

Општински натпревар 2015

I година

1A. Ако  $xyz = 1$ , докажи дека  $\frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1} = 1$ .

Решение. Имаме:

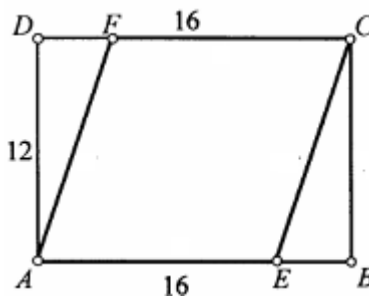
$$\begin{aligned} \frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1} &= \frac{x}{xy+x+1} + \frac{xy}{x(yz+y+1)} + \frac{xyz}{xy(zx+z+1)} \\ &= \frac{x}{xy+x+1} + \frac{xy}{xyz+xy+x} + \frac{xyz}{xyzx+xyz+xy} \\ &= \frac{x}{xy+x+1} + \frac{xy}{1+xy+x} + \frac{1}{x+1+xy} \\ &= \frac{x+xy+1}{xy+x+1} = 1. \end{aligned}$$

1B. Докажи дека секој трицифрен број од видот  $\overline{xyzxyz}$  е делив со 7, 11 и 13.

Решение. Имаме:

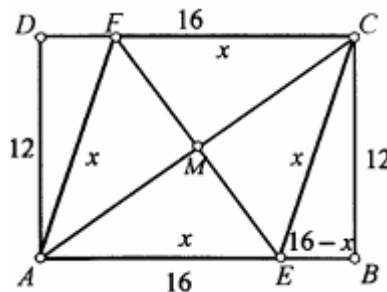
$$\overline{xyzxyz} = 1000\overline{xyz} + \overline{xyz} = 1001\overline{xyz} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xyz}.$$

2AB. На цртежот  $ABCD$  е правоаголник со страни  $\overline{AB} = 16 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 12 \text{ cm}$ . Точките  $E$  и  $F$  припаѓаат соодветно на страните  $AB$  и  $CD$  така што  $AECF$  е ромб. Колку е должината на неговата дијагонала  $EF$ ?



Решение. Нека  $AECF$  е ромб со страна  $x$ . Бидејќи  $ABCD$  е правоаголник, триаголникот  $EBC$  е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува

$$\begin{aligned} \overline{EC}^2 &= \overline{EB}^2 + \overline{BC}^2, \\ x^2 &= 12^2 + (16-x)^2, \\ x^2 &= 144 + 256 - 32x + x^2, \\ x &= \frac{25}{2}. \end{aligned}$$



Понатаму, дијагоналата  $AC$  на ромбот е всушност дијагонала на правоаголникот,

па затоа  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 16^2 + 12^2 = 400$ , т.е.  $\overline{AC} = 20 \text{ cm}$ . Сега, дијагоналите на ромбот се половат и се заемно нормални, па ако  $M$  е нивната пресечна точка, тогаш

$$\overline{FM} = 2\overline{ME} = 2\sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AM}^2} = 2\sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - 10^2} = 2 \cdot \frac{15}{2} = 15 \text{ cm}.$$

**3АБ.** Ако еден двоцифрен број се подели со збирот на своите цифри се добива количник 5 и остаток 6, а ако бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед се подели со разликата на тие цифри се добива количник 12. Кој е тој број?

**Решение.** Нека бараниот број е  $\overline{ab} = 10a + b$ . Тогаш од условот на задачата следува системот равенки

$$\begin{cases} 10a + b = 5(a + b) + 6, \\ 10b + a = 12(a - b), \end{cases}$$

т.е. системот

$$\begin{cases} 5a - 4b = 6, \\ a = 2b. \end{cases}$$

Решението на последниот систем е  $a = 2, b = 1$ , т.е. бараниот број е 21.

**4Б.** Ако  $ab = 5$ , пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{(a+b)^3 - a^3 - b^3}{a+b}.$$

**Решение.** Имаме:

$$\frac{(a+b)^3 - a^3 - b^3}{a+b} = \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 - b^3}{a+b} = \frac{3ab(a+b)}{ab} = 3ab = 15.$$

**4А.** Дали е можно рабовите на коцка да се нумерираат со броевите од 1 до 12 така што збирот на броевите придружени на секои три раба кои излегуваат од едно исто теме е еднаков?

