

ПИТАГОРЕЈСКА ТЕОРИЈА БРОЈЕВА

Владимир Сурла, Нови Сад

Циљ овог чланка је да прикаже каквим су се истраживањем бавили припадници питагорејске школе, а нарочито њихову теорију бројева. Питагора је око себе окупио велики број ученика који су радили заједно, а сва сазнања и достигнућа до којих су дошли приказана су као резултати питагорејске школе, а не појединаца. Такође, Питагора није оставио ниједан писани спис иза себе и неговао је усмено учење у својој школи, тако да је тешко са сигурношћу тврдити да ли су одређена достигнућа Питагорина или неког од ученика. Међутим, то није једини проблем који се јавља при реконструкцији питагорејског учења. Савез питагорејаца је био затвореног типа, и сва знања до којих су дошли држали су унутар школе. Пису смели да их одају онима који нису припадници школе. Тако се у списима других философа налази доста противречности и много различитих тврдњи о питагорејском учењу. То вероватно долази отуда што је и у самом савезу било различитих тврдњи и мишљења. У овом раду изложено је оно што се сматра заједничким за све питагорејце и по чему су они значајни за математику и философију.

Питагорејци су били философи чије се философско учење базирало на математици. То је време у ком су философија и математика јединствене, неиздиференциране. Најзначајнија достигнућа школе управо су у математици, али се не сме занемарити ни њихов значај у философији. Њихова достигнућа су дала један потпуно нов поглед на свет и увела нешто ново у античку философију, а многа су и данас актуелна.

ПИТАГОРА И ЊЕГОВ САВЕЗ

Питагора (568-493. пре нове ере) је старогрчки философ и математичар. Рођен је на острву Самос као син резача драгог камења. Послат је са Самоса на Лезбос да би био ученик Ферекида Сиријца, после чије смрти се вратио на Самос и био ученик Хермодама. Жељан науке и знања напустио је отаџбину и, по предању, провео 22 године у Египту, где је научио језик Египћана и овладао свим египатским наукама. Кад се вратио у домовину нашао ју је под влашћу тиранина Поликрата, па је отишао у Кротон, грчку колонију на југу Италије. Он је у Кротону основао свој савез који је уједно био философска школа, политичка партија и религиозно братство. Припадао је космолошком периоду. Позната су његова математичка достигнућа из аритметике и геометрије. Његова философска схватања у космолошком периоду базирана су на теорији бројева.

Био је заступник интереса робовласничке аристократије. После устанка демократских противника против аристократске владе дошло је до каменовања и прогањања чланова савеза како у Кротону тако и у другим градовима. Питагора се

тада преселио у Метапontiју, где је био дубоко поштован. Ту је умро 493. године пре нове ере, док се питагорејски савез поново вратио у Кротон после неколико година. Нису се више бавили политиком, али су као филозофска секта живели до 300. године пре нове ере.

ПИТАГОРЕЈСКО УЧЕЊЕ О КОСМОЛОГИЈИ

Питагорејци су се посветили математици и значајно је унапредили. Они долазе до тога да праначело није материја него облик и налазе да непромењени облик из кога све настаје јесте број, а да хармонија која влада светом произилази из одређених бројевних односа. Сматрали су да је број савршенство. Најзначајнији представник питагорејаца Филолај каже: ” Све што се спознаје има број. Без броја није могуће ништа ни замислити ни спознати.”

Они су тврдили да је монада праначело свих бића, да је она ненастала, неразорива и вечна и поистовећују је са природом. Тако су сва бића бројеви односно комбинације монада. Зато су сматрали да проучавањем бројева проучавају природу и природна бића. Тако су питагорејци сва своја истраживања и достигнућа у музици, астрономији, философији и другим наукама заснивали на бројевима.

Такође, питагорејци су открили да висина тона зависи од одређених бројевних односа. Приметили су да двоструко краћа жица даје за октаву виши тон, па су тај октавни однос приказали као однос 2:1. На сличан начин су пронашли да је однос делова у квинти 3:2, а у кварта 4:3. Сва та открића су питагорејце уверавали да се свет може објаснити помоћу бројева и бројевних односа, јер су они вечни, ненастали, непролазни, непроменљиви и непокретљиви за разлику од променљивих ствари које налазимо у искуству.

Такође, питагорејска теорија разликује се од теорија осталих философа по томе што они не тврде да све ствари настају из бројева него да све ствари јесу бројеви, да су све ствари према бројевима начињене. Ствари су одрази или опонашање бројева. Аристотел каже да је у овом учењу број представљен као принцип праматерије, односно материје од које су све ствари сачињене као и принцип конституисања особина ствари и њихових перманентних стања. Он ову теорију види базирану на сличности између особина ствари и бројева. Тако су питагорејци дошли до дуалистичког погледа на свет. Сматрали су да постоје две стварности. Виша првобитна стварност је свет математичких облика, а емпиријска стварност, у којој се ми налазимо, само је копија више стварности.

