180°}{n} = 360°, \tag{1}$$

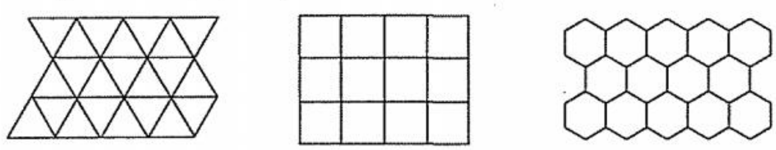
где су $k, n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 3$, јер је троугао многоугао са најмањим бројем страница. Диофантову једначину (1) можемо записати у облику $k(n-2) = 2n$. Пошто је $n \geqslant 3$, дељењем претходне једначине са $n-2$, добијамо

$$k = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Да би k био цео број, потребно је да $n-2$ дели 4. Дакле, $n-2 \in \{-4,-2,-1,1,2,4\}$, тј. $n \in \{-2,0,1,3,4,6\}$. С обзиром да је $n \geqslant 3$, једине могућности су:

$$n=3,\quad k=6; \qquad n=4,\quad k=4 \quad \text{или} \quad n=6,\quad k=3.$$

Дакле, једина правилна поплочавања равни су једнакостраничним троугловима, квадратима и правилним шестоугловима (слика 2).

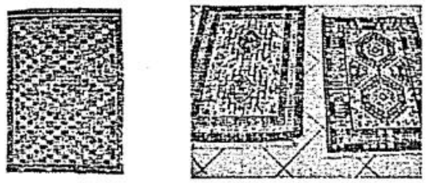


Слика 2.

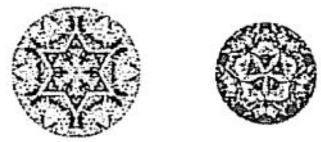
За свако поплочавање користимо одговарајућу ознаку где је назначен број страница многоуглова који се састају у једном чвору. Тако, нпр. за поплочавање једнакостраничним троугловима користримо ознаку 3^6 јер се у једном чвору састаје шест једнакостраничних троуглова.

Правилна поплочавања се могу срести свуда у природи, на улицама, трговима, на многим уметничким сликама. Уздужни пресек кошнице је облика 6^3, док је шаховска табла облика 4^4. Примери неких правилних поплочавања приказани су на слици 3.

Ако се одређеним генеричким поступком поплочавање изводи помоћу неког правилног многоугла различитог од троугла, квадрата или шестоугла, доћи ће до преклапања и формирања тзв. *бројних мандала*. Овакве мандале разматрају се и са уметничког и математичког гледишта. Са уметничког аспекта свака мандала може се посматрати као орнамент чијој естетској вредности доприноси и појава одређених кружних форми које још више појачавају утисак хармоније и лепоте. Ствар је укуса и уметничког осећаја да се изабере оптималан број генерација многоуглова, тако да *бројна мандала* остави најјачи естетски утисак (слика 4).



Слика 3. Исламска шара (лево) и мотиви из Персије (десно).



Слика 4. Примери неких бројних мандала.

Полуправилна поплочавања равни

Полуправилна поплочавања равни су она која су одређена различитим врстама правилних многоуглова, али да све странице буду једнаке и сви чворови буду једнаки. Познато је да је величина унутрашњег угла једнакостраничног троугла $60°$, четвороугла $90°$, петоугла $108°$ и шестоугла $120°$. Претпостављајући да у неком поплочавању равни учествују управо ови правилни многоугли, имамо

$$60° + 90° + 108° + 120° > 360°.$$

Заменом било ког од ова четири са многоуглом који има већи број страница, самим тим и већом величином унутрашњег угла, добили бисмо збир углова који је још већи од претходног. Овим закључујемо да у једном поплочавању равни не може учествовати више од три различите врсте правилних многоуглова. Најмањи број многоуглова који чине једно поплочавање је 3 (поплочавање правилним шестоугловима), док је највећи број 6 (поплочавање једнакостраничним троугловима). Како је потребно да многоуглови који учествују у поплочавању буду различити, добијамо услов $3 \leqslant k_1 + k_2 < 6$.