**Решение.** Ако работ  $AB$  е нумериран со некој број, тогаш тој број ќе се појави и во збирот кај темето  $A$  и во збирот кај темето  $B$ . Според тоа, секој од броевите од 1 до 12 се појавува по два пати. Сега ако збирот на броевите на трите раба во било кое теме е еднаков на  $a$ , тогаш треба да важи

$$8a = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12),$$

$$4a = \frac{12 \cdot 13}{2},$$

$$2a = 39,$$

што не е можно, бидејќи  $2a$  е парен, а  $39$  е непарен број. Според тоа, бараното означување не е можно.

## II година

**1A.** Пресметај ја вредноста на изразот  $x + \frac{1}{x}$  за  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$ .

**Решение.** Имаме:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{1-5} = -\frac{6+2\sqrt{5}}{4} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{1-5} = -\frac{6-2\sqrt{5}}{4} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

па затоа

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = -3.$$

**1B.** Определи го реалниот број  $m$  така што решенијата  $x_1, x_2$  на квадратната равенка  $x^2 - (m+1)x + m = 0$  го задоволуваат условот  $x_1^2 + x_2^2 = 10$ .

**Решение.** Ако го искористиме равенството  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ , тогаш од Виетовите формули следува  $x_1^2 + x_2^2 = (m+1)^2 - 2m = m^2 + 1$ , од каде добиваме  $m^2 + 1 = 10$ , т.е.  $m = \pm 3$ .

**2AB.** За кои вредности на параметарот  $a$  равенката  $ax^2 - (a-7)x + 9 = 0$  има еднакви и негативни корени.

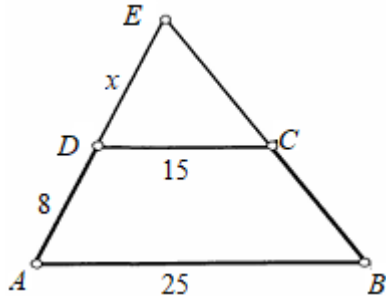
**Решение.** Дадената равенка има еднакви корени ако и само ако нејзината дискриминанта е еднаква на нула, т.е. ако и само ако

$$(a-7)^2 - 36a = 0 \Leftrightarrow a^2 - 50a + 49 = 0 \Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \cdot 49}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2}.$$

За  $a = 49$  корените на равенката се  $x_1 = x_2 = \frac{a-7}{2a} = \frac{21}{49}$ , а за  $a = 1$  корените се  $x_1 = x_2 = \frac{a-7}{2a} = -3$ . Значи, бараната вредност е  $a = 1$ .

**3AB.** Основите на еден трапез се  $a = 25$  и  $b = 15$ , а еден од краците е  $c = 8$ . Определи ги периметарот и плоштината на трапезот ако збирот на аглиите на поголемата основа е еднаков на  $90^\circ$ .

**Решение.** Нека  $\overline{AD} = c = 8$ ,  $\overline{DE} = x$ , каде  $E$  е пресекот на краците на трапезот. Од сличноста  $\triangle ABE \approx \triangle DCE$  следува дека  $\frac{25}{15} = \frac{8+x}{x}$ , од каде добиваме  $x = 12$ . Според условот на задачата важи  $\angle AEB = 90^\circ$ . Значи,  $\triangle DCE$  е правоаголен, па од Питагоровата теорема добиваме  $\overline{CE} = 9$ . Исто



така  $\triangle ABE$  е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува  $\overline{BE} = 15$ . Според тоа  $\overline{BC} = 6$ . Конечно, периметарот на трапезот е  $L = 54$ , а плоштината е  $P = P_{ABE} - P_{DCE} = \frac{20 \cdot 15}{2} - \frac{12 \cdot 9}{2} = 150 - 54 = 96$ .

**4А.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{6x - y^2 - 4z + 1} = \sqrt{y + 4z^2} + \sqrt{9x^2 + y + 4}.$$

**Решение.** Дадената равенка ја квадрираме и ја добиваме равенката

$$6x - y^2 - 4z + 1 = y + 4z^2 + 2\sqrt{y + 4z^2}\sqrt{9x^2 + y + 4} + 9x^2 + y + 4$$

која е еквивалентна на равенката

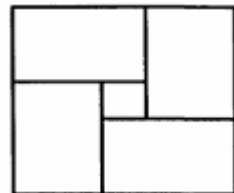
$$(3x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (2z + 1)^2 + 2\sqrt{y + 4z^2}\sqrt{9x^2 + y + 4} = 0.$$

Четириите изрази во последната равенка се ненегативни, па за нивниот збир е еднаков на нула тие треба да се еднакви на нула, односно

$$3x - 1 = y + 1 = 2z + 1 = 0 \text{ и } (y + 4z^2)(9x^2 + y + 4) = 0.$$

Од првите равенства добиваме  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = -1$ ,  $z = -\frac{1}{2}$ , и со непосредна проверка наоаме дека е исполнето и четвртото равенство.

