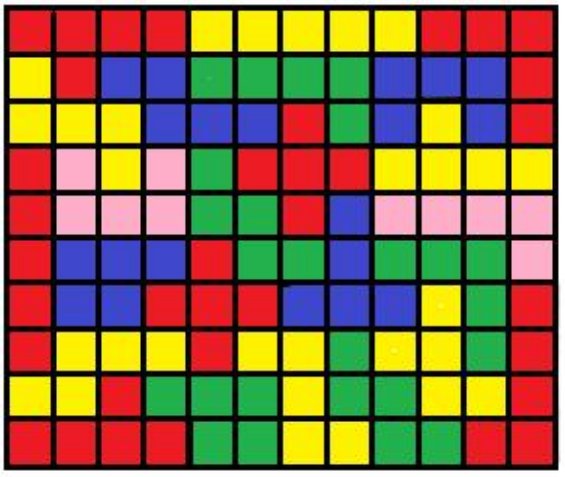
# МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 46

**Самоил Малчески**

# ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСМО ОДДЕЛЕНИЕ



**Скопје, 2024**

Рецензент:
Д-р Методи Главче
Педагошки факултет, Скопје

# СОДРЖИНА

# ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка подготвителни задачи за натпревари по математика за учениците од осмо одделение во основното образование. Збир-ката содржи 458 решени задачи кои се поделени во шест тематски целини и тоа:

- Теорија на броеви
- Алгебра,
- Текстуални задачи,
- Логика и комбинаторика.
- Геометрија и
- Дополнителни задачи.

Во одделните целини, освен во геометријата, задачите не се поделени во посебни параграфи, но сепак истите се групирани според сродноста. Делот Геометрија содржи четири целини и тоа: Триаголник, Четириаголник, Правилни многуаголници и Разни задачи. Притоа, скоро во сите целини се содржани задачи во кои се користат признаците за складност на триаголник, па затоа може да се каже дека во делот Геометрија е опфатен целиот материјал кој е присутен на натпреварите по математика. Овде ќе напоменам дека само мал дел од конструктивните задачи кои се содржат во делот Разни задачи се целосно решени следејќи го алгоритамот: анализа, конструкција, доказ и дискусија, па затоа на читателот му препорачувам самостојно да ги реализираат четирите фази од решавањето на конструктивна задача.

Во првиот дел од збирката се дадени формулациите на задачите, а во вториот дел за повеќето задачи се дадени целосни решенија, а само кај мал дел се дадени само одговори. На читателот му препорачувам да се обиде самостојно да ја реши секоја задача, а потоа решението кое го добил да го спореди со даденото решение, односно да го проучи даденото решение ако самостојно не успеал да ја реши задачата.

Во оваа пригода сакам да му се заблагодарам на рецензентот д-р Методи Главче чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надевам дека оваа збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците за регионалните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Како што реков, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидам благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје — Авторот
24. јуни, 2024 г.

# 1. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Производот на четири последователни непарни природни броја има цифра на единиците 9. Која е цифрата на десетките на овој прозвод?

2. Определи ја цифрата на единиците на збирот
$$1^{2010}+2^{2010}+3^{2010}+...+2008^{2010}+2009^{2010}+2010^{2010}.$$

3. Во зависност од $n$ определи ја цифрата на единиците на бројот $4^n+5^n+6^n$.

4. Определи ја цифрата на единиците на бројот $7^n+8^n+9^n$, каде $n\in\mathbb{N}$.

5. Збирот на еден двоцифрен број и двоцифрениот број запишан со истите цифри земени во обратен редослед, при делење со 5 дава остаток 2. Кој е тој број?

6. Определи ги сите природни броеви помали од 1000 чиј производ со бројот 7 дава куб на некој природен број.

7. Во реченицата

   МАГДАЛЕНА ОДИ ВО ОСМО ОДДЕЛЕНИЕ ВО ОСНОВНО УЧИЛИШТЕ

   во секој збор да ја преместиме првата буква на последното место. Притоа добиваме:

   АГДАЛЕНАМ ДИО ОВ СМОО ДДЕЛЕНИЕО ОВ СНОВНОО ЧИЛИШТЕУ.

   Со добиениот текст постапуваме на ист начин. По колку чекори прв пат повторно ќе ја добиеме почетната реченица?

8. Во реченицата

   „ТАТКОТО СО СИНОТ И ЌЕРКАТА ОТИДЕ НА КОНЦЕРТ“

   во секој збор да ја преместиме првата буква на последното место. Со добиениот текст постапуваме на ист начин. По колку чекори прв пат повторно ќе ја добиеме почетната реченица?

9. Определи го најмалиот природен број $a$ за кој бројот $\sqrt{2010a}$ е природен број.

10. Определи го најмалиот природен број $n$ таков што $\sqrt{2012n}$ е рационален број.

11. Дали постои природен број $a$ кој е помал од 2010, таков што бројот $\sqrt{\frac{a}{2010}}$ е рационален?

12. Дали постои точен квадрат чиј збир на цифри е еднаков на 2013?

13. Определи го најмалиот природен број $z$ за кој $12^4 xy = z^3$, каде $x$ и $y$ се исто така природни броеви.

14. Даден е двоцифрен број кој не е делив со 10. Ако овој број е делив со збирот на своите цифри, докажи дека овој број е делив со 3. Дали тврдењето важи и за трицифрен број?

15. Докажи дека петцифрен број кај кој сите цифри се парни и меѓусебно различни не може да е точен квадрат.

16. Илија на секоја од девет картички запишал по една цифра различна од 0. Кога Марко ги видел напишаните броеви, изјавил дека меѓу сите деветцифрени броеви кои може да се добијат кога картичките ќе се постават во низа има точно еден делив со 11. Дали Марко може да е во право?

17. Иван на секоја од 19 картички запишал по една цифра различна од 0. Кога Матеј ги видел запишаните броеви, изјавил дека меѓу сите деветнаесетцифрени броеви кои може да се добијат кога картичките ќе се наредат во ред постои точно еден кој е делив со 11. Дали Матеј може да е во право?

18. Определи ги најмалиот и најголемиот шестцифрен број кои се запишани со различни цифри и кои се деливи со 11.

19. Определи ги најмалиот и најголемиот шестцифрен број кои се запи-

шани со различни цифри и кои се деливи со 99.

20. Дали постои природен број $n$ таков што збирот на цифрите во декадниот запис на бројот $n(2n-1)$ е еднаков на 2015?

21. Кој е најмалиот број броеви кои што треба да се одберат од множеството $\{1,2,3,...,60\}$ така што производот на избраните броеви ќе биде делив со сите непарни броеви помали од 60?

22. Определи го најмалиот број броеви кои треба да се изберат од множеството $\{1,2,...,100\}$ за да производот на избраните броеви биде делив со секој непарен број помал од 100?

23. Определи го најмалиот број броеви кои треба да се изберат од множеството $\{1,2,...,100\}$ за да производот на избраните броеви биде делив со секој број помал од 100?

24. Определи го бројот на природните броеви помали од 2015 кај кои збирот на цифрите е делив со 5?

25. На таблата се запишани два цели броеви чиј збир е делив со седум. Третиот број е еднаков на разликата на првиот и вториот, четвртиот – на разликата на вториот и третиот, петтиот – на разлика на третиот и четвртиот итн. Докажи дека збирот од квадратите на првите седум броја добиени на претходно опишаниот начин е делив со седум.

26. Докажи дека збирот на сите четирицифрени броеви во чии записи не се појавуваат цифрите 0 и 9 е делив со 101.

27. Докажи дека збирот на сите шестцифрени броеви во чии записи не се појавуваат цифрите 0 и 9 е делив со 407.

28. Докажи дека меѓу три различни цели броеви секогаш постојат два, да ги означиме со $x$ и $y$, такви што бројот $xy(x^2-y^2)$ е делив со 10.

29. Нека $A=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ и $B=\overline{a_n a_{n-1}...a_1}+2a_0$, т.е. $B$ се добива кога на $A$ ќе му се избрише цифрата на единиците $a_0$ и добиениот број ќе се

собере со $2a_0$ На добиениот број се применува истата постапка се додека не се добие број $M$ кој не е поголем од 19. Докажи дека $A$ е делив со 19 ако и само ако $M = 19$.

30. Нека $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ и $B = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1} - 2a_0$, т.е. $B$ се добива кога на $A$ ќе му се избрише цифрата на единиците $a_0$ и од добиениот број ќе се одземе $2a_0$. Докажи дека $A$ е делив со 7 ако и само ако $B$ е делив со 7.

31. Ако $x, y, z$ се цели броеви такви што $x - 5y - 8z = 0$ докажи дека производот $(x - 3z)(x + 3y)$ е делив со 40.

32. Ако $n$ е цел број, тогаш $n^3 - 2008n$ е делив со 3. Докажи!

33. Ако $x, y, z$ се цели броеви такви што $3x + 7z = y$, докажи дека бројот $(y - 4z)(4x + y)$ е делив со 21.

34. Докажи дека $5 \mid n^5 + 19n$ за секој природен број $n$.

35. Збирот на четири природни броја е $S$. Ако на првиот број му се додаде природниот број $k$, од вториот се одземе $k$, третиот се помножи со $k$, а четвртиот се подели со $k$ се добива еден ист број. Докажи, дека бројот $S$ е делив со бројот $(k+1)^2$.

36. Докажи дека $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ е делив со 7 за секој природен број $n$.

37. Докажи дека $3^{2n+3} + 6 \cdot 3^{n+2} + 27$ е делив со 108 за секој природен број $n$.

38. Докажи дека бројот $6^{2n+2} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$ е делив со 900 за секој природен број $n$.

39. Докажи дека не постои природен број $a$ таков што броевите $5a + 9$ и $2a + 3$ се деливи со 13.

40. Нека $x$ и $y$ се цели броеви такви што бројот $6x+11y$ е делив со 31. Докажи дека бројот $x+7y$ е делив со 31.

41. Ако $a^2-5ab+b^2$ е делив со 7, докажи дека $a^2-b^2$ е делив со 7.

42. Ако $x^2-9xy+y^2$ е делив со 11, докажи дека $x^2-y^2$ е делив со 11.

43. Збирот на три природни броја, кои се точни квадрати, е делив со 9. Докажи дека меѓу овие броеви постојат два броја чија разлика е делива со 9.

44. Колку има природни броеви $n$ за кои бројот $23^4-17^4$ е делив со бројот $2^n$?

45. Определи го најмалиот природен број $n$ за кој бројот $2^n$ не е делител на бројот $51^4-19^4$.

46. Докажи дека збирот $1^{2008}+2^{2008}+3^{2008}+4^{2008}+5^{2008}+6^{2008}$ е делив со 5.

47. Нека
$$S=1^3+2^3+3^3+...+2007^3+2008^3.$$
Докажи дека 6 не е делител на $S$.

48. Докажи дека изразот $3^{2020}-1$ е делив со 80.

49. Докажи дека бројот $2^{2022}+6$ е делив со 7.

50. Определи го бројот на природните броеви $n$ поголеми од 2, а помали од 2024 такви што вредноста на изразот $6^n+7^n+8^n-789$ е делива со 10?

51. Определи го најмалиот природен број $n$ за кој бројот
$$n^3+5n^2+25n+125$$

е делив со 89.

52. Докажи дека збирот $261^{2008}+609^{2008}$ е делив со $2\cdot 29^{2008}$.

53. Определи ги сите природни броеви $n$ помали од 100 за кои $\sqrt{\frac{n+30}{n-30}}$ исто така е природен број.

54. Определи ги сите вредности на природниот број $n, n\geq 4$ такви што

$$\frac{3n^2-2n+50}{3n-2}\notin\mathbb{N} \text{ и } \frac{n^3-3}{n-3}\in\mathbb{N}.$$

55. Определи ги сите природни броеви $x$ и $y$ за кои $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}$ и $\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ се природни броеви, а разликата $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}-\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ е точен квадрат на природен број.

56. Колку различни делители сметајќи ги 1 и самиот број има бројот $n=2^7\cdot 3^5\cdot 7^2$?

57. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 12 и кој има 12 делители.

58. Определи ги сите прости броеви кои може да се претстават како збир на два последователни природни броја.

59. Колку има прости броеви кои не може да се запишат како збир на три различни сложени броеви?

60. Докажи дека постојат најмногу три прости броја меѓу 10 и $10^{10}$ во чиј декаден запис се појавува само цифрата 1.

61. Производот на три последователни непарни броја е пет пати помал од бројот $\overline{BABABA}$. Кои се тие броеви?

62. Производот на пет последователни природни броеви е 120 пати поголем од бројот $\overline{ABABAB}$. Кои се тие броеви?

63. Дали постојат различни прости броеви $p, q, r$ такви што:
    a) бројот $p$ е аритметичка средина на броевите $q$ и $r$,
    b) бројот $\sqrt{p}$ е аритметичка средина на броевите $\sqrt{q}$ и $\sqrt{r}$.

64. Докажи дека не постои рационален број чиј квадрат е еднаков на 7.

65. Бројот 2012 запиши го како збир на квадрати на четири природни броја.

66. Определи ги сите природни броеви $\overline{ab}$ за кои важи $\overline{ab}+\overline{ba}=n^2$, каде $n\in\mathbb{N}$.

67. Определи ги сите двоцифрени броеви $\overline{ab}$ за кои важи $\overline{ab}-\overline{ba}=n^2$, каде $n\in\mathbb{N}$.

68. Определи ги сите трицифрени броеви кои се 25 пати поголеми од збирот на своите цифри.

69. Определи ги сите природни броеви кои се 17 пати поголеми од збирот на своите цифри.

70. Збирот на производот и збирот на два природни броја е еднаков на 1000. Кои се тие броеви?

71. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=1000.$$

72. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2-y^2=2008.$$

73. Дали постојат природни броеви $x$ и $y$ такви што $x^2-y^2=2019$?

74. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$(x+y-1)^2-(x-y+1)^2=16.$$

75. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$xy+x+y=2008.$$

76. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2-6x+4y^2-4y+5=0.$$

77. Определи ги сите природни броеви $n$ за кои бројот $\frac{324}{n^2}$ е точен квадрат на природен број.

78. Определи ги сите природни броеви $n$ за кои бројот $\frac{45}{n-45}$ е точен квадрат на природен број.

79. Определи ги сите природни броеви $n$ за кои дропката $\frac{5n+23}{n+3}$ е цел број.

80. Определи ги простиот број $p$ и природниот број $n$ за кои важи
$$1+2+...+n=p.$$

81. Определи ги сите цели броеви $x$ и $y$ такви што $x^2+y^4=2x$.

82. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2+y^2=2y-2x-1.$$

83. Определи ги сите природни броеви $x,y,z$ такви што
$$x\le y\le z<8 \text{ и } 8xy=z^3.$$

84. а) Докажи дека изразот $2x^2+2y^2$ може да се запише како збир на квадрати на два изрази.

б) Докажи дека равенките $x^2+y^2=n$ и $x^2+y^2=2n$, $n\in\mathbb{N}$ имаат еднаков број целобројни решенија.

# 2. АЛГЕБРА

1. Дали бројот $1+2^2+3^3+...+9^9$ е квадрат на некој природен број?

2. Нека $m=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n+57$. Определи ги сите природни броеви $n$ за кои бројот $m$ е квадрат на некој природен број.

3. Колку цифри има во записот на производот $8^5\cdot 5^{10}\cdot 15^5$?

4. Марија помножила 20 четворки, а Милена ги помножила сите непарни природни броеви помали од 100. Потоа Јанко ги помножил производите кои ги добиле двете девојчиња. Со колку нули завршува производот кој го добил Јанко?

5. Иван помножил 2019 двојки, а Маја помножила 2017 петки. Потоа Павел ги помножил производите кои тие двајца ги добиле. Колку цифри има производот кој го добил Павел?

6. Бројот $2^{2007}$ има $m$ цифри, а бројот $5^{2007}$ има $n$ цифри. Колку е збирот $m+n$?

7. Дали може да се најдат пет броеви различни од нула кои го задоволуваат следниот услов: производот на броевите не се менува ако секој број се намали за 1?

8. Даден е полиномот $P_1(x)=x^4-x^3+2x^2-5x+6$. Збирот на полиномите $P_1(x)$ и $P_2(x)$ е еднаков на $x^5-x^2-2$. Определи го полиномот $P_1(x)+2P_3(x)$ ако се $P_2(x)$ и $P_3(x)$ спротивни полиноми.

9. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{2^{101}-2^{99}}{2^{100}-2^{99}}\cdot\frac{2869^2-2814^2}{3+6+9+...+30}.$$

10. Колку пати вредноста на изразот

$$2\cdot\frac{7\frac{2}{3}:(2\frac{2}{3}+0{,}5:1\frac{1}{2})}{(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{9}\cdot 0{,}75):7\frac{1}{3}}$$

е помала од 2024.

11. Определи ги најмалите природни броеви $a$ и $b$ кои се степени на бројот 2 и за кои

$$a\sqrt{a^3\sqrt{a^5\sqrt{a^7}}}=b\,.$$

12. Определи природен број $n$ и цел број $a$ така што ќе биде точно равенството

$$a^n=\frac{0{,}125^4\cdot(-4{,}5)^6\cdot(-0{,}375)^6\cdot 125}{2{,}25^9\cdot 0{,}5^{18}}\,.$$

13. Нека $a,b,c,d$ се меѓусебно различни природни броеви такви што $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$. Докажи дека $\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2}+\frac{b^6c^6}{2a^2d^2}}$ е квадрат на природен број.

14. Пресметај: $\frac{2^3\cdot 4^5\cdot 6^7}{8^9\cdot 10^{11}}:0{,}015^7$.

15. Од низата броеви

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$$

избери седум различни броеви чиј збир е 1.

16. Определи го квадратниот корен од изразот

$$1\underbrace{000\ldots0}_{2004}5\cdot\underbrace{111\ldots11}_{2005}+1\,.$$

17. Определи го квадратниот корен од изразот

$$\underbrace{111\ldots11}_{n}\underbrace{222\ldots22}_{n+1}5\,.$$

18. Ако $a+b+c=2024$ и $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=1$, пресметај ја вредноста на

изразот $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

19. Пресметај ја вредноста на изразот $x^{2023}+y^{2023}$, ако $x+y=0$.

20. Пресметај ја вредноста на изразот $x^{2022}+y^{2022}$ ако $x+y=0$ и $x^2+y^2=8$.

21. Ако $a^2+b^2-2a+6b+10=0$, пресметај $a^{2009}-2009b$.

22. Нека $x$ е реален број поголем од 1, таков што $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{82}{9}$. Определи го бројот $x$.

23. Докажи дека $\sqrt{28}-\sqrt{(5-2\sqrt{7})^2}$ е рационален број.

24. Пресметај $\sqrt{6+\sqrt{35}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}$.

25. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$(6+\sqrt{35})(\sqrt{14}-\sqrt{10})\sqrt{6-\sqrt{35}}.$$

26. Пресметај ја вредноста на изразот $A=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}$, ако $1\le x\le 4$

27. Докажи дека
$$a=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{899}+\sqrt{900}}$$
е природен број.

28. Дали $\sqrt{0,\bar{1}}$ е рационален или ирационале број?

29. Нека $a$ и $b$ се непарни природни броеви. Докажи дека $\sqrt{a^2+b^2}$ е ирационален број.

30. Докажи дека бројот $\sqrt{\overline{abcabc}}$ не е рационален.

31. Нацртај го графикот на функцијата $y=|x|-2$.

32. Нацртај го графикот на функцијата $y=|x+1|-1$.

33. Пресметај ги плоштината и периметарот на четириаголникот определен со графиците на функциите
$$y=x-3,\ y=x+6,\ y=-2x+6,\ y=-\tfrac{1}{2}x-3.$$

34. Во координатен систем нацртај круг чиј радиус е 5, а центарот е во координатниот почеток. Определи ја плоштината на отсечокот на овој круг кој е определен со графикот на функцијата $y=-x+5$.

35. Определи го растојанието на графикот на функцијата $y=-2x+2$ од координатниот почеток.

36. Во правоаголен координатен систем $xOy$ се дадени точките $O(0.0)$, $A(0,2), B(5,2)$ и $C(5,0)$. Нека $X(x,0)$ е произволна точка на отсечката $OC$. Определи ја најмалата можна вредност на збирот $\overline{AX}+\overline{XB}$.

37. Определи ги сите точки со целобројни координати во координатната рамнина $xOy$ чие растојание до точката $T(3,3)$ е еднакво на 5.

38. Во координатен систем е дадена точката $A(4,2)$. Ако точката $A$ е теме на квадрат кој е осносиметричен во однос на правата $y=x$ определи ги кординатите на преостанатите темиња на квадратот.

39. Во координатен систем се дадени точките $A(2,3)$ и $C(8,3)$. Ако точките $A$ и $C$ се спротивни темиња на квадрат, определи ги координатите на другите две темиња на квадратот.

40. Реши ја равенката $\sqrt{x^2}=x+5$.

41. Реши ја равенката $\sqrt{x^2} = x - 5$.

42. Реши ја равенката $|\sqrt{x}^2 - 5| = 3$.

43. Реши ја равенката: $x^2 + 3x + 2 = 0$

44. Реши ја равенката $x^3 - 4x^2 - 21x = 0$.

45. Реши ја равенката
$$\frac{\sqrt{8}}{x} = (\sqrt{288} - \sqrt{98}) \cdot (\sqrt{0,02} + \sqrt{4\tfrac{1}{2}}) .$$

46. Определи ги броевите *m* и *n* за кои е исполнето
$$\frac{147 \cdot 7^3 + 28 \cdot 7^4}{7^n} = 7^m \text{ и } \frac{5^4 \cdot 25^2}{125^m \cdot 5^{-10}} = 5^n .$$

47. Дадени се дропките $x = \frac{111..110}{111...111}$, $y = \frac{222...221}{222...223}$, $z = \frac{333...331}{333...334}$, при што во броителот и именителот на секоја дропка има по 2006 цифри. Спореди ги овие дропки.

48. Што е поголемо $2^{2012}$ или $15^{503}$?

49. Дадени се броевите $a = 22^{22}$, $B = 222^2$, $d = 22^{2^2}$, $e = 2^{2^{22}}$, $f = 2^{222}$ и $g = 2^{2^{2^2}}$. Спореди ги овие броеви и подреди ги во растечки редослед.

50. Спореди ги броевите $2^{7n+3}$ и $5^{3n+1}$, каде $n \in \mathbb{N}$.

51. Што е поголемо $5^{2008} - 5^{2007}$ или $5^{2009} - 5^{2008}$?

52. Што е поголемо $4^{2012} + 9^{2012}$ или $2^{2013} \cdot 3^{2012}$?

53. Спореди ги дропките $\frac{5^{2007}+1}{5^{2008}+1}$ и $\frac{5^{2008}+1}{5^{2009}+1}$.

54. Што е поголемо $\sqrt{5}+\sqrt{8}$ или $\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

55. Докажи дека
$$\sqrt{13-\sqrt{13+\sqrt{13}}}<3.$$

56. Докажи дека
$$\sqrt{1+\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}}>2.$$

57. Докажи дека
$$1<\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\ldots+\tfrac{1}{17}<2.$$

58. Докажи дека
$$\tfrac{1}{51}+\tfrac{1}{52}+\tfrac{1}{53}+\ldots+\tfrac{1}{200}>1.$$

59. Определи го најголемиот природен број $n$ и најмалиот природен број $m$ за кои важи:
$$\tfrac{n}{2018}<\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\ldots+\tfrac{1}{2017\cdot 2018}<\tfrac{m}{2018}.$$

60. Докажи дека $x^2-x+1>0$ за секој реален број $x$.

61. Ако $x$ и $y$ се реални броеви, тогаш $x^4+y^4\geq x^3y+xy^3$. Докажи!

62. Ако $a-b\geq 12$, каде $a,b\in\mathbb{R}$, докажи дека $a^4+b^4>2006$.

63. Докажи дека не постојат реални броеви $a,b,c,d$ такви што
$$a-b^2>\tfrac{1}{4},\ b-c^2>\tfrac{1}{4},\ c-d^2>\tfrac{1}{4},\ d-a^2>\tfrac{1}{4}. \qquad (1)$$

64. Докажи дека не постојат позитивни реални броеви $a,b,c$ такви што
$$a(1-b)>\tfrac{1}{4},\ b(1-c)>\tfrac{1}{4},\ c(1-a)>\tfrac{1}{4}. \qquad (1)$$

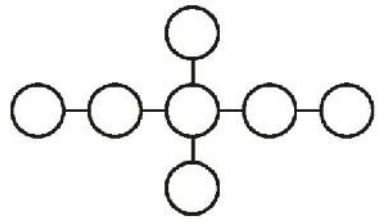
65. За кои вредности на променливите $x,y,z$ вредноста на изразот
$$x^2+y^2+z^2+2x-3y+4z$$

е најмала? Определи ја вредноста на тој израз.

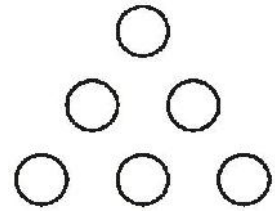
66. Определи ја најмалата можна вредност на изразот
$$A = 2x + 6z - x^2 - y^2 - z^2 .$$

67. Низа од 2024 броеви има својство да збирот на секој број и реципрочната вредност на следниот број во таа низа е 1. Производот на сите броеви во оваа низа е еднаков на 2. Кој број е 123-ти по ред во низата?

68. Пополни ги кругчињата на цртежот десно со броевите
$$7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7$$
така што цифрата на единиците на збирот на броевите запишани во кругчињата кои се на хоризонталната права е еднаква на цифрата на единиците на збирот на броевите кои се запишани во кругчињата кои лежат на вертикалната права.



69. Дали е можно во кругчињата на цртежот десно да се распоредат броевите
$$3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$$
така што збирот на цифрите на единиците на секоја страна на триаголникот да е еднаков.



70. Во магичен квадрат збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на двете дијагонали е еднаков. На цртежот десно е прикажан квадрат во чии полиња се запишани неколку рационални броеви. Во празните полиња запиши ги потребните броеви така што квадратот ќе биде магичен.

| | | |
|---|---|---|
| 3.6 | | |
| | | $5\frac{2}{5}$ |
| $4\frac{4}{5}$ | | 2.4 |

# 3. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Рампо помножил неколку природни броеви и добил производ 224. Колку броеви помножил Рампо, ако се знае дека најголемиот од нив е два пати поголем од најмалиот број?

2. Марко помножил неколку природни броеви и добил производ 82080. Кои броеви ги помножил Марко ако се знае дека најголемиот од нив е точно два пати поголем од најмалиот.

3. Марко помножил неколку последователни непарни природни броеви и добил производ кој се завршува на цифрата 9. Колку броеви можел најмногу да помножи Марко?

4. Два броја се разликуваат за 8. Ако на помалиот број му се додаде 5, а на поголемиот број му се додаде 6, тогаш производот на добиените броеви е два пати поголем во однос на производот на дадените броеви. Кои се тие броеви?

5. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ за кои важи
$$\overline{abc} = \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc}\,. \qquad (1)$$

6. Разликата на квадратите на два двоцифрени броја е 7920. Двата броја се огледални, т.е. едниот број се добива со замена на местата на цифрите на другиот број. Определи ги овие броеви.

7. Определи ги сите броеви помали од 100 кај кои цифрата на единиците е поголема од водечката цифра, а разликата на тој број и бројот запишан со истите цифри но во обратен редосле е квадрат на природен број.

8. Збирот на седум различни природни броеви е 100. Дали од овие броеви може да се изберат три чиј збир не е помал од 50?

9. Определи ја најмалата дропка која е поголема од $\frac{1}{2005}$, со која може

да се поделат дропките $\frac{8}{15}, \frac{12}{35}$ и $\frac{20}{21}$, така што во сите три случаи добиениот количник е природен број.

10. Определи го најмалиот природен број поголем од 1 кој не може да се добие така што некој природен број ќе се зголеми за некој цел број проценти од 1% до 100%.

11. Илија запишал пет цели броеви, а Матео за секој од овие два броја го пресметал нивниот збир. На тој начин ги добил следниве десет броеви: 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120, 121. Кои броеви ги запишал Илија?

12. Илија запишал пет цели броеви, а Марко за секои три од тие броеви го пресметал нивниот збир. На тој начин ги добил следните 10 броеви:
    20, 25, 27, 29, 30, 31, 34, 36, 39, 41.
    Кои броеви ги запишал Илија?

13. Во разговор Драган му соопштил на Пајко: „Мојот дедо и јас неодамна прославивме роденден во ист ден. Моите години и годините на мојот дедо се изразуваат со исти цифри, а разликата на тие два броја е еднаква на нашиот куќен број.“ Потоа Драган му го соопштил на Пајко својот куќен број, по што Пајко брзо ги пресметал годините на Драган и неговиот дедо. При разумна претпоставка дека Драган има помалку од 100 години, определи го куќниот број на Драган.

14. Аритметичката средина на четири броеви е 20. По додавањето на уште еден број, аритметичката средина на петте броеви ќе биде 18. Кој е додадениот број?

15. Во текот на учебната година Коста правел неколку тестови по математика и притоа освоил одреден број поени. Ако Коста на следниот тест по математика освои 89 поени, тогаш просечниот број на освоени поени од тестовите ќе биде 91. Но, ако на следниот тест освои 64, тогаш просечниот број на освоени поени ќе биде 86. Колку тестови по математика направил Коста досега?

16. Рампо тргнал со автомобил од Прилеп за Битола и треба да помине пат долг $42\,km\,76\,m$. Колку пати ќе се заврти тркалото на автомоби-

лот ако дијаметарот на тркалото е $0,5\,m$?

17. По неколку дождливи денови водостојот на реката Вардар се зголемил за 25%. Утредента се намалил за 10%, за да третиот ден по еднодневно врнење се зголемил за 10%. Четвртиот ден водостојот на Вардар се намалил за 20%. Дали по четвртиот ден водостојот на Вардар бил поголем или помал отколку на почетокот? Колкава е таа промена во проценти?

18. Моторциклист и велосипедист тргнале истовремено од местото $A$ во местото $B$. Велосипедистот застанал кога поминал половина од патот и продолжил понатаму во моментот кога на моторциклистот му преостанала една третина од патот до $B$. По доаѓањето во $B$, моторциклистот одма тргнал назад. Дали побрзо ќе стигне моторциклистот во $A$ или велосипедистот во $B$?

19. Моторциклист и велосипедист тргнале истовремено од $A$ во $B$. Откако поминал третина од патот од $A$ до $B$, велосипедистот застанал и продолжил кога на моторциклистот му останало да помине третина од патот до $B$. Моторциклистот стигнувајќи во $B$, без застанување тргнал назад кон $A$. Кој ќе стигне побрзо: моторциклистот во $A$ или велосипедистот во $B$, ако немало други застанувања и постојано возеле секој со своја константна брзина?

