

Prebrojavanje stabala s malim brojem vrhova

Ivan Mihovilović*, Anamari Nakić†

Sažetak

Stablo je povezan jednostavan graf bez ciklusa. Prebrojavanje različitih stabala s n vrhova je težak kombinatorni problem. Za velike vrijednosti n , problem je još uvijek otvoren. U ovom će se članku prebrojiti i konstruirati sva stabla s najviše osam vrhova.

Ključne riječi: *graf, stablo, prebrojavanje stabala*

Counting trees with a small number of vertices

Abstract

A tree is a connected simple graph without cycles. Counting different trees with n vertices is a difficult combinatorial problem. For the large values of n , the problem is still open. In this paper we discuss the numbers and constructions of all trees with up to eight vertices.

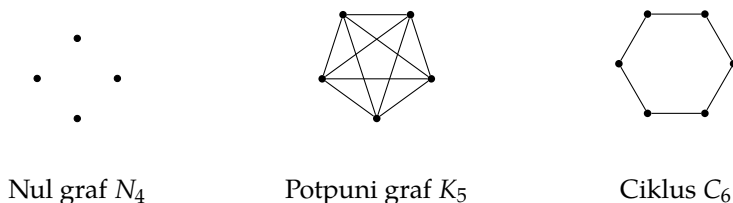
Keywords: *graph, tree, counting of trees*

*Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, Unska 3, 10000 Zagreb, email: ivan.mihovilovic@fer.hr

†Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, Unska 3, 10000 Zagreb, email: anamari.nakic@fer.hr

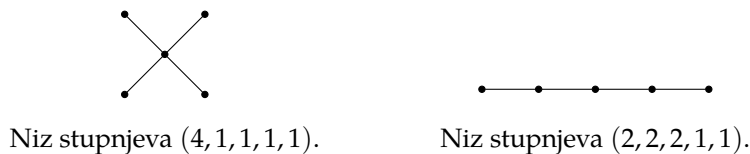
1 Osnovni pojmovi

Jednostavan graf $G = (V, E)$ je uređeni par nepraznog konačnog skupa vrhova V i konačnog skupa E dvočlanih podskupova skupa V koje zovemo bridovi. U ovom radu jednostavan graf ćemo kraće nazivati grafom.



Slika 1.

Ukoliko su dva vrha v i w grafa G povezana bridom $e = vw$ kažemo da su susjedni. Nadalje, kažemo da su vrh v i brid e incidentni. Stupanj vrha v grafa G je broj bridova incidentnih s v ; oznaka $\deg(v)$. Vrh stupnja 1 se naziva list. Svakom grafu se pridružuje nerastući niz stupnjeva vrhova.



Slika 2.

Sljedeća lema posljedica je činjenice da je svaki brid grafa incidentan s točno dva vrha.

Lema 1.1 (Lema o rukovanju). *Ukupna suma stupnjeva u grafu G je paran broj i vrijedi*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

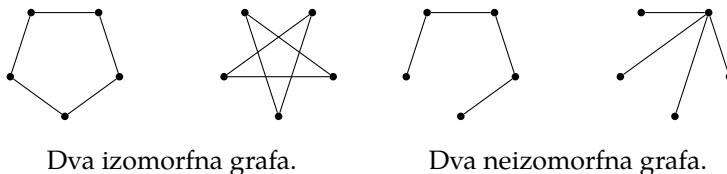
Dakle, niz stupnjeva grafa G s n vrhova i m bridova je particija broja $2m$. S druge strane, nije svaka particija broja $2m$ ujedno i niz stupnjeva nekog grafa. Kažemo da je nenegativan niz (d_1, \dots, d_n) cijelih brojeva grafički niz ako postoji graf G čiji je to niz stupnjeva.

Neka je $n = 3$, $m = 3$. Niz $(3, 2, 1)$ nije grafički, a $(2, 2, 2)$ jest. Zanimljivi problem određivanja je li zadani niz brojeva grafički detaljno je opisan u [5], gdje su i predstavljena dva najpoznatija kriterija.

Sljedeća tvrdnja je direktna posljedica Leme o rukovanju.

Korolar 1.1. *Broj vrhova neparnog stupnja u grafu G je paran.*

Za grafove $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ kažemo da su izomorfni ako postoji bijektivna korespondencija između skupova vrhova V_1 i V_2 takva da je broj bridova koji spajaju bilo koja dva izabrana vrha u V_1 jednak broju bridova koji spajaju korespondentna dva vrha u V_2 . Takva se bijekcija naziva izomorfizam grafova.