Разматраћемо прво случај када се у једном чвору састаје k_1 правилних n-тоуглова и k_2 правилних m-тоуглова. Проблем поплочавања се своди на Диофантову једначину

$$k_1 \frac{(n-2)180°}{n} + k_2 \frac{(m-2)180°}{m} = 360°, \tag{2}$$

где је $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $m \geqslant 3$, $3 \leqslant k_1 + k_2 < 6$. Диофантова једначина (2) се може написати у облику

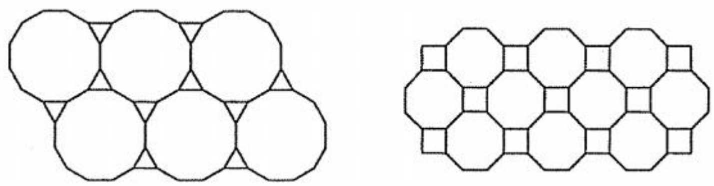
$$k_1\left(1 - \frac{2}{n}\right) + k_2\left(1 - \frac{2}{m}\right) = 2. \tag{3}$$

Испитујући све могуће вредности за k_1 и k_2 добијамо следеће случајеве.

1. Ако је $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$ ($k_1 = 2, k_2 = 1$), имамо $m = 4 + \dfrac{8}{n-2}$. Дакле, $n-2$ дели 8 тј. $n - 2 \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$. Пошто је $n \geqslant 3$, закључујемо да је $n \in \{3, 4, 6, 10\}$, док за m добијамо, респективно, вредности $12, 8, 6, 5$.

1.1. Случај поплочавања равни коришћењем једног једнакостраничног троугла и два правилна дванаестоугла приказан је на слици 5 (лево). Ознака за ово поплочавање је 3.12^2.

1.2. Поплочавање са једним квадратом и два осмоугла се означава са 4.8^2 (слика 5 десно).

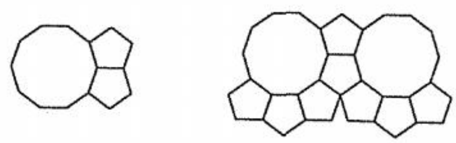


Слика 5. Полуправилна поплочавања 3.12^2 (лево) и 4.8^2 (десно).

Код поплочавања 3.12^2 и 4.8^2 сви чворови су једнаки, па су ово полуправилна поплочавања.

1.3. Трећи случај нам даје правилно поплочавање 6^3.

1.4. Четврти случај није пример полуправилног поплочавања. Један десетоугао и два петоугла испуњавају само потребан услов да је збир углова у једном чвору $360°$ (слика 6 лево). Међутим, раван не можемо поплочити овим многоугловима без преклапања и шупљина (слика 6 десно).



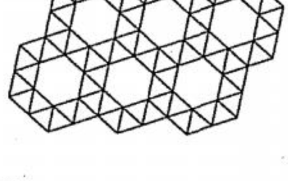
Слика 6. Потребан услов поплочавања (лево) и поплочавање које није полуправилно (десно).

2. Ако је $k_1 = 1$ и $k_2 = 3$ $(k_1 = 3,\ k_2 = 1)$, из једначине (3) добијамо Диофантову једначину

$$m = 3 + \frac{3}{n-1}.$$

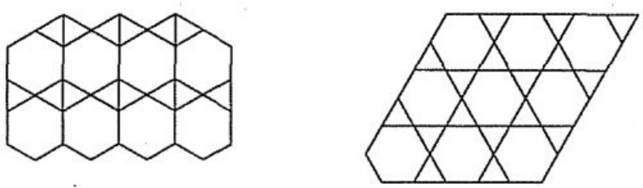
Дакле, $n - 1 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ и $n \geqslant 3$, што даје једино решење $n = 4$ и $m = 4$. У овом случају је добијено правилно поплочавање 4^4.

3. Ако је $k_1 = 1$ и $k_2 = 4$ $(k_1 = 4, k_2 = 1)$, добија се једначина $n = \dfrac{2m}{3m-8}$. Самим тим $3m - 8 \in \{1, -1, 2, -2, m, -m, 2m, -2m\}$. Једино решење које задовољава све наведене услове за m и n је $m = 3$ и $n = 6$. Ово је поплочавање равни $3^4.6$ са четири једнакостранична троугла и једним правилним шестоуглом (слика 7).



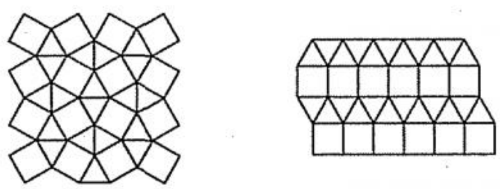
Слика 7. Полуправилно поплочавање $3^4.6$.

4. Случај $k_1 = 2$ и $k_2 = 2$, даје Диофантову једначину $m = 2 + \dfrac{4}{n-2}$, чија су решења $n = 4, m = 4$ (поплочавање квадратима) и $n = 3$ и $m = 6$. Са два правилна шестоугла и два једнакостранична троугла можемо раван поплочити на два начина. Први начин је приказан на слици 8 лево. Пошто сви чворови нису једнаки ово није полуправилно поплочавање. Други начин представља полуправилно поплочавање $3^2.6^2$ и приказано је на слици 8 десно).