20. Даријан и Ведран со своите моторцикли извозеле од Скопје до Охрид. Даријан првата третина од патот ја возел со брзина од 20 километри на час, втората третина со брзина од 30 километри на час, а последната третина со брзина од 40 километри на час. Ведран првата третина од времето ја возел со брзина од 20 километри на час, втората третина од времето со брзина од 30 километри на час, а последната третина од времето со 40 километри на час. Кој од нив двајца побрзо стигнал во Охрид?

21. Група работници за 4 дена ја проверила сообраќајната сигнализација на еден на еден магистрален пат. Првиот ден ја провериле сигнализацијата на $\frac{1}{17}$ од патот, вториот ден провериле на три пати подолг пат од првиот ден, третиот ден $60\,km$ повеќе од првиот ден, а четвртиот ден провериле онолку километри колку што провериле првиот и вто-

риот ден заедно. Определи ја должината на овој магистрален пат.

22. Две локомотиви се движат по праволиниски заемно нормални пруги кон точката на вкрстувањето. Првата од раскрсницата е оддалечена 80 километри и се движи со брзина од $30\,km/h$, а втората е оддалечена 40 километри и се движи со брзина од $40\,km/h$. По кое време растојанието меѓу локомотивите ќе биде најмало и кое е тоа растојание?

23. Симона излегла од училиштето по 12 часот. Тогаш стрелките на нејзиниот часовник зафаќале агол од $55^\circ$. Дома стигнала пред 13 часот и тогаш стрелките на нејзиниот часовник зафаќале агол од $85^\circ$. Колку време и требало на Симона да стигне од училиштето до дома?

24. Два пешаци тргнале точно во моментот кога Сонцето изгреало, првиот од местото $A$ во местото $B$, а вториот од $B$ во $A$. Секој одел со постојана брзина. На пладне се сретнале и продолжиле понатаму без застанување. Првиот стигнал во $B$ во 4 часот попладне, а вториот во $A$ во 9 часот навечер. Во колку часот Сонцето изгреало тој ден?

25. Стрелките на sидниот часовник во периодот од 11 до 12 часот точно во два моменти определуваат прав агол. Определи колку време поминало меѓу овие два моменти.

26. Седум џуџиња за 7 дена може да сosидаат sид од цигли со должина $70\,m$ работејќи по 7 часа на ден. Едно џуџе секој ден забушавало, па кога одело по цемент одмарало под сенка и тоа: првиот ден 1 час, вториотден 2 часа, третиот ден 3 часа, ..., седмиот ден 7 часа, а осмиот ден не дошло на работа. Колку време требало џуџињата да го сosидаат sидот, ако преостанатите џуџиња работеле совесно по 7 часа на ден? (Џуџињата работат исто, за ист временски период секое џуџе завршува исто работа.)

27. Една зграда може да ја изsидаат 12 sидари за 25 дена. Ако по 5 дена на друга работа се префрлат 4 sидари, уште колку дена им се потребни на преостанатите sидари да ја довршат работата?

28. Една зграда можат да ја изsидаат 12 sидари за 35 дена. По 14 дена sи-

дање 3 ѕидри биле префрлени на друга работа. Потоа по 8 дена 1 ѕидар бил вратен да работи на зградата. Уште колку време им е потрено на ѕидарите да ја завршат работата?

29. Секој час Максим прочитува еднаков број страници од една книга. Тој прво пресметал колку страници треба да чита секој час за да книгата ја прочита во точно зададен рок. Потоа пресметал дека со читање на книгата ќе заврши 2,5 часа пред рокот ако секој час прочита по две страници повеќе од планираното. Ако секој час прочита по четири страници повеќе од планираното, тогаш книгата ќе ја прочита 4,5 часа пред рокот. Колку страници има книгата и колку време му треба на Максим за да ја прочита целата книга?

30. Мартин е постар од своите ти сестри Ана, Ивана и Елена по 8, 10 и 13 години, соодветно. По една година, збирот на годините на сестрите на Мартин ќе биде за 39 поголем од годините на Мартин. Колку години има Мартин денес?

31. Таткото и мајката заедно имаат 80 години. Нивните три деца имаат 9, 7 и 2 години. По неколку години збирот на годините на децата ќе биде еднаков на половина од збирот на годините на таткото и мајката. Колку години тогаш ќе има мајката, а колку таткото ако мајката е шест години помлада од таткото?

32. Тревата на ливадата расте подеднакво густо и брзо. Познато е дека 60 крави може тревата на ливадата да ја испасат за 24 дена, а 30 крави за 60 дена. Колку крави можат да ја испасат тревата на ливадата за 100 дена?

33. За време на појадокот секој член на едно семејство во својата чаша турил и кафе и млеко, со што направил точно $1{,}8\,dl$ бело кафе. За правењето на белото кафе секој од нив ги измешал кафето и млекото во друг однос. Еден член на семејството во својата чаша турил една осмина од вкупното количество кафе и една петтина од вкупното количество млеко. Колку членови има ова семејство, ако семејството го испило целото количество млеко и целото количество кафе:

34. Резервоар со вода во еден национален парк секој ден се надополнува

со 1 хектолитар вода. Едно стадо од 38 слонови, ќе ја испие целата вода од резервоарот за еден ден, додека пак стадо од 8 слонови ќе ја испие целата вода од резервоарот за 5 дена. Ако секој слон просечно пие исто количество вода, за колку дена, почнувајќи од денес, еден слон може да ја испие целата вода од резервоарот? (Слоновите почнуваат да пијат вода од резервоарот откако тој ќе биде надополнет со вода.)

35. а) Sиден часовник отчукува онолку пати колку што покажува стрелката на часовникот. Покрај тоа, секој половина час часовникот отчукува еднаш. Драган влегол во собата и по извесно време излегол од неа, во моментот кога во собата влегувал Павле. Во моментот кога од собата излегувал Павле, во собата влегувал Стојан. Секој од нив тројца во собата поминал исто време и тоа повеќе од 30 минути, а помалку од 2 часа. Секој од нив додека бил во собата случнал еднаков број отчукувања на часовникот. Определи го тој број.
б) Во друга прилика тројцата другари во собата биле по 140 минути во текот на еден ден, секој во различно време и секој додека бил во собата слушнал еднаков број отчукувања на часовникот. Определи го тој број.

36. Во едно семејство има четири члена. Ако на Маја и се удвостручи степендијата, тогаш приходот на семејството ќе се зголеми за 7%, ако на мајката и се удвостручи платата, приходот на семејството ќе се зголеми за 30%, ако на таткото му се удвостручи платата, приходот на семејството ќе се зголеми за 35%. За колку проценти ќе се зголеми приходот на семејството ако на дедото му се удвостручи пензијата?

37. Кога продавачот Доне ја намалил цената на јаболката за 30% Марија за 350 денари можела да купи 3 килограми јаболка повеќе отколку пред намалувањето на цената. Определи ја цената на еден килограм јаболка пред намалувањето на цената.

38. Продавачот Ѓорѓи ја намалил цената на јаболката за 20% и притоа остварил добивка од 4%. Колкава добивка ќе остварел Ѓорѓи ако не ја намалел цената на јаболката?

39. Фудбалска топка чинела 7200 денари. На распродажба прво цената

била намалена за 20%, а потоа за уште 10%. Определи ја цената на топката по второто намалување на цената?

40. Матеј купил патики кои прво поскапеле за 15%, а потоа поефтиниле за 10% и за патиките платил 3312 денари. Колкава била цената на патиките пред првата промена на цената, т.е. пред поскапувањето?

41. Мајката му дала на Васко пари да купи 30 моливи. Но, во трговскиот центар имало рекламна акција при што: во замена за купон за купување на 20 моливи, на излезот се враќале 25% од платената сума, а за купување на 5 моливи се враќале 10% од платената сума. Кој е најголемиот број моливи што Васко може да ги купи за сумата која ја добил за купување на 30 моливи?

42. Во една слаткарница топче сладолед чинело 50 денари. Слаткарот Никола ја намалил цената на сладоледот, по што прометот од сладоледот се зголемил за 40%, а заработувачката се зголемила за 12%. Колку чини топче сладолед по намалувањето на цената?

43. Четрири пријателки Ана, Дорка, Марија и Теодора заедно купиле поклон за нивниот другар Методиј. Ана дала 40% од вкупната вредност на поклонот, Дорка дала третина од износот кој го дале другите три другарки, а Марија дала 25% од од износот кој го дале другите три другарки. Теодора дала 51 евро. Колку пари чинел поклонот?

44. Дваесет лубеници чинат толку евра колку што лубеници може да се купат за 500 евра. Колку чинат 10 лубеници?

45. Ако 45 тетратки чинат толку евра колку што тетратки може да се купат за 20 евра, колку чинат 75 тетратки?

46. Трговецот Климе купил грозје и калинки за вкупен износ од 5800 денари. Цената на грозјето била 40 денари за килограм, а на калинките 50 денари за килограм. При транспортот еден дел од овошјето го загубил квалитетот, па морал да фрли 14% од грозјето и 15% од калинките. Преостанатото грозје го продавал по 60 денри за килограм, а калинките по 80 денари за килограм. По колку килограми грозје и калинки купил Климе, ако по продажбата заработил 1934 денари?

47. За купување на училишен автобус кој ќе пренесува ученици од четири места $A,B,C,D$ потреби се 217500 евра. Местата ќе ги сносат трошоците пропорционално со бројот на жителите. Во местото $D$ има жители колку што заедно има во местата $A$ и $C$, во местото $A$ има 25% жители помалку отколку во местото $B$, а 20% повеќе отолку во местото $C$. Колку пари треба да даде секое место?

48. За една ракометна екипа е познато дека учествувал на турнир на кој одиграла неколку натпревари. На три натпревари екипата постигнала по 20 голови, на два натпревари постигнала по 15 голови, а на сите останати натпревари постигнала по 30 голови. Колку натпревари одиграла на турнирот екипата ако е познато дека таа на турнирот постигнала просечно 25 голови по натпревар?

49. Марко треба 199 јаболки да распореди во 60 пакети. Во неколку пакети има по $x$ јаболки, а во останатите по 3 јаболки. Одреди ги сите можни вредности на $x$.

50. Ивана и Марија отишле на излет. Ивана носела бонбони, а Марија сливи. Половина од своите бонбони Ивана ѝ ги дала на Марија, а половина од своите сливи Марија ѝ ги дала на Ивана. Потоа, Ивана изела 5 сливи по што ѝ останале три пати повеќе бонбони од сливи, а Марија изела 20 бонбони по што ѝ останале два пати помалку сливи од бонбони. Колку бонбони донела Ивана и колку сливи донела Марија на излетот?

51. На еден натпревар се натпреварувале вкупно 2400 ученици во пет различни категории. Вкупниот број на ученици од првата и втората категорија е еднаков на $\frac{3}{5}$ од вкупниот број на ученици од третата, четвртата и петтата категорија. Односот на бројот на учениците од првата и втората категорија е 2:3, а односот на бројот на учениците од третата, четвртата и петтата категорија е 5:4:6. По колку ученици се натпреварувале во секоја категорија.

52. Таткото има три сина. На крајот на секоја учебна година тој на секој син му поклонува толку книги колку што синот поминал години во училиште. Ниту едно дете во текот на школувањето не повторувало. На тој начин на крајот на една учебна година синовите собрале вкуп-

но 55 книги. Кое одделение го завршил секој од синовите?

53. Во едно училиште учениците од осмо одделение се распоредени во четири паралелки. Во првата паралелка има 19 ученици, во втората 1 повеќе отколку во првата, во третата третина од сите ученици и во четвртата неколку единесеттини од вкупниот број ученици. Колку ученици има во осмо оддление во тоа училиште?

54. Радмила на пазар донела корпа со јајца. На првиот купувач му продала половина од вкупниот број јајца и уште половина јајце. На вториот, му продала половина од преостанатите јајца и уште половина јајце. Слично, на третиот му продала половина од преостанатите јајца и уште половина јајце. Потоа, во корпата останало едно јајце. Колку јајца донела Радмила на пазарот?

55. За одење на ексурзија се пријавиле $\frac{2}{7}$ повеќе ученици отколку што е планирано. Заради болест се откажале шестина од пријавените ученици, па на екскурзија отишле шест ученици повеќе отколку што е планирано. Колку ученици отишле на екскурзија?

56. На натпревар по математика биле зададени 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат по 5 поени, за секоја задача која не е решена се добиваат 0 поени и за секоја задача која е неточно решена се губат по 3 поени. Колку задачи точно решил Андреј, ако тој освоил 37 поени?

57. Илија и Ѓорѓи продавале лубеници на пазар. Секој на почеток имал еднаков број лубеници и тој број бил поголем од 300, а помал од 400. Илија продал 8 пати повеќе лубеници од Ѓорѓи, по што му останале 9 пати помалку лубеници од Ѓорѓи. Колку лубеници имал секој од нив на почетокот?

58. Продавачката во цвеќарницата направиле букет од ружи и каранфили. Таа потрошила $\frac{3}{8}$ од вкупниот број ружи и $\frac{3}{10}$ од вкупниот број каранфили. Ако букетот содржи еднаков број ружи и каранфили, колкав дел од вкупниот број ружи и каранфили е ставен во букетот?

59. Музичка група има меѓу $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{5}$ женски членови. Определи го најмалиот може број членови на оваа група?

60. При првата средба на делегациите на Земјата Марс се покажало дека Марсовците имаат нозе како и луѓето, но се разликуваат по бројот на рацете и бројот на прстите на рацете. Иако Марсовци имало за 6 повеќе од луѓе, вкупниот број на прстите (на нозете и рацете) кај Марсовците бил за 1 помал отколку кај луѓето. Колку вкупно учесници имало на средбата?

61. На една фарма има коњи и гуски. Бројот на главите и крилата на сите животни е еднаков на бројот на нивните нозе. Ако вкупно има 100 животни, колку се гуски, а колку се коњи?

62. За ужинка во училиштето на Горјан има три вида пакетчиња и тоа: пакетче со 1 јаболко и 2 кајсии, пакетче со 1 јаболко и 2 банани, и пакетче со 1 јаболко, 1 кајсија и 1 банана. Куварот Марко во пакетчињата запакувал 2000 кајсии и 1000 банани. Колку јаболка запакувал Марко?

63. Во кино сала има неколку редови седишта со по 17 седишта во секој ред. Местата во првиот ред се нумерирани со броевите 1, 2, ..., 17, во вториот ред со броевите 18, 19, ..., 34 итн. на сличен начин. Бројот на местото на кое седи Ана е еднаков на бројот на редот во кој седи Бојан. Збирот на броевите со кои се нумерирани нивните места е 175. Определи ги броевите со кои се нумерирани местата на Ана и Бојан.

64. Во една кино-сала има неколку редови седишта со по 50 седишта во секој ред. Местата во првиот ред се нумерирани со броевите 1, 2, ..., 50, во вториот ред со броевите 51, 52, ..., 100 итн. на сличен начин. Бројот на местото на кое седи Милка е исто со бројот на редот во кој седи Љубинка. Ако апсолутната вредност на разликата на броевите на нивните места е 332, определи ги тие броеви.

65. На стрелачки натпревар Марко гаѓал во мета со воздушна пушка. Десетка погодил исто толку пати колку пати што погодил осумка. Освен тоа, неколку пати погодил петка и така собрал 99 поени. Во 25% од стрелањата ја промашил метата. Колку пати вкупно Марко

пукал од пушката?

66. Филип, Кирил и Никола си испраќаат писма меѓу себе при што не добиваат писма од други луѓе. Притоа писмата се испраќаат според следниве правила:
    - Филип му испраќа писмо на Кирил секој втор ден, а на Никола секој петти ден,
    - Кирил му испраќа писмо на Филип одма по секои две добиени писма, а на Никола секој чртврт ден,
    - Никола му испраќа писмо на Филип одма по секои четири добиени писма, а на Кирил секој осми ден.

    Секое писмо патува еден ден, т.е. секое писмо стигнува следниот ден од денот кога е испратено. Кој е најмалиот број денови по кои Филип ќе добие 68 писма?

67. Експресниот патнички воз, пред два дена наутро, тргнал од Гевгелија кон Скопје, со неколку вагони во кои имало одреден број патници. На станицата во Велес, од првиот вагон се симнал еден патник, од последниот вагон се симнале два патника, а не се качил ниту еден патник. Тргнувајќи од Велес, во секој вагон од возот имало еднаков број патници. Истиот воз, со два вагона помалку, попладнето тргнал од Скопје кон Гевгелија со 50 патници помалку во однос на патниците кои тргнале на патување со возот тоа утро од Гевгелија. Притоа, просечниот број на патници по вагон бил 30. Колкав е бројот на патници кои тргнале со возот тоа утро од Гевгелија?

# 4. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Јован со татко му, мајка му и браќата отишол да купи папагал. Кога влегле во продавницата на домашни миленичиња, помладиот брат, изненаден од бројот на папагалите, рекол:
   - Овде има повеќе од 50 папагали. Како сега да избереме?
   - Има помалку од 50 папагали, - тврдел постариот брат.
   - Има барем еден папагал, и тоа е единствено важно, - рекла мајката.
   - Интересно, - се вклучил во расправата таткото, - само една од трите ваши изјави соодветствува на реалната состојба.

   Излегувајќи со папагалот од продавницата, Јован размислувал за реченицата која ја кажал неговиот татко и се запрашал која од трите изјави е точна. Дали можеш да му помогнеш на Јован да го реши проблемот?

2. За еден ден велиме дека е непарен ако неговата дата, месец и година се запишува само со непарни цифри. На пример 17 мај 1791 е непарен ден, бидејќи во неговиот запис со цифри 17.5.1791 има само непарни цифри.
   а) Колку непарни денови има во дваесеттиот век?
   б) Кој е последниот непарен ден до денес?
   в) Кој е првиот следен непарен ден?

3. За еден ден велиме дека е парен ако неговиот датум, месец и година се запишуваат само со парни цифри.
   а) Колку парни денови има во 3. милениум?
   б) Кој е првиот парен ден во третиот милениум?
   в) Кој е последниот парен ден во третиот милениум?

4. Илија во сабота тргнал со воз од Скопје и стигнал во Минхен во понеделник. Забележал дека датумот (денот во месецот) на стигнување во Минхен е ист како и бројот на неговиот вагон, а бројот на седиштето е помал од бројот од вагонот. Меѓутоа, датумот кога седнал во возот бил поголем од бројот на вагонот. Определи го бројот на седиштето на кое седел Илија.

5. Татко со четири сина треба да се превезе преку река. На располагање имаат чамец кој може да издржи терет од најмногу $100\,kg$ . Таткото има $95\,kg$ , најстариот син има $55\,kg$ , вториот син има $35\,kg$ , а двајцата најмлади синови имаат $30\,kg$ и $20\,kg$ . Само таткото и двата постари сина знаат да веслаат. Како тие може да се префрлат преку реката и колку најмалку возења им се потребни?
   1) $(35+30+20<100)$ .

6. Другарите Ацо, Бранко, Ведран и Горан се родени во иста година во четири различни месеци. Ацо е постар од Бранко 15 дена, Бранко од Ведран 22 дена, Ведран од Горан 23 дена. Ведран се родил во понеделник, а шестиот роденден го славел, исто така во понеделни. Во кој ден од неделата Ведран го славел третиот роденден?

7. 
Во кутија се наоѓаат 50 топчиња чии половини се различно обоени: 15 топчиња има една половина црвена, а другата им е сина, 18 топчиња има една црвена и друга зелена половина, а 17 топчиња е со една зелена и една сина половина. Кој е најмалиот број топчиња што треба да се извлече од кутијата, без гледање, така што меѓу извлечените топчиња сигурно има 25 топиња такви што едната нивна половина е обоена со иста боја?

8. Марко има во џепот неколку банкноти. Ако без гледање од џебот извади три банкноти, меѓу нив обавезно ќе има банкнота од 50 денари, а ако без гледање од џебот извади четири банкноти, тогаш меѓу нив сигурно ќе има банкнота од 100 денари. Марко од џебот извадил пет банкноти. Кои се тие банкноти?

9. Илија и Матеј замислиле по еден природен број и му го кажале на Максим. Максим на еден лист хартија го запишал збирот на тие броеви, а на друг нивниот производ. Потоа едниот лист го скрил, а другиот, на кој бил бројот 2002, му го покажал на Илија и Матеј. Кога го видел бројот, Илија рекол дека не знае кој број го замислил Матеј. Кога тоа го слушнал, Матеј рекол дека не знае кој број го замислил Илија. Кој број го замислил Матеј?

10. Мајмун има три кокосови ореви. Едниот орев му паднал од 15. кат и се скршил. Дали мајмунот може со најмногу 5 обиди, со помош на преостанатите два ореви, да констатира кој е најнискиот кат од кој испутениот орев ќе се скрши?

11. Тројца ученици играат пинг-понг на елиминација., т.е. играчот кој ќе изгуби меч му го отстапува местото на играчот кој во тој меч не играл. Вкупно се одиграни 17 мечеви. Ацо одиграл вкупно 10, Боро 15, а Владо 17 меча. Кој од нив загубил во шестиот меч?

12. Тројца играчи играат пинг-понг на испаѓање, играчот кој губи меч го отстапува местото на играчот кој не играл во тој меч. Се одиграле вкупно 17 меча. Ацо одиграл најмалку мечеви – вкупно 10. Колку меча одиграл Владо ако се знае дека тој одиграл повеќе мечеви од Борко?

13. Кате, Нена и Ана саделе цвеќиња. Ако Кате засади 16 цвеќиња повеќе отколку што засадила, тогаш би имала засадено толку цвеќиња колку што засадиле Нена и Ана заедно. Ако Нена засади 39 цвеќиња повеќе отколку што засадила, тогаш би имала засадено двојно повеќе отколку што засадиле Кате и Ана заедно. Нивните презимиња се Крстеска, Петрова и Милевска. Колку цвеќиња засадила секоја од нив и кое ѝ е презимето, ако бројот на цвеќиња што ги засадила Крстеска е делив со 5, бројот на цвеќиња што ги засадила Петрова е делив со 7, а бројот на цвеќиња што ги засадила Милевска е прост број и никоја не засадила повеќе од 15 цвеќиња.

14. На една забава имало 200 гости. Секој од нив секогаш говори вистина (вистинолубец), или секогаш лаже (лажливец). По свечената вечера 120 гости ја напуштиле забавата. Тие забавата ја напуштале еден по еден и секој од нив ја дал следнава изјава: „Меѓу оние кои останаа на забавата има повеќе лажливци, отколку вистинољубци.“ Колку лажливци имало на забавата?

15. На еден остров живеат лажливци и витези (лажливците секогаш лажат, а витезите секогаш ја говорат вистината). Еден ден се состанале 12 островјани. Двајца од нив рекле: „Точно двајца од нас дванаесетте се лажливци“. Други четворица рекле: „Точно четворица од нас двана-

есетте се лажливци“. Преостанатите шест рекле: „Точно шестмина од нас дванаесетте се лажливци“.
Колку лажливци имало на овој состанок?

16. Околу тркалезна маса седат 12 луѓе. Познато е дека секој од нив е или витез кој секогаш ја говори вистината, или лажливец кој секогаш лаже. Секој од нив изјавил: „Сите, освен можеби јас и моите соседи на масата, се лажливци.“ Колку витези седат на масата?

17. Од броевите $3, 2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ се добиваат нови три броја така што се пресметува аритметичката средина на секој пар броеви. Дали може со повторување на оваа постапка да се добијат броевите $4, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$ ?

18. Од броевите $3, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ може да се добијат три нови броеви така што два од нив, $x$ и $y$ ќе се заменат со $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ и $\frac{x-y}{\sqrt{2}}$. Дали може со повторување на оваа постапка да се добијат броевите $\sqrt{2}, 2+\sqrt{2},$ и $2-\sqrt{2}$.

19. Неколку еднакви контејнери имаат вкупна 10 тони, при што масата на еден контејнер не е поголема од еден тон. Кој е најмалиот број камиони со носивост од 3 тони со кои со сигурност може да се пренесе целиот тој товар?

20. Определи го минималниот број камиони со носивост од 3 тони со кои одеднаш може да се превозат 50 контејнери со маси: $370\,kg, 372\,kg, 374\,kg, ..., 466\,kg, 468\,kg$ .

21. Илија има 2007 тегови чии маси редоследно се 1, 2, 3, ..., 2007 грама. Еден тег загубил. Дали потоа преостанатите тегови може да ги подели на две груши со еднакви маси и со ист број на тегови во секоја група?

22. Во вреќа имаме шеќер во прав. Располагаме со вага со два таса и тег од $1\,g$. Кој е потребниот најмал број мерења за да измериме $1\,kg$ шеќер?

23. Илија има 13 лубеници. Тој има вага со чија помош може да ја измери вкупната маса на две лубеници, но не може да измери маса само на една лубеница или на повеќе од две лубеници. Дали со осум мерења Илија може да ја определи масата на сите лубениц?

24. Меѓу 103 златници два се неисправни, се разликуваат само според масата од останатите. Познато е дека сите исправни златници се со иста маса, а исто така и сите неисправни се со иста маса. Со помош на три мерење на вага без тегови определи дали случајно избран златник е исправен или неисправен.

25. Марко има 185 златници и знае дека меѓу нив има 7 фалсификувани. Сите исправни златници имаат еднаква маса, а фалсификуваните исто така имаат иста маса, но се малку полесни од исправните. Марко треба на Илија да му даде 23 златници. Дали може само со три мерења на вага без тегови да се изберат 23 исправни златници?

26. Марко замислил двоцифрен број. Илија треба да го погоди бројот кој го замислил Марко. За таа цел тој на таблата запишува двоцифрени броеви. Марко покрај запишаниот број пишува знак + ако запишаниот број се совпаѓа со замисленият број, а знак − ако кај запишаниот и замисленият број се совпаѓаат цифрите само во една места вредност. Во сите други случаи не пишува ништо. Дали Илија може да го погоди замисленият број со најмногу 10 обиди?

27. На колку начини во записот
$$P > R > O > B > L > E > M > I$$
буквите може да се замена со цифри така што сите неравенства ќе бидат точни.

28. На колку начини во записот
$$B > R > O > K > U > L > A$$
буквите може да се замена со цифри така што сите неравенства ќе бидат точни.

29. Илија напишал комјутерска програма, која множи три од внесените 6 броја, и го печати нивниот производ. Програмата ги избира броевите случајно, па може да избира ист број повеќе пати. Потоа ги внел брое-

вите $\sqrt{7}, \sqrt{9}, \sqrt{11}, 4, 5, 6$. Колку различни рационални броеви може да отпечати компјутерот?

30. На колку начини може да се изберат четири сложени броја помали од 50 така што секои два се заемно прости?

31. Определи го бројот на седумцифрените палиндроми (броеви кои исто се читаат од лево на десно и од десно на лево).

32. Определи го бројот на трицифрените броеви кај кои барем едната цифра е парна.

33. Определи го бројот на трицифрените броеви во чиј запис има точно две еднакви цифри.

34. Колку има четирицифрени броеви во чиј запис се појавуваат две различни цифри, секоја по два пати

35. Определи го бројот на шестцифрените броеви запишани со различни цифри кај кои цифрите 5 и 6 се соседни.

36. Определи го бројот на шестцифрените природни броеви запишани со различни цифри кај кои цифрите 0, 1 и 2 се соседни во било кој поредок.

37. Определи го бројот на непарните седумцифрени броеви кај кои производот на цифрите е парен број.

38. Определи го бројот на петцифрените палиндроми деливи со 45.

39. Определи го бројот на петцифрените палиндроми деливи со 55.

40. Еден град е поделен на седум општини. Градските власти решиле во градот да изградат по едно ново училиште, библиотека и градинка. На колку начини тоа може да се направи ако уште е одлучено зградите на училиштето и градинката да не се во иста општина?

41. Дванаесет витези на тркалезната маса треба да формираат двочлена

делегација која треба да го посети кралот Артур. На колку начини тоа може да се направи, ако во делегацијата не може да се витези кои се соседи на тркалезната маса?

42. Во една училница се наоѓаат шест еднакви клупи: три зелени, една црвена и две портокалови. На колку начини може да се наредат клупите во еден ред, една до друга, така што црвената клупа ќе биде до портокалова клупа?

43. Разгледуваме нескладни правоаголници со целобројни должини на страни. Кои се побројни: оние со периметар 1996 или оние со периметар 1998?

44. Разгледуваме нескладни правоаголници со целобројни должини на страни. Кои се побројни: оние со периметар 2014 или оние со периметар 2016?

45. На колку начини можеме броевите во множеството $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ да ги обоиме со црвена, зелена или сина боја, така што секој број е обоен со различна боја во однос на сите негови делители?

46. Дали е можно во темињата на секој триаголник да се запише по еден број така што должината на секоја страна да биде еднаква на збирот на броевите запишани во нејзините темиња?

47. Дали постои четириаголник таков што во секое негово теме може да се запише по еден број таков што должината на секоја страна на четириаголникот е еднаква на збирот на броевите запишани во нејзините темиња?

48. Педесет луѓе седат околу тркалезна маса.
а) Дали меѓу нив сигурно има едно лице кое седи меѓу две лица од ист пол?
б) Дали меѓу нив може да постојат две такви лица?

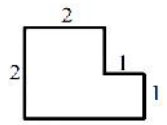
49. Дадена е низата природни броеви: 1, 2, 3, 4, 5, ..., 2007, 2008, 2009. Во еден чекор може на секој број да му го замениш местото со друг број или да го оставиш бројот на своето место. Кој е најмалиот број по-

требни чекори од дадената низа да ја добиеш низата 2, 3, 4, 5, ..., 2007, 2008, 2009, 1?

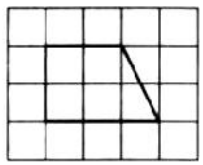
50. На располагање имаме четири пластични складни правоаголни триаголници со должини на страни $30\,cm, 40\,cm$ и $50\,cm$. Колку различни нескладни конвексни четириаголници може да се добијат со спојување на овие четири триаголници? Не е потребно да се докажува конвексноста, туку само да се нацртаат четириаголниците.

51. Располагаме со 12 стапови со должини $13\,dm$. Дали можеме да ги исечеме на делови со должини $3\,dm, 4\,dm, 5\,dm$ така што од добиените делови да може да осставиме 13 правоаголни триаголници со страни со должини $3\,dm, 4\,dm, 5\,dm$ ?

52. Фигурата прикажана на цртежот десно расечи ја на најмал можен број делови од кои може да се состави квадрат.