**4Б.** Квадратот прикажан на цртежот десно е составен од четири складни правоаголници и еден квадрат. Односот на плоштините на големиот и малиот квадрат е еднаков на  $9 + 4\sqrt{5}$ . Определи го односот на должините на страните на правоаголниците.



**Решение.** Нека  $a$  и  $b$  се должините на страните на големиот и малиот квадрат, соодветно, а  $x$  и  $y$  се должините на помалата и поголемата страна на правоаголниците, соодветно. Од условот на задачата следува

$$\frac{a}{b} = \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{5}^2} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = 2 + \sqrt{5}.$$

Понатаму,  $a = x + y$ ,  $b = y - x$ , од каде добиваме  $x = \frac{a-b}{2}$ ,  $y = \frac{a+b}{2}$ . Значи,

$$\frac{x}{y} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1} = \frac{2+\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

### III година

1A. Докажи го неравенството  $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$ .

**Решение.** Имаме,  $\log_2 3 \neq \log_3 2$  и  $\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3}$ , па од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\log_2 3 + \log_3 2 > 2\sqrt{\log_2 3 \cdot \log_3 2} = 2\sqrt{\log_2 3 \cdot \frac{1}{\log_2 3}} = 2.$$

1B. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$A = 24 - 12x - 2x^2.$$

**Решение.** Имаме,

$$A = 24 - 12x - 2x^2 = 24 - 2(x^2 + 6x) = 24 - 2(x^2 + 6x + 9 - 9) = 42 - 2(x+3)^2,$$

па како  $-2(x+3)^2 \leq 0$  добиваме дека  $A_{\max} = 42$  и истата се достигнува за  $x = -3$ .

2A. Ако  $a = \cos 2015^\circ$ ,  $b = \operatorname{tg} 2015^\circ$ ,  $c = \operatorname{ctg} 2015^\circ$ , подреди ги по големина  $a, b, c$  почнувајќи од најголемиот.

**Решение.** Имаме  $2015^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 215^\circ$ , па затоа точни се следниве равенства:

$$a = \cos 2015^\circ = \cos 215^\circ = \cos(180^\circ + 35^\circ) = -\cos 35^\circ < 0,$$

$$b = \operatorname{tg} 2015^\circ = \operatorname{tg} 215^\circ = \operatorname{tg} 35^\circ < \operatorname{tg} 45^\circ = 1, b = \operatorname{tg} 35^\circ > 0,$$

$$c = \operatorname{ctg} 2015^\circ = \operatorname{ctg} 35^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 35^\circ} > 1.$$

Значи,  $c > b > a$ .

2B. Пресметај ја вредноста на изразот  $(1 - \sin \frac{\pi}{8})(1 + \sin \frac{\pi}{8})$ .

**Решение.** Имаме:

$$(1 - \sin \frac{\pi}{8})(1 + \sin \frac{\pi}{8}) = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos 2 \cdot \frac{\pi}{8}}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

**3АБ.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} (x + y)^2 = z, \\ (y + z)^2 = x, \\ (z + x)^2 = y. \end{cases}$$

**Решение.** Левите страни на трите равенки на системот се ненегативни, па затоа мора и десните страни да се ненегативни, т.е. важи  $x, y, z \geq 0$ . Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка, добиваме

$$(x + y)^2 - (y + z)^2 = z - x, \text{ т.е. } (x - z)(x + 2y + z + 1) = 0,$$

па како  $x + 2y + z + 1 \geq 1 > 0$ , од последната равенка следува  $x = z$ . На потполно ист начин ако од втората равенка ја одземеме третата равенка добиваме  $x = y$ . Според тоа, дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} x = z, \\ x = y, \\ (z + x)^2 = y. \end{cases}$$

Сега, со замена од првата и втората равенка во третата равенка, добиваме  $4x^2 = x$ . Решенијата на последната равенка се  $x = 0$  и  $x = \frac{1}{4}$ , што значи дека решенијата на почетниот систем се  $x = y = z = 0$  и  $x = y = z = \frac{1}{4}$ .