Slika 3.

Kažemo da je G nepovezan ukoliko se može prikazati kao unija dva disjunktna grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ tako da je $V = V_1 \cup V_2$ i $E = E_1 \cup E_2$. U suprotnom kažemo da je graf G povezan.

Šetnja u G je konačan slijed bridova oblika $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$ u kojem su svaka dva uzastopna brida ili susjedna ili jednaka. Šetnju u kojoj su svi bridovi različiti zovemo staza. Staza u kojoj su svi vrhovi v_0, v_1, \dots, v_m različiti (osim eventualno početni vrh v_0 i krajnji vrh v_m) zove se put. Za stazu ili put kažemo da su zatvoreni ako je $v_0 = v_m$. Zatvoreni put koji sadrži barem jedan brid zovemo ciklus. Šuma je graf bez ciklusa, a stablo je povezana šuma.



Slika 4.

2 Koliko ima stabala?

Prebrojavanje različitih stabala je težak problem. Za početak je potrebno napomenuti da ćemo dva stabla smatrati različitim ukoliko su neizomor-

fna. Ne postoji zatvorena formula za broj stabala s n vrhova. Stoga su razvijene razne kombinatorne tehnike s ciljem prebrajanja stabala, ili barem određivanja približnog broja. Za velike vrijednosti parametra n problem je još uvijek otvoren. Mi ćemo u ovom članku prebrojiti sva stabla s najviše osam vrhova. Stabla ćemo konstruirati i prebrojiti jednostavnom kombinatornom iscrpnom pretragom. Time ćemo dokazati sljedeći teorem.

Teorem 2.1. *Postoji ukupno 48 stabala s n vrhova, $n \leq 8$.*

Jasno je da su stabla s različitim brojem vrhova neizomorfna. Lako je uočiti da postoji po jedno stablo s jednim, dva i tri vrha.



Slika 5.

Sljedeći rezultat bit će nam od velike pomoći u prebrajanju stabala.

Lema 2.1. *Svako stablo s $n \geq 2$ vrha ima barem dva lista.*

Dokaz. U stablu konstruiramo put maksimalne duljine. S obzirom da stablo ima konačno mnogo vrhova i bridova te nema ciklusa, početni i krajnji vrh maksimalnog puta $v_0v_1, \dots, v_{m-1}v_m$ bit će listovi. \square

Poznat je broj bridova stabla s n vrhova.

Teorem 2.2. *Stablo s n vrhova ima $n - 1$ bridova.*

Dokaz. Ovaj ćemo teorem dokazati matematičkom indukcijom po broju vrhova n . Baza indukcije je potvrđena na početku ovog poglavlja. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sva stabla s n vrhova, i neka je T stablo s $n + 1$ vrhom. Neka je v jedan list u stablu i e jedini brid od T incidentan s v . Tada stablo $T - e$ nastalo uklanjanjem brida e i vrha v ima n vrhova i, prema pretpostavci indukcije, $n - 1$ bridova. Stoga zaključujemo da T ima $n - 1 + 1 = n$ bridova, čime je tvrdnja dokazana. \square

Pokažimo da postoje dva stabla s četiri vrha. Stablo s četiri vrha ima 3 brida, a kako bismo lakše konstruirali stabla, identificirat ćemo prvo moguće nizove stupnjeva. Prema Lemi o rukovanju zbroj svih stupnjeva s $n = 4$ vrha jednak je $2 \cdot (n - 1) = 6$. Stablo ima barem dva lista, stoga su mogući nizovi stupnjeva sljedeći: $(2, 2, 1, 1)$ i $(3, 1, 1, 1)$. U oba slučaja moguće je konstruirati jedinstveno stablo. U prvom slučaju je to graf put P_4 , a u drugom graf zvijezda.

PREBROJAVANJE STABALA S MALIM BROJEM VRHOVA



Niz stupnjeva $(2, 2, 1, 1)$.