53. Правоаголниот трапез прикажан на цртежот десно чии основи се 2 и 3, а висината е 2, подели го на три дела од кои а се состави квадрат.



54. Правилен дванаесетаголник расечи го на 6 делови од кои може да се состави квадрат со иста плоштина.

55. Дали е можно квадрат со страна 15 да се подели на $n$ квадрати со страна $a$ и $n$ квадрати со страна $b$ ($n, a, b$ се природни броеви)?

56. Горјан има коцка со целобројни должини на рабови (изразени во сантметри). Тој коцката ја обоил и потоа ја расекол на единечни коцки. На Андреј му ги дал коцките кои имаат еден обоен ѕид. Андреј пребројал дека добил 864 коцки. Помогни му на Андреј да ја определи должината на работ на големата коцка.

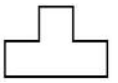
57. Дадена е шаховска табла со димензии $5 \times 5$. Дали е можно шаховската фигура скокач (коњ) која се наоѓа во долниот лев агол на таблата во следните 24 потези да го посети секое поле на таблата? Ако е можно

со броеви од 1 до 24 означи го редоследот на потезите.

58. Во секои од три квадрати $3\times 3$ се запишани броевите од 1 до 9, во секое поле по еден број. Докажи дека во множеството $A=\{1,2,...,9\}$ постојат два броја кои ниту во еден од тие три квадрати не се соседни, т.е. не се наоѓаат во соседни полиња. Соседни се полињата кои имаат заедничка страна.

59. а) Во секои од четири квадрати со димензии $5\times 5$ се запишани броевите од 1 до 25, во секое поле по еден број. Докажи дека во множеството $A=\{1,2,3,...,25\}$ постојат два броја кои во ниту еден од четирите квадрати не се соседни, т.е. не се наоѓаат во соседни полиња. Две полиња се соседни ако имаат заедничка страна.
б) Во секои од седум квадрати со димензии $5\times 5$ се запишани броевите од 1 до 25, во секое поле по еден број. Докажи дека во множеството $A=\{1,2,3,...,25\}$ постојат два броја кои во ниту еден од четирите квадрати не се соседни, т.е. не се наоѓаат во соседни полиња.

60. Дали стандардна шаховска табла, со 64 полиња, може да се покрие со фигури прикажани на цртежот десно. Фигурите не смее да се преклопуваат и да излегуваат надвор од таблата.



61. Дали е можно на табла со димензии $10\times 10$, обоена на шаховски начин, да се постават 10 топа, пет на бели, пет на црни полиња, така што никои два топа нема меѓусебно да се напаѓаат?

62. Киро и Темјана си играат со две исти коцки, на секоја од кои се запишани броевите $\sqrt{2},\sqrt{3},2,3,\frac{1}{2},\sqrt{5}$ (не секој ѕид по еден број). Двајцата одеднаш ги фрлаат коцките. Киро победува ако производот на два добиени броја е рационален, а Темјана победува ако производот на двата добиени броја е ирационален. Кој има поголеми шанси да победи?

# 5. ГЕОМЕТРИЈА

## 5.1. ТРИАГОЛНИК

1. За должините на страните на еден триаголник важи релацијата
$$2a^2+3b^2+c^2=2b(2a+c).$$
Каков е овој триаголник?

2. Нека $a,b,c$ се должините на страните $BC,CA,AB$ на триаголникот $ABC$, при што важи $\angle A=60^\circ$. Докажи, дека
$$a^2=b^2+c^2-bc.$$

3. (Обратна Питагорова теорема). Нека $a,b,c$ се страни на даден $\triangle ABC$ и притоа важи равенството
$$a^2+b^2=c^2.$$
Докажи дека внатрешниот агол наспроти страната $c$ е прав.

4. Нека $a,b$ и $c$ се должинина страните на даден триаголник. Ако
$$a^3+b^3+c^3=ab(a+b)+ac(a+c)-bc(b+c),$$
докажи дека овој триаголник е правоаголен.

5. Дадени се изразите
$a=3^{2022}-3^{2021}+3^{2020}$, $b=14\sqrt{2}\cdot 3^{2020}$, $c=3^{2021}-3^{2022}+3^{2023}$.
Докажи дека $a,b$ и $c$ се должини на страни на правоаголен триаголник.

6. Во правоаголен триаголник $ABC$ со прав агол во темето $C$ должините на тежишните линии се $t_a,t_b$ и $t_c$. Докажи дека $t_a^2+t_b^2=5t_c^2$.

7. Во правоаголниот триаголник $ABC$, должините на тежишните линии кои соодветствуваат на катетите се $2\sqrt{13}\,cm$ и $\sqrt{73}\,cm$. Определи ја должината на хипотенузата на овој триаголник.

8. Определи ги мерните броеви на страните на рамнокрак триаголник со должина на основата $a$ и должина на кракот $b$ ако
$$a^3 + b^3 + 3b^2(b-a) + 2b(b^2 - a^2) = 0 .$$

9. Даден е правоаголен триаголник $ABC$ со катети $a$ и $b$, хипотенуза $c$ висина кон хипотенузата $h$. Докажи дека триаголникот со должини на страни $h, c+h, a+b$ исто така е правоаголен.

10. Нека $E$ е произволна точка на катетата $AC$ и $F$ е точка на хипотенузата $AB$ на правоаголниот $\triangle ABC$ таква што $\measuredangle EFA = 90^\circ$. Докажи, дека $\measuredangle ECF = \measuredangle EBF$ .

11. Нека $h$ е должината на висината $CD$ која соодветствува на хипотенузата $AB$ на правоаголниот триаголник $ABC$ и нека $\overline{AD} = p$ и $\overline{BD} = q$. Докажи дека $pq = h^2$.

12. Определи ја плоштината на правоаголниот триаголник со периметар $36\,cm$, кај кој за хипотенузата $c$ и катетите $a$ и $b$ важи $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$.

13. Пресметај го периметарот на правоаголниот триаголник со плоштина $30\,cm^2$, ако за страните на правоаголниот триаголник важи $5a = b + c$ ($c$ е хипотенуза).

14. Даден е правоаголен триаголник со катети $5\,cm$ и $12\,cm$. Определи го радиусот на впишаната кружница во овој триаголник.

15. Даден е правоаголен триаголник со хипотенуза $20\,cm$. Ако радиусот на впишаната кружница е $4\,cm$, пресметај го периметарот на овој триаголник.

16. Даден е правоаголен триаголник со радиус на впишаната кружница е $4\,cm$, кај кој катетите се разликуваат за $4\,cm$, пресметај го периметарот на овој триаголник.

17. Даден е правоаголен триаголник со хипотенуза $20\,cm$. Ако катетите

се разликуваат за $4\,cm$, пресметај го периметарот на овој триаголник.

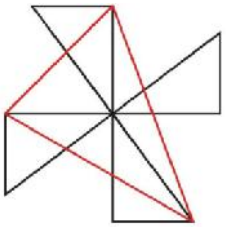
18. Должините на катетите на правоаголен триаголник се изразени со цели броеви сантиметри. Ако хипотенузата е $20\,cm$, пресметај го периметарот на овој триаголник.

19. Должините на катетите на правоаголен триаголник се изразени со цели броеви сантиметри. Ако радиусот на впишаната кружница е $4\,cm$, пресметај го периметарот на овој триаголник.

20. Висината која соодветствува на хипотенузата на правоаголниот триаголник е $3\,cm$, а едната катета е $5\,cm$. Определи ја должината на хипотенузата на овој триаголник.

21. Висината на правоаголниот триаголник ја дели хипотенузата на два дела со должини $2\,cm$ и $8\,cm$. Пресметај го периметарот на овој триаголник.

22. Правоаголниот триаголник со катети 3 и 4, го ротираме за агол од $90^\circ$ три пати околу едно теме, како што е прикажано на цртежот десно. Потоа поврзуваме три од добиените темиња како на цртежот, со што го добиваме црвениот триаголник. Дали овој триаголник е правоаголен?



23. Даден е правоаголен триаголник $ABC$ со прав агол во темето $C$, $\overline{AB}=3$ и $\overline{AC}=1$. На отсечката $BC$ е дадена точка $M$ таква што $\overline{BM}:\overline{CM}=1:7$. Што е поголемо $\overline{BC}$ или $\overline{AM}$.

24. Нека точката $D$ е средина на хипотенузата $AB$ на правоаголниот триаголник $ABC$, $\angle BAC=35^\circ$. Точката $B_1$ е симетрична на точката $B$ во однос на $CD$. Определи ја мерката на $\angle AB_1C$.

25. Нека $D$ е средината на хипотенузата $AB$ на правоаголниот триаголник $ABC$, $\angle BAC=50^\circ$. Точката $B_1$ е симетрична на точката $B$ во

однос на $CD$. Определи ја мерката на $\angle AB_1C$.

26. Даден е правоаголен триаголник $ABC$ со прав агол во темето $C$. Нека $D$ е подножјето на висината повлечена од темето $C$ и $F$ е средината на страната $AB$. Ако аголот меѓу висината $CD$ и тежишната линија $CF$ е еднаков на $20^\circ$, определи ја големината на аголот меѓу симетралата на аголот во темето $C$ и тежишната линија $CF$.

27. Нека $D$ е точка на хипотенузата $AB$ на правоаголниот триаголник $ABC$, и нека $\overline{CA}=\overline{CD}=\sqrt{5}$ и $\overline{CB}=2\sqrt{5}$. Определи ги плоштината и периметарот на триаголникот $BCD$.

28. Правоаголен триаголник $ABC$ има катетите $\overline{AC}=12\,cm$ и $\overline{BC}=5\,cm$. Полукружница со центар на страната $AC$ ја допира катетата $BC$ во точката $C$, а хипотенузата $AB$ во точка $D$. Определи ја должината на радиусот на оваа полукружница.

29. Во правоаголен триаголник $ABC$ со катети $\overline{AC}=6\,cm$ и $\overline{BC}=8\,cm$ е повлечена висината $CH$. Во секој од добиените триаголници $AHC$ и $BCH$ се впишани кружници кои висината ја допираат во точките $M$ и $N$. Определи ја должината на отсечката $MN$.

30. Во рамнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза со должина $45\,cm$ е впишан правоаголник. Две негови темиња лежат на хипотенузата, а другите две на катетите. Определи ја плоштината на правоаголникот, ако должината на едната страна е 40% од должината на нејзината соседна страна.

31. Во триаголникот $ABC$, на страните $AB, BC$ и $CA$ редоследно се избрани точки $C', A'$ и $B'$. Докажи дека кружниците опишани околу триаголниците $A'B'C$, $A'C'B$ и $B'C'A$ се сечат во една точка.

32. Даден е триаголник $ABC$. Определи ги неговите агли, а ко центарот на опишаната кружница околу триаголникот $ABC$ и центарот на впишаната кружница во триаголникот $ABC$ се симетрични во однос на правата $AB$.

33. Во триаголникот $ABC$ важи $\overline{AC}=41$ и $\overline{BC}=50$. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот $ABC$ ако висината $CC'$ ја дели страната $AB$ во однос $3:10$.

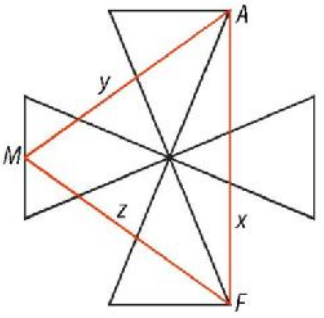
34. Нека $AA_1$ и $BB_1$ се тежишни линии на триаголникот $ABC$. Ако $\measuredangle CAA_1=\measuredangle CBB_1$, докажи дека $\overline{AC}=\overline{AB}$.

35. Во триаголникот $ABC$ важи $\measuredangle B=20^\circ, \measuredangle C=40^\circ$ и должината на симетралата $AM$ на $\measuredangle A$, $M\in BC$ е еднаква на $2\,cm$. Определи ја разликата на должините на страните $BC$ и $AB$.

36. Во внатрешноста на триаголникот $ABC$ се избрани две точки. Растојанието од едната точка до страните на триаголникот се $1\,cm, 3\,cm$ и $15\,cm$, а од другата точка (во истиот редослед) се $4\,cm, 5\,cm$ и $11\,cm$. Определи го радиусот на впишаната кружница во триаголникот $ABC$.

37. Должините на две страни на триаголникот $ABC$ се разликуваат за $4\,cm$, должината на третата страна е $20\,cm$ и радиусот на впишаната кружница во триаголникот $ABC$ е $4\,cm$. Пресметај го периметарот на овој триаголник.

38. Основите на рамнокраките триаголници на цртежот десно се со должина 10, а краците се со должина 13. Овие четири триаголнци имаат едно заедничко теме. Соседните триаголници се слики еден на друг при ротација околу врвот за агол $90^\circ$. Пресметај го периметарот на триаголникот $AMF$, каде $M$ е средина на страната на која и припаѓа.




39. Триаголниците $ABC$ и $ADC$ имаат заедничка страна $AC$. Отсечките $AD$ и $BC$ се сечат во точка $M$, при што $\measuredangle ABC=\measuredangle ADC=40^\circ$, $\overline{BD}=\overline{AB}$ и $\measuredangle AMC=70^\circ$. Определи ги аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$.

40. Должините на страните на еден триаголник се три последователни парни природни броеви. Определи ги страните на триаголникот ако неговата плоштина е еднаква на $24\,cm^2$.

41. Нека $AD$ и $BE$ се симетралите на аглите при основата на рамнокракиот триаголник $ABC$. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{DB}$.

42. Во триаголникот $ABC$ тежишната линија $BM$ е четири пати пократка од страната $AB$ и со неа формира агол од $60^\circ$. Определи ја мерката на $\measuredangle ABC$.

43. Дали постои триаголник со висини 1, 2, 3?

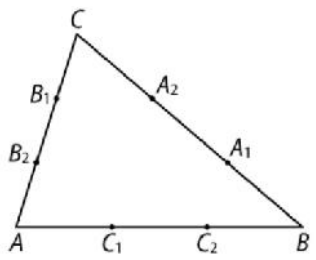
44. Во триаголник две висини се еднакви на 6 и 10. Докажи дека третата висина е помала од 15.

45. Докажи дека секоја права која ги полови и плоштината и периметарот на даден триаголник минува низ центарот на впишаната кружница на тој триаголник.

46. Должините на страните на триаголникот се три последователни природни броја, не помали од 3. Докажи дека висината која соодветствува на средната по должина страна ја дели таа страна на два дела чии должини се разликуваат за 4.

47. Нека $K$ е подножјето на висината повлечена од темето $A$ на триаголникот $ABC$. Нека $BN$ е симетралата на аголот во темето $B$ $(N \in AC)$. Определи ги мерките на аглите на триаголникот $ABC$ ако $\measuredangle KAB = \measuredangle ACB$ и $\measuredangle BNC = 99^\circ$.

48. Даден е триаголник $ABC$. На страната $AB$ се означени точки $C_1$ и $C_2$, на страната $BC$ точки $A_1$ и $A_2$, а на страната $AC$ точки $B_1$ и $B_2$ (види цртеж). Познато е дека



$$\overline{AC_1} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_2B},$$
$$\overline{BA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2C},$$
$$\overline{CB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2A}.$$

Докажи дека триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ се складни.

49. Подножјето $K$ на висината повлечена од темето $A$ во триаголникот $ABC$ припаѓа на продолжението на страната $BC$. Нека $BN$ е симетрала на $\angle CBA$, ($N \in AC$). Определи ги мерните броеви на аглите триаголникот $ABC$ ако $\angle KAB = \angle ACB$ и $\angle BNC = 99^\circ$.

50. Даден е триаголник $ABC$. Нека $ABC_1$ и $BCA_1$ се рамнострани триаголници кои со триаголникот $ABC$ немаат заеднички внатрешни точки.

    а) Докажи дека $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$.

    б) Определи го аголот меѓу правите $AA_1$ и $CC_1$.

51. Нека $H$ е ортоцентар и $O$ е центар на опишаната кружница на остроаголниот триаголник $ABC$. Нека $D$ е пресекот на опишаната кружница и правата определена со точките $A$ и $O$. Докажи дека отсечките $HD$ и $BC$ се преполовуваат.

52. Нека $H$ е ортоцентар и $O$ е центар на опишаната кружница околу остроаголниот триаголник $ABC$. Нека правата $CO$ по втор пат ја сече опишаната кружница. Докажи дека плоштините на триаголниците $AMB$ и $ABH$ се еднакви.

53. Нека точката $K$ е средина на страната $BC$ на триаголникот $ABC$, а $L$ е точка на страната $AC$, таква што $\overline{CL} = 2\overline{AL}$. Ако $AK$ и $BL$ се сечат во точката $M$, докажи дека плоштината на триаголникот $ABC$ е четири пати поголема од плоштината на триаголникот $ABM$.

54. Нека $K$ е точка на страната $BC$ на триаголникот $ABC$ таква што $\overline{KC} = 2\overline{BK}$, а $L$ е точка на страната $AC$ таква што $\overline{CL} = 2\overline{AL}$. Ако отсечките $AK$ и $BL$ се сечат во точката $M$ докажи дека плоштината на триаголникот $ABC$ е пет пати поголема од плоштината на три-

аголникот $ABM$ .

55. Должините на две заемно нормални тежишни линии на триаголникот $ABC$ се $\overline{AA_1} = 9\,cm$ и $\overline{BB_1} = 12\,cm$ . Пресметај ги должините на страните на триаголникот.

56. Две страни на триаголникот имаат должини $20\,cm$ и $30\,cm$ , а висината која соодветствува на третата страна е еднаква на артиметичката средина на другите две висини. Определи ја должината на третата страна на триаголникот.

57. Должините на страните на триаголникот се $13\,cm, 40\,cm$ и $45\,cm$ . Определи ја должината на најдолгата висина на овој триаголник.

58. Докажи дека во секој триаголник $ABC$ важи формулата

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

каде $h_a, h_b, h_c$ се висините, а $r$ е радиусот на впишаната кружница во триаголникот.

59. Даден е триаголник $ABC$ со меѓусебно нормални тежишни линии $t_a = 12\,cm$ и $t_b = 20\,cm$ . Пресметај ја плоштината на $\triangle ABC$ .

60. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle CAB = 3\measuredangle ABC$ . Нека $L$ е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ACB$ со страната $AB$ и нека

$$P_{\triangle ALC} : P_{\triangle LBC} = 1:2\,,$$

каде $P_{\triangle ALC}$ и $P_{\triangle LBC}$ се соодветно плоштините на $\triangle ALC$ и $\triangle LBC$ . Определи ги големините на аглите на $\triangle ABC$

61. Нека природните броеви $a, b, c$ се должини на страните на еден триаголник. Ако висината повлечена кон страната $a$ е еднаква збирот на останатите две висини, тогаш $a^2 + b^2 + c^2$ е квадрат на природен број. Докажи!

62. Страните на $\triangle ABC$ се $\overline{AB} = 21\,cm, \overline{BC} = 17\,cm$ и $\overline{AC} = 10\,cm$ . Во внатрешноста на триаголникот е земена точка $M$ која од страната $AB$ е

оддалечена $2\,cm$, а од страната $BC$ е оддалена $4\,cm$. Определи го растојанието од точката $M$ до страната $AC$.

63. Точката $M$ е средина на страната $AB$ на триаголникот $ABC$, а $T$ е неговото тежиште. Ако триаголникот $AMT$ е рамностран триаголник со должина на страна $1\,cm$, определи и должините на страните на триаголникот $ABC$.

64. Даден е триаголник $ABC$ во кој $\angle BCA = 60^\circ$. Нека симетралата на $\angle BAC$ ја сече страната $BC$ во точката $D$, а симетралата на $\angle ABC$ ја сече страната $AC$ во точката $E$. Докажи дека $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BD}$.

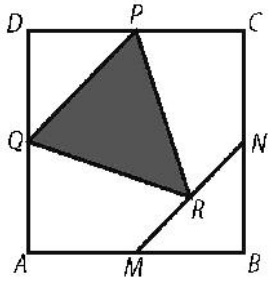
65. Определи ги аглите на разностран триаголник ако средниот по големина агол е аритметилка средина на другите два агли и ако должината на најголемата страна е два пати поголема од должината на најмата страна.

66. Во остроаголен триаголник $ABC$ важи $\angle BAC = 2\angle CBA$, $\overline{AB} = 6{,}5\,cm$, а должината на страната $BC$ е за $2{,}6\,cm$ поголема од должината на страната $AC$. Определи го должините на страните $AC$ и $BC$.

## 5.2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

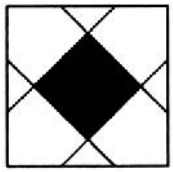
1. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е дадена точка $E$ таква што $\triangle CDE$ е рамнокрак со агол од $150^\circ$ кај темето $E$. Определи ги аглите на $\triangle ABE$.

2. Точките $M, N, P, Q$ се средини на страните на квадратот $ABCD$, а $R$ е средина на отсечката $MN$ (цртеж десно). Кој дел од плоштината на квадратот е осенчен?




3. Нека $E$ е точка во надвор од квадратот $ABCD$ таква што $CDE$ е рамностран триаголник и нека $P$ е пресечната точка на отсечките $AE$ и $BD$. Докажи дека $\overline{PE} = \overline{PB}$.

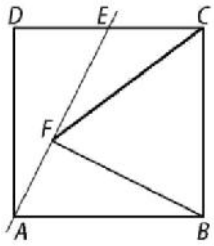
4. Секоја страна на квадратот е поделена на три еднакви дека и некои од делбените точки се поврзани со што е добиена фигурата прикажана на цртежот десно. Колкав дел од квадратот претставува обоената фигура?



5. Во рамностран триаголник со должина на страна $6\,cm$ е впишана кружница, а во кружницата е впишан квадрат. Определи ја плоштината на овој квадрат. Определи го односот на плоштините на триаголникот и квадратот.

6. Катетите на правоаголниот триаголник се со должини $6\,cm$ и $12\,cm$. Околу овој триаголник е опишан круг, а околу кругот е опишан квадрат. Определи ја плоштината на овој квадрат.

7. Нека точката $E$ е средина на страната $CD$ на квадратот $ABCD$ и нека $F$ е подножјето на нормалата повлечена од темето $B$ на правата $AE$ (види цртеж десно). Докажи дека $\overline{CF} = \overline{CD}$




8. Даден е правоаголник $ABCD$ со плоштина $1890\,cm^2$. Точките $M, N, P, Q$ ги делат страните $AB, BC, CD, DA$ редоследно во однос $1:2,\ 2:3,\ 3:4,\ 4:5$. Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.

9. Определи ги сите целобројни должини на страните на правоаголник чии мерни броеви на плоштината и периметарот се еднакви.

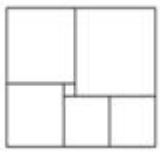
10. Правоаголник со две прави паралелни на неговите страни е поделен на четири мали правоаголници. Дадени се периметрите на трите мали правоаголници. Определи го периметарот на четвртиот мал правоаголник.

11. Должините на страните на правоаголникот се цели броеви. Ако едната страна се зголеми за 99, а другата се намали за 1, се добива нов правоаголник со иста плоштина како и почетниот. Определи ги должините

на страните на правоаголникот ако должината на пократката страна е двоцифрен, а на плоштината е четирицифрен број.

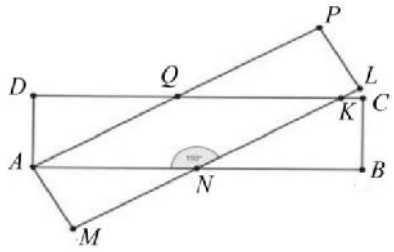
12. Нека $ABCD$ е правоаголник и $CDM$ и $AND$ се рамностран триаголници во надворешноста на тој правоаголник. Докажи дека триаголникот $BMN$ е рамностран.

13. Правоаголник е разделен на шест квадрати, како што е прикажано на цртежот. Одреди ја плоштината на правоаголникот, ако страната на најмалиот квадрат е $2\,m$.



14. Страните на еден правоаголен триаголник се последователни природни броеви. Периметарот на правоаголниот триаголник е $12\,dm$. Над секоја страна од триаголникот е конструиран квадрат. Одреди ја плоштината на добиената фигура.

15. Два складни правоаголника $ABCD$ и $AMLP$ со должини на страни $\overline{AB} = \overline{ML} = 24cm$, $\overline{BC} = \overline{LP} = 6cm$ се преклопуваат како на цртежот десно. Пресечната точка на страните $AP$ и $CD$ е точката $Q$, а пресечните точки на страната $ML$ со страните $AB$ и $CD$ се точките $N$ и $K$, соодветно. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ANKQ$ и должината на отсечката $NB$, ако $\measuredangle ANL = 150^\circ$.




16. Нормалите повлечени од темињата $B$ и $D$ кон дијагоналата $AC$ на правоаголникот $ABCD$ ја делат дијагоналата на три еднакви дела. Должината на помалата страна на правоаголникот е $\sqrt{2}\,cm$. Определи ја должината на другата страна на правоаголникот.

17. Нормалите повлечени од темињата $B$ и $D$ кон дијагоналата $AC$ на правоаголникот $ABCD$ ја делат дијагоналата на три дела во однос $1:3:1$. Должината на поналата страна на правоаголникот е $1\,cm$. Определи ја должината на другата страна на правоаголникот.

18. Даден е правоаголик $ABCD$ каде $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. На страната $CD$ е избрана точката $M$, така што симетралата на $\measuredangle DMB$ минува низ темето $A$. Определи ја големината на $\measuredangle AMB$.

19. Во триаголникот $ABC$ тежишната линија $BM$ е два пати пократка од страната $AB$ и со неа формира агол од $40^\circ$. Определи го $\measuredangle ABC$.

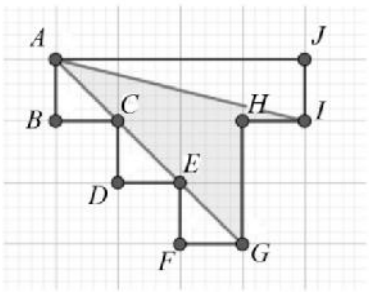
20. Периметарот на еден паралелограм е еднаков на $26\,cm$, а збирот на плоштините на квадратите конструирани над две соседни страни на паралелограмот е $97\,cm^2$. Определи ги должините на страните на паралелограмот.

21. Паралелелограм со две прави паралелни на неговите страни е поделен на четири помали паралелограми. Периметрите на три од помалите паралелограми се еднакви на 100, 70 и $50\,cm$. Определи ја
    а) најмалата, б) најголемата
    можна вредност која може да ја има четвртиот од малите паралелограми.

22. Нека $ABCD$ е паралелограм, а $CDM$ и $ADN$ се рамнострани триаголници кои лежат надвор од паралелограмот $ABCD$. Докажи дека триаголникот $BMN$ е рамностран.

23. Даден е паралелограм $ABCD$ со должини на страни $10\,cm$ и $4\,cm$. Симетралата на аголот во темето $B$ ја сече страната $CD$ во точката $E$. Определи го односот на плоштината на трапезот $ABED$ и паралелограмот $ABCD$.

24. Пресметај ги плоштината и периметарот на осенчениот четириаголник $AGHI$, ако
    $\overline{HI} = \overline{IJ} = \sqrt{2}$.




25. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите се сечат во точка $O$. Ако триаголниците $AOB$ и $COD$ имаат еднакви плоштини тогаш

четириаголникот $ABCD$ е трапез или паралелограм. Докажи!

26. Докажи дека делот на средната линија на трапезот кој е меѓу неговите дијагонали е еднаков на полуразликата на основите.

27. Краците на трапезот се со должини $6\,cm$ и $8\,cm$ и припаѓаат на прави кои се заемно нормални. Определи ја плоштината на тој трапез, ако едната основа е два пати подолга од другата.

28. Точка $P$ е внатрешна за рамнокракиот трапез $ABCD$ и таа е поврзана со темињата на трапезот. Докажи дека може да се конструира четириаголник со страни складни на отсечките $PA, PB, PC, PD$, а кој може да се впише во трапезот $ABCD$ (на секоја страна на трапезот припаѓа по едно теме на четириаголникот).

29. Во четириаголникот $ABCD$ страната $AB$ е паралелна со страната $CD$ и дијагоналите $AC$ и $BD$ се сечат во точката $S$. Докажи дека плоштините на триаголниците $ASD$ и $BSC$ се еднакви.

30. Во трапезот $ABCD$ дијагоналата $AC$ ја дели средната линија на отсечки со должини $2\,cm$ и $5\,cm$. Определи го односот на плоштините на триаголниците $ABC$ и $ACD$.

31. Збирот на аглите при поголемата основа на трапезот $ABCD$ е еднаков на прав агол. Докажи дека отсечката која ги поврзува средините на основите на трапезот е еднаква на полуразликата на неговите основи.

32. Дијагоналите на трапезот се заемно нормални и нивните должини се $6\,cm$ и $8\,cm$ .Пресметај ги висината и плоштината на трапезот.

33. Во трапезот $ABCD$ симетралите на тапите агли на трапезот се сечат во точката $M$ која припаѓа на основата $AB$. Определи ги должините на страните на трапезот $ABCD$, ако висината на трапезот е $\overline{MN} = 12$, а должините на симетралите на тапите агли се $\overline{CM} = 13$ и $\overline{DM} = 15$.

34. Определи ја плоштината на трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB} = 18\,cm$ и

$\overline{CD} = 9\,cm$, а краци $\overline{BC} = 6\,cm$ и $\overline{AD} = 5\,cm$.

35. Аголот при основата на рамнокрак трапез е еднаков на $75^\circ$, основите се однесуваат како $2:1$, должината на кракот е еднаква на $30\,cm$. Пресметај ја плоштината на овој трапез.

36. Во трапезот $ABCD$ симетралата на аголот во темето $D$ ја сече основата $AB$ во точката $L$ и точката $M$ е средина на страната $BC$, Правата паралелна на $DM$, која минува низ точката $L$, ја сече $AD$ во точката $K$. Ако $\angle DLM$ е прав агол, определи го односот $\overline{DK} : \overline{KA}$.

37. Симетралите на внатрешните агли кај темињата $C$ и $D$ на трапезот $ABCD$ се сечат во точката $E$, која лежи на основата $AB$. Ако $\overline{CE} = 13\,cm$, $\overline{DE} = 15\,cm$, а висината на трапезот е $12\,cm$, определи ги должините на страните на овој трапез.

38. Дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката $O$ и го делат четириаголникот на триаголниците $OAB, OBC,$ $OCD$ и $ODA$. Докажи дека производот на плоштините на триаголниците $OAB$ и $OCD$ е еднаков на производот на плоштините на триаголниците $OBC$ и $ODA$.