Звездано небо сматрали су за царство савршености због склада кретања који у њему влада, док су свет на Земљи сматрали царством несавршености због променљивости кретања и стварања. На небу су видели божански мир постојаности који нису видели на Земљи. Замишљали су елементе као ограничене, а простор као неограничен. Они су једноставним стереометријским формама представили Емпедоклова четири елемента као и пети небески елемент који су увели, етер. Замислили су ватру као тетраедар, земљу као кубус, ваздух као октаедар, воду као икосаедар и етер као додекаедар. Питагорејци су, такође, препознавали супротности између ограниченог и неограниченог, непарних и парних бројева, савршеног и несавршеног, као и између добра и зла. Тако су дошли до тога да

насупротив ограниченом, непарном, савршеном и добром стоји неограничено, парно, несавршено и зло. Као што је јединица уједно паран и непаран број у којем су удружена оба принципа тако је свет хармонија ових супротности које су изједначене. Свет је хармонија бројева.

Питагорејци су такође врлине означавали бројевима, односно врлину је одређивао неки број. Пошто је октава највећа хармонија у скали, а љубав и пријатељство су хармонија, онда је љубав изједначена са бројем 8. За праведност су сматрали да се састоји из квадрата или куба броја, односно од броја помноженог самим собом, јер праведност враћа исто за исто, па је праведност 4 или 9, јер је квадрат првог парног броја 4, а квадрат првог непарног 9, пошто 1 није број. Брак је 5, јер представља везу мушког и женског, односно првог парног и првог непарног. Будући да 1 није број, онда је $2+3=5$. Слично су добили да је оживљавање 6, здравље 7, итд.

Питагорејци су у бројевима видели више сличности са стварима него у ватри, земљи или води. Тако особине бројева могу да буду правда, душа или ум, могућност итд. Такође су у бројевима видели особине и односе у музичким скалама. Дакле, све друге ствари у својој природи изједначене су са бројевима, док су бројеви прве ствари у природи, елементи бројева су елементи свих ствари, а цело небо је музичка скала и број.

ПИТАГОРЕЈСКА ТЕОРИЈА БРОЈЕВА

Класификација бројева. Постоји више дефиниција бројева. Једна од њих је да је број величина сачињена од јединица. Питагорејци дефинишу парне и непарне бројеве на следећи начин: - *паран* број је онај који се може поделити на најмање делова тако да је у сваком делу највећи број (односно да се може поделити на две једнаке половине), док је *непаран* број онај који се не може овако поделити, већ се само може поделити на два неједнака дела. Јединица није сматрана за број јер је јединица мера бројева. Двојка такође није сматрана бројем јер је она принцип односно почетак парних бројева.

Код новопитагорејаца се јављају још четири врсте бројева. То су парно-парни, парно-непарни, непарно-парни и непарно-непарни. Парно-парни бројеви су они који се могу делити на два дела све до јединице, односно то су бројеви облика 2^n (n је природан број). Парно-непарни бројеви су они који кад се поделе на два дела дају два непарна броја. То су бројеви облика $2(2m + 1)$, где је m природан број. Непарно-парни бројеви су они бројеви који кад се деле на два дела, два или више пута, добија се непаран број, односно број који се не може више преполовити. Облик тих бројева је $2^{n+1}(2m + 1)$. Непарно-непарне бројеве дефинисао је Теон од Смирне. По њему то су уствари прости бројеви искључујући двојку, јер ти бројеви имају два непарна делиоца, јединицу и сам тај број.

Такође постоји подела на примарне (просте) и секундарне (сложене) бројеве. Прости бројеви су они који се могу делити само са јединицом и самим собом, а секундарни су они који се могу делити са још неким бројем. Притом двојка не спада у просте бројеве, мада Аристотел каже да је двојка једини паран прост

број. Новопитагорејци не само да искључују двојку из простих бројева него у оквиру непарних бројева дефинишу и следеће врсте бројева: секундарне бројеве; бројеве који су прости један према другом (бројеви који имају само јединицу за заједничког делиоца); бројеве који су секундарни један према другом (бројеви који имају још неки број сем јединице за заједничког делиоца).

Циљ им је био да поделе и непарне бројеве у три врсте као што су поделили и парне. Дакле, они су тако поделили непарне бројеве на:

- просте бројеве искључујући двојку;
- секундарне бројеве чији сви делиоци морају да буду прости бројеви;
- бројеви који су сами по себи секундарни, али су прости један према другом, нпр. бројеви 9 и 25 су секундарни бројеви, али немају ниједан други заједнички делилац сем јединице.

Савршени и спријатељени бројеви. Неки број је савршен ако је збир свих бројева којима се он може поделити без остатка једнак том броју. На пример: број 6 је дељив са бројевима 1, 2, 3. Пошто је $6 = 1 + 2 + 3$, то значи да је број 6 савршен број. Такође су бројеви 28 и 496 савршени бројеви, тј.: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$; $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$.

Закон формирања ових бројева доказан је у *Еуклидовим Елементима*. Ако је збир бројева (S_n) 1, 2, 2^2 , 2^3 , ..., 2^{n-1} прост број, тада је производ броја S_n и 2^{n-1} тј. $S_n \times 2^{n-1}$, савршен број, нпр.: $1 + 2 + 2^2 = 7$; $7 \times 2^2 = 28$.