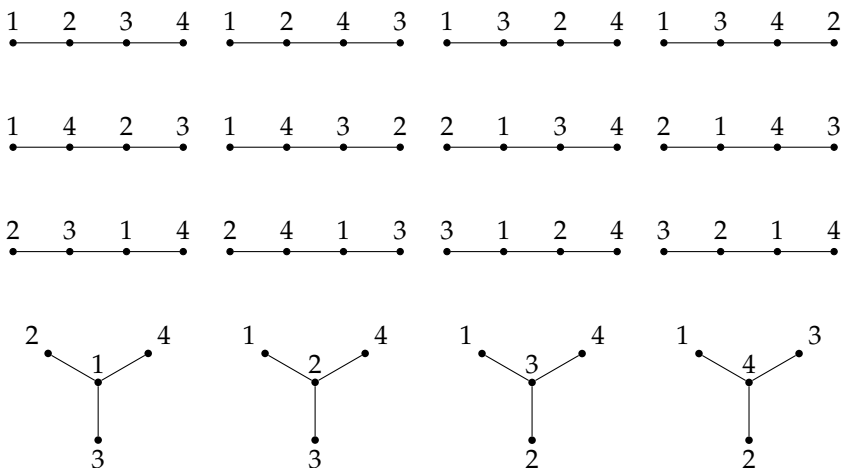
Niz stupnjeva $(3, 1, 1, 1)$.

Slika 6.

U ovom članku bavimo se prebrajanjem stabala s neoznačenim vrhovima. Nije poznata formula za izračun broja stabala s n vrhova s neoznačenim vrhovima. No, uvedemo li oznake za vrhove, poznat je sljedeći rezultat [2].

Teorem 2.3 (Cayley). *Postoji n^{n-2} različitih označenih stabala s n vrhova.*

Zaključujemo da postoji $4^2 = 16$ stabala s četiri označena vrha, koje navodimo u nastavku, slika 7. Brojevi označenih stabala s n vrhova, za manje vrijednosti n dostupne su u [7].

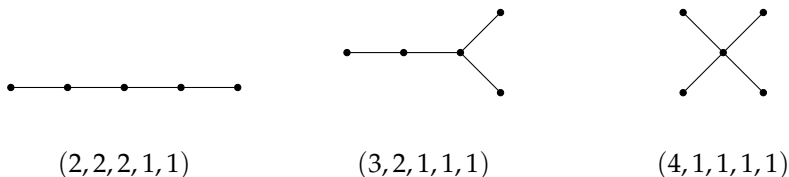


Slika 7.

3 Stabla s pet vrhova

Stablo s $n = 5$ vrhova može imati 2, 3 ili 4 lista. Prema Lemi o rukovanju zbroj stupnjeva vrhova jednak je $2 \cdot (n - 1) = 8$. Stoga su sljedeći mogući

nizovi stupnjeva: $(2, 2, 2, 1, 1)$, $(3, 2, 1, 1, 1)$ i $(4, 1, 1, 1, 1)$. Za svaki od navedenih nizova stupnjeva moguće je konstruirati jedinstveno pripadajuće stablo.



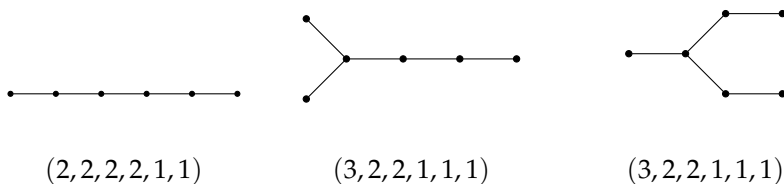
Slika 8.

Teorem 3.1. *Postoje tri stabla s pet vrhova.*

4 Stabla sa šest vrhova

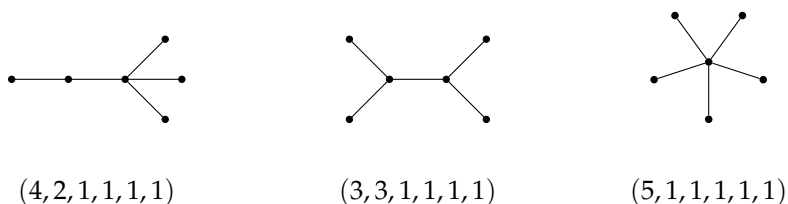
Stablo sa $n = 6$ vrhova ima 5 bridova te 2, 3, 4, ili 5 listova. Prema Lemi o rukovanju zbroj stupnjeva vrhova jednak je 10.