39. Докажи дека секоја права која ги полови периметарот и плоштината на тангентен четириаголник минува низ центарот на опишаната кружница на тој четириаголник.

40. Конвексен четириаголник со своите дијагонали е поделен на четири триаголници чии плоштини се различни цели броеви од множеството $\{3,4,5,6,7,8,9\}$. Определи ја плоштината на овој четириаголник.

41. Даден е рамностран триаголник $ABC$. На страната $AC$ е дадена точка $M$ таква што $\overline{AM} : \overline{MC} = 1:2$, а на страната $BC$ е дадена точка $N$ таква што $\overline{BN} : \overline{NC} = 2:3$. Определи го односот на плоштините на четриаголникот $ABNM$ и триаголникот $CMN$.

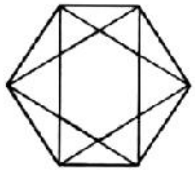
## 5.3. ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

1. Правилен шестаголник и правилен триаголник имаат еднакви плоштини. Која фигура има поголем периметар?

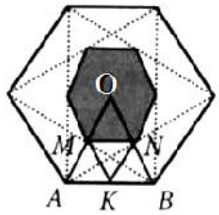
2. Во кружница се впишани рамностран триаголник и правилен шестаголник. Докажи дека плоштината на шестаголникот е два пати поголема од плоштината на триаголникот.

3. Дадена е кружница $k(O,r)$. Околу кружницата се опишани правилен четириаголник и правилен шестаголник. Определи го односот на плоштините на овие многуаголници.

4. Пресеците на пократките дијагонали на даден правилен шестаголник се темиња на нов шестаголник (види цртеж). Определи го односот на плоштините на двата шестаголници.



5. Средините на пократките дијагонали на правилен шестаголник се темиња на нов шестаголник (види цртеж). Определи го односот на плоштините на двата шестаголници.




6. Во правоаголник чија една страна е $a\,cm$ е впишан правилен шестаголник чии темиња припаѓаат на страните на правоаголникот. Определи ја плоштината на овој шестаголник.

7. Докажи дека плоштината на правилен осумаголник е еднаква на производот на должините на неговата најдолга и најкратка дијагонала.

8. Во кружница $k(O,r)$ се впишани правилен осумаголник и правилен дванаесетаголник. Определи го односот на плоштините на овие многуаголници.

9. Даден е правилен осумголник $ABCDEFGH$ со должина на страна

$2\,cm$. Определи ја плоштината на триаголникот $ADG$.

10. Даден е правилен осумаголник $ABCDEFGH$ со должина на страна $a = 2\,cm$. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABDF$.

11. Докажи дека дијагоналите $A_1A_5$, $A_2A_7$ и $A_3A_{11}$ на правилниот четиринаесетаголник $A_1A_2A_3...A_{12}A_{13}A_{14}$ се сечат во една точка.

12. Нека $A_1A_2...A_{15}$ е правилен петнаесетаголник впишан во кружница со центар $O$. Точката $L$ е средина на лакот $A_3A_4$, точката $M$ е средина на страната $A_1A_2$ и $N$ е средина на отсечката $OL$. Докажи дека $\measuredangle OMN = 30^\circ$.

## 5.4. РАЗНИ ЗАДАЧИ

1. Колку страни има конвексен многуаголник кај кој сите агли се еднакви, ако збирот на сите негови надворешни агли со еден внатрешен агол е еднаков на $468^\circ$?

2. Колку страни има конвескен многуаголник кај кој збирот на внатрешните агли со еден надворешен агол е еднаков на $2250^\circ$?

3. Ако бројот на страните на еден конвексен многуаголник се зголеми два пати, тогаш бројот на неговите дијагонали се зголемува пет пати. Определи го збирот на внатрешните агли на овој многуаголник.

4. Ако бројот на дијагоналите на многуаголникот се зголеми за 235 се добива бројот на дијагоналите на многуаголникот кој има за 10 повеќе страни од претходниот многуаголник. Кои се тие многуаголници?

5. Даден е многуаголник чиј вкупен број на дијагонали и страни е 78. Пресметај го збирот на внатрешните агли на овој многуаголник.

6. Дали постои $n-$аголник кај кој бројот на неговите дијагонали е за 2010 поголем од бројот на неговите страни?

7. Правилен многуаголник со $n$ страни има 15 дијагонали помалку од правилен многуаголник со $n+2$ страни. За колку е внатрешниот агол на првиот многуаголник помал од внатрешниот агол на вториот многуаголник?

8. Дали постои конвексен многуаголник кај кој бројот на дијагоналите е еднаков на точен квадрат на некој природен бро?

9. Два многуаголници вкупно имаат 119 дијагонали. Бројот на страните на едниот од двата многуаголници е за 1 поголем од бројот на страните на другиот многуаголник. Колку страни има секој многуаголник?

10. Определи го бројот на паровите природни броеви $m$ и $n$ такви што бројот на дијагоналите на $m$ – аголникот е поголем од бројот на дијагоналите на $n$ – аголникот за 2007.

11. Многуаголник кој има $n$ страни има $kn, (k \in \mathbb{N})$ дијагонали. Докажи дека $n$ е непарен број.

12. Нека $A_1A_2...A_n$ е правилен $n$ – аголник со стана $a = 10\,cm$. Пресметај го неговиот периметар ако $\measuredangle A_5A_1A_2 = 12^\circ$.

13. Колкав е периферискиот агол над кружниот лак чија должина е 22% од должината на кружната линија?

14. Колкав дел од кружницата (во проценти) припаѓа на периферискиот агол еднаков на $32^\circ 24'$?

15. Во осумаголникот $ABCDEFGH$ страната $GH$ е три пати подолга од сите преостанати страни, шест негови агли се по $90^\circ$ и два се по $270^\circ$. Ако плоштината на четириаголникот $AFGH$ е еднаква на $15\,cm^2$, колкава е плоштината на овој осумаголник?

16. На кружницата $k$ редоследно во насока на движењето на стрелките на часовникот се дадени точките $A, B, C, D$ така што важи $\overline{AB} = \overline{CD}$. Докажи дека $\overline{AC} = \overline{BD}$.

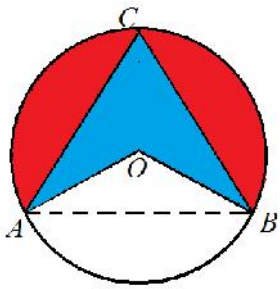
17. Ангел на дедо му на село му помагал во работата. Козјиот обор е во квадратна форма со должина на страна $4\,m$. Ангел врзал коза со конец од надворешнатаа страна на оборот точно во точка која е теме на тој квадрат. Должината на конецот е $8\,m$. Колкава е плоштината на површината од која козата може да ја испаси тревата? Дали таа плоштина ќе биде поголема ако Ангел козата ја врзе на средината на една од страните на квадратот?

18. Должината на тангентата од точката $A$ на кружницата $k(O,r)$ е еднаква на $8\,cm$. Ако најкраткото растојание од точката $A$ до кружницата $k$ е еднакво на $4\,cm$, определи ги периметарот и плоштината на кругот $k$.
19. Должината на тангентната отсечка повлечена од точката $A$ на кружницата $k(O,5\,cm)$ е еднаква на $12\,cm$. Определи го најкраткото растојание од точката до кружницата.

20. Од точката $A$ се повлечени тангентите на кружницата $k(O,9\,cm)$, кои кружницата ја допираат во точките $B$ и $C$. Ако должината на тетивата $BC$ е $14,4\,cm$, определи го најкраткото растојание од точката $A$ до кружницата $k$.

21. Аголот меѓу тангентните отсечки повлечени од точката $A$ на кружницата $k$ е еднаков на $60^\circ$. Ако должината на тангентната отсечка од точката $A$ на кружницата $k$ е $6\,cm$, определи ги периметарот и плоштината на кругот $k$.

22. Нека $ABC$ е рамностран триаголник околу кој е опишана кружница со центар $O$ (цртеж десно). Спореди ги плоштините на деловите на кругот обоени со црвена, сина и бела боја.




23. Кружниците $k_1$ и $k_2$ чии радиуси се еднакви на $8\,cm$ и $18\,cm$ се допираат надворешно. Една заедничка тангента на дадените кржници ги

допира кружниците во различни точки $M$ и $N$. Определи ја должината на отсечката $MN$.

24. Нека се дадени две концентрични кружници и нека тетива на поголемата кружница што ја допира помалата кружница има должина $2\,cm$. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен!

25. Дадени се колинеарни точки $C, B$ и $D$, при што точката $D$ е меѓу точките $C$ и $B$. Конструирај рамнокрак триаголник $ABC$ со теме при врвот $C$, теме на основата $B$, кај кој $AD$ е симетрала на аголот при основата.

26. Конструирај правоаголен триаголник со хипотенуза $12\,cm$ и висина која соодветствува на хипотенузата $3\,cm$. Определи ги аглите на овој триаголник.

27. Нека се $AD, AE, AF$ висината, симетралата на аголот и тежишната линија повлечени од темето $A$ на триаголникот $ABC$ ($D, E, F$ припаѓаат на страната $BC$). Продолженијата на висината $AD$, симетралата $AE$ и тежишната линија $AF$ ја сечат опишаната кружница во точките $K, L$ и $M$, соодветно. Конструирај го триаголникот $ABC$ ако се дадени точките $K, L$ и $M$ со својата положба.

28. Даден е четириаголник $ABCD$. Конструирај триаголник чија плоштина е еднаква на плоштината на дадениот четириаголник.

29. Конструирај правилен многуаголник чии три соседни темиња се темиња на рамнокрак триаголник со агли при основата еднакви на $15^\circ$.

30. Даден е правоаголен триаголник чиј еден остар агол е $60^\circ$. Конструирај правилен многуаголник, чии три темиња се темињата на дадениот триаголник и кој има најмал можен број страни.

# 6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:
$$\overline{THREE} + \overline{FIVE} = \overline{EIGHT}\ .$$

2. Природните броеви кои се запишуваат само со цифрите 0 и 5 се наредени во низа по големина. Кој е 64-тиот број во таа низа?

3. Природните броеви кои се запишуваат само со цифрите кои се деливи со 3 се подредени во низа во растечки редослед. Кој е 256-тиот број во таа низа?

4. Голема свеќа изгорува за 1 час и чини 60 денари. Мала свеќа изгорува за 11 минути и чини 11 денари. Дали може да се измери време од 1 минута по цена од 150 денари?

5. Во одделението на Горјан има 12 ученици за кои е констатирано дека сите се родени во различни месеци. Покрај тоа, разликата во староста на било кои два од овие 12 ученици е помала од една година. Меѓу нив Ацо е најстар и тоа е 214 дена постар од семиот по ред Марко. Определи го роденденот на Марко.

6. Дали може од множеството $S = \{1, 2, ..., 200\}$ да се изберат помалку од 59 различни броеви чиј збир е еднаков на збирот на преостанатите броеви од ова множество?

7. Дадени се множествата
$$S_1 = \{1\},\ S_2 = \{2, 3\},\ S_3 = \{4, 5, 6\},\ S_4 = \{7, 8, 9, 10\}, ...$$
Определи го збирот на елементите на множеството $S_{2007}$.

8. Природните броеви од 1 до 2014 се поделени во парови (секој број е точно во еден пар), потоа е пресметан збирот на секој пар броеви, а потоа е пресметан производот на сите 1007 збирови. Дали добиениот производ може да е квадрат на некој природен број?

9. Природните броеви од 2 до 2015 се поделени во парови (секој број е точно во еден пар), потоа е пресметан збирот на секој пар броеви, а потоа е пресметан производот на сите 1007 збирови. Дали добиениот производ може да е квадрат на некој природен број?

10. На седум ливчиња се запишани сите цели броеви од 5 до 11, на секое ливче по еден број. Потоа ливчињата се измешани, па прво Марио зел три ливчиња, а по него Илија зел две ливчиња. Преостанатите ливчиња ги отстраниле, без да знаат кои броеви се на нив запишани. Откако ги видел броевите на своите ливчиња, Марио рекол: „Јас знам дека збирот на броевите на твоите ливчиња е парен.“ Марио и Илија се одлични математичари. Кои броеви биле запишани на ливчињата на Марио?

11. Теодор напишал програма која во секој чекор извршува една од следниве операции: даден број го множи со 4 или даден број го собира со 5. Кој е најмалиот број чекори за да од бројот 2 се добие бројот 2012?

12. Екипите на градовите $A$ и $B$ имале натпревар во брзопотезен шах на 100 табли. Во секоја екипа имало и мажи и жени и во секоја екипа имало повеќе мажи од жени, со тоа што во екипата на градот $B$ имало повеќе жени отколку во екипата на градот $A$. Сите мажи од градот $B$ имале за противници мажи од градот $A$. Во партиите на кои играле само мажи шахистите од градот $A$ победиле во три партии од секои пет, а во партиите на кои играле само жени шахистките од градот $B$ победиле во две партии од секои три. Ниту една партија не завршила нерешено (реми). Вкупниот резултат бил $59:41$ за градот $A$. Колку мажи играле во екипата на градот $A$?

13. Десет шахисти на шаховски турнир играат секој со секого по две партии. Секој играч за победа добива 1 поен, за нерешен резултат двата играча добиваат по 0,5 поени и за пораз не се добиваат поени, ниту се губат поени. Колку најмалку поени треба да има некој шахист за да со сигурност се заклучи дека има повеќе поени од сите останати учесници на турнирот?

14. Должините на страните на правоаголен триаголник (изразени во сан-

тиметри) се двоцифрени броеви. Најмалиот и најголемиот од тие броеви имаат иста цифра на единиците и двата броја се прости. Двата најголеми броја се последователни природни броеви, а разликата на најмалиот и најголемиот број е за 10 помала од третиот број. Определи ги страните на овој триаголник.

15. Даден квадрат е поделен на 100 помали квадрати, од кои 99 имаат должина на страна 1. Определи ја плоштината на дадениот квадрат.

16. Квадрат е исечен на 2010 помали квадрати. Само еден од малите квадрати има должина на страна различна од 1 (сите преостанати квадрати имаат должина на страна 1). Определи ја плоштината на почетниот квадрат.

17. Докажи дека коцка со раб со должина 13 може да се расечи на 2016 мали коцки со рабови со должини 1, 2 и 3. Колку коцки притоа се со раб со должина 3?

18. Докажи дека коцка со раб со должина 13 може да се расече на 2017 мали коцки со рабови со должини 1, 2 и 3. Колку коцки се со раб со должина 3?

19. Земени се 27 коцки за играње, со ѕидови нумерирани на вообичаен начин со броеите од 1 до 6, така што збирот на броевите запишани на спротивните ѕидови е 7, и од нив е составена голема коцка со димензии $3\times3\times3$. Кој е најголемиот можен збир на броевите видливи на ѕидовите на големата коцка?

20. На колку начини бројот 2024 може да се претстави како производ на три различни природни броја? Редоследот на множителите не е важен.

21. Определи ги сите природни броеви кои може да се прикажат како производ на пет множители за кои важи:
    - секој множител е прост број,
    - барем три множители се еднакви,
    - збирот на сите пет множители е 40.

22. Марија во компјутер запишува деветцифрен природен број користејќи

ги цифрите 0, 1, 2, 5, 6, 8 и 9. Забележала дека нејзиниот комјутер прави грешки при исписот. На екранот на комјутерот ги испишува бројот во обратен редослед на цифрите и истовремено заменува некои цифри како што е прикажано во табелата.

| Внес | 0 | 1 | 2 | 5 | 6 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Испис | 0 | 1 | 5 | 2 | 9 | 8 | 6 |

На пример, кога ќе го внесе бројот 211586089 на екранот се јавува бројот 680982115. Определи го бројот на деветцифрените броеви кои на екранот ќе испишат така како што се внесени.

23. Нека $a,b,c$ се должините на страните на триаголникот $ABC$. Ако една страна на триаголникот е подолга од $37\ cm$, докажи дека
$$a^2+b^2+c^2>2006\ cm^2.$$

24. Нека $a,b,c$ се должини на страни на произволен триаголник. Докажи дека
$$a^2+b^2+c^2<2ab+2bc+2ca. \qquad (1)$$

25. Нека $a,b,c$ се должините на страните на произволен триаголник. Докажи дека
$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3. \qquad (1)$$

26. Дадени се правоаголник и квадрат со еднакви плоштини. Нека $a$ и $b$ се две соседни страни на правоаголникот, а $c$ е страната на квадратот. Докажи дека
$$a+b-c>R\sqrt{2},$$
каде $R$ е радиусот на опишаната кружница околу правоаголникот.

# РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

## 1. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Производот на четири последователни непарни природни броја има цифра на единиците 9. Која е цифрата на десетките на овој прозвод?
**Решение.** Ниту еден од овие броеви нема цифра на единиците 5, па затоа производот може да се запише во видот:

$$(10k-3)(10k-1)(10k+1)(1k+3) = (100k^2-9)(100k^2-1)$$
$$= 10000k^4 - 1000k^2 + 9.$$

Оттука следува дека цифрата на десетките е 1.

2. Определи ја цифрата на единиците на збирот

$$1^{2010} + 2^{2010} + 3^{2010} + ... + 2008^{2010} + 2009^{2010} + 2010^{2010}.$$

**Решение.** Лесно се добива дека цифрите на единиците на 2010-тите степени на броевите кои имаат цифри на единици од 1 до 9 се редоследно 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Во низата броеви од 1 до 2010 во секоја десетка постои по еден број кој завршува на една од цифрите од 1 до 9, па собирајќи ги цифрите на единиците на 2010-тите степени на сите овие броеви добиваме дека цифрата на единиците на збирот е 5. Бидејќи од 1 до 2010 имаме 201 десетки, заклучуваме дека збирот на 2010-тите степени завршува на цифрата 5.

3. Во зависност од $n$ определи ја цифрата на единиците на бројот $4^n + 5^n + 6^n$.

**Решение.** За секој природен број $n$ бројот $5^n$ има цифра на единиците 5, а бројот $6^n$ има цифра на единиците 6. Понатаму, ако $n$ е непарен број, тогаш бројот $4^n$ има цифра на единиците 4, а ако $n$ е парен број, тогаш тој има цифра на единиците 6. Според тоа, ако $n$ е непарен број, тогаш $4^n + 5^n + 6^n$ има цифра на единиците 5, а ако $n$ е парен број, тогаш има цифра на единиците 7.

4. Определи ја цифрата на единиците на бројот $7^n + 8^n + 9^n$, каде $n \in \mathbb{N}$.
**Решение.** Секој природен број $n$ може да се запише во видот $4k$ или

$4k+1$ или $4k+2$ или $4k+3$, каде $k \in \mathbb{N}$. Лесно се гледа дека цифрата на единиците на бројот $7^{4k}$ е 1, цифрата на единиците на бројот $8^{4k}$ е 6, цифрата на единиците на бројот $9^{4k}$ е 1. Така ја имаме следнава табела:

| | Цифра на единиците | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $7^n$ | $8^n$ | $9^n$ | $7^n+8^n+9^n$ |
| $n=4k$ | 1 | 6 | 1 | 8 |
| $n=4k+1$ | 7 | 8 | 9 | 4 |
| $n=4k+2$ | 9 | 4 | 1 | 4 |
| $n=4k+3$ | 3 | 2 | 9 | 4 |

Според тоа, ако $n$ е делив со 4, тогаш цифрата на единиците е 8, а во другите случаи таа е 4.

5. Збирот на еден двоцифрен број и двоцифрениот број запишан со истите цифри земени во обратен редослед, при делење со 5 дава остаток 2. Кој е тој број?

**Решение.** Нека $\overline{ab}$ е бараниот двоцифрен број. Имаме

$$\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=10(a+b)+(a+b).$$

Бидејќи $5|10$, остатокот при делење со 5 на збирот $\overline{ab}+\overline{ba}$ е еднаков на остатокот при делење со 5 на збирот $a+b$. Сега, $a$ и $b$ се ненулти цифри, па затоа $a+b\le 18$ и како остатокот при делење на $a+b$ со 5 треба да е еднаков на 2, можни се следниве случаи:

- $a+b=2$ и како $a,b\neq 0$, добиваме $\overline{ab}\in\{11\}$,
- $a+b=7$ и како $a,b\neq 0$, добиваме $\overline{ab}\in\{16,25,34,43,52,61\}$
- $a+b=12$, па затоа $\overline{ab}\in\{39,48,57,66,75,84,93\}$
- $a+b=17$, па затоа $\overline{ab}\in\{89,98\}$.

Конечно, $\overline{ab}\in\{11,16,25,34,39,43,48,52,57,61,66,75,84,89,93,98\}$.

6. Определи ги сите природни броеви помали од 1000 чиј производ со бројот 7 дава куб на некој природен број.

**Решение.** Нека $x$ е таков број. Имаме $7x=y^3$, за некој природен број $y$. Од деливоста на левата страна со 7 добиваме $y=7k$, за некој природен број $k$. Значи, $7x=7^3k^3$, односно $x=7^2k^3=49k^3$. Ако $k\ge 3$,

тогаш $x \geq 49 \cdot 3^3 = 1323 > 1000$. Значи, $k < 3$. За $k = 1$ имаме $x = 49$, а за $k = 2$ имаме $x = 392$.

7. Во реченицата

МАГДАЛЕНА ОДИ ВО ОСМО ОДДЕЛЕНИЕ ВО ОСНОВНО УЧИЛИШТЕ

во секој збор да ја преместиме првата буква на последното место. Притоа добиваме:

АГДАЛЕНАМ ДИО ОВ СМОО ДДЕЛЕНИЕО ОВ СНОВНОО ЧИЛИШТЕУ.

Со добиениот текст постапуваме на ист начин. По колку чекори прв пат повторно ќе ја добиеме почетната реченица?

**Решение.** Од секој збор истиот тој збор ќе го добиеме по $nk$ чекори, каде $k$ е бројот на буквите во тој збор, а $n$ е произволен природен број. За да се добие истата реченица потребно е бројот на чекорите да биде делив со бројот на буквите од секој збор. Во нашиот случај тиа се броевите: 9, 3, 2, 4, 9, 2, 7, 8. Најмал таков број е најмалиот заеднички содржател на горните броеви, односно

$$\text{NZS}(9,3,2,4,9,2,7,8) = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504 .$$

8. Во реченицата

„ТАТКОТО СО СИНОТ И ЌЕРКАТА ОТИДЕ НА КОНЦЕРТ“

во секој збор да ја преместиме првата буква на последното место. Со добиениот текст постапуваме на ист начин. По колку чекори прв пат повторно ќе ја добиеме почетната реченица?

**Решение.** Од секој збор истиот тој збор ќе го добиеме по $nk$ чекори, каде $k$ е бројот на буквите во тој збор, а $n$ е произволен природен број. За да се добие истата реченица потребно е бројот на чекорите да биде делив со бројот на буквите од секој збор. Во нашиот случај тиа се броевите: 7, 2, 5, 1, 7, 5, 2, 7. Најмал таков број е најмалиот заеднички содржател на горните броеви, односно

$$\text{NZS}(7,2,5,1,7,5,2,7) = 70 .$$

9. Определи го најмалиот природен број $a$ за кој бројот $\sqrt{2010a}$ е природен број.

**Решение.** Бројот $\sqrt{2010a}$ е природен ако $2010a$ е точен квадрат. Бидејќи $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, а степените на простите броеви на точен

квадрат се парни, заклучуваме дека $a = 2010$.

10. Определи го најмалиот природен број $n$ таков што $\sqrt{2012n}$ е рационален број.

**Решение.** Имаме $2012 = 2 \cdot 2 \cdot 503$, па како за да $\sqrt{2012n}$ е рационален број, потребно е степените на простите множители да се парни. Најмалиот $n$ за кој ова е исполнето е $n = 503$ и притоа важи

$$\sqrt{2012n} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 503 \cdot 503} = 2 \cdot 503 = 1006 .$$

11. Дали постои природен број $a$ кој е помал од 2010, таков што бројот $\sqrt{\frac{a}{2010}}$ е рационален?

**Решение.** Бидејќи $\sqrt{\frac{a}{2010}} = \frac{\sqrt{2010a}}{2010}$ разгледуваниот број ќе биде рационален само ако $\sqrt{2010a}$ е природен број. Според претходната задача најмалиот природен број $a$ за кој бројот $\sqrt{2010a}$ е природен број е $a = 2010$. Но, $a$ треба да е помал од 2010, па затоа бараниот број не постои.

12. Дали постои точен квадрат чиј збир на цифри е еднаков на 2013?

**Решение.** Секој природен број $n$ може да се запише во видот $n = 9m + k, k = 0,1,2,...,n$. Тоа значи дека

$$n^2 = (9m + k)^2 = 9m(9m + 2k) + k^2, k = 0,1,2,...,8 .$$

Сега, бидејќи првиот собирок е делив со 9 разгледувајќи го собирокот $k^2, k = 0,1,2,...,8$ заклучуваме дека квадрат на природен број при делење со 9 дава остаток 0, 1, 4 или 7. Според тоа, збирот на цифрите на бројот $n^2$ при делење со 9 дава остаток 0, 1, 4 или 7. Но, $2013 = 223 \cdot 9 + 6$, што значи дека не постои природен број чиј квадрат има збир на цифри 2013.

13. Определи го најмалиот природен број $z$ за кој $12^4 xy = z^3$, каде $x$ и $y$ се исто така природни броеви.

**Решение.** Бидејќи $12^4 = 2^8 \cdot 3^4$ и $12^4 xy = 2^8 \cdot 3^4 xy = z^3$ следува дека $z^3$ мора да ги содржи $2^8$ и $3^4$. Но, бројот $z$ мора да е најмал,па затоа

$z = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

14. Даден е двоцифрен број кој не е делив со 10. Ако овој број е делив со збирот на своите цифри, докажи дека овој број е делив со 3. Дали тврдењето важи и за трицифрен број?

**Решение.** Нека $\overline{ab}$ е даденият број. Тогаш постои $d$ таков што $10a + b = d(a + b)$, т.е. $9a = (d - 1)(a + b)$. Ако $a + b$ не е делив со 3, тогаш $d - 1$ е делив со 9, па затоа $d \geq 10$ и добиваме

$$10a + b = d(a + b) \geq 10(a + b),$$

што не е можно бидејќи $b \neq 0$. Тврдењето не важи за трицифрени броеви, што може да се види од бројот 112, кој е контрапример.

15. Докажи дека петцифрен број кај кој сите цифри се парни и меѓусебно различни не може да е точен квадрат.

**Решение.** Збирот на цифрите на тој број е $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ и истиот при делење со 9 дава остаток 2. Но, квадрат на природен број при делење со 9 дава остатоци 0, 1, 4 или 7, што значи дека збирот на неговите цифри дава остатоци 0, 1, 4 или 7. Оттука следува дека со цифрите 0, 2, 4, 6 и 8 не може да се запише петцифрен број чии цифри се различни и кој е точен квадрат.

16. Илија на секоја од девет картички запишал по една цифра различна од 0. Кога Марко ги видел напишаните броеви, изјавил дека меѓу сите деветцифрени броеви кои може да се добијат кога картичките ќе се постават во низа има точно еден делив со 11. Дали Марко може да е во право?

**Решение.** Нека на пет картички е запишана цифрата 3, а на преостанатите 4 е запишана цифрата 1. Тогаш збирот на сите цифри на бројот е еднаков на 19. За да бројот биде делив со 11, мора да е разликата на збирот на цифрите на непарните места и збирот на цифрите на парните места да е делива со 11. Оваа разлика не може да е 0, бидејќи збирот на сите цифри е непарен број. Но, оваа разлика е помала од 19, па затоа не може да е 22. Значи, разликата е еднаква на 11. Ако збирот на цифрите на непарните места е $a$, а на парните е $b$, тогаш $a + b = 19$ и $a - b = \pm 11$, од каде добивамедека единствена можност е $a = 15$ и $b = 4$. Последното е можно само ако на непарните места е цифрата 3, а на парните места е цифрата 1, што значи дека единствен број кој може

да се добие со редење на картичките и е делив со 11 е бројот 313131313.

17. Иван на секоја од 19 картички запишал по една цифра различна од 0. Кога Матеј ги видел запишаните броеви, изјавил дека меѓу сите деветнаесетцифрени броеви кои може да се добијат кога картичките ќе се наредат во ред постои точно еден кој е делив со 11. Дали Матеј може да е во право?

**Решение.** Нека на десет картички е запишана цифрата 2, а на девет цифрата 1. Тогаш збирот на сите цифри е непарен број, т.е. бројот 29. За да бројот биде делив со 11 мора да е разликата на збирот на цифрите на непарните места и збирот на цифрите на парните места да е делива со 11. Оваа разлика не може да е 0, бидејќи збирот на сите цифри е непарен број. Збирот на цифрите на парните места е најмалку 10, па затоа разликата е помала од 19, односно не може да е 22. Значи, разликата е еднаква на 11. Ако збирот на цифрите на непарните места е $a$, а на парните е $b$, тогаш $a+b=29$ и $a-b=\pm 11$, од каде добиваме дека единствена можност е $a=20$ и $b=9$. Последното е можно само ако на непарните места е цифрата 2, а на парните места е цифрата 1, што значи дека единствен број кој може да се добие со редење на картичките и е делив со 11 е бројот 2121212121212121212.

18. Определи ги најмалиот и најголемиот шестцифрен број кои се запишани со различни цифри и кои се деливи со 11.

**Решение.** Природниот број е делив со 11, ако апсолутната вредност на разликата на збирот на цифрите кои се на парните места и збирот на цифрите кои се на непарните емста е делива со 11.

Нека најмалиот број кој ги задоволува условите на здачата е од видот $\overline{1023xy}$. Тогаш треба да важи $1+2+x=0+3+y$, од каде следува $x=y$, што не е можно. Сега, нека бројот е од видот $\overline{1024xy}$. Тогаш $1+2+x=4+y$, т.е. $x=y+1$. Од цифрите кои не се употребени а кои го задоволуваат последното равенство најмали се $y=5, x=6$, па бараниот број е 102465.

Нека најголемиот број кој ги задоволува условите на здачата е од видот $\overline{9876uv}$. Тогаш $9+7+u=8+6+v$, т.е. $v=u+2$. Од цифрите кои не се употребени а кои го задоволуваат последното равенство најголеми се $v=5, u=3$, па бараниот број е 987635.

19. Определи ги најмалиот и најголемиот шестцифрен број кои се запишани со различни цифри и кои се деливи со 99.

**Решение.** Природен број е делив со 99 ако е делив со 9 и со 11. Тоа значи дека збирот на цифрите е делив со 9, а апсолутната вредност на разликата на збирот на цифрите на парните и збирот на цифрите на непарните места е делива со 11.