Слика 8. Поплочавање које није полуправилно (лево) и полуправилно поплочавање $3^2.6^2$ (десно).

5. Ако имамо $k_1 = 2$ и $k_2 = 3$ ($k_1 = 3$, $k_2 = 2$), једино решење је $n = 4$ и $m = 3$. Поново постоје две могућности за поплочавање и то $3^2.4.3.4$ и $3^3.4^2$. Оба поплочавања су полуправилна и приказана на слици 9.



Слика 9. Поплочавања $3^2.4.3.4$ (лево) и $3^3.4^2$ (десно).

Претходним разматрањима су исцрпљене све могућности када у поплочавању учествују две различите врсте многоуглова.

Разматраћемо сада поплочавања трима различитим врстама многоуглова, тј. нека се у једном чвору састаје k_1 правилних n-тоуглова, k_2 правилних m-тоуглова и k_3 правилних s-тоуглова. Диофантова једначина изведена из потребног услова да је збир величина углова у једном чвору $360°$ гласи

$$k_1(1 - 2/n) + k_2(1 - 2/m) + k_3(1 - 2/s) = 2, \tag{4}$$

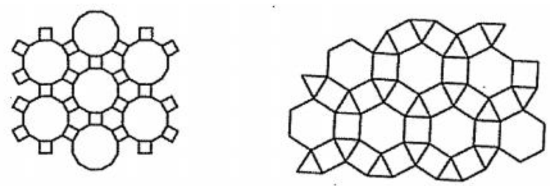
где је $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}, n \geqslant 3, m \geqslant 3, s \geqslant 3, 3 \leqslant k_1 + k_2 + k_3 < 6$.

1. Ако је $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, из једначине (4), добијамо Диофантову једначину

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{m} + \frac{2}{s} = 1,$$

чија су решења $n = 4, m = 6$ и $s = 12$ (видети задатак $*$). Ово полуправилно поплочавање приказано је на слици 10 (лево).

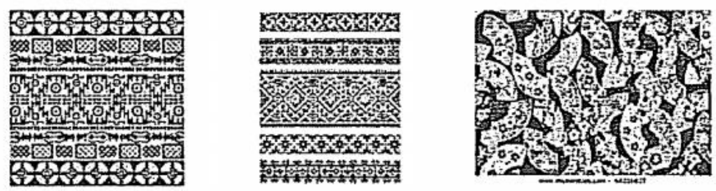
2. Ако је $k_1 = 2, k_2 = k_3 = 1$, добијамо полуправилно поплочавање $3.4.6.4$ приказано на слици 10 (десно).



Слика 10. Поплочавања 4.6.12 (лево) и 3.4.6.4 (десно).

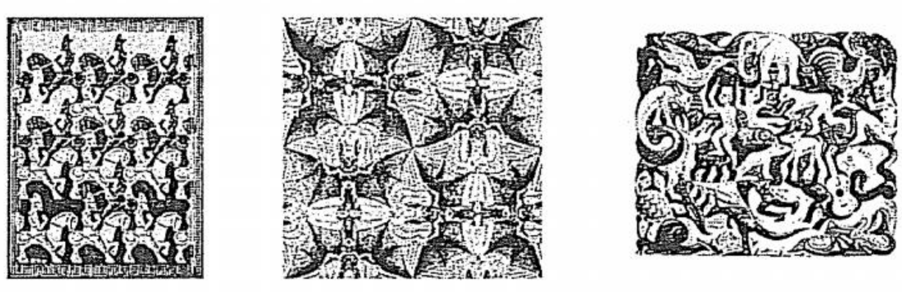
3. Случај $k_1 = 3, k_2 = k_3 = 1$, нема решења. Заиста, ако у овом случају посматрамо многоуглове са најмањом величином углова тј. три једнакостранична троугла, један квадрат и један правилан петоугао, тада је у једном чвору збир величина углова $180° + 90° + 108° > 360°$. Заменом било ког од ових трију многоуглова неким другим, збир величина углова постаје већи. Дакле, овај случај нема решења.

Овим је показано да постоји укупно осам полуправилних поплочавања равни. Поред наведена два типа раванских поплочавања постоје и полиморфна поплочавања, код којих постоје два или три различита чвора (има бар 14 полиморфних поплочавања). Правилна и полуправилна поплочавања се могу срести у разним културама (слика 11).