Postoji jedinstveno stablo s dva lista, to je graf put P_6 čiji je niz stupnjeva jednak $(2, 2, 2, 2, 1, 1)$. U slučaju stabla s tri lista, jedini mogući niz stupnjeva je $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$. Uočimo da stablo s danim nizom stupnjeva ima dva vrha stupnja 2. Ovdje se prvi put susrećemo sa situacijom da možemo konstruirati dva neizomorfna stabla s istim brojem vrhova, bridova i nizom stupnjeva: u jednom su stablu dva vrha stupnja 2 susjedna, a u drugom to nije slučaj. Stoga su ova dva stabla neizomorfna.



Slika 9.

Pretpostavimo li da stablo ima 4 lista, dva su moguća niza stupnjeva: $(4, 2, 1, 1, 1, 1)$ te $(3, 3, 1, 1, 1, 1)$. U oba se slučaja može konstruirati po jedino stablo. Konačno, postoji jedinstveno stablo s pet listova, čiji je niz stupnjeva jednak $(5, 1, 1, 1, 1, 1)$.



Slika 10.

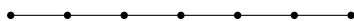
Ovim smo postupkom dokazali sljedeći teorem.

Teorem 4.1. *Postoji šest stabala sa šest vrhova.*

5 Stabla sa sedam vrhova

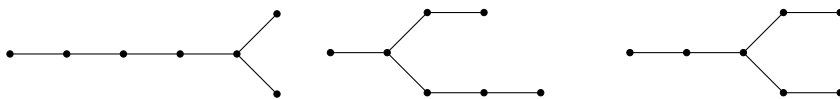
Stablo sa 7 vrhova ima 6 bridova, a prema Lemi o rukovanju zbroj stupnjeva stabla s $n = 7$ vrhova jednak $2 \cdot (n - 1) = 12$. S obzirom da stablo ima između 2 i 6 listova, postoji 8 mogućih nizova stupnjeva te možemo, pokazat ćemo, konstruirati 11 neizomorfnih stabala sa sedam vrhova.

Prvi, jednostavni slučaj je stablo s dva lista, niz stupnjeva je jedinstven kao i stablo: graf put P_7 .



Slika 11. $(2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$

Postoje tri neizomorfna stabla s tri lista, sva tri imaju isti niz stupnjeva: $(3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$. Razlikujemo ih prema tome je li jedinstveni vrh stupnja 3 susjedan s dva, jednim ili niti jednim listom.



Slika 12. $(3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$

Pretpostavimo li da stablo ima četiri lista, zbroj stupnjeva preostala tri vrha jednak je 8. Postoje dva rješenja ove jednadžbe: $(3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$ i $(4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$.

U prvom slučaju možemo konstruirati dva neizomorfna stabla: u jednom su stablu dva vrha stupnja 3 susjedna, a u drugom nisu.



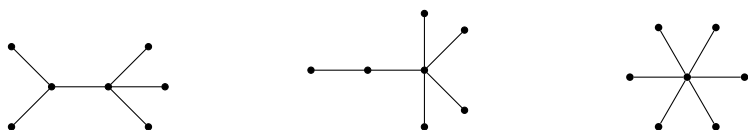
Slika 13. $(3, 3, 2, 1, 1, 1)$

I u drugom slučaju možemo konstruirati dva stabla: u jednom su stablu vrhovi stupnja 2 susjedni, a u drugom nisu.



Slika 14. $(4, 2, 2, 1, 1, 1)$

Postoje dva stabla s 5 listova i imaju različite nizove stupnjeva $(4, 3, 1, 1, 1, 1)$ i $(5, 2, 1, 1, 1, 1)$. Konačno, pregled stabala sa sedam vrhova završavamo konstrukcijom jedinstvenog stabla sa šest listova.



$(4, 3, 1, 1, 1, 1)$

$(5, 2, 1, 1, 1, 1)$

$(6, 1, 1, 1, 1, 1)$

Slika 15.

Ovime smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 5.1. *Postoji 11 stabala sa sedam vrhova.*

6 Stabla s osam vrhova

S povećanjem broj vrhova, povećava se i broj različitih nizova stupnjeva koji zadovoljavaju nužne uvjete, ali i broj neizomorfnih stabala koja imaju isti niz stupnjeva. Prebrajanje postaje sve kompleksnije s mnoštvom slučajeva koje je potrebno pažljivo obraditi kako bismo proveli iscrpnu pretragu. Stoga ćemo ovaj pregled završiti s prebrajanjem stabala s 8 vrhova kojih ima 23. Za nastavak prebrajanja stabala s većim brojem vrhova primjerenije je koristiti računalo i kompleksnije kombinatorne tehnike.