Нека најмалиот таков број има цифри $0,1,2,x,y,z$. Тогаш неговиот збир на цифри е $3+x+y+z$. За да збирот на цифрите на бараниот број биде делив со 9 мора да е $x+y+z=6$, што не е можно бидејќи $3+4+5=12>6$, или $x+y+z=15$. Значи, во предвид доаѓаат комбинациите 0, 1, 2, 3, 4, 8 или 0, 1, 2, 3, 5, 7 или 0, 1, 2, 4, 5, 6. Тогаш збирот на цифрите е 18, па од деливоста со 11 следува дека збирот на цифрите на парните односно непарните места мора да е 9. Сега, бидејќи $0+1+8=2+3+4$ и се бара најмалиот можен број во првиот случај тоа е бројот 120384. Во вториот случај $0+2+7=1+3+5$ и се бара најмалиот можен број, па затоа тоа е бројот 103257. Во третиот случај $0+4+5=1+2+6$, па најмалиот може број е 102465. Конечно, бараниот најмал можен број е 102465.

Нека најголемиот таков број има цифри $9,8,7,x,y,z$. Тогаш неговиот збир на цифри е $24+x+y+z$. За да збир на цифрите на бараниот број биде делив со мора 9 да е $x+y+z=3$ или $x+y+z=12$. Според тоа, можни се комбинациите 9,8,7,0,1,2 или 9,8,7,6,5,1 или 9,8,7,6,4,2. Ако $x+y+z=3$, тогаш збирот на цифрите на бројот е 27. Тоа значи дека во бараниот број збирот на цифрите на непарните места мора да е 19, а збирот на цифрите на парните места мора да е 8. Бидејќи се бара најголемиот можен број, а само $7+0+1=8$, добиваме дека во овој случај решение на задачата е бројот 978021. Ако $x+y+z=12$, тогаш збирот на цифрите бројот е 36, па збирот на цифрите на парните односно непарните места мора да е 18. Ако цифрите на бројот се 9, 8, 7, 6, 5, 1, тогаш истите не може да се поделат на две групи чиј збир е еднаков на 18, па во овој случај задачата нема решение. Ако цифрите на бројот се 9, 8, 7, 6, 4, 2, тогаш бидејќи се бара најголемиот можен број го добиваме решението 987624. Конечно, решение на задачата е бројот 987624.

20. Дали постои природен број $n$ таков што збирот на цифрите во декад-

ниот запис на бројот $n(2n-1)$ е еднаков на 2015?

**Решение.** За секој природен број $n$ при делење на бројот $n(2n-1)$ со 3 се добива остаток 0 или 1. Затоа и бројот $S(n(2n-1))$, каде $S(x)$ е збирот на цифрите во декадниот запис на бројот $x$, при делење со 3 два остаток 0 или 1. Но, бројот 2015 при делење со 3 дава остаток 2. Според тоа, не постои природен број $n$ со саканото својство.

21. Кој е најмалиот број броеви кои што треба да се одберат од множеството $\{1,2,3,...,60\}$ така што производот на избраните броеви ќе биде делив со сите непарни броеви помали од 60?

**Решение.** Доволно е добиениот производ да е делив со $3^3=27$, $5^2=25$, $7^2=49$ и со сите прости броеви поголеми од 10, а помали од 60, т.е. со броевите

$$11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59. \qquad (1)$$

Според тоа, мораме да ги избереме овие 13 броеви, со тоа што некои од броевите 11, 13, 17 и 19 може да ги замениме со производите со некои од броевите 3 и 5. Такви производи помали од 60 се: $11\cdot 3=33$, $11\cdot 5=55, 13\cdot 3=39, 17\cdot 3=51$ и $19\cdot 3=57$. Сега, ако броевите 11, 13, 17, 19 од (1) ги замениме со броевите 55, 39, 51 и 57, добиваме

$$23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 39,\ 41,\ 43,\ 47,\ 51,\ 53,\ 55,\ 57,\ 59. \qquad (2)$$

Сега, за да добиеме деливост со $5^2=25$ и со $7^2=49$ мора да имаме по два броја деливи со 5 и со 7 мора да додадеме два броја чиј производ е делив со $5\cdot 7^2$. За таа цел мора на броевите (2) да се додадат уште два броја, на пример броевите 7 и $5\cdot 7=35$, па производот на овие 15 избрани броеви ќе биде делив со секој непарен број помал 60. Значи, мора да се изберат 15 броја, како на пример броевите:

$$7,\ 23,\ 29,\ 31,\ 35,\ 37,\ 39,\ 41,\ 43,\ 47,\ 51,\ 53,\ 55,\ 57,\ 59.$$

22. Определи го најмалиот број броеви кои треба да се изберат од множеството $\{1,2,...,100\}$ за да производот на избраните броеви биде делив со секој непарен број помал од 100?

**Решение.** Доволно е добиениот производ да биде делив со $3^4=81$, $5^2=25, 7^2=49$ и со сите прости броеви поголеми од 10 и помали од 100. Простите броеви поголеми од 10 и помали од 100 се:

$$11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97. \qquad (1)$$

Значи, мораме да ги избереме сите овие 21 број, со тоа што некои од нив ќе ги замениме со нивните производи со броевите 3, 5 и 7, или со нивните степени, кои се помали од 100. Сега, ако броевите 11, 13, 17, 19 и 23 ги замениме со броевите $11\cdot 3^2 = 99, 13\cdot 5 = 65, 15\cdot 5 = 85$, $19\cdot 3 = 57$ и $23\cdot 3 = 69$, доволно е да го додадеме бројот $7^2 = 49$. Така добиваме 22 броја чиј производ е делив со сите непарни броеви помали од 100.

*Забелешка*. Постојат и други решенија. Обиди се да најдеш некои од нив.

23. Определи го најмалиот број броеви кои треба да се изберат од множеството $\{1, 2, ..., 100\}$ за да производот на избраните броеви биде делив со секој број помал од 100?

**Решение.** Доволно е добиениот производ да биде делив со $2^6 = 64$, $3^4 = 81$, $5^2 = 25, 7^2 = 49$ и со сите прости броеви поголеми од 10 и помали од 100. Простите броеви поголеми од 10 и помали од 100 се:

$$11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. \quad (1)$$

Значи, мораме да ги избереме сите овие 21 број, со тоа што некои од нив ќе ги замениме со нивните производи со броевите 2, 3, 5 и 7, или со нивните степени, кои се помали од 100. Сега, ако броевите 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 и 47 од (1) ги замениме со броевите

$$11\cdot 3^2 = 99, 13\cdot 5 = 65, 15\cdot 5 = 85, 19\cdot 3 = 57, 23\cdot 3 = 69,$$
$$29\cdot 2 = 58, 31\cdot 2 = 62, 37\cdot 2 = 74, \ 41\cdot 2 = 82, 43\cdot 2 = 86, 47\cdot 2 = 94,$$

доволно е да го додадеме бројот $7^2 = 49$. Така добиваме 22 броја чиј производ е делив со сите броеви помали од 100.

*Забелешка*. Постојат и други решенија. Обиди се да најдеш некои од нив.

24. Определи го бројот на природните броеви помали од 2015 кај кои збирот на цифрите е делив со 5?

**Решение.** Меѓу едноцифрените броеви има само еден таков број (бројот 5). Исто така меѓу броевите од 2010 до 2015 таков е само еден број (бројот 2012). Преостанатите броеви од 10 до 2009 можеме да ги распоредиме во 200 групи од по 10 последователни броја, при што најмалиот број во секоја група има цифра на единиците 0. Во секоја таква група од по 10 последователни броја има точно два броја чиј

збир на цифри е делив со 10 (Зошто?). Значи, бараниот број е 402.

25. На таблата се запишани два цели броеви чиј збир е делив со седум. Третиот број е еднаков на разликата на првиот и вториот, четвртиот – на разликата на вториот и третиот, петтиот – на разлика на третиот и четвртиот итн. Докажи дека збирот од квадратите на првите седум броја добиени на претходно опишаниот начин е делив со седум.

**Решение.** Нека првите два членови на низата се $a_1 = x, a_2 = y$. Нивниот збир е делив со 7, значи постои цел број $k$ за кој важи $x + y = 7k$. За останатите броеви добиваме:

$$a_3 = a_1 - a_2 = x - y,$$
$$a_4 = a_2 - a_3 = 2y - x,$$
$$a_5 = a_3 - a_4 = 2x - 3y,$$
$$a_6 = a_4 - a_5 = 5y - 3x,$$
$$a_7 = a_5 - a_6 = 5x - 8y.$$

Имаме:

$$\begin{aligned}
&a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = \\
&= x^2 + y^2 + (x-y)^2 + (2y-x)^2 + (2x-3y)^2 + (5y-3x)^2 + (5x-8y)^2 \\
&= 41x^2 - 128xy + 104y^2 \\
&= (42x^2 - 126xy + 105y^2) - (x^2 + 2xy + y^2) \\
&= 7(6x^2 - 18xy + 15y^2) - (x+y)^2 \\
&= 7(6x^2 - 18xy + 15y^2) - 49k^2 \\
&= 7(6x^2 - 18xy + 15y^2) - 7k^2)
\end{aligned}$$

од што следува тврдењето на задачата.

26. Докажи дека збирот на сите четирицифрени броеви во чии записи не се појавуваат цифрите 0 и 9 е делив со 101.

**Решение.** Нека $A$ е произволен четирицифрен број во чиј запис не се појавуваат цифрите 0 и 9. Тогаш $b = 9999 - a$ е број од истиот вид и притоа $a$ и $b$ се различни броеви (бидејќи бројот 9999 е непарен). Така, сите четирицифрени броеви во чиј запис не се појавуваат цифрите 0 и 9 може да се поделат по парови, при што збирот на два броја во секој пар е 9999. Значи, збирот на сите разгледувани броеви е делив со 9999, а како $9999 = 99 \cdot 101$, тој е делив со 101.

27. Докажи дека збирот на сите шестцифрени броеви во чии записи не се појавуваат цифрите 0 и 9 е делив со 407.

**Решение.** Нека $a$ е произволен шестцифрен број во чиј запис не се пјавуваат цифрите 0 и 9. Тогаш и бројот $b = 999999 - a$ го има истото својство и бидејќи 999999 е непарен број, броевите $a$ и $b$ се различни. Така, сите шестцифрени броеви во чии записи не се појавуваат цифрите 0 и 9 може да се разбијат во парови, при што збирот на броевите во секој пар е еднаков на 999999. Оттука следува дека збирот на сите разгледувани броеви е делив со

$999999 = 9 \cdot 111111 = 9 \cdot 111 \cdot 1001 = 9 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 407$,

па затоа е делив со 407.

28. Докажи дека меѓу три различни цели броеви секогаш постојат два, да ги означиме со $x$ и $y$, такви што бројот $xy(x^2 - y^2)$ е делив со 10.

**Решение.** Ако еден од броевите $x$ и $y$ е парен, тогаш производот $xy(x^2 - y^2)$ е парен. Ако двата броја се непарни, тогаш разликата $x^2 - y^2$ е парна. Значи, во секој случај бројот $xy(x^2 - y^2)$ е делив со 2. Останува да докажеме дека овој број е делив со 5. Ако еден од броевите е делив со 5, тогаш $xy(x^2 - y^2) = xy(x - y)(x + y)$ е делив со 5. Во спротивно, ако ниту еден од овие броеви не е делив со 5, заклучуваме дека цифрата на единиците на двата броја не е ниту 0 ниту 5. Ги разгледуваме множествата $A = \{1,4,6,9\}$ и $B = \{2,3,7,8\}$. Понатаму, дадени се три различни цели броја, па затоа од принципот на Дирихле следува дека кај два од нив цифрата на единиците припаѓа на едно од множествата $A$ или $B$. Сега, доволно е да забележиме дека за било кој пар цифри од овие множества важи дека нивниот збир или нивната разлика е делива со 5, што значи дека $xy(x^2 - y^2) = xy(x - y)(x + y)$ е делив со 5.

29. Нека $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ и $B = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1} + 2a_0$, т.е. $B$ се добива кога на $A$ ќе му се избрише цифрата на единиците $a_0$ и добиениот број ќе се собере со $2a_0$ На добиениот број се применува истата постапка се додека не се добие број $M$ кој не е поголем од 19. Докажи дека $A$ е делив со 19 ако и само ако $M = 19$.

**Решение.** Според условот на задачата број од видот $A=10x+a_0$ се заменува со број од видот $B=x+2a_0$. За секој број $10x+a_0>19$ важи $9x>a_0$, односно $10x+a_0>a+2a_0$, што значи дека во опишаната постапка во секој чекор бројот се намалува. Јасно, е дека бројот $10x+a_0$ е делив со 19 ако и само ако $20x+2a_0$ е делив со 19, т.е. ако и само ако $x+2a_0$ е делив со 19, од каде што следува тврдењето на задачата.

30. Нека $A=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ и $B=\overline{a_n a_{n-1}...a_1}-2a_0$, т.е. $B$ се добива кога на $A$ ќе му се избрише цифрата на единиците $a_0$ и од добиениот број ќе се одземе $2a_0$. Докажи дека $A$ е делив со 7 ако и само ако $B$ е делив со 7.

**Решение.** Според условот на задачата број од видот $A=10x+a_0$ се заменува со број од видот $B=x-2a_0$. Јасно, е дека бројот $10x+a_0$ е делив со 7 ако и само ако $20x+2a_0$ е делив со 7, т.е. ако и само ако $21x-x+2a_0$ е делив со 7, од каде што следува тврдењето на задачата.

31. Ако $x,y,z$ се цели броеви такви што $x-5y-8z=0$ докажи дека производот $(x-3z)(x+3y)$ е делив со 40.

**Решение.** Од $x-5y-8z=0$ следува $x-3z=5(y+z)$, па затоа бројот $x-3z$ е делив со 5. Од друга страна од $x-5y-8z=0$ следува $x+3y=8(y+z)$, па затоа бројот $x+3y$ е делив со 8. Конечно, производот $(x-3z)(x+3y)$ е делив со $5\cdot 8=40$.

32. Ако $n$ е цел број, тогаш $n^3-2008n$ е делив со 3. Докажи!

**Решение.** Имаме:

$$n^3-2008n=n^3-n-2007n=(n-1)n(n+1)-3\cdot 669n.$$

Бидејќи $(n-1)n(n+1)$ е производ на три последователни цели броеви, тој е делив со 3, па како $3\cdot 669n$ е делив со 3, заклучуваме дека $n^3-2008n$ е делив со 3.

33. Ако $x,y,z$ се цели броеви такви што $3x+7z=y$, докажи дека бројот $(y-4z)(4x+y)$ е делив со 21.

**Решение.** Од $3x+7z=y$ следува $y-4z=3(x+z)$, што значи дека $y-4z$ е делив со 3.Од друга страна од $3x+7z=y$ следува раенството $y+4x=7(x+z)$, што значи дека бројот $y+4x$ е делив со 7. Конечно, бидејќи $\text{NZD}(3,7)=21$, од претходните разгледувања следува дека производот $(y-4z)(4x+y)$ е делив со $3\cdot 7=21$.

34. Докажи дека $5\mid n^5+19n$ за секој природен број $n$.

**Решение.** Имаме

$$n^5+19n=n^5-n+20n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)+20n$$

и како $20n$ е делив со 5, доволно е да докажеме дека производот $n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ е делив со 5. Ако $n$ при делење со 5 дава остатоци 0, 1 или 4, тогаш $n, n-1$ односно $n+1$ е делив со 5. Ако $n$ при делење со 5 дава остатоци 2 или 3, тогаш $n^2+1$ е делив со 5.

35. Збирот на четири природни броја е $S$. Ако на првиот број му се додаде природниот број $k$, од вториот се одземе $k$, третиот се помножи со $k$, а четвртиот се подели со $k$ се добива еден ист број. Докажи, дека бројот $S$ е делив со бројот $(k+1)^2$.

**Решение.** Нека резултатот од наведените операции е природниот број $x$. Тогаш дадените броеви се: $x-k, x+k, x:k$ и $kx$. Според тоа,

$$S=x-k+x+k+\tfrac{x}{k}+kx=x(2+\tfrac{1}{k}+k)$$
$$=\tfrac{x(2k+1+k^2)}{k}=\tfrac{x(k+1)^2}{k},$$

од каде добиваме $kS=x(k+1)^2$. Сега, бидејќи $k$ и $k+1$ се заемно прости, од последното равенство следува дека $(k+1)^2\mid S$.

36. Докажи дека $3^{2n+1}+2^{n+2}$ е делив со 7 за секој природен број $n$.

**Решение.** Имаме:

$$3^{2n+1}+2^{n+2}=3\cdot 9^n+4\cdot 2^n=3(9^n-2^n)+7\cdot 2^n.$$

Ако ја искористиме позната формула:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

во чија точност се уверуваме со непосреднбо множење на полиномите на десната страна, добиваме

$$3^{2n+1}+2^{n+2}=3\cdot 9^n+4\cdot 2^n=3(9^n-2^n)+7\cdot 2^n$$
$$=3\cdot(9-2)(9^{n-1}+9^{n-2}\cdot 2+\ldots+9\cdot 2^{n-2}+2^{n-1})+7\cdot 2^n$$
$$=7\cdot(3\cdot(9^{n-1}+9^{n-2}\cdot 2+\ldots+9\cdot 2^{n-2}+2^{n-1})+2^n),$$

што значи $7\mid 3^{2n+1}+2^{n+2}$, за секој природен број $n$.

37. Докажи дека $3^{2n+3}+6\cdot 3^{n+2}+27$ е делив со 108 за секој природен број $n$.

**Решение.** Имаме:

$$3^{2n+3}+6\cdot 3^{n+2}+27=3^3\cdot 3^{2n}+2\cdot 3\cdot 3^2\cdot 3^n+3^2$$
$$=3^3(3^{2n}+2\cdot 3^n+1)$$
$$=27\cdot(3^n+1)^2.$$

Сега, бидејќи $3^n+1$ е парен број, бројот $(3^n+1)^2$ е делив со 4, па затоа $3^{2n+3}+6\cdot 3^{n+2}+27$ е делив со $4\cdot 27=108$.

38. Докажи дека бројот $6^{2n+2}-2^{n+3}\cdot 3^{n+2}+36$ е делив со 900 за секој природен број $n$.

**Решение.** Имаме:

$$6^{2n+2}-2^{n+3}\cdot 3^{n+2}+36=36\cdot(6^{2n}-2^{n+1}\cdot 3^n+1)$$
$$=36\cdot((6^n)^2-2\cdot 6^n+1)$$
$$=36\cdot(6^n-1)^2.$$

Цифрата на единиците на бројот $6^n-1$ е 5, па затоа тој е делив со 5, што значи дека бројот $(6^n-1)^2$ е делив со 25. Конечно, за секој природен број $n$ бројот $6^{2n+2}-2^{n+3}\cdot 3^{n+2}+36$ е делив со $36\cdot 25=900$.

39. Докажи дека не постои природен број $a$ таков што броевите $5a+9$ и $2a+3$ се деливи со 13.

**Решение.** Ако броевите $5a+9$ и $2a+3$ се деливи со 13, тогаш $3(2a+3)-(5a+9)=a$ е делив со 13. Но, сега $2a+3$ при делење со 13 ќе дава остаток 3, што е противречност.

40. Нека $x$ и $y$ се цели броеви такви што бројот $6x+11y$ е делив со 31.

Докажи дека бројот $x+7y$ е делив со 31.

**Решение.** Бидејќи $6(x+7y)=(6x+11y)+31y$ и бројот $6x+11y$ е делив со 31, заклучуваме дека бројот $6(x+7y)$ еделив со 31. Но, $\text{NZD}(6,31)=1$, па затоа бројот $x+7y$ е делив со 31.

41. Ако $a^2-5ab+b^2$ е делив со 7, докажи дека $a^2-b^2$ е делив со 7.

**Решение.** Имаме $(a+b)^2=a^2-5ab+b^2+7ab$, па од условот на задачата следува дека $(a+b)^2$ е делив со 7. Но, 7 е прост број, па затоа $a+b$ е делив со 7. Конечно, од $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ е делив со 7.

42. Ако $x^2-9xy+y^2$ е делив со 11, докажи дека $x^2-y^2$ е делив со 11.

**Решение.** Имаме

$$x^2-9xy+y^2=x^2+2xy+y^2-11xy=(x+y)^2-11xy.$$

Сега, од $11|(x^2-9xy+y^2)$ и $11|11xy$ следува $11|(x+y)^2$. Но, 11 е прост број, па од $11|(x+y)^2$ следува $11|(x+y)$, т.е. $11|(x+y)(x-y)$, односно $11|x^2-y^2$.

43. Збирот на три природни броја, кои се точни квадрати, е делив со 9. Докажи дека меѓу овие броеви постојат два броја чија разлика е делива со 9.

**Решение.** Точен квадрат при делење со 9 може да даден само еден од следниве остатоци: 0, 1, 4 и 7. Очигледно дека збирот на три различни од наведените остатоци не е делив со 9. Според тоа, некои два од трите квадрати при делење со 9 даваат ист остаток, што значи дека нивната разлика е делива со 9.

44. Колку има природни броеви $n$ за кои бројот $23^4-17^4$ е делив со бројот $2^n$?

**Решение.** Имаме:

$$23^4-17^4=(23^2-17^2)(23^2+17^2)=(23-17)(23+17)(23^2+17^2)$$
$$=6\cdot 40\cdot 818=2\cdot 3\cdot 2^3\cdot 5\cdot 2\cdot 409=2^5\cdot 3\cdot 5\cdot 409.$$

Според тоа, $23^4-17^4$ е делив со $2^n$ за $n\in\{1,2,3,4,5\}$. Значи, вкупно

има 5 такви броеви.

45. Определи го најмалиот природен број $n$ за кој бројот $2^n$ не е делител на бројот $51^4 - 19^4$.

**Решение.** Имаме,

$$51^4 - 19^4 = (51^2 - 19^2)(51^2 + 19^2) = (51-19)(51+19)(51^2 + 19^2)$$
$$= 32 \cdot 70 \cdot 2962 = 2^5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1481 = 2^7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1481,$$

од каде што следува дека $n = 8$ е најмалиот природен број за кој $2^n$ не е делител на бројот $51^4 - 19^4$.

46. Докажи дека збирот $1^{2008} + 2^{2008} + 3^{2008} + 4^{2008} + 5^{2008} + 6^{2008}$ е делив со 5.

**Решение.** Важи $1^{2008} = 1$, т.е. цифрата на единиците на бројот $1^{2008}$ е 1 и цифрата на единиците на бројот $5^{2008}$ е 5.

Понатаму, од

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, ...$$
$$3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 5^5 = 243, 3^6 = 729, ...$$

и фактот дека $4 \mid 2008$ следува дека цифрата на единиците на бројот $2^{2008}$ е еднаква на 6, а цифрата на единиците на бројот $3^{2008}$ е еднаква на 1. Сега, од

$$4^1 = 4, 4^2 = 16, 4^3 = 64, 4^4 = 256, ...$$
$$6^1 = 6, 6^2 = 36, 6^3 = 216, ...$$

заклучуваме дека сите парни степени на бројот 4 имаат цифра на единици 6, па така цифрата на единиците на бројот $4^{2008}$ е 6 и очигледно цифрата на единиците на бројот $6^{2008}$ е 6. Според тоа, цифрата на единиците на збирот

$$1^{2008} + 2^{2008} + 3^{2008} + 4^{2008} + 5^{2008} + 6^{2008}$$

е еднаква на цифрата на единиците на збирот $1 + 6 + 1 + 6 + 5 + 6 = 25$. Оттука следува дека бараниот збир е делив со 5.

47. Нека

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 2007^3 + 2008^3.$$

Докажи дека 6 не е делител на $S$.

**Решение**. За секој природен број $n$ важи $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$. Понатаму, производ на три последователни броја е делив со 3 и е делив со 2, па затоа е делив со 6. Значи, $n^3 - n$ е делив со 6 за секој $n = 1, 2, ..., 2008$, па затоа

$$S - \sum_{n=1}^{2008} n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 207^3 + 2008^3 - (1 + 2 + ... + 2007 + 2008) +$$
$$= (1^3 - 1) + (2^3 - 2) + ... + (2007^3 - 2007) + (2008^3 - 2008)$$
$$= 6M,$$

за некој природен број $M$. Оттука следува дека

$$S = S - \sum_{n=1}^{2008} n + \sum_{n=1}^{2008} n = 6M + \frac{2008 \cdot 2009}{3} = 6M + 1004 \cdot 2009$$

не е делив со 6, бидејќи во производот $1004 \cdot 2009$ ниту еден од множителите не е делив со 3.

48. Докажи дека изразот $3^{2020} - 1$ е делив со 80.

**Решение.** *Прв начин*. Имаме

$$3^{2020} - 1 = (3-1)(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{2018} + 3^{2019})$$
$$= 2 \cdot [(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + ...$$
$$+ (3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019})]$$
$$= 2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3)(1 + 3^4 + ... + 3^{2016})$$
$$= 2 \cdot 40 \cdot (1 + 3^4 + ... + 3^{2016})$$
$$= 80 \cdot (1 + 3^4 + ... + 3^{2016}),$$

т.е. $80 \mid 3^{2020} - 1$.

*Втор начин*. Имаме:

$$3^{20} - 1 = (3^4)^{505} - 1 = (3^4 - 1)((3^4)^{504} + (3^4)^{503} + ... + 3^4 + 1)$$
$$= 80 \cdot ((3^4)^{504} + (3^4)^{503} + ... + 3^4 + 1),$$

т.е. $80 \mid 3^{2020} - 1$.

*Трет начин*. Имаме:

$$3 \equiv 3 \pmod{80}$$
$$3^2 \equiv 9 \pmod{80}$$

$$3^3 \equiv 27 (\mathrm{mod}\, 80)$$
$$3^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 80)$$
$$(3^4)^{505} \equiv 1^{505} = 1 (\mathrm{mod}\, 80)$$

т.е. $3^{2020} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 80)$, што значи $80 \mid 3^{2020} - 1$.

49. Докажи дека бројот $2^{2022} + 6$ е делив со 7.

**Решение.** Имаме

$$2^1 = 7 \cdot 0 + 2,$$
$$2^2 = 7 \cdot 0 + 4,$$
$$2^3 = 7 \cdot 1 + 1,$$
$$2^4 = 7 \cdot 2 + 2,$$
$$2^5 = 7 \cdot 4 + 4,$$
$$2^6 = 7 \cdot 9 + 1,$$
$$2^7 = 7 \cdot 18 + 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Значи, броевите $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, \ldots$ при делење со 7 даваат остатоци 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, ..., соодветно, кои периодично се повторуваат по секој трет член. Забележуваме дека секој степен чиј степенов показател е делив со три, при делење со 7 дава остаток 1. Бидејќи $2022 = 3 \cdot 674$ следува дека $2^{2022}$ при делење со 7 дава остаток 1, т.е. $2^{2022} = 7k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Според тоа, $2^{2022} + 6 = 7k + 7 = 7(k + 1)$, т.е. $7 \mid 2^{2022} + 6$.

50. Определи го бројот на природните броеви $n$ поголеми од 2, а помали од 2024 такви што вредноста на изразот $6^n + 7^n + 8^n - 789$ е делива со 10?

**Решение.** Цифрата на единиците на бројот $6^n$ е 6. Понатаму, цифрата на единиците на бројот $7^n$ редоследно е 7, 9, 3 и 1, по што периодично се повторуваат, а цифрата на единиците на бројот $8^n$ редсоледно е 8, 4, 2 и 6, по што периодично се повторуваат. Значи, цифрата на единиците на бројот $6^n + 7^n + 8^n$ редоследно е 1, 9, 1, 3, по што

периодично се повторуваат. За да бројот $6^n+7^n+8^n-789$ е делив со 10 потребно и доволно е цифрата на единиците на бројот $6^n+7^n+8^n$ да е 9. Бидејќи $n>2$, добиваме $n\in\{6,10,14,18,...,2022\}$, т.е. $n=4k+2$ каде $1\le k\le 505$. Значи, бараниот број броеви е 505.

51. Определи го најмалиот природен број $n$ за кој бројот

$$n^3+5n^2+25n+125$$

е делив со 89.

**Решение.** Имаме,

$$n^3+5n^2+25n+125=n^2(n+5)+25(n+5)=(n+5)(n^2+25).$$

Бројот 89 е прост број, па затоа $n^3+5n^2+25n+125$ ќе биде делив со 89 ако $n^2+25$ или $n+5$ е делив со 89. Најмалиот природен број $n$ за кој еден од множителите $n^2+25$ или $n+5$ е делив со 89 е $n=8$, бидејќи $n^2+25=8^2+25=89$.

52. Докажи дека збирот $261^{2008}+609^{2008}$ е делив со $2\cdot 29^{2008}$.

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned}261^{2008}+609^{2008}&=(29\cdot 9)^{2008}+(29\cdot 21)^{2008}\\&=29^{2008}\cdot 9^{2008}+29^{2008}\cdot 21^{2008}\\&=29^{2008}\cdot(9^{2008}+21^{2008}),\end{aligned}$$

и како $9^{2008}+21^{2008}$ е парен број, добиваме дека $261^{2008}+609^{2008}$ е делив со $2\cdot 29^{2008}$.

53. Определи ги сите природни броеви $n$ помали од 100 за кои $\sqrt{\frac{n+30}{n-30}}$ исто така е природен број.

**Решение.** Нека $\sqrt{\frac{n+30}{n-30}}=x,\ x\in\mathbb{N}$. Тогаш $\frac{n+30}{n-30}=x^2$, од каде добиваме

$$n=\frac{30x^2+30}{x^2-1}=\frac{30x^2-30+60}{x^2-1}=30+\frac{60}{x^2-1}.$$

Сега, од $n\in\mathbb{N}$ следува $\frac{60}{x^2-1}\in\mathbb{N}$, од каде следува

$$x^2-1\in\{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\},$$

односно $x^2 \in \{2,3,4,5,6,7,11,13,16,21,31,61\}$. Но, $x \in \mathbb{N}$, па оттука следува $x^2 = 4$ и $x^2 = 16$. За $x^2 = 4$ добиваме $n = 30 + \frac{60}{4-1} = 50$, а за $x^2 = 16$ добиваме $n = 30 + \frac{60}{16-1} = 34$.