Слика 11. Мотиви из Африке, Украјине и Јапана

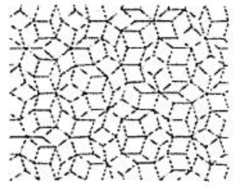
Холандски сликар Морис Ешер[2] био је фасциниран маварским зидним декорацијама чији су аутори у XIII веку открили и применили седамнаест могућих правилних подела у равни на бази операција симетрије и транслација, користећи основне елементе искључиво апстрактних облика. Оригиналност Ешерових подела равни јесте у томе што је његов елемент препознатљива слика моделована према животињским, људским мотивима и мотивима разних измишљених бића (слика 12).



Слика 12. Ешерове поделе равни: коњи–ратници; анђели–слепи мишеви; животиње–људски мотиви–измишљена бића.

[2] *Maurits Cornelis Escher*, 1898–1972.

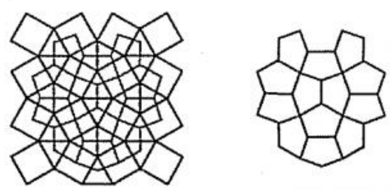
Ешерове графике математичари проучавају са становишта геометрије и теорије група јер управо помоћу ових математичких елемената он износи симболику својих дела, контраст, метаморфозу и визуелну равнотежу. Ешер је сарађивао са Роџером Пенроузом[3] који се бавио управо немогућим објектима и поплочавањем. Тек после Ешерове смрти 1973. године он долази до открића асиметричног поплочавања које настаје од две плочице облика ромба, једна са оштрим углом 36°, а друга 72° (слика 13).



Слика 13. Пенроузово поплочавање ромбовима.

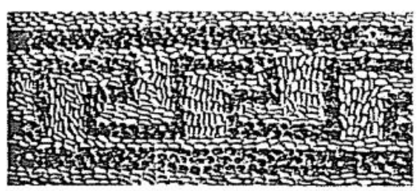
Оваквих поплочавања има непребројиво много и ниједно кретање равни не може их превести у саме себе. Пенроуз касније продаје ауторска права на овај изум за производњу керамичких плочица и зидних тапета. Њихова визуелна лепота потиче од чудне, локалне симетрије тј. постојања петоугаоне ротационе симетрије у околини појединих темена.

Свако правилно поплочавање има дуално поплочавање. Дуална поплочавања се добијају спајањем центара суседних полигона. Тако су 3^6 и 6^3 дуалне једна другој, док је 4^4 сама себи дуална. Дуално поплочавање од $3^2.4.3.4$ јесте тзв. *Каиро поплочавање*, најчешћи мотив на улицама Каира и на исламским декорацијама (слика 14).



Слика 14. Каиро поплочавање

У египатској, грчкој, римској и кинеској уметности, орнаментици Маја и посебно Келта наилазимо на тзв. меандарске орнаменте који су инспирисани лавиринтима (слика 15).



Слика 15. Подни мозаик са узорком меандра из улице у Родосу

Најстарији потиче из палеолитске уметности. Најинтересантнији проблем је објашњење начина креирања таквих орнамената. Закључено је да је то антисиметрија и да су њихови елементи плочице добијене поделом правоугаоника са системом дијагоналних линија на два комплементарна градивна елемента при чему је коришћен само један од њих или

[3] *Roger Penrose*, рођен 1931.

оба. Уједно објашњава настанак извесног узнемиравајучег визуелног утиска који овакви орнаменти производе. Када путеви људске мисаоности и духовности иду тако далеко да превазилазе оквире видљиве реалности очекивано је да ће се различити видови оваквих трагања негде приближавати и преплитати. Тако, додирне тачке математике и уметности можемо објаснити као тежњу и једне и друге да продру у дубину постојања, односа, хармоније и истине уопште. Тиме се показује да математика и уметност имају много тога заједничког иако неки мисле да су управо на супротним крајевима широког и богатог спектра људских делатности.

Henri Poincare:„*Поклоници математике налазе у њој ужитке сличне онима што их пружа сликарство и музика. Они се диве деликатној хармонији бројева и облика. Задивљени су кад неко ново откриће открије неслућене видике; а зар радост коју тиме уживају нема естетски карактер иако у њој не учествују чула. Истина је да је само привилегована мањина позвана да ужива у њеној пуноћи; но није ли исто и са најплеменитијим уметностима.*“

Литература

[1] P. S. Stevens, *Handbook of Regular Patterns, An Introduction to Symmetry in Two Dimensions*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1980.

[2] `http://library.thinkquest.org/16661/of.regular.polygons/index.html`

[3] J. Britton, D. Seymour, *Introduction to Tessellations*, Palo Alto: Dale Seymour Publications, 1989.

[4] B. Grünbaum, G. Shephard, *Tilings and Patterns*, New York: W. H. Freeman, 1987.

[5] *Хармонија у природи, науци и уметности кроз историју*, Флогистон, часопис за историју науке, број 7, Музеј науке и технике, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 1998.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2011/12 година