**4АБ.** Ако  $m^2 + n^2 = 1$ ,  $p^2 + q^2 = 1$  и  $mp + nq = 0$ , определи ја вредноста на  $mn + pq$ .

**Решение.** Од  $m^2 + n^2 = 1$  следува дека постои  $\alpha$  таков што  $m = \sin \alpha$ ,  $n = \cos \alpha$ . Слично, од  $p^2 + q^2 = 1$  следува дека постои  $\beta$  таков што  $p = \sin \beta$ ,  $q = \cos \beta$ . Сега,

$$0 = mp + nq = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta),$$

па затоа

$$mn + pq = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot 0 = 0.$$

#### IV година

**1А.** Ако  $n, n > 1$  е природен број, докажи дека ниту еден од броевите  $n!+2, n!+3, \dots, n!+(n-1), n!+n$  не е прост.

**Решение.** Нека  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . За секој  $k \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$  важи  $a_k = \frac{n!}{k} \in \mathbb{N}$ , па затоа  $a_k + 1 \geq 2$ . Сега, од равенството  $n!+k = k(\frac{n!}{k} + 1) = k(a_k + 1)$  следува дека за секој  $k \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$  бројот  $n!+k$  може да се запише како производ на два броја поголеми или еднакви на 2, што значи дека за секој  $k \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$  бројот  $n!+k$  е сложен.

**1Б.** Во множеството природни броеви реши ја равенката:

$$\binom{n+1}{n-2} + 2\binom{n-1}{3} = 7(n-1).$$

**Решение.** Воведуваме смена  $n = k + 2$  и добиваме

$$\begin{aligned} \binom{k+3}{k} + 2\binom{k+1}{3} &= 7(k+1) \\ \frac{(k+3)!}{k!3!} + 2 \cdot \frac{(k+1)!}{3!(k-2)!} &= 7(k+1), \\ \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6} + \frac{(k+1)k(k-1)}{3} &= 7(k+1), \\ (k+3)(k+2) + 2k(k-1) &= 42, \\ k^2 + k - 12 &= 0. \end{aligned}$$

Решенија на последната равенка се  $k_1 = -4$  и  $k_2 = 3$ . Според тоа, во множеството природни броеви единствено решение на почетната равенка е  $n = 5$ .

**2АБ.** Определи ги сите аритметички прогресии  $\{a_n\}$  такви што важи  $a_n + a_m = a_{m+n}$ , за секои  $m, n \in \mathbb{N}$ .

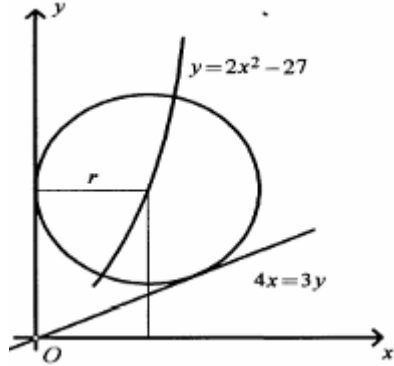
**Решение.** Нека  $a_1$  и  $d$  се првиот член и разликата на прогресија која го задоволува условот на задачата. Тогаш

$$\begin{aligned} a_m + a_n &= a_{m+n}, \\ a_1 + (n-1)d + a_1 + (m-1)d &= a_1 + (m+n-1)d, \\ a_1 &= d. \end{aligned}$$

Според тоа, сите аритметички прогресии кај кои разликата е еднаква на почетниот член се решение на задачата.

**3А.** Правите  $x=0$  и  $4x=3y$  се тангенти на кружницата која лежи во првиот квадрант и чиј центар се наоѓа на параболата  $y=2x^2-27$ . Определе го радиусот на оваа кружница.

**Решение.** Нека  $(a,b)$  е центарот и  $r$  е радиусот на кружницата. Јасно,  $a > 0$ ,  $b > 0$  и бидејќи  $y$ -оската е тангента на кружницата важи  $r=a$ , а како центарот лежи на параболата  $y=2x^2-27$  следува дека  $b=2a^2-27=2r^2-27$ . Значи, координатите на центарот се  $(r, 2r^2-27)$ . Сега, растојанието од центарот до правата



$4x=3y$  е еднакво на  $r$ , па затоа  $\frac{3(2r^2-27)-4r}{\sqrt{4^2+3^2}}=r$ , т.е.  $6r^2-9r-81=0$ .