54. Определи ги сите вредности на природниот број $n, n \geq 4$ такви што

$$\frac{3n^2-2n+50}{3n-2} \notin \mathbb{N} \text{ и } \frac{n^3-3}{n-3} \in \mathbb{N}.$$

**Решение.** Имаме $\frac{3n^2-2n+50}{3n-2} = \frac{n(3n-2)+50}{3n-2} = n + \frac{50}{3n-2}$. Затоа за да дропката не е природен број потребно е $3n-2$ да не е делител на 50, односно $3n-2 \notin \{1,2,5,10,25,50\}$, па како $n \geq 4$, добиваме $n \in \{4,9\}$. Понатаму, важи $\frac{n^3-3}{n-3} = \frac{n^3-3n^2+3n^2-9n+9n-27+27-3}{n-3} = n^2+3n+9+\frac{24}{n-3}$. За да оваа дропка е природен број потрено е $n-3$ да е делител на 24, односно $n \in \{4,5,6,7,9,11,15,27\}$. Конечно, бараните броеви се $n \in \{5,6,7,11,15,27\}$.

55. Определи ги сите природни броеви $x$ и $y$ за кои $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}$ и $\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ се природни броеви, а разликата $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}} - \sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ е точен квадрат на природен број.

**Решение.** Според условот на задачата $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}$ и $\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ се природни броеви, па затоа треба $\frac{x^2+20}{x^2-20}$ и $\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}} = \frac{5y^3+24}{5y^3-24}$ да се точни квадрати на природни броеви.
Имаме,

$$\frac{x^2+20}{x^2-20} = \frac{x^2-20+40}{x^2-20} = 1 + \frac{40}{x^2-20},$$

од каде, бидејќи $x^2-20 > 0$, следува дека $x^2 = 20+k$, каде $k \mid 40$. Јасно, $k \in \{1,2,4,5,8,10,20,40\}$ и со непосредна проверка добиваме

само за $k=5$ десната страна на последното равенство е точен квадрат и притоа $x=5$ и $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}=3$.

Од друга страна, $\frac{5y^3+24}{5y^3-24}=1+\frac{48}{5y^3-24}$, од каде, бидејќи $5y^3-24>0$, следува $y^3=\frac{24+m}{5}$, каде $m\mid 48$. Јасно $m\in\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$ и со непосредна проверка добиваме дека само за $m=16$ десната страна на последното равенство е точен куб и притоа $y=2$ и

$$\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}=\sqrt{\frac{5y^3+24}{5y^3-24}}=2.$$

Конечно, бидејќи

$$\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}-\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}=3-2=1^2,$$

добиваме дека единствени природни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се $x=5$ и $y=2$.

56. Колку различни делители сметајќи ги 1 и самиот број има бројот $n=2^7\cdot 3^5\cdot 7^2$?

**Решение.** Бројот $2^7$ има 8 делители: $1,2,2^2,2^3,...,2^7$. Бројот $3^5$ има 6 делители: $1,3,3^2,...,3^5$, а бројот $7^2$ има 3 делители: $1,7,7^2$. Конечно, од принципот на производ следува дека бројот $n=2^7\cdot 3^5\cdot 7^2$ има $8\cdot 6\cdot 3=144$ делители.

57. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 12 и кој има 12 делители.

**Решение.** Броеви деливи со 12, т.е. содржатели на бројот 12 се: 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

Од $12=2^2\cdot 3$ следува дека бројот 12 има $(2+1)(1+1)=6$ делители.

Од $24=2^3\cdot 3$ следува дека бројот 24 има $(3+1)(1+1)=8$ делители.

Од $36=2^2\cdot 3^2$ следува дека бројот 36 има $(2+1)(2+1)=9$ делители.

Од $48=2^4\cdot 3$ следува дека бројот 48 има $(4+1)(1+1)=10$ делители.

Од $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ следува дека бројот 60 има $(2+1)(1+1)(1+1)=12$

делители.
Конечно, бараниот број е 60.

58. Определи ги сите прости броеви кои може да се претстават како збир на два последователни природни броја.
**Решение.** Нека $p$ е прост број. Ако $p=2$, тогаш единствено претставување како збир на два природни броја е $2=1+1$, т.е. не може да се претстави како збир на два последователни природни броја. Понатаму $p=3=1+2$, т.е. $p=3$ може да се претстави како збир на два последователни природни броја. Сега нека $p$ е прост број и $p>3$. Тогаш $p=6k-1$ или $p=6k+1$, за некој $k\in\mathbb{N}$. Ако $p=6k-1$, $k\in\mathbb{N}$, тогаш $p=(3k-1)+3k$, $k\in\mathbb{N}$ па затоа може да се претстави како збир на два последователни природни броја. Ако $p=6k+1$, $k\in\mathbb{N}$, тогаш $p=3k+(3k+1)$, $k\in\mathbb{N}$ па затоа може да се претстави како збир на два последователни природни броја. Според тоа, прост број поголем од 2 може да се претстави како збир на два последователни природни броја.

59. Колку има прости броеви кои не може да се запишат како збир на три различни сложени броеви?
**Решение.** Бидејќи најмалите три различни сложени броеви се 4, 6 и 8, заклучуваме дека ниту еден прост број помал од 18 не може да се запише како збир на три различни сложени броја. Тоа се простите броеви: 2, 3, 5, 7, 11, 13 и 17. За простиот број 19 имаме $19=4+6+9$. Бидејќи секој следен прост број е непарен, тој може да се прикаже како збир на сложените броеи 6, 9 и уште еден парен број поголем 6, што значи дека сите прости броеви поголеми од 17 може да се претстават како збир на три различни сложени броеви. Значи, само седум прости броеви не може да се запишат како збир на три различни сложени броеви.

60. Докажи дека постојат најмногу три прости броја меѓу 10 и $10^{10}$ во чиј декаден запис се појавува само цифрата 1.
**Решение.** Во дадениот интервал има девет броеви во чиј запис се појавува само цифрата 1. Ако бројот на цифрите е парен и е поголем од 2, тогаш бројот е делив со 11, што значи дека е сложен број. Ако е бројот на цифрите делив со 3, тогаш бројот е делив со 3, т.е. е сложен

број. Според тоа, меѓу дадените броеви има најмалку шест сложени и тоа: 111, 1111, 111111, 11111111, 111111111 и 1111111111. Значи, во дадениот интервал најмногу три броја од дадениот вид може да се прости.

*Забелешка*. Во дадениот интервал само еден од броевите од наведениот вид е прост и тоа е бројот 11. Имено, важи $1111 = 41 \cdot 271$ и $1111111 = 239 \cdot 4649$, т.е. овие два броја се сложени.

61. Производот на три последователни непарни броја е пет пати помал од бројот $\overline{BABABA}$. Кои се тие броеви?

**Решение.** Имаме,

$$\overline{BABABA} = \overline{BA} \cdot 10101 = \overline{BA} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = \overline{BA} \cdot 7 \cdot 37 \cdot 39,$$

па затоа $(\overline{BA} \cdot 7) : 5$ е еднакво на 35 или 41. Но, бројот 41 не е делив со 7, па затоа $(\overline{BA} \cdot 7) : 5 = 35$, т.е. $\overline{BA} = 25$. Значи, бараните броеви се 35, 37 и 39.

62. Производот на пет последователни природни броеви е 120 пати поголем од бројот $\overline{ABABAB}$. Кои се тие броеви?

**Решение.** Имаме

$$120 \cdot \overline{ABABAB} = 120 \cdot \overline{AB} \cdot 10101 = \overline{AB} \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$$

Понатаму, бидејќи 37 е прост број бараните пет последователни природни броеви мора да го содржат бројот, 37, еден од нив да е делив со 7 и еден да е делив со 13. Од ова следува дека еден од бараните броеви е 37, друг е 35 и трет е 39 (Зошто?). Значи, бараните броеви се 35, 36, 37, 38 и 39 и притоа важи

$$120 \cdot \overline{ABABAB} = \overline{AB} \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 13 = 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39,$$

па затоа $\overline{AB} = 3 \cdot 19 = 57$.

63. Дали постојат различни прости броеви $p, q, r$ такви што:

a) бројот $p$ е аритметичка средина на броевите $q$ и $r$,

b) бројот $\sqrt{p}$ е аритметичка средина на броевите $\sqrt{q}$ и $\sqrt{r}$.

**Решение.** a) Постојат. На пример, 13 е аритметичка средина на броевите 3 и 23.

b) Нека $\sqrt{p} = \frac{\sqrt{q}+\sqrt{r}}{2}$. Тогаш последователно добиваме

$$2\sqrt{p} = \sqrt{q} + \sqrt{r},$$
$$4p = q + 2\sqrt{qr} + r,$$
$$4p - q - r = 2\sqrt{qr},$$

што не е можно бидејќи левата страна во последното равенство е рационален број, а десната е ирационален број. Од добиената противречност следува дека не постојат различни прости броеви $p, q, r$ такви што бројот $\sqrt{p}$ е аритметичка средина на броевите $\sqrt{q}$ и $\sqrt{r}$.

64. Докажи дека не постои рационален број чиј квадрат е еднаков на 7.

**Решение.** Нека претпоставиме дека постои рационален број $\frac{a}{b}$, $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$ таков што $(\frac{a}{b})^2 = 7$. Според тоа, $\frac{a^2}{b^2} = 7$, од каде добиваме $a^2 = 7b^2$. Според тоа, $7 \mid a^2$ и како 7 е прост број заклучуваме дека $7 \mid a$, односно $a = 7k$, за некој $k \in \mathbb{N}$. Со замена во $a^2 = 7b^2$ добиваме $49k^2 = 7b^2$, од каде следува $b^2 = 7k^2$. Аналогно како погоре добиваме дека $b = 7m$, за некој $m \in \mathbb{N}$. Но, тоа значи дека $1 = \mathrm{NZD}(a,b) = \mathrm{NZD}(7k, 7m) \geq 7$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

65. Бројот 2012 запиши го како збир на квадрати на четири природни броја.

**Решение.** Нека $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2012$. Од $a^2 \leq 2012$ следува $a \leq 44$. За $a = 44$ добиваме $b^2 + c^2 + d^2 = 76$. Значи, $b^2 \leq 76$, па затоа $b \leq 8$. За $b = 8$ добиваме $c^2 + d^2 = 12$, што не е можно во множеството природни броеви. На потполно идентичен начин се покажува дека за ниту еден $b \leq 8$ не е можно да се најдат $c$ и $d$ такви што ќе важи $b^2 + c^2 + d^2 = 76$.

Нека $a = 43$. Тогаш $b^2 + c^2 + d^2 = 163$, односно $b \leq 12$. Лесно се добива дека за $b = 9$, а потоа $c = 9$ и $d = 1$ важи $9^2 + 9^2 + 1^2 = 163$. Конечно, $43^2 + 9^2 + 9^2 + 1^2 = 2012$ е едно решение на задачата.

66. Определи ги сите природни броеви $\overline{ab}$ за кои важи $\overline{ab}+\overline{ba}=n^2$, каде $n\in\mathbb{N}$.

**Решение.** Имаме $\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11(a+b)$, од каде следува $11(a+b)=n^2$. Бидејќи $a$ и $b$ се цифри важи $a+b\le 18$. Од друга страна 11 е прост број, па затоа $11(a+b)=n^2$ ако и само ако $a+b=11$. Бараните броеви се: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

67. Определи ги сите двоцифрени броеви $\overline{ab}$ за кои важи $\overline{ab}-\overline{ba}=n^2$, каде $n\in\mathbb{N}$.

**Решение.** Од $n^2>0$ следува $\overline{ab}>\overline{ba}$, односно $a>b$. Имаме

$$\overline{ab}-\overline{ba}=10a+b-(10b+a)=9(a-b).$$

Сега, бидејќи $9(a-b)=n^2$, потребно е $9(a-b)$ да е точен квадрат, што значи $a-b$ да е точен квадрат. Оттука следува $a-b\in\{1,4,9\}$. За $a-b=1$,т.е. $a=b+1$ бараните броеви се 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87 и 98. За $a-b=4$, т.е. $a=b+4$ бараните бреов се 40, 51, 62, 73, 84 и 95. За $a-b=9$ едонствено решение е бројот 90.

68. Определи ги сите трицифрени броеви кои се 25 пати поголеми од збирот на своите цифри.

**Решение.** Нека бараниот трицифрен број е $\overline{abc}$ ($a,b,c$ се цифри и $a\neq 0$). Имаме $100a+10b+c=25(a+b+c)$, од каде ја добиваме еквивалентната равенка $5(5a-b)=8c$. Од последната равенка следува $5\mid c$ и затоа $c=0$ или $c=5$.

1) Ако $c=0$, тогаш $5a-b=0$, т.е. $b=5a$ и како $a\neq 0$ единствено решение е $a=1, b=5$. Значи, бараниот број е $150=25\cdot(1+5+0)$.
2) Ако $c=5$, тогаш $5a-b=8$. Последната равенка има две решенија тоа:
   - $a=2, b=2, c=5$, па бараниот број е $225=25\cdot(2+2+5)$,
   - $a=3, b=7, c=5$, па бараниот број е $375=25\cdot(3+7+5)$.

69. Определи ги сите природни броеви кои се 17 пати поголеми од збирот на своите цифри.

**Решение.** Нека бараниот број е двоцифрен, $\overline{ab}$. Тогаш треба да важи

$10a+b=17(a+b)$, т.е. $7a+16b=0$, од каде добиваме $a=b=0$, што не е можно. Нека бараниот број е четирицифрен, $\overline{abcd}$. Тогаш треба да важи $1000\le 1000a+100b+10c+d=17(a+b+c+d)\le 17\cdot 36=612$, што не е можно. Значи, бараниот број е трицифрен, $\overline{abc}$. Тогаш имаме $100a+10b+c=17(a+b+c)$, од каде добиваме $83a=7b+16c$. Јасно, $a<3$, бидејќи во спротивно $83a\ge 83\cdot 3=249>207=7\cdot 9+16\cdot 9$. Со непосредна проверка на сите броеви деливи со 17 кои се поголеми од 100 и се помали од 207, колку што е најголемата можна вредност на десната страна на $83a=7b+16c$ се добива дека единствено решение е бројот 153.

70. Збирот на производот и збирот на два природни броја е еднаков на 1000. Кои се тие броеви?

**Решение.** Нека бараните броеви се $x$ и $y$, при што $x\le y$. Според условот на задачата $xy+(x+y)=1000$, што последователно е еквивалентно со

$$(x+1)(y+1)=1001,$$
$$(x+1)(y+1)=7\cdot 11\cdot 13,$$

при услов $x+1>1,\ y+1>1,\ x+1\le y+1$. Оттука добиваме

1) $x+1=7,\ y+1=143$, односно $x=6,\ y=142$,
2) $x+1=11,\ y+1=91$, односно $x=10,\ y=90$,
3) $x+1=13,\ y+1=77$, односно $x=12,\ y=76$.

71. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=1000.$$

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\le y\le z$. Тогаш дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките:

$$(x+1)(y+1)(z+1)=1001,$$
$$(x+1)(y+1)(z+1)=7\cdot 11\cdot 13.$$

Сега, од $x+1>1,\ y+1>1,\ z+1>1$ и $x+1\le y+1\le z+1$, добиваме

$$x+1=7,\ y+1=11,\ z+1=13,\text{ т.е. } x=6,\ y=10,\ z=12.$$

72. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 - y^2 = 2008.$$

**Решение.** Последователно добиваме

$$x^2 - y^2 = 2008,$$
$$(x-y)(x+y) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 251.$$

Бидејќи $x$ и $y$ се природни броеви, важи $x+y > x-y$, па од последното равенство следува:

1) $x+y = 2008$ и $x-y = 1$, што не е можно бидејќи броевите $x+y$ и $x-y$ имаат иста парност,
2) $x+y = 1004$ и $x-y = 2$, од каде добиваме $x = 553,\ y = 551$,
3) $x+y = 502$ и $x-y = 4$, од каде добиваме $x = 253,\ y = 249$,
4) $x+y = 251$ и $x-y = 8$, што не е можно бидејќи броевите $x+y$ и $x-y$ имаат иста парност.

73. Дали постојат природни броеви $x$ и $y$ такви што $x^2 - y^2 = 2019$?

**Решение.** Имаме

$$(x-y)(x+y) = 2019.$$

Бројот 2019 има четири делители: 1, 3, 673 и 2019 и како во множеството природни броеви важи $x+y > x-y$, можни се два случаја:

1) $x+y = 2019,\ x-y = 1$, од каде добиваме $x = 1010,\ y = 1009$.
2) $x+y = 673,\ x-y = 3$, од аде добиваме $x = 338,\ y = 335$.

Значи, равенката $x^2 - y^2 = 2019$ има решенија во множеството природни броеви, па значи бараните природни броеви постојат.

74. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$(x+y-1)^2 - (x-y+1)^2 = 16.$$

**Решение.** Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$(x+y-1-x+y-1)(x+y-1+x-y-1) = 16$$
$$(2y-2)2x = 16,$$
$$x(y-1) = 4.$$

Според тоа, решенија на дадената равенка се:

$$(x,y) = (1,4);\ (4,2);\ (-1,-3);\ (-4,0);\ (2,3);\ (-2,-1).$$

75. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$xy + x + y = 2008 .$$

**Решение.** Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенката

$$\begin{aligned} &xy + x + y = 2008, \\ &xy + x + y + 1 = 2009, \\ &x(y+1) + (y+1) = 2009, \\ &(x+1)(y+1) = 7 \cdot 7 \cdot 41. \end{aligned}$$

Од последната равенка последователно добиваме:

$x+1=1,\ y+1=2009$, па затоа $x=0,\ y=2008$,

$x+1=7,\ y+1=287$, па затоа $x=6,\ y=286$,

$x+1=41,\ y+1=49$, па затоа $x=40,\ y=49$,

$x+1=49,\ y+1=41$, па затоа $x=49,\ y=40$,

$x+1=287,\ y+1=7$, па затоа $x=286,\ y=6$,

$x+1=2009,\ y+1=1$, па затоа $x=2008,\ y=0$.

Бидејќи $x$ и $y$ се природни броеви решенијата се;

$$x=6,\ y=286;\ x=40,\ y=49;\ x=49,\ y=40 \text{ и } x=286,\ y=6 .$$

76. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 - 6x + 4y^2 - 4y + 5 = 0 .$$

**Решение.** Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$x^2 - 6x + 9 + 4y^2 - 4y + 1 = 5 ,$$

т.е. на равенката

$$(x-3)^2 + (2y-1)^2 = 5 .$$

Бидејќи бројот 5 како збир на два квадрати може да се запише на единствен начин и тоа $1^2 + 2^2 = 5$, а бројот $2y-1$ е непарен од последната равенка следува $(2y-1)^2 = 1$ и $(x-3)^2 = 4$. Според тоа, $2y-1 = \pm 1$ и $x-3 = \pm 2$, од каде ги добиваме решенијата $(1,1)$, $(1,0)$, $(5,0)$ и $(5,1)$.

77. Определи ги сите природни броеви $n$ за кои бројот $\frac{324}{n^2}$ е точен квадрат на природен број.

**Решение.** За да бројот $\frac{324}{n^2}$ е природен број, потребно е $n^2$ да биде делител на 324. Бидејќи $324=18^2=(2\cdot 3^2)^2$ заклучуваме дека делители на бројот 324 кои се квадрати на некои природни броеви се: 1, 4, 9, 36, 81 и 324. Со непосредна проверка добиваме дека за секој $n^2\in\{1,4,9,36,81,324\}$ исто така важи $\frac{324}{n^2}\in\{1,4,9,36,81,324\}$, па затоа бараните броеви се $n\in\{1,2,3,6,9,18\}$.

78. Определи ги сите природни броеви $n$ за кои бројот $\frac{45}{n-45}$ е точен квадрат на природен број.

**Решение.** Имаме $\frac{45}{n-45}=m^2$ за некој природен број $m$, од каде добиваме $\frac{45}{m^2}=n-45$, односно $n=45+\frac{45}{m^2}$. Бидејќи $n$ е природен број, добиваме дека $\frac{45}{m^2}$ е природен број, од каде следува $m^2\mid 45$. Делители на бројот 45 се броевите 1, 3, 5, 9, 15 и 45, од кои само 1 и 9 се точни квадрати на природен број. Според тоа, $m^2=1$ или $m^2=9$, од каде добиваме $m=1$ или $m=3$. Конечно, решенија на задачата се

$$n=45+\frac{45}{1^2}=90 \text{ и } n=45+\frac{45}{3^2}=50.$$

79. Определи ги сите природни броеви $n$ за кои дропката $\frac{5n+23}{n+3}$ е цел број.

**Решение.** Имаме

$$\frac{5n+23}{n+3}=\frac{5n+15+8}{n+3}=\frac{5(n+3)+8}{n+3}=\frac{5(n+3)}{n+3}+\frac{8}{n+3}=5+\frac{8}{n+3}.$$

Според тоа, вредноста на дадената дропка е цел број ако и само ако вредноста на $\frac{8}{n+3}$. Но, $\frac{8}{n+3}$ е цел број ако и само ако $n+3$ е делител на 8. Значи, $n+3\in\{-8,-4,-2,-1,1,2,4,8\}$, т.е.

$$n\in\{-11,-7,-5,-4,-2,-1,1,5\}.$$

Но, $n$ треба да е природен број, па затоа $n=1$ или $n=5$.

80. Определи ги простиот број $p$ и природниот број $n$ за кои важи

$$1+2+\ldots+n=p.$$

**Решение.** Од $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ следува $\frac{n(n+1)}{2}=p$, од каде добиваме $n(n+1)=2p$.

Ако $n>3$, тогаш еден од броевите $n$ и $n+1$ е парен број поголем од 2, па затоа $n(n+1)=2kl$, каде $k,l\geq 2$. Според тоа, $2kl=2p$, односно $p=kl$, каде $k,l\geq 2$, што значи дека $p$ не е прост број.

Ако $n=2$, $2p=2(2+1)$, т.е. $p=3$ и ова е едно решение.

Ако $n=1$, тогаш $2p=1(1+1)$, т.е. $p=1$ и во овој случај немаме решение.

Конечно, единствено решение е $n=2,\ p=3$.

81. Определи ги сите цели броеви $x$ и $y$ такви што $x^2+y^4=2x$.

**Решение.** Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$x^2-2x+1+y^4=1,$$
$$(x-1)^2+y^4=1.$$

Од последната равенка следува дека

$$(x-1)^2=1,\ y^4=0 \text{ или } (x-1)^2=0,\ y^4=1.$$

Во првиот случај се добиваат решенијата $(x,y)=(0,0);(2,0)$, а во вториот случај се добиваат решенијата $(x,y)=(1,1);(1,-1)$.

82. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2=2y-2x-1.$$

**Решение.** Дадената равенка е еквивалетна на равенката

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1.$$

Од последната равенка следува

$$(x+1)^2=0,(y-1)^2=1 \text{ или } (x+1)^2=1,(y-1)^2=0.$$

Од $(x+1)^2=0,(y-1)^2=1$ ги добиваме решенијата $(x,y)=(-1,2)$ и $(x,y)=(-1,0)$, а од $(x+1)^2=1,(y-1)^2=0$ ги добиваме решенијата $(x,y)=(0,1)$ и $(x,y)=(-2,1)$.

83. Определи ги сите природни броеви $x,y,z$ такви што

$$x\leq y\leq z<8 \text{ и } 8xy=z^3.$$

**Решение.** Бидејќи левата страна на $8xy = z^3$ е делива со 8, мора да е и десната страна делива со 8. Тоа е можно само ако $z = 2, z = 4$ или $z = 6$.

Ако $z = 2$, тогаш $xy = 1$, па решение е $x = y = 1, z = 2$.

Ако $z = 4$, тогаш $xy = 8$, од каде добиваме $x = 2, y = z = 4$.

Ако $z = 6$, тогаш $xy = 27$, од каде не се добива решение кое ги задоволува неравенствата $x \le y \le z < 8$.

84. а) Докажи дека изразот $2x^2 + 2y^2$ може да се запише како збир на квадрати на два изрази.

б) Докажи дека равенките $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ имаат еднаков број целобројни решенија.

**Решение.** а) Имаме:

$$2x^2 + 2y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = (x + y)^2 + (x - y)^2 .$$

б) Нека $(u,v)$ е решение на равенката $x^2 + y^2 = n$, т.е. $u^2 + v^2 = n$. Тогаш од а) следува $2n = 2u^2 + 2v^2 = (u + v)^2 + (u - v)^2$, т.е парот $(u + v, u - v)$ е решение на равенката $x^2 + y^2 = 2n$. Јасно, ако $(u,v)$ и $(u',v')$ се различни решенија на $x^2 + y^2 = n$, тогаш $(u + v, u - v)$ и $(u' + v', u' - v')$ се различни решенија на $u^2 + v^2 = 2n$. (Провери!)

Обратно, нека $(u,v)$ е решение на равенката $x^2 + y^2 = 2n$, т.е. $u^2 + v^2 = 2n$. Сега, бидејќи $2n$ е парен број, заклучуваме дека броевите $u$ и $v$ се со иста парност. Тоа значи дека $\frac{u+v}{2}$ и $\frac{u-v}{2}$ се цели броеви и бидејќи

$$(\tfrac{u+v}{2})^2 + (\tfrac{u-v}{2})^2 = \tfrac{u^2+2uv+v^2}{4} + \tfrac{u^2-2uv+v^2}{4} = \tfrac{u^2+v^2}{2} = \tfrac{2n}{2} = n ,$$

добиваме дека парот $(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$ е решение на равенката $x^2 + y^2 = n$. Јасно, ако $(u,v)$ и $(u',v')$ се различни решенија на $x^2 + y^2 = 2n$, тогаш $(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$ и $(\frac{u'+v'}{2}, \frac{u'-v'}{2})$ се различни решенија на $u^2 + v^2 = 2n$. (Провери!)

# 2. АЛГЕБРА

1. Дали бројот $1+2^2+3^3+...+9^9$ е квадрат на некој природен број?
**Решение.** Цифрата на единиците на квадрат на природен број може да биде 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Цифрата на единиците на дадениот збир е 7 (Провери?), па затоа дадениот збир не може да биде квадрат на природен број.

2. Нека $m=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n+57$. Определи ги сите природни броеви $n$ за кои бројот $m$ е квадрат на некој природен број.
**Решение.** За $n=1$ е $m=58$, за $n=2$ е $m=59$, за $n=3$ е $m=63$, па затоа $n>3$. За $n=4$ имаме $m=81=9^2$. Сега, ако $n\geq 5$, тогаш цифрата на единиците на бројот $m$ ќе биде еднаква на 7, а како квадрат на природен број има цифра на единиците 0, 1, 4, 5, 6 или 9, заклучуваме дека не постои природен број $n\geq 5$ за кој бројот $m$ е квадрат на некој природен број. Конечно, единствено решение е $n=4$.

3. Колку цифри има во записот на производот $8^5\cdot 5^{10}\cdot 15^5$?
**Решение.** Имаме
$$8^5\cdot 5^{10}\cdot 15^5=(2^3)^5\cdot 5^{10}\cdot(3\cdot 5)^5=2^{15}\cdot 5^{10}\cdot 3^5\cdot 5^5=243\cdot 10^{15}=243\underbrace{00...0}_{15}$$
што значи дека во записот на $8^5\cdot 5^{10}\cdot 15^5$ има $3+15=18$ цифри.

4. Марија помножила 20 четворки, а Милена ги помножила сите непарни природни броеви помали од 100. Потоа Јанко ги помножил производите кои ги добиле двете девојчиња. Со колку нули завршува производот кој го добил Јанко?
**Решение.** Нула на крајот на еден број се добива како производ на простите множители 2 и 5. Бидејќи $4^{20}=2^{40}$ за да го најдеме бројот на нулите треба да определиме на кој степен бројот 5 се јавува во производот на непарните броеви помали од 100. Бидејќи еден број е делив со 5 ако цифрата на единиците е 0 или 5, а разгледуваме непарни броеви, бројот 5 е делител на броевите: 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 и 95. Имаме 10 броја, а во броевите 25 и 75, бројот 5 се јавува

на степен 2. Значи, во производот на Милена степенот на бројот 5 е $5^{12}$. Конечно, бројот кој го добил Јанко завршува на 12 нули.

5. Иван помножил 2019 двојки, а Маја помножила 2017 петки. Потоа Павел ги помножил производите кои тие двајца ги добиле. Колку цифри има производот кој го добил Павел?

**Решение.** Бројот кој го добил Иван е $2^{2019}$, а бројот кој го добила Маја е $5^{2017}$. Значи, Павел го добил бројот

$$2^{2019}\cdot 5^{2017} = 2^2\cdot 2^{2017}\cdot 5^{2017} = 4\cdot 10^{2017}.$$

Значи, Павел го добил бројот $4\underbrace{000...00}_{2017}$ и овој број има 2018 цифри.

6. Бројот $2^{2007}$ има $m$ цифри, а бројот $5^{2007}$ има $n$ цифри. Колку е збирот $m+n$?

**Решение.** Бројот $2^{2007}$ има $m$ цифри, па затоа $10^{m-1} < 2^{2007} < 10^m$. Слично, бројот $5^{2007}$ има $n$ цифри, па затоа $10^{n-1} < 5^{2007} < 10^n$. Според тоа,

$$\begin{aligned} &10^{m-1}10^{n-1} < 2^{2007}5^{2007} < 10^m 10^n,\\ &10^{m+n-2} < 10^{2007} < 10^{m+n},\\ &m+n-2 < 2007 < m+n,\\ &2007 < m+n < 2009, \end{aligned}$$

па затоа $m+n=2008$.

7. Дали може да се најдат пет броеви различни од нула кои го задоволуваат следниот услов: производот на броевите не се менува ако секој број се намали за 1?

**Решение.** Да земеме четири еднакви броја, на пример 2. Петтиот број да го означиме со $x$ и истиот мора да го задоволува равенството $16x = x-1$, од каде наоѓаме $x = -\frac{1}{15}$.

Наместо четири двојки, можеме да земеме било кои четири еднакви броја поголеми од 1, на пример 3. Така добиваме $81x = 32(x-1)$, од каде следува $x = -\frac{32}{49}$. Постојат и решенија кај кои сите пет броеви се различни. На пример, ако прво ги избереме броевите: 5, 6, 7 и 8, за петтиот број добиваме $5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7(x-1)$, од каде следува

$x=-1$. Според тоа, задачата има бесконечно многу решенија.

8. Даден е полиномот $P_1(x)=x^4-x^3+2x^2-5x+6$. Збирот на полиномите $P_1(x)$ и $P_2(x)$ е еднаков на $x^5-x^2-2$. Определи го полиномот $P_1(x)+2P_3(x)$ ако се $P_2(x)$ и $P_3(x)$ спротивни полиноми.