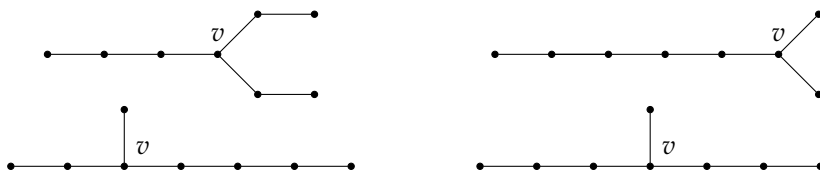
Zbroj stupnjeva stabla s osam vrhova jednak je 14. Najveći mogući broj listova je 7, a najmanji 2.

Kao i u prethodnim slučajevima, jedinstveno stablo s dva lista je graf put P_8 .



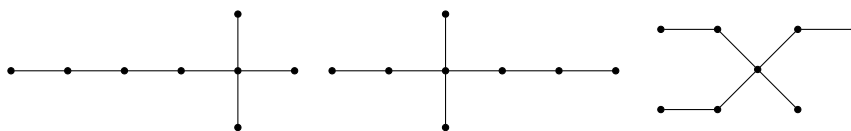
Slika 16. $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$

Pretpostavimo li da stablo ima tri lista, postoji jedinstveni niz stupnjeva koji zadovoljava nužne uvjete: $(3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$. Postoje četiri stabla s ovim nizom stupnjeva. Uočimo jedinstveni vrh v stupnja 3. Vrh v je susjedan s jednim, dva ili niti jednim listom. Stabla su jedinstvena u slučaju susjedstva jedinstvenog vrha v s dva ili niti jednim listom (prva dva slučaja na sljedećoj slici). Kada je v susjedan s jednim listom i dva vrha stupnja dva, potrebno je uočiti da postoje dva načina na koji možemo dovršiti graf: ili su oba susjeda od v stupnja 2 susjedna s vrhovima stupnja 2 ili nisu (posljednja dva grafa na sljedećoj slici).



Slika 17. $(3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$

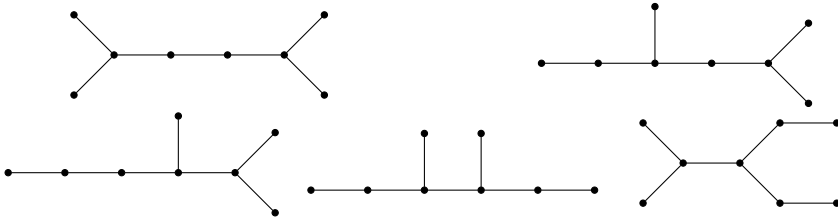
Pretpostavimo li da stablo ima četiri lista, rješavanjem jednadžbe dolazimo do dva moguća niza stupnjeva: $(4, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ i $(3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$. U prvom slučaju možemo konstruirati tri neizomorfna stabla. Stabla se razlikuju po tome je li jedinstveni vrh stupnja 4 susjedan s jednim, dva ili tri vrha stupnja 2.



Slika 18. $(4, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

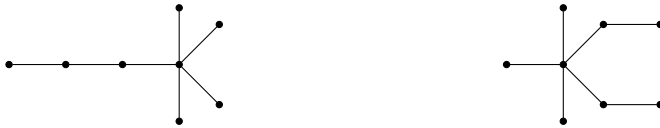
U drugom slučaju, za niz stupnjeva $(3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ moguće je kons-

truirati 5 stabala koja se razlikuju u susjedstvu vrhova stupnjeva 2 i 3. Na sljedećoj slici kod prva dva konstruirana stabla vrhovi stupnja 3 nisu susjedni, a u preostala tri stabla jesu.



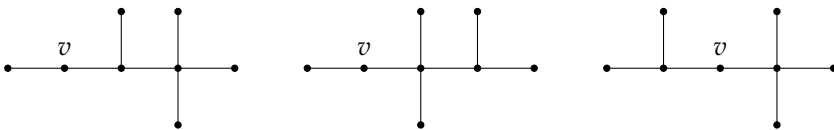
Slika 19. (3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)

Uz pretpostavku da stablo ima pet listova, sljedeća tri niza stupnjeva zadovoljavaju nužne uvjete: (5, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1) i (3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1). U prvom slučaju možemo konstruirati dva neizomorfna stabla. Razlikujemo ih po tome jesu li vrhovi stupnja 2 susjedni ili ne.