Решенијата на последната равенка се  $r=-3$  и  $r=\frac{9}{2}$ . Но, радиусот е позитивен број, па затоа решение на задачата е  $r=\frac{9}{2}$ .

**3Б.** На секој ѕид на една коцка се дадени по  $a$  точки, така што било кои три не се колинеарни и ниту една не лежи на рабовите на коцката.

а) Колку прави што не лежат на ѕидовите на коцките се определени со дадените точки?

б) Колку триаголници што не лежат на ѕидовите на коцката се определени со дадените точки?

**Решение.** а) Со дадените  $6a$  точки се определени  $\binom{6a}{2}$  прави. На секој од шесте ѕида на коцката лежат по  $\binom{a}{2}$  прави. Значи, бараниот број прави е еднаков на  $\binom{6a}{2} - 6\binom{a}{2} = 3a(6a-1) - 3a(a-1) = 15a^2$ .

б) Слично како во решението под а) наоѓаме дека бараниот број триаголници е  $\binom{6a}{3} - 6\binom{a}{3} = 5a^2(7a-3)$ .

**4АБ.** Низата  $a_n$ ,  $n=1,2,3,\dots$  е зададена со  $a_1=1$ ,  $a_2=143$  и

$$a_{n+1} = 5 \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad n \geq 2.$$

Докажи дека сите членови на оваа низа се природни броеви.

**Решение.** *Прв начин.* Имаме  $a_3 = 5 \frac{a_1+a_2}{2} = 5 \cdot \frac{144}{2} = 360$ , а за  $n \geq 4$  важи

$$\begin{aligned} a_n &= 5 \frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-2}+a_{n-1}}{n-1} = \frac{5}{n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \frac{5}{n-1} a_{n-1} \\ &= \frac{5}{n-1} \cdot \frac{n-2}{5} a_{n-1} + \frac{5}{n-1} a_{n-1} = \frac{n+3}{n-1} a_{n-1}. \end{aligned}$$

Според тоа, за  $n \geq 4$  важи

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+3}{n-1} a_{n-1} = \frac{n+3}{n-1} \frac{n+2}{n-2} a_{n-2} = \dots = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)\dots \cdot 7}{(n-1)(n-2)\dots \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} a_3 \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot 360 = (n+3)(n+2)(n+1)n, \end{aligned}$$

од што следува дека  $a_n$  е природен број и за  $n \geq 4$ .

*Втор начин.* Ставаме  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$  и добиваме  $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ . Значи, до-

волно е да докажеме дека  $S_n$  е природен број. Јасно,  $S_1 = 1, S_2 = 144$  се природни броеви. Понатаму,

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i = a_{n+1} + \sum_{i=1}^n a_i = \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_i = \frac{5}{n} S_n + S_n = \frac{n+5}{n} S_n.$$

Според тоа, за секој  $n \geq 2$  важи

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{n+5}{n} S_n = \frac{n+5}{n} \frac{n+4}{n-1} S_{n-1} = \dots = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n \dots \cdot 7}{n(n-1)\dots \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} S_2 \\ &= \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 144 = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5}, \end{aligned}$$

па како производот на 5 последователни природни броеви е делив со 5, заклучуваме дека  $S_{n+1}$  е природен број за  $n \geq 2$ .

*Трет начин.* Имаме

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 143, \quad a_3 = 360,$$

$$a_4 = \frac{5}{3} (1 + 143 + 360) = 840 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4,$$

$$a_5 = \frac{5}{4} (1 + 143 + 360 + 840) = 1680 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5,$$

па логично е да се обидеме да докажеме дека

$$a_n = (n+3)(n+2)(n+1)n, \quad \text{за } n \geq 4. \quad (1)$$

Јасно, формулата (1) важи за  $n = 4$  и  $n = 5$ , и нека претпоставиме дека (1) важи за некој  $n \geq 4$ . Тогаш, како во првиот начин на решавање наоѓаме

$a_{n+1} = \frac{n+4}{n} a_n$ , па од индуктивната претпоставка, т.е. од (1) следува

$$a_{n+1} = \frac{n+4}{n} a_n = \frac{n+4}{n} (n+3)(n+2)(n+1)n = (n+4)(n+3)(n+2)(n+1).$$

Сега, од принципот на метематичка индукција следува дека (1) важи за секој  $n \geq 4$ .

Конечно, од  $a_1 = 1, a_2 = 143, a_3 = 360, a_n = (n + 3)(n + 2)(n + 1)n, n \geq 4$ , следува дека сите членови на низата се природни броеви.