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned}P_2(x)&=x^5-x^2-2-P_1(x)\\&=x^5-x^2-2-x^4+x^3-2x^2+5x-6\\&=x^5-x^4+x^3-3x^2+5x-8.\end{aligned}$$

Бидејќи $P_2(x)$ и $P_3(x)$ се спротивни полиноми, добиваме

$$P_3(x)=-x^5+x^4-x^3+3x^2-5x+8.$$

Според тоа,

$$2P_3(x)=-2x^5+2x^4-2x^3+6x^2-10x+16,$$

па затоа

$$P_1(x)+2P_3(x)=-2x^5+3x^4-3x^3+8x^2-15x+22.$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{2^{101}-2^{99}}{2^{100}-2^{99}}\cdot\frac{2869^2-2814^2}{3+6+9+...+30}.$$

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{2^{101}-2^{99}}{2^{100}-2^{99}}\cdot\frac{2869^2-2814^2}{3+6+9+...+30}&=\frac{2^{99}(2^2-1)}{2^{99}(2-1)}\cdot\frac{(2869-2814)(2869+2814)}{3(1+2+3+...+10)}\\&=\frac{3}{1}\cdot\frac{55\cdot5683}{3\cdot55}=5683.\end{aligned}$$

10. Колку пати вредноста на изразот

$$2\cdot\frac{7\frac{2}{3}:(2\frac{2}{3}+0{,}5:1\frac{1}{2})}{(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{9}\cdot0{,}75):7\frac{1}{3}}$$

е помала од 2024.

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned}2\cdot\frac{7\frac{2}{3}:(2\frac{2}{3}+0{,}5:1\frac{1}{2})}{(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{9}\cdot0{,}75):7\frac{1}{3}}&=2\cdot\frac{\frac{23}{3}:(\frac{8}{3}+\frac{1}{2}:\frac{3}{2})}{(\frac{7}{3}-\frac{10}{9}\cdot\frac{3}{4}):\frac{22}{3}}=2\cdot\frac{\frac{23}{3}:(\frac{8}{3}+\frac{1}{3})}{(\frac{7}{3}-\frac{5}{6}):\frac{22}{3}}\\&=2\cdot\frac{\frac{23}{3}:3}{\frac{9}{6}:\frac{22}{3}}=2\cdot\frac{\frac{23}{9}}{\frac{9}{44}}=\frac{2024}{81}.\end{aligned}$$

Според тоа вредноста на даениот израз е 81 пат помала од бројот 2024.

11. Определи ги најмалите природни броеви $a$ и $b$ кои се степени на бројот 2 и за кои

$$a\sqrt{a^3\sqrt{a^5\sqrt{a^7}}}=b.$$

**Решение.** Ако го квадрираме даденото равенство, тогаш добиваме: $a^2\cdot a^3\sqrt{a^5\sqrt{a^7}}=b^2$, т.е. $a^5\sqrt{a^5\sqrt{a^7}}=b^2$. Го квадрираме последното равенство и добиваме: $a^{10}\cdot a^5\sqrt{a^7}=b^4$, т.е. $a^{15}\sqrt{a^7}=b^4$. Ако уште еднаш квадрираме, добиваме $a^{30}a^7=b^8$, т.е. $a^{37}=b^8$. Степените 8 и 37 во последното равенство се заемно прости, па затоа најмалите природни броеви $a$ и $b$ кои се степени на бројот 2 и за кои тоа важи се $a=2^8$ и $b=2^{37}$.

12. Определи природен број $n$ и цел број $a$ така што ќе биде точно равенството

$$a^n=\frac{0{,}125^4\cdot(-4{,}5)^6\cdot(-0{,}375)^6\cdot 125}{2{,}25^9\cdot 0{,}5^{18}}.$$

**Решение.** Имаме:

$$a^n=\frac{0{,}125^4\cdot(-4{,}5)^6\cdot(-0{,}375)^6\cdot 125}{2{,}25^9\cdot 0{,}5^{18}}$$

$$=\frac{(\frac{1}{8})^4\cdot(\frac{9}{2})^6\cdot(\frac{3}{8})^6\cdot 5^3}{(\frac{9}{4})^9\cdot(\frac{1}{2})^{18}}=\frac{\frac{1}{2^{12}}\cdot\frac{3^{12}}{2^6}\cdot\frac{3^6}{2^{18}}\cdot 5^3}{\frac{3^{18}}{2^{18}}\cdot\frac{1}{2^8}}=5^3,$$

па затоа $a=5$, $n=3$.

13. Нека $a,b,c,d$ се меѓусебно различни природни броеви такви што $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$. Докажи дека $\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2}+\frac{b^6c^6}{2a^2d^2}}$ е квадрат на природен број.

**Решение.** Равенството од условот на задачата последователно е еквивалентно со равенствата

$$(a^2-b^2)(c^2+d^2)=(c^2-d^2)(a^2+b^2),$$
$$a^2c^2+a^2d^2-b^2c^2-b^2d^2=a^2c^2+b^2c^2-a^2d^2-b^2d^2,$$

$$a^2d^2 = b^2c^2.$$

Според тоа,

$$\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2} + \frac{b^6c^6}{2a^2d^2}} = \sqrt{\frac{(a^2d^2)^3}{2b^2c^2} + \frac{(b^2c^2)^3}{2a^2d^2}} = \sqrt{\frac{(b^2c^2)^3}{2b^2c^2} + \frac{(b^2c^2)^3}{2b^2c^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(b^2c^2)^2}{2} + \frac{(b^2c^2)^2}{2}} = \sqrt{(b^2c^2)^2} = b^2c^2 = (bc)^2,$$

што и требаше да се докаже.

14. Пресметај: $\frac{2^3\cdot 4^5\cdot 6^7}{8^9\cdot 10^{11}} : 0,015^7$ .

**Решение.** Имаме:

$$\frac{2^3\cdot 4^5\cdot 6^7}{8^9\cdot 10^{11}} : 0,015^7 = \frac{2^3\cdot (2^2)^5\cdot 6^7}{(2^3)^9\cdot 10^{11}} : (\frac{15}{1000})^7 = \frac{2^{13}}{2^{27}\cdot 10^{11}} \cdot (\frac{6\cdot 1000}{3\cdot 5})^7$$
$$= \frac{1}{2^{14}\cdot 10^{11}} \cdot 400^7 = \frac{1}{2^{14}\cdot 10^{11}} \cdot 4^7 \cdot 100^7$$
$$= \frac{1}{2^{14}\cdot 10^{11}} \cdot 2^{14} \cdot 10^{14} = 10^3 = 1000.$$

15. Од низата броеви

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

избери седум различни броеви чиј збир е 1.

**Решение.** Имаме

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1. \qquad (1)$$

Ако (1) го помножиме со $\frac{1}{6}$, добиваме $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ ,т.е.

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}. \qquad (2)$$

Понатаму, ако (2) го помножиме со $\frac{1}{6}$, добиваме

$$\frac{1}{72} + \frac{1}{108} + \frac{1}{216} = \frac{1}{36}. \qquad (3)$$

Конечно, од (1), (2) и (3) следува

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + (\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36})$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{72} + \frac{1}{108} + \frac{1}{216}.$$

*Коментар*. За било кој непарен број $k$ секогаш може да се изберат $k$ различни броеви од дадената низа чиј збир е еднаков на 1. Имено, ако бројот 1 сме го претставиле како збир на некои броеви од низата,

тогаш секогаш најмалиот собирок $\frac{1}{n}$ можеме да го замениме со три помали собирци $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}$ и на тој начин бројот на собирците го зголемуваме за 2.

16. Определи го квадратниот корен од изразот

$$1\underbrace{000...0}_{2004}5\cdot\underbrace{111...11}_{2005}+1.$$

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned}1\underbrace{000...0}_{2004}5\cdot\underbrace{111...11}_{2005}+1&=(10^{2005}+5)\cdot\frac{10^{2005}-1}{9}+1\\&=\frac{(10^{2005})^2+4\cdot10^{2005}-5}{9}+1\\&=\frac{(10^{2005})^2+4\cdot10^{2005}+4}{9}\\&=(\frac{10^{2005}+2}{3})^2,\end{aligned}$$

па затоа бараниот квадратен корен е $\frac{10^{2005}+2}{3}=\underbrace{333...3}_{2004}4$.

17. Определи го квадратниот корен од изразот

$$\underbrace{111...11}_{n}\underbrace{222...22}_{n+1}5.$$

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned}A&=\underbrace{111...11}_{n}\underbrace{222...22}_{n+1}5\\&=\frac{10^n-1}{9}\cdot10^{n+2}+2\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}\cdot10+5\\&=\frac{10^{2n+2}+10^{n+2}+25}{9}\\&=(\frac{10^{n+1}+5}{3})^2\end{aligned}$$

и затоа

$$\sqrt{A}=\frac{10^{n+1}+5}{3}=1\underbrace{000...00}_{n}5:3=\underbrace{333...33}_{n}5.$$

18. Ако $a+b+c=2024$ и $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=1$, пресметај ја вредноста на изразот $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

**Решение.** *Прв начин*. Од $a+b+c=2024$ следува $a=2004-(b+c)$, $b=2004-(c+a)$ и $c=2004-(a+b)$. Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{2024-(b+c)}{b+c}+\frac{2024-(c+a)}{c+a}+\frac{2024-(a+b)}{a+b}\\ &= \frac{2024}{b+c}-\frac{b+c}{b+c}+\frac{2024}{c+a}-\frac{c+a}{c+a}+\frac{2024}{a+b}-\frac{a+b}{a+b}\\ &= \frac{2024}{b+c}-1+\frac{2024}{c+a}-1+\frac{2024}{a+b}-1\\ &= \frac{2024}{b+c}+\frac{2024}{c+a}+\frac{2024}{a+b}-3\\ &= 2024\cdot(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})-3\\ &= 2024-3=2021.\end{aligned}$$

*Втор начин*. Имаме

$$\begin{aligned}2004 &= (a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\\ &= \frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}\\ &= \frac{a+b}{a+b}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{a+c}{c+a}+\frac{b}{c+a}\\ &= 1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}\\ &= 3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.\end{aligned}$$

Значи,

$$2004=3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},$$

од каде следува

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2021.$$

19. Пресметај ја вредноста на изразот $x^{2023}+y^{2023}$, ако $x+y=0$.

**Решение.** *Прв начин*. Од $x+y=0$ следува $y=-x$, па затоа

$$\begin{aligned}x^{2023}+y^{2023} &= x^{2023}+(-x)^{2023}=x^{2023}+(-1)^{2023}x^{2023}\\ &= x^{2023}-x^{2023}=0.\end{aligned}$$

*Втор начин*. Ако искористиме дека за секои реални броеви $x$ и $y$ и за секој природен број $k$ важи

$$x^{2k+1}+y^{2k+1}=(x+y)(x^{2k}-x^{2k-1}y+x^{2k-2}y^2-\ldots-xy^{2k-1}+y^{2k}),$$

и дека $x+y=0$, добиваме

$$\begin{aligned}x^{2023}+y^{2023} &= (x+y)(x^{2022}-x^{2021}y+x^{2020}y^2-\ldots-xy^{2021}+y^{2022})\\ &= 0\cdot(x^{2022}-x^{2021}y+x^{2020}y^2-\ldots-xy^{2021}+y^{2022})=0.\end{aligned}$$

20. Пресметај ја вредноста на изразот $x^{2022}+y^{2022}$ ако $x+y=0$ и $x^2+y^2=8$.

**Решение.** Од $x+y=0$ следува $y=-x$. Заменуваме во $x^2+y^2=8$ и добиваме $2x^2=8$, односно $x^2=4=2^2$, па затоа $y^2=(-x)^2=x^2=2^2$. Според тоа,

$$\begin{aligned} x^{2022}+y^{2022} &= (x^2)^{1011}+(y^2)^{1011} \\ &= (2^2)^{1011}+(2^2)^{1011} \\ &= 2\cdot 2^{2022}=2^{2023}. \end{aligned}$$

21. Ако $a^2+b^2-2a+6b+10=0$, пресметај $a^{2009}-2009b$.

**Решение.** Од $a^2+b^2-2a+6b+10=0,$ следува $(a-1)^2+(b+3)^2=0$. Сега, бидејќи збир на два квадрати е еднаков на 0 ако тие се еднакви на 0, добиваме $(a-1)^2=0,(b+3)^2=0$, па затоа $a=1$ и $b=-3$. Според тоа,

$$a^{2009}-2009b=1^{2009}-2009\cdot(-3)=1+6027=6028.$$

22. Нека $x$ е реален број поголем од 1, таков што $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{82}{9}$. Определи го бројот $x$.

**Решение.** Од равенството $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{82}{9}$ и од условот $x>1$ последователно добиваме

$$\begin{aligned} &x^2+2+\tfrac{1}{x^2}=\tfrac{82}{9}+2, \\ &(x+\tfrac{1}{x})^2=\tfrac{100}{9}, \\ &x+\tfrac{1}{x}=\tfrac{10}{3}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &x^2-2+\tfrac{1}{x^2}=\tfrac{82}{9}-2, \\ &(x-\tfrac{1}{x})^2=\tfrac{64}{9}, \\ &x-\tfrac{1}{x}=\tfrac{8}{3}. \end{aligned}$$

Според тоа, $x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}=\frac{10}{3}+\frac{8}{3}$, односно $2x=6$, па затоа $x=3$.

23. Докажи дека $\sqrt{28}-\sqrt{(5-2\sqrt{7})^2}$ е рационален број.

**Решение.** Од $5<2\sqrt{7}$ следува

$$\begin{aligned}\sqrt{28}-\sqrt{(5-2\sqrt{7})^2} &= \sqrt{4\cdot 7}-|5-2\sqrt{7}| \\ &= 2\sqrt{7}-(2\sqrt{7}-5) \\ &= 2\sqrt{7}-2\sqrt{7}+5=5,\end{aligned}$$

т.е. дадениот број е рационален.

24. Пресметај $\sqrt{6+\sqrt{35}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}$.

**Решение.** Имаме $\sqrt{6+\sqrt{35}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}>0$ и

$$\begin{aligned}(\sqrt{6+\sqrt{35}}+\sqrt{6-\sqrt{35}})^2 &= 6+\sqrt{35}+2\sqrt{6^2-\sqrt{35}^2}+6-\sqrt{35} \\ &= 12+2\cdot 1=14,\end{aligned}$$

па затоа

$$\sqrt{6+\sqrt{35}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}=\sqrt{14}.$$

25. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(6+\sqrt{35})(\sqrt{14}-\sqrt{10})\sqrt{6-\sqrt{35}}.$$

**Решение.** Нека $A=(6+\sqrt{35})(\sqrt{14}-\sqrt{10})\sqrt{6-\sqrt{35}}$. Тогаш

$$\begin{aligned}A^2 &= (6+\sqrt{35})^2(\sqrt{14}-\sqrt{10})^2\sqrt{6-\sqrt{35}}^2 \\ &= (6+\sqrt{35})(14-2\sqrt{140}+10)(6+\sqrt{35})(6-\sqrt{35}) \\ &= (6+\sqrt{35})(24-2\cdot 2\sqrt{35})(6^2-\sqrt{35}^2) \\ &= 4(6+\sqrt{35})(6-\sqrt{35})=4.\end{aligned}$$

Но, $A>0$, па од последното равенство следува $A=2$.

26. Пресметај ја вредноста на изразот $A=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}$, ако $1\le x\le 4$

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}\\&=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}\\&=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}\\&=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-2|.\end{aligned}$$

Сега, ако земеме предвид дека $1\le x\le 4$ добиваме

$$|\sqrt{x-1}+1|=\sqrt{x-1}+1 \text{ и } |\sqrt{x-1}-2|=2-\sqrt{x-1},$$

па затоа

$$A=\sqrt{x-1}+1+2-\sqrt{x-1}=3.$$

27. Докажи дека

$$a=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{899}+\sqrt{900}}$$

е природен број.

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned}a&=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{899}+\sqrt{900}}\\&=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{899}+\sqrt{900}}\cdot\frac{\sqrt{900}-\sqrt{899}}{\sqrt{900}-\sqrt{899}}\\&=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{1}^2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}+\ldots+\frac{\sqrt{900}-\sqrt{899}}{\sqrt{900}^2-\sqrt{899}^2}\\&=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots+\frac{\sqrt{900}-\sqrt{899}}{900-899}\\&=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{900}-\sqrt{899}\\&=\sqrt{900}-\sqrt{1}=30-1=29\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

28. Дали $\sqrt{0,\bar{1}}$ е рационален или ирационале број?

**Решение.** Нека $x=0,\bar{1}$. Тогаш $10x=1,\bar{1}$, па затоа $10x-x=1,\bar{1}-0,\bar{1}=1$, од каде добиваме $9x=1$, т.е. $x=\frac{1}{9}$. Според тоа, $\sqrt{0,\bar{1}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$. Значи, $\sqrt{0,\bar{1}}$ е рационален број.

29. Нека $a$ и $b$ се непарни природни броеви. Докажи дека $\sqrt{a^2+b^2}$ е ирационален број.

**Решение.** Од $(2k)^2 = 4k^2$ и $(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$ следува дека квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1.
Нека $a = 2n+1$ и $b = 2m+1$. Тогаш

$$a^2 + b^2 = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 = 4(m^2+n^2+m^2+n)+2,$$

значи дека $a^2+b^2$ при делење со 4 дава остаток 2. Според тоа, $a^2+b^2$ не е точен квадрат. Сега, ако $\sqrt{a^2+b^2} = x = \frac{p}{q}$, каде $p$ и $q$ се заемно прости броеви, добиваме $a^2+b^2 = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{N}$, па затоа $q = 1$. Тоа значи, $a^2+b^2 = p^2 \in \mathbb{N}$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $\sqrt{a^2+b^2}$ е ирационален број.

30. Докажи дека бројот $\sqrt{\overline{abcabc}}$ не е рационален.
**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} \\ &= 1001 \cdot \overline{abc} \\ &= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}.\end{aligned}$$

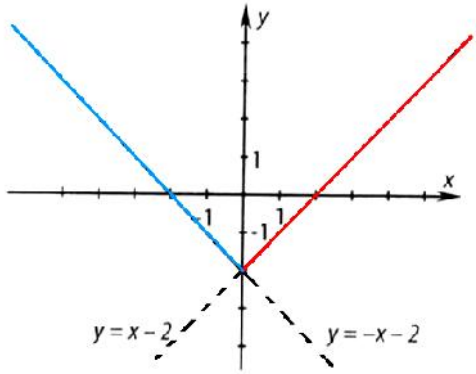
Но, $\overline{abc} < 7 \cdot 11 \cdot 13$, па затоа бројот $\overline{abcabc}$ не е точен квадрат. Според тоа, бројот $\sqrt{\overline{abcabc}}$ не е рационален.

31. Нацртај го графикот на функцијата $y = |x| - 2$.
**Решение.** Бидејќи

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

графикот на функцијата го цртаме посебно за случајот кога $x \geq 0$ и случајот кога $x < 0$. За $x \geq 0$ функцијата е $y = x - 2$. Бидејќи ги разгледуваме само вредностите за кои $x \geq 0$ го добиваме првиот дел од графикот (црвениот дел од правата $y = x - 2$). Во случај кога $x < 0$, функцијата го добива видот $y = -x - 2$. Бидејќи ги разгледуваме само вредностите за кои $x < 0$ го добиваме вториот дел од графикот (синиот дел од правата $y = -x - 2$). Значи, графикот на функцијата $y = |x| - 2$ е искршената линија претставена со црвената и сината

полуправа.

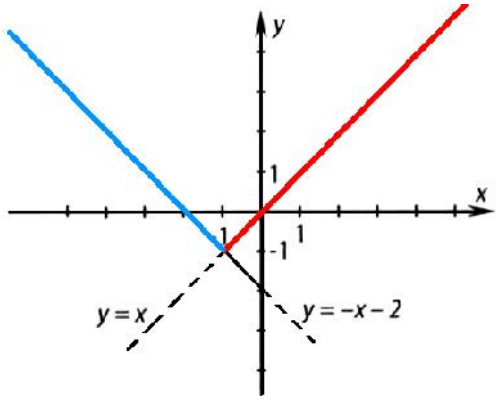



32. Нацртај го графикот на функцијата $y = |x+1| - 1$.

**Решение.** Бидејќи

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$$

графикот на функцијата го цртаме посебно за случајот кога $x \geq -1$ и случајот кога $x < -1$. За $x \geq -1$ функцијата е $y = x$. Бидејќи ги разгледуваме само вредностите за кои $x \geq -1$ го добиваме првиот дел од графикот (црвениот дел од правата $y = x$). Во случај кога $x < -1$, функцијата го добива видот $y = -x - 2$. Бидејќи ги разгледуваме само вредностите за кои $x < -1$ го добиваме вториот дел од графикот (синиот дел од правата $y = -x - 2$). Значи, графикот на функцијата $y = |x+1| - 1$ е искршената линија претставена со црвената и сината полуправа.



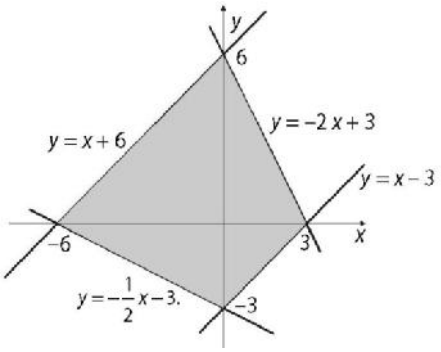
33. Пресметај ги плоштината и периметарот на четириаголникот определен со графиците на функциите

$$y = x - 3,\ y = x + 6,\ y = -2x + 6,\ y = -\frac{1}{2}x - 3.$$

**Решение.** Решавајќи соодветни ситеми равенки добиваме дека темињата на четириаголикот се точките

$$(-6,0),(0,-3),(3,0),(0,6),$$

цртеж десно. Од Питагоровата теорема следува дека должините на страните на четириаголникот се $3\sqrt{5}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{5}$ и $6\sqrt{2}$.




Според тоа, периметарот на четириаголникот е

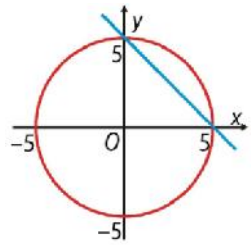
$$L = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2} + 6\sqrt{5},$$

а неговата плоштина ја пресметуваме како збир на плоштините на четири правоаголни триаголници и добиваме

$$P = \frac{3\cdot 3}{2} + \frac{3\cdot 6}{2} + \frac{6\cdot 6}{2} + \frac{6\cdot 3}{2} = \frac{81}{2}.$$

34. Во координатен систем нацртај круг чиј радиус е 5, а центарот е во координатниот почеток. Определи ја плоштината на отсечокот на овој круг кој е определен со графикот на функцијата $y = -x + 5$.

**Решение.** Графикот на дадената функција ја сече кружницата и координатните оски во точките $(5,0)$ и $(0,5)$, цртеж десно. Плоштината на отсечокот ја добиваме така што од плоштината на кружниот исечок (четвртина од кругот), ќе ја одземеме плоштината на правоаголниот триаголник чии катети се со должина 5. Имаме $P_{od} = P_{is} - P_t = \frac{®\cdot 5^2}{4} - \frac{5\cdot 5}{2} = \frac{25}{2}(\frac{®}{4} - 1)$.




35. Определи го растојанието на графикот на функцијата $y = -2x + 2$ од координатниот почеток.

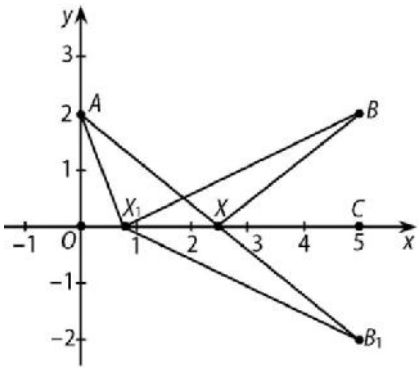
**Решение.** Во координатен систем графикот на функцијата $y = -2x + 2$ со координатните оски формира правоаголен триаголник чии катети се 1 и 2 (нацртај цртеж). Хипотенузата на овој триаголник е еднаква

на $\sqrt{5}$. Ако $h$ е растојанието од координатниот почеток до правата $y=-2x+2$, тогаш тоа е висината на триаголникот. За плоштината на на триаголникот имаме $\frac{1\cdot 2}{2}=P=\frac{h\sqrt{5}}{2}$, од каде добиваме $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

36. Во правоаголен координатен систем $xOy$ се дадени точките $O(0.0)$, $A(0,2), B(5,2)$ и $C(5,0)$. Нека $X(x,0)$ е произволна точка на отсечката $OC$. Определи ја најмалата можна вредност на збирот $\overline{AX}+\overline{XB}$.

**Решение.** Нека $B_1(5,2)$ е точката симетрична на точката $B$ во однос на оската $Ox$. Сега, од својствата на симетријата за секоја точка $X$ од отсечката $OC$ важи $\overline{XB}=\overline{XB_1}$. Според тоа,

$$\overline{AX}+\overline{XB}=\overline{AX}+\overline{XB_1}.$$




Овој збир ќе биде најмал кога точката $X$ е пресечната точка на отсечката $AB_1$ со оската $Ox$. Навистина, од неравенството на триаголник следува дека $\overline{AX_1}+\overline{X_1B_1}>\overline{AB_1}$. Затоа најмалата можна вредност на збирот $\overline{AX}+\overline{XB}$ е еднаква на должината на отсечката $AB_1$, односно на $\overline{AB_1}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BB_1}^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$.

37. Определи ги сите точки со целобројни координати во координатната рамнина $xOy$ чие растојание до точката $T(3,3)$ е еднакво на 5.

**Решение.** Бараните точки се сите точки $(x,y)$ со целобројни кординати за кои важи $\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=5$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $(x-3)^2+(y-3)^2=25$, чии решенија се наоѓаат со разгледување на можните точни квадрати помали од 25 и се дадени во следнва табела:

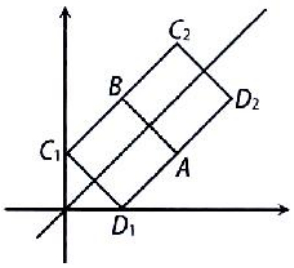
| $(x-3)^2$ | $(y-3)^2$ | $x-3$ | $y-3$ | $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 0 | 5 | 0 | 8 | 3 | (8,3) |
| | | –5 | 0 | –2 | 3 | (–2,3) |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 25 | 0 | 5 | 3 | 8 | (3,8) |
| | | 0 | –5 | 3 | –2 | (3,–2) |
| 9 | 16 | 3 | 4 | 6 | 7 | (6,7) |
| | | 3 | –4 | 6 | –1 | (6.–1) |
| | | –3 | 4 | 0 | 7 | (0,7) |
| | | –3 | –4 | 0 | –1 | (0,–1) |
| 16 | 9 | 4 | 3 | 7 | 6 | (7,6) |
| | | 4 | –3 | 7 | 0 | (7,0) |
| | | –4 | 3 | –1 | 6 | (–1,6) |
| | | –4 | –3 | –1 | 0 | (–1,0) |

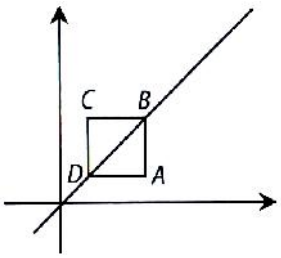
38. Во координатен систем е дадена точката $A(4,2)$. Ако точката $A$ е теме на квадрат кој е односиметричен во однос на правата $y=x$ определи ги кординатите на преостанатите темиња на квадратот.

**Решение.** Ќе разгледаме два случаја.

*Прв случај*. Правата $y=x$ е оска на симетрија на квадратот која ги содржи средините на спротивните страни. Тогаш точката $B(2,4)$ која е односиметрична на точката $A$, во однос на правата $y=x$, е соседното теме на квадратот. Отсечката $AB$ е страна на квадратот, а квадратот може да биде на едната или на другата страна од $AB$, па за преостанатите темиња имаме две можности $C_1(0,2)$ и $D_1(2,0)$, односно $C_2(4,6)$ и $D_2(6,4)$, (види цртеж).




*Втор случај*. Правата $y=x$ е оска на симетрија која ја содржи дијагоналата на квадратот. Тогаш точката $C(2,4)$ која е односиметрилна на точката $A$, во однос на правата $y=x$, е спротивното теме на квадратот. Другите две темиња на квадратот се $B(4,4)$ и $D(2,2)$, види цртеж.




39. Во координатен систем се дадени точките $A(2,3)$ и $C(8,3)$. Ако точ-

ките $A$ и $C$ се спротивни темиња на квадрат, определи ги координатите на другите две темиња на квадратот.

**Решение.** Точките $A$ и $C$ се спротивни темиња на квадратот, па затоа отсечката $AC$ е неговата дијагонала. Точките $A$ и $C$ имаа исти ординати, па затоа $AC \| Ox$. Должината на дијагоналата е

$$\overline{AC} = | x_C - x_A | = | 8 - 2 | = 6 .$$

Дијагоналите на квадратот се преполовуваат и се заемно нормални. Затоа $\overline{AC} = \overline{BD}$ и $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS} = 3$, каде $S$ е пресекот на дијагоналите. Точките $B, S, D$ имаат иста апсциса $x_B = x_D = x_S = \frac{x_A + x_C}{2} = 5$. Точките $B$ и $D$ се на правата која минува низ точката $S$, е паралелна со $Oy$ оската и се еднакво оддалечени од точката $S$, за која важи $y_S = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$. Затоа $y_B = 3 - 3 = 0$ и $y_D = 3 + 3 = 6$. Според тоа, координатите на другите две темиња се $B(5,0)$ и $D(5,6)$.

40. Реши ја равенката $\sqrt{x^2} = x + 5$.

**Решение.** Дадената равека е еквивалентна со равенката $| x | = x + 5$. Можни се два случаја:

1) Ако $x \geq 0$, тогаш равенката го добива видот $x = x + 5$ и оваа равенка нема решение.
2) Ако $x < 0$, тогаш равенката го добива видот $-x = x + 5$ и решението на оваа равенка е $x = -\frac{5}{2}$. Бидејќи $-\frac{5}{2} < 0$ тоа е решение и на почетната равенка.

41. Реши ја равенката $\sqrt{x^2} = x - 5$.

**Решение.** Дадената равека е еквивалентна со равенката $| x | = x - 5$. Можни се два случаја:

1) Ако $x \geq 0$, тогаш равенката го добива видот $x = x - 5$ и оваа равека нема решение.
2) Ако $x < 0$, тогаш равенката го добива видот $-x = x - 5$ и решението на оваа равенка е $x = \frac{5}{2}$. Бидејќи $\frac{5}{2} > 0$ најденото решение не е решение на почетната равенка.

Значи, равенката нема решение во множеството реални броеви.

42. Реши ја равенката $|\sqrt{x}^2 - 5| = 3$.