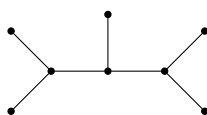
Slika 20. (5, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)

U drugom slučaju možemo konstruirati tri stabla koja razlikujemo po stupnjevima susjeda od jedinstvenog vrha v stupnja 2.



Slika 21. (4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)

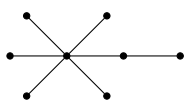
U posljednjem slučaju, vrhovi stupnja 3 nužno su susjedni stoga je pridruženo stablo jedinstveno.



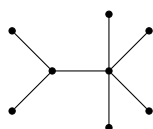
Slika 22. $(3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$

Dakle, postoji 6 neizomorfnih stabala s 8 vrhova i 5 listova.

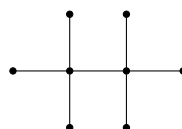
Pretpostavimo li da stablo ima 6 listova možemo konstruirati tri niza stupnjeva i za svaki od njih jedinstveno stablo: $(6, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(5, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ i $(4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.



$(6, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$



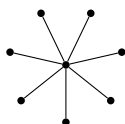
$(5, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$



$(4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

Slika 23.

Konačno, stablo sa 7 listova je jedinstveno.



Slika 24. $(7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

Ovime smo završili prebrajanje stabala s osam vrhova.

Teorem 6.1. *Postoje 23 stabla s osam vrhova.*

Evo i pregleda rezultata koje smo prikazali u ovom članku. Sustavno smo konstruirali i pobrojali sva stabla s $n \leq 8$ vrhova i k listova. Označimo li dobivene vrijednosti s $T(n, k)$, $n \geq 2$, $2 \leq k \leq n$, dobiveni dvodimenzionalni niz može se pogodno prikazati u obliku trokuta gdje svaki redak odgovara jednoj vrijednosti parametra $n \geq 2$, a k -ti stupac broju stabala s $k + 1$ listom

[8].

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & & & & & \\
 1 & 0 & & & & \\
 1 & 1 & 0 & & & \\
 1 & 1 & 1 & 0 & & \\
 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & \\
 1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 \\
 1 & 4 & 8 & 6 & 3 & 1 & 0
 \end{array}$$

Zbrojimo li sve vrijednosti u n -tom retku, dobit ćemo ukupan broj stabala s n vrhova: $T(n) = \sum_{k=2}^n T(n, k)$, $n \geq 2$.

Broj vrhova n	1	2	3	4	5	6	7	8
Broj stabala $T(n)$	1	1	1	2	3	6	11	23

Članak zaključujemo s nizom brojeva stabala s većim brojem vrhova za ilustraciju čitatelju o kompleksnoj prirodi problema prebrojavanja stabala [6].

n	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$T(n)$	47	106	235	551	1301	3159	7741	19320	48629

n	18	19	20	21	22	23
$T(n)$	123867	317955	823065	2144505	5623756	14828074

n	24	25	26	27	28
$T(n)$	39299897	104636890	279793450	751065460	2023443032

Literatura

- [1] M. Bóna, *A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory*, World Scientific, 2016.
- [2] A. Cayley, *A Theorem on Trees*, Quart. J. Pure Appl. Math. 23(1889), 376–378.
- [3] D. Kovačević, M. Krnić, A. Nakić, M. O. Pavčević, *Diskretna matematika 1*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2020.
- [4] D. Kreher, D. Stinson, *Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search*, CRC Press, 1998.
- [5] S. Majstorović, D. Begović, *Niz stupnjeva grafa*, Osječki matematički list 20 (2020), 39–52.

- [6] OEIS Foundation Inc. (2022), *Number of trees with n unlabeled nodes*, A000055, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, oeis.org (pristupljeno 27. 03. 2022.)
- [7] OEIS Foundation Inc. (2022), *Number of trees on n labeled nodes*, A000272, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, oeis.org (pristupljeno 27. 03. 2022.)
- [8] OEIS Foundation Inc. (2022), *Triangle of trees with n nodes and k leaves*, A055290. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, oeis.org (pristupljeno 27. 03. 2022.)