У то време, Питагорејци су познавали четири савршена броја (6, 28, 496, 8128), док је сада познато више од 30 таквих бројева.

Разликују се још две врсте бројева. *Обилни* су бројеви код којих је збир делитеља већи од самог броја. На пример: делитељи броја 12 су 1, 2, 3, 4 и 6, а њихов збир је већи од 12. *Дефектни* су бројеви код којих је збир делитеља мањи од самог броја. На пример делитељи броја 8 су 1, 2 и 4, а њихов збир је мањи од 8.

Два броја су *спријатељена* ако је збир свих делитеља (чинилага) једног једнак другом броју и обрнуто. На пример: број 220 је дељив са 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, а број 284 дељив је са 1, 2, 4, 71, 142. Пошто је $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$, а $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$, онда су бројеви 284 и 220 спријатељени.

Фигура тетрактис. Посебно место у космичкој симболици питагорејаца заузима фигура тетрактис која садржи укупно десет тачака. Ова фигура приказује структуру декаде у облику једнакостраничног троугла.



Фигура тетрактис

Питагорејци су сматрали 10 за савршен број. Аристотел каже да је то зато што су у њему нашли такве ствари као што су празнина, пропорција, непарност и друге. Такође, по њима, постоји десет небеских тела, јер су они поред девет видљивих небеских тела узели за небеско тело и Антиземљу која се не види из људског боравишта зато што се то боравиште налази на овој сунчаној страни Земље, која се никад не окреће према Антиземљи.

Број 10 је сума бројева 1, 2, 3 и 4 који чине *свето четворство*, јер формирају фигуру тетрактис над којом су се питагорејци заклињали. Веровали су да могу помоћу тетрактиса да открију и разумеју тајне природе. На врху тетрактиса налази се монада, па онда у другом реду диада, у трећем триада и у четвртој тетрада. Монада, диада, триада и тетрада су представљени помоћу бројева 1, 2, 3 и 4, а ти бројеви такође представљају односе у музичким интервалима откривеним у питагорејској школи. Једном је Питагора рекао свом ученику да броји. Ученик је бројао: 1, 2, 3, 4... Када је стигао до 4, Питагора га је прекинуо, рекавши му да је 4 уствари 10, декада и њихова заклетва.

Питагорина теорема. Питагорејци су веома заслужни за развој грчке математике. Питагори се приписује откриће и једне теореме која је и данас позната под именом *Питагорина теорема*. Ова теорема гласи: *квадрат хипотенузе једнак је збиру квадрата катета правоуглог троугла*. Правоугли троуглови чије су странице цели бројеви називају се *Питагорини троуглови*, а одређене тројке бројева називају се *Питагорине тројке*, нпр. (3, 4, 5). Питагора је са овом теоремом успео да доведе у везу бројевне односе са правоуглим троуглом.

Сматра се да је сам садржај Питагорине теореме био познат и пре Питагоре. Спомине се да је била позната Египћанима, Вавилонцима, Индусима и Кинезима. Међутим, њима није био познат општи доказ теореме. Колико је ова теорема изазивала интересовање показује и податак да је Е.С. Лоомис прикупио 370 различитих доказа Питагорине теореме и објавио их 1940. године.

ЗАКЉЧАК

Питагора је био једна од најобразованијих личности периода у ком је живео. То је највероватније утицало да се око њега окупи велики број људи који су се интересовали за стицање знања. Они су се организовали у тзв. Питагорејски савез. Сва достигнућа овог савеза приписивана су философима, који су познати као *питагорејци*.

Питагорејци су се бавили математиком и философијом. Били су најпознатији по својим научним резултатима у математици а посебно теорији бројева. Философија питагорејаца ослањала се на њихова математичка знања. То им је, с једне стране, доносило славу а, с друге стране, и оштру критику њиховог философског учења од стране других философа, нарочито од стране Аристотела у књизи *Метафизика*.

Најпознатија достигнућа питагорејаца остварена су у математици. Резултати остварени у аритметици и геометрији и сада су основа ових математичких дисциплина. Поред тога, из њихових математичких резултата генерисани су извесни проблеми који су и сада предмет истраживања математичара.

ЛИТЕРАТУРА

Аристотел, *Метафизика*, Култура, Београд, 1960.

Диоген Лаертије, *Животи и мишљења истакнутих философа*, БИГЗ, Београд, 1979.

Милош Н. Ђурић, *Историје хеленске етике*, Завод за издавање уџбеника народне републике Србије, Београд, 1961.

Ратко Тошић, *Питагорина теорема - разни докази*, Архимедес - Нови Сад, Нови Сад, 1996.

Thomas Heath, *A history of Greek mathematics, Volume 1, From Thales to Euclid*, Dover Publications, Inc., New York, 1981.

Вилхелм Винделбанд, *Повијест философије, књига прва*, Напријед, Загреб, 1972.

**Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на
ДМ на Србија во 1997/98 година**