**Решение.** Квадратниот корен е определен само за позитивни вредности на $x$ и притоа важи $\sqrt{x}^2 = x$. Значи, почетната равенка го добива видот $|x-5|=3$. Од последната равенка ги добиваме равенките $x-5=3$ и $x-5=-3$, чии решенија се $x=8$ и $x=2$. Бидејќи двете решенија се позитивни, тие се решенија на почетната равенка.

43. Реши ја равенката: $x^2+3x+2=0$

**Решение.** *Прв начин*. Бидејќи

$$x^2+3x+2 = x^2+2x+x+2 = x(x+2)+(x+2) = (x+2)(x+1),$$

дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x+2)(x+1)=0,$$

од каде добиваме $x+2=0$ или $x+1=0$. Според тоа, решенија на дадената равенка се $x=-2$ и $x=-1$.

*Втор начин*. Бидејќи

$$\begin{aligned} x^2+3x+2 &= x^2+2\cdot\tfrac{3}{2}x+(\tfrac{3}{2})^2-(\tfrac{3}{2})^2+2 = (x+\tfrac{3}{2})^2-\tfrac{9}{4}+2 \\ &= (x+\tfrac{3}{2})^2-\tfrac{1}{4} = (x+\tfrac{3}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2 \\ &= (x+\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}) = (x+2)(x+1), \end{aligned}$$

дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x+2)(x+1)=0,$$

чии решенија се $x=-2$ и $x=-1$.

44. Реши ја равенката $x^3-4x^2-21x=0$.

**Решение.** Последователно добиваме еквивалентни равенки

$$\begin{aligned} &x^3-4x^2-21x=0, \\ &x(x^2-4x-21)=0, \\ &x(x^2+3x-7x-21)=0, \\ &x(x(x+3)-7(x+3))=0, \\ &x(x+3)(x-7)=0, \end{aligned}$$

од каде добиваме $x=0, x=-3, x=7$.

45. Реши ја равенката

$$\frac{\sqrt{8}}{x}=(\sqrt{288}-\sqrt{98})\cdot(\sqrt{0,02}+\sqrt{4\tfrac{1}{2}})\,.$$

**Решение.** Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$\frac{\sqrt{8}}{x}=(\sqrt{144\cdot 2}-\sqrt{49\cdot 2})\cdot(\sqrt{\frac{2}{100}}+\sqrt{\frac{9}{2}}),$$
$$\frac{\sqrt{8}}{x}=(12\sqrt{2}-7\sqrt{2})\cdot(\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{3\sqrt{2}}{2}),$$
$$\frac{\sqrt{8}}{x}=5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}+15\sqrt{2}}{10},$$
$$\frac{\sqrt{8}}{x}=5\sqrt{2}^{2}\cdot\frac{1+15}{10}$$
$$\frac{\sqrt{8}}{x}=5\cdot 2\cdot\frac{1+15}{10},$$
$$\frac{\sqrt{8}}{x}=16$$
$$x=\frac{\sqrt{8}}{16},$$
$$x=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

46. Определи ги броевите $m$ и $n$ за кои е исполнето

$$\frac{147\cdot 7^3+28\cdot 7^4}{7^n}=7^m \text{ и } \frac{5^4\cdot 25^2}{125^m\cdot 5^{-10}}=5^n\,.$$

**Решение.** Со елементарни треансформации лесно се добива дека дадените равенки се еквивалентни на равенките

$$7^{6-n}=7^m \text{ и } 5^{18-3m}=5^n\,. \qquad (1)$$

Два степени со исти основи се еднакви ако се еднакви степеновите показатели, па од равенките (1) следуваат равенките

$$6-n=m \text{ и } 18-3m=n\,.$$

Ако од втората равенка замениме во првата добиваме

$$6-(18-3m)=m\,,\ \text{т.е. } m=6\,,$$

па затоа,

$$n=18-3\cdot 6=0$$

47. Дадени се дропките $x=\frac{111..110}{111...111}$, $y=\frac{222...221}{222...223}$, $z=\frac{333...331}{333...334}$, при што во броителот и именителот на секоја дропка има по 2006 цифри. Спореди ги овие дропки.

**Решение.** Ако $x=\frac{111..110}{111...111}$, $y=\frac{222...221}{222...223}$, $z=\frac{333...331}{333...334}$, тогаш

$$1-x=1-\frac{111..110}{111...111}=\frac{1}{111...111},$$
$$1-y=1-\frac{222...221}{222...223}=\frac{2}{222...223},$$
$$1-z=1-\frac{333...331}{333...334}=\frac{3}{333...334}.$$

Според тоа,

$$\frac{1}{1-x}=111...111,\ \ \frac{1}{1-y}=111...111+\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{1-z}=111...111+\frac{1}{3}.$$

Значи, $\frac{1}{1-x}<\frac{1}{1-z}<\frac{1}{1-y}$, па затоа $1-x>1-z>1-y$, односно $x<z<y$.

48. Што е поголемо $2^{2012}$ или $15^{503}$?

**Решение.** Имаме

$$2^{2012}=2^{4\cdot 503}=(2^4)^{503}=16^{503}>15^{503}.$$

49. Дадени се броевите $a=22^{22}, B=222^2,\ d=22^{2^2}, e=2^{2^{22}},\ f=2^{222}$ и $g=2^{2^{2^2}}$. Спореди ги овие броеви и подреди ги во растечки редослед.

**Решение.** Јасно, $22^2=484<1024=2^{10}<2^{22}$. Бидејќи $222<256=2^8$, имаме

$$222^2<(2^8)^2=2^{16}=2^{2^{2^2}}.$$

Слично,

$$2^{2^{2^2}}=2^{16}=16^4<22^4=22^{2^2}<22^{22}.$$

Понатаму,

$$22^{22}<32^{22}=(2^5)^{22}=2^{110}<2^{222}.$$

Исто така,

$$2^{222}<2^{484}=2^{22^2}<2^{2^{22}}.$$

Конечно, од претходно изнесеното следува $b<g<d<a<f<c<e$.

50. Спореди ги броевите $2^{7n+3}$ и $5^{3n+1}$, каде $n\in\mathbb{N}$.

**Решение.** Од $2^7=128>125=5^3$ следува $(2^7)^n>(5^3)^n$, т.е. $2^{7n}>5^{3n}$. Понатаму, од $2^3>5$, добиваме

$$2^{7n+3}=2^{7n}\cdot 2^3>5^{3n}\cdot 5=5^{3n+1}.$$

51. Што е поголемо $5^{2008}-5^{2007}$ или $5^{2009}-5^{2008}$?

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned}5^{2008}-5^{2007} &= 5\cdot 5^{2007}-5^{2007}\\ &= 4\cdot 5^{2007} < 4\cdot 5^{2008}\\ &= 5\cdot 5^{2008}-5^{2008}\\ &= 5^{2009}-5^{2008}.\end{aligned}$$

52. Што е поголемо $4^{2012}+9^{2012}$ или $2^{2013}\cdot 3^{2012}$?

**Решение.** Од $(3^{2012}-2^{2012})^2>0$ следува

$$\begin{aligned}&(3^{2012})^2-2\cdot 3^{2012}\cdot 2^{2012}+(2^{2012})^2>0,\\ &(3^2)^{2012}-3^{2012}\cdot 2^{2013}+(2^2)^{2012}>0,\\ &4^{2012}+9^{2012}>3^{2012}\cdot 2^{2013}.\end{aligned}$$

53. Спореди ги дропките $\frac{5^{2007}+1}{5^{2008}+1}$ и $\frac{5^{2008}+1}{5^{2009}+1}$.

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{5^{2007}+1}{5^{2008}+1}-\frac{5^{2008}+1}{5^{2009}+1} &= \frac{(5^{2007}+1)(5^{2009}+1)-(5^{2008}+1)^2}{(5^{2008}+1)(5^{2009}+1)}\\ &= \frac{5^{4016}+5^{2007}+5^{2009}+1-5^{4016}-2\cdot 5^{2008}-1}{(5^{2008}+1)(5^{2009}+1)}\\ &= \frac{5^{2007}+5^{2009}-2\cdot 5^{2008}}{(5^{2008}+1)(5^{2009}+1)}\\ &= \frac{5^{2007}(1+5^2-2\cdot 5)}{(5^{2008}+1)(5^{2009}+1)}\\ &= \frac{16\cdot 5^{2007}}{(5^{2008}+1)(5^{2009}+1)}>0,\end{aligned}$$

па затоа $\frac{5^{2007}+1}{5^{2008}+1}>\frac{5^{2008}+1}{5^{2009}+1}$.

54. Што е поголемо $\sqrt{5}+\sqrt{8}$ или $\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

**Решение.** Нека $x=\sqrt{5}+\sqrt{8}$ и $y=\sqrt{6}+\sqrt{7}$. Имаме:

$$\begin{aligned}x^2 &= (\sqrt{5}+\sqrt{8})^2=\sqrt{5}^2+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}+\sqrt{8}^2=13+2\sqrt{40},\\ y^2 &= (\sqrt{6}+\sqrt{7})^2=\sqrt{6}^2+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}^2=13+2\sqrt{42}.\end{aligned}$$

Бидејќи $13+2\sqrt{42}>13+2\sqrt{40}$ добиваме $x^2>y^2$, па од $x,y>0$ следува $x>y$. Значи, $\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

55. Докажи дека

$$\sqrt{13-\sqrt{13+\sqrt{13}}}<3.$$

**Решение.** Бидејќи $\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$, добиваме $3<\sqrt{13}<4$. Тогаш $13+3<13+\sqrt{13}<13+4$, т.е. $16<13+\sqrt{13}<17$. Според тоа, точни се неравенствата $4<\sqrt{13+\sqrt{13}}<5$, од каде следува

$$8=13-5<13-\sqrt{13+\sqrt{13}}<13-4=9,$$

т.е.

$$\sqrt{8}<\sqrt{13-\sqrt{13+\sqrt{13}}}<\sqrt{9}=3,$$

што и требаше да се докаже.

56. Докажи дека

$$\sqrt{1+\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}}>2.$$

**Решение.** Од $\sqrt{5}>\sqrt{4}=2, \sqrt{10}>\sqrt{9}=3, \sqrt{17}>\sqrt{16}=4$, добиваме

$$\sqrt{1+\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}}>\sqrt{1+\sqrt{2+3+4}}=\sqrt{1+\sqrt{9}}=\sqrt{1+3}=2.$$

57. Докажи дека

$$1<\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\ldots+\tfrac{1}{17}<2.$$

**Решение.** Прво ќе докажеме дека дадениот збир е поголем од 1. Имаме:

$$\tfrac{1}{5}>\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{6}>\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{7}>\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{8}>\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{9}>\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{10}=\tfrac{1}{10},$$
$$\tfrac{1}{11}>\tfrac{1}{17},\tfrac{1}{12}>\tfrac{1}{17},\tfrac{1}{13}>\tfrac{1}{17},\tfrac{1}{14}>\tfrac{1}{17},\tfrac{1}{15}>\tfrac{1}{17},\tfrac{1}{16}>\tfrac{1}{17},\tfrac{1}{17}=\tfrac{1}{17},$$

па затоа

$$\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\ldots+\tfrac{1}{17}>6\cdot\tfrac{1}{10}+7\cdot\tfrac{1}{17}=\tfrac{3}{5}+\tfrac{7}{17}=\tfrac{51+35}{85}=\tfrac{86}{85}>1.$$

Понатаму,

$$\tfrac{1}{5}=\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{6}<\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{7}<\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{8}<\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{9}<\tfrac{1}{5},$$
$$\tfrac{1}{10}=\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{11}<\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{12}<\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{13}<\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{14}<\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{15}<\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{16}<\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{17}<\tfrac{1}{10},$$

па затоа

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{17}<5\cdot\frac{1}{5}+8\cdot\frac{1}{10}=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}<2.$$

58. Докажи дека

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\ldots+\frac{1}{200}>1.$$

**Решение.** Имаме:

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\ldots+\frac{1}{100}>\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100}=50\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\ldots+\frac{1}{200}>\frac{1}{200}+\frac{1}{200}+\frac{1}{200}+\ldots+\frac{1}{200}=100\cdot\frac{1}{200}=\frac{1}{2},$$

па затоа

$$\begin{aligned}\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\ldots+\frac{1}{200}&=(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100})+(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200})\\&>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\end{aligned}$$

59. Определи го најголемиот природен број $n$ и најмалиот природен број $m$ за кои важи:

$$\frac{n}{2018}<\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2017\cdot2018}<\frac{m}{2018}.$$

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2017\cdot2018}&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{2017\cdot2018}\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\\&=1-\frac{1}{2018}=\frac{2017}{2018}\end{aligned}$$

па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството $\frac{n}{2018}<\frac{2017}{2018}<\frac{m}{2018}$, од каде добиваме $n=2016$ и $m=2018$.

60. Докажи дека $x^2-x+1>0$ за секој реален број $x$.

**Решение.** *Прв начин*. Бидејќи $(x-\frac{1}{2})^2\geq0$ имаме

$$x^2-x+1=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0.$$

*Втор начин*. Имаме $x^2\geq0$ и $(x-1)^2\geq0$, па затоа важи $x^2+1>0$ и $x^2-2x+1\geq0$. Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме $2x^2-2x+2>0$. Последното неравенство го делиме со 2, и добиваме $x^2-x+1>0$.

61. Ако $x$ и $y$ се реални броеви, тогаш $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$. Докажи!

**Решение.** Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 \geq 0,$$
$$x^3(x-y) - y^3(x-y) \geq 0,$$
$$(x-y)(x^3 - y^3) \geq 0,$$
$$(x-y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0 \qquad (1)$$

Понатаму, за секои реални броеви $x$ и $y$ важи $(x-y)^2 \geq 0$ и

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \tfrac{y}{2} + \tfrac{y^2}{4} + \tfrac{3}{4}y^2$$
$$= (x + \tfrac{y}{2})^2 + \tfrac{3}{4}y^2 \geq 0.$$

Конечно, ако ги помножиме последните две неравенства го добиваме неравенството (1), што и требаше да се докаже.

62. Ако $a - b \geq 12$, каде $a, b \in \mathbb{R}$, докажи дека $a^4 + b^4 > 2006$.

**Решение.** Ако искористиме дека $a^2 + b^2 \geq -2ab$, добиваме

$2a^2 + 2b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 144$, т.е. $a^2 + b^2 \geq 72$.

Понатаму, $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$, па затоа

$$2a^4 + 2b^4 \geq a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 \geq 72^2,$$

т.е.

$$a^4 + b^4 \geq 2592 > 2006.$$

63. Докажи дека не постојат реални броеви $a, b, c, d$ такви што

$$a - b^2 > \tfrac{1}{4},\ b - c^2 > \tfrac{1}{4},\ c - d^2 > \tfrac{1}{4},\ d - a^2 > \tfrac{1}{4}. \qquad (1)$$

**Решение.** Нека постојат реални броеви такви што се исполнето неравенствата (1). Ги собереме дадените неравенства, добиваме

$$a + b + c + d - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 1,$$

од каде следува

$$(a - \tfrac{1}{2})^2 + (b - \tfrac{1}{2})^2 + (c - \tfrac{1}{2})^2 + (d - \tfrac{1}{2})^2 < 1,$$

што не е точно.

64. Докажи дека не постојат позитивни реални броеви $a,b,c$ такви што

$$a(1-b)>\tfrac{1}{4},\ b(1-c)>\tfrac{1}{4},\ c(1-a)>\tfrac{1}{4}. \qquad (1)$$

**Решение.** За секој реален број $x$ важи $(x-\frac{1}{2})^2\geq 0$, од каде добиваме дека $x^2-x+\frac{1}{4}\geq 0$, односно

$$x(1-x)\leq \tfrac{1}{4} \qquad (2)$$

за секој реален број $x$.

Нека претпоставиме дека постојат позитивни реални броеви $a,b,c$ такви што се исполнети неравенствата (1). Тогаш $1-b>0$, $1-c>0$ и $1-a>0$, па затоа прво од неравенствата (1), а потоа од неравенството (2) следува

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{64}&=\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}<a(1-b)b(1-c)c(1-a)\\&=a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)\\&\leq\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{64},\end{aligned}$$

што е противречност. Конечно, од добиената проитвречност следува тврдењето на задачата.

65. За кои вредности на променливите $x,y,z$ вредноста на изразот

$$x^2+y^2+z^2+2x-3y+4z$$

е најмала? Определи ја вредноста на тој израз.

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2+2x-3y+4z&=x^2+2x+y^2-3y+z^2+4z\\&=(x+1)^2+(y-\tfrac{3}{2})^2+(z+2)^2-1^2-(\tfrac{3}{2})^2-2^2\\&=(x+1)^2+(y-\tfrac{3}{2})^2+(z+2)^2-\tfrac{29}{4}.\end{aligned}$$

Бидејќи квадрат на реален број секогаш е ненегативен, добиваме дека најмалата можна вредност на дадениот израз се добива за $x+1=0$, $y-\frac{3}{2}=0$ и $z+2=0$, односно за $x=-1$, $y=\frac{3}{2}$ и $z=-2$. Оваа вредност е еднаква на $-\frac{29}{4}$.

66. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$A=2x+6z-x^2-y^2-z^2.$$

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned} A &= 2x + 6z - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= -(x^2 - 2x) - y^2 - (z^2 - 6z) \\ &= -(x^2 - 2x + 1) - 1 - y^2 - (z^2 - 6z + 9) + 9 \\ &= -(x-1)^2 - y^2 - (z-3)^2 + 10. \end{aligned}$$

Квадрат на реален број е ненегативен, а во дадениот израз пред секој квадрат има знак „$-$“, па затоа наголемата вредност на изразот $A$ е 10 и истата се достигнува за $(x-1)^2 = 0, y^2 = 0, (z-3)^2 = 0$, односно за $x = 1, y = 0, z = 3$.

67. Низа од 2024 броеви има својство да збирот на секој број и реципрочната вредност на следниот број во таа низа е 1. Производот на сите броеви во оваа низа е еднаков на 2. Кој број е 123-ти по ред во низата?

**Решение.** Нека $x$ е првиот член во низата. Ако $y$ е вториот член во низата, тогаш $x + \frac{1}{y} = 1$, па е $y = \frac{1}{1-x}$. Ако $z$ е третиот член во низата, тогаш $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{z} = 1$, од каде лесно следува дека $z = \frac{x-1}{x}$. Ако $w$ е четвртиот член во низата, тогаш $\frac{x-1}{x} + \frac{1}{w} = 1$, од каде добиваме $w = x$. Според тоа, низата е периодична со период 3, односно таа е:

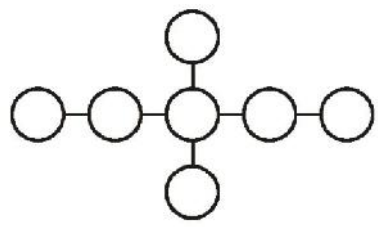
$$x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, \ldots$$

Бидејќи $2024 = 674 \cdot 3 + 2$ и $x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x-1}{x} = -1$, следува дека производот на сите членови на низата е еднаков на $(-1)^{674} x \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x}$. Значи, $\frac{x}{1-x} = 2$, од каде добиваме $x = \frac{2}{3}$. Конечно, од $123 = 41 \cdot 3$ следува дека 123-от член на низата е $\frac{x-1}{x} = \frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}$.

68. Пополни ги кругчињата на цртежот десно со броевите

$$7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7$$

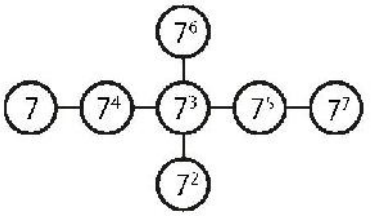
така што цифрата на единиците на збирот на броевите запишани во кругчињата кои се на хоризонтал-

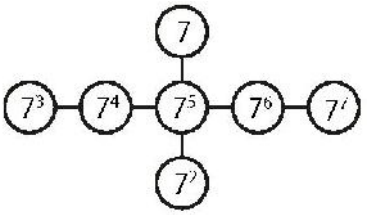


ната права е еднаква на цифрата на единиците на збирот на броевите кои се запишани во кругчињата кои лежат на вертикалната права.

**Решение.** Цифрите на единиците на броевите $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7$ се редоследно 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3. Бројот 1 не може да биде на средина, бидејќи збирот на преостанатите броеви е 38, што поделено со 2 дава 19, но 19 не може да се добие како збир на два броја од оваа низа.

Ако е 3 во средина, збирот на преостанатите броеви е 36, а половина од тоа е 18. Овие броеви можеме да ги распоредиме така што цифрите 9 ќе бидат во кругчињата на вертикалната права, а преостанатите броеви во кругчињата на хоризонталната права. Еден ваков распоред е даден на цртежот десно. Постојат и други пополнувања ако се заменат местата на броевите кои завршуваат со иста цифра.



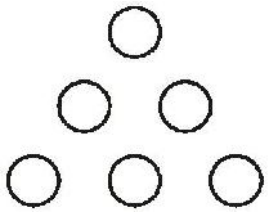

Ако 7 е во средина, збирот на преостанатите броеви е 32, а половина од тоа е 16. Значи, цифрите 7 и 9 ги ставаме во кругчињата на вертикалната права, а преостанатите броеви во кругчињата на хоризонталната права. Еден ваков распоред е даден на цртежот лево. Постојат и други пополнувања ако се заменат местата на броевите кои завршуваат со иста цифра.

Ако 9 е во средина, збирот на преостанатите броеви е 30, а половина од тоа е 15, но 15 не може да се добие како збир на два броја од оваа низа.

69. Дали е можно во кругчињата на цртежот десно да се распоредат броевите

$$3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$$

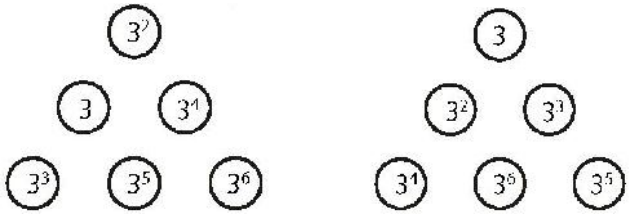
така што збирот на цифрите на единиците на секоја страна на триаголникот да е еднаков.



**Решение.** Цифрите на единиците на броевите $3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ соодветно се 3, 9, 7, 1, 3, 9. Цифрите кои се во темињата на триаголникот се собираат два пати, бидејќи припаѓаат на по две страници. Збирот на цифрите на единиците е

$$3+9+7+1+3+9=32,$$

што поделено со 3 дава остаток 2. Бидејќи збировите на цифрите на единиците на броевите на секоја страна на триаголникот е еднаков, заклучуваме дека збирот на тие збирови е делив со 3. Тоа значи дека муже последните цифри треба да најдеме три чиј збир поделен со 3 дава остаток 1. Можни се следниве тројки (1, 3, 3), (1, 9, 9), (1, 3, 9), (3, 3, 7), (3, 7, 9) и (7, 9, 9). Со непосредна проверка добиваме дека само тројките (1, 3, 3) и (7, 9, 9) даваат решенија. На овие решенија соодветствуваат распоредите на долните цртежи.




70. Во магичен квадрат збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на двете дијагонали е еднаков. На цртежот десно е прикажан квадрат во чии полиња се запишани неколку рационални броеви. Во празните полиња запиши ги потребните броеви така што квадратот ќе биде магичен.

| | | |
|---|---|---|
| 3.6 | | |
| | | $5\frac{2}{5}$ |
| $4\frac{4}{5}$ | | 2.4 |

**Решение.** Нека бараните броеви во магичниот квадрат ги означиме со $a,b,c,d,e$ (цртеж десно). Тогаш од првата колона и вториот ред добиваме $d=3,6+4\frac{4}{5}-5\frac{2}{5}=3$. Понатаму, збирот на броевите на дијагоналата е $3,6+3+2,4=9$, па сега лесно добиваме дека

| | | |
|---|---|---|
| 3.6 | $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ | $5\frac{2}{5}$ |
| $4\frac{4}{5}$ | $e$ | 2.4 |

$$c=9-3,6-4\tfrac{4}{5}=0,6,$$
$$b=9-3-4\tfrac{4}{5}=1,2,$$
$$a=9-3,6-1,2=4,2,$$
$$e=9-3-4,2=1,8.$$

| | | |
|---|---|---|
| 3.6 | 4.2 | 1.2 |
| 0.6 | 3 | $5\frac{2}{5}$ |
| $4\frac{4}{5}$ | 1.8 | 2.4 |

Пополнетиот магичен квадрат е прикажан на цртежот десно.

# 3. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Рампо помножил неколку природни броеви и добил производ 224. Колку броеви помножил Рампо, ако се знае дека најголемиот од нив е два пати поголем од најмалиот број?

   **Решение.** Имаме $224 = 2^5 \cdot 7$. Во разложувањето на прости множители, во најголемиот број степенот на бројот 2 е за еден поголем од степенот на бројот 2 во најмалиот множител. Јасно, ниту најмалиот ниту најголемиот множител не го содржат множителот 7, па затоа и двата се степени на бројот 2. Бидејќи најголемиот број мора да е поголем од 7, една можност е дека бараните броеви се 4, 7 и 8.

2. Марко помножил неколку природни броеви и добил производ 82080. Кои броеви ги помножил Марко ако се знае дека најголемиот од нив е точно два пати поголем од најмалиот.

   **Решение.** Имаме $82080 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$. Во разложувањето на прости множители, кај најголемиот број степенот на бројот 2 е за 1 поголем од степенот кај најмалиот број. Понатаму, ниту најголемиот ниту најмалиот број како множители ги имаат 5 и 19, а кај секој степенот на бројот 3 е еднаков. Бидејќи најголемиот број мора да е поголем од 19, единствена можност е броевите да се: 12, 15, 19 и 24.

3. Марко помножил неколку последователни непарни природни броеви и добил производ кој се завршува на цифрата 9. Колку броеви можел најмногу да помножи Марко?

   **Решение.** Од пет непарни последователни броеви еден завршува на цифрата 5, па затоа нивниот производ завршува на цифрата 5, што значи дека може да има најмногу 4 броја. Од друга страна, производот на четири последователни броја кои редоследно завршуваат на цифрите 7, 9, 1 и 3 има цифра на единиците 9. Значи, Марко помножил најмногу 4 броја.

4. Два броја се разликуваат за 8. Ако на помалиот број му се додаде 5, а на поголемиот број му се додаде 6, тогаш производот на добиените броеви е два пати поголем во однос на производот на дадените брое-

ви. Кои се тие броеви?

**Решение.** Производот на дадените броеви е $x(x+8)$, а производот на добиените броеви е $(x+5)(x+8+6)=(x+5)(x+14)$. Затоа важи

$$\begin{aligned}(x+5)(x+14)&=2x(x+8),\\ x^2+19x+70&=2x^2+16x,\\ x^2-3x-70&=0,\\ x^2-10x+7x-70&=0,\\ x(x-10)+7(x-10)&=0,\\ (x-10)(x+7)&=0.\end{aligned}$$

Бараните броеви се $x_1=10,\ x_1+8=18$ или $x_2=-7,\ x_2+8=1$.

5. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ за кои важи

$$\overline{abc}=\overline{aa}+\overline{bb}+\overline{cc}. \qquad (1)$$

**Решение.** Равенството (1) е еквивалентно на равенството

$$100a+10b+c=11a+11b+11c,$$

т.е. на равенството $89a=10c+b$. Јасно, $0<89a=10c+b<100$, па затоа $a=1$. Според тоа, $10c+b=89$, па како $c$ и $b$ се цифри, добиваме $c=8, b=9$. Според тоа, бараниот број е $\overline{abc}=198$.

6. Разликата на квадратите на два двоцифрени броја е 7920. Двата броја се огледални, т.е. едниот број се добива со замена на местата на цифрите на другиот број. Определи ги овие броеви.

**Решение.** Бараните броеви се $\overline{ab}=10a+b$ и $\overline{ba}=10b+a$, па затоа последователно добиваме

$$\begin{aligned}(10a+b)^2-(10b+a)^2&=7920,\\ (10a+b-10b-a)(10a+b+10b+a)&=7920,\\ 9(a-b)\cdot 11(a+b)&=7920,\\ (a-b)(a+b)&=80.\end{aligned}$$

Бидејќи $a>b$, и како $a$ и $b$ се цифри, добиваме дека $a+b\le 18$, па затоа од последното равенство следува дека

$$(a-b)(a+b)=5\cdot 16=8\cdot 10.$$

Ако $(a-b)(a+b)=5\cdot 16$, тогаш $a-b=5, a+b=16$, што не е дава решение, а ако $(a-b)(a+b)=8\cdot 10$, тогаш $a-b=8, a+b=10$, од каде добиваме $a=9, b=1$, па бараните бреови се 91 и 19.

7. Определи ги сите броеви помали од 100 кај кои цифрата на единиците е поголема од водечката цифра, а разликата на тој број и бројот запишан со истите цифри но во обратен редосле е квадрат на природен број.

**Решение.** Броеви помали од 100 се едноцифрени, двоцифрени и трицифрени. Кај едноцифрените броеви водечката цифра и цифрата на едениците е една иста цифра, па тие не го задоволуваат условот водечката цифра да е помала од цифрата на единиците. Значи, бараните броеви се двоцифрени и трицифрени.

Нека $\overline{xy}$ е бараниот број. Тогаш $x \neq 0$ (водечка цифра) и $y \neq 0$ (бидејќи $y > x$). Според тоа, $\overline{yx} - \overline{xy} = 10y + x - 10x - y = 9(y - x)$ треба да е квадрат на природен број. Од $y > x$ следува $y - x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, па затоа $9(y - x) \in \{9,18,27,36,45,54,63,72\}$. Во наведеното множество само 9 и 36 се точни квадрати, па затоа $y - x = 1$ или $y - x = 4$. Понатаму имаме

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 |
| $x$ | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $y - x$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

Бараните броеви се: 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 59, 48, 37, 26 и 15.

Нека $\overline{xyz}$ е бараниот трицифрен број. Според условот на задачата важи $x \neq 0$, $z \neq 0$ и $z > x$. Тогаш бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е $\overline{zyx}$, па имаме

$$\overline{zyx} - \overline{xyz} = 99(z - x) = 9 \cdot 11 \cdot (z - x).$$

За да горната разлика е точен квадрат на природен број потребно е $11 | z - x$, што не е можно, бидејќи $z - x$ е едноцифрен број. Значи, во овој случај задачата нема решение.

8. Збирот на седум различни природни броеви е 100. Дали од овие броеви може да се изберат три чиј збир не е помал од 50?

**Решение.** Може. Ако $a,b,c,d,e,f,g$ се дадените броеви чиј збир е 100 и ако $a < b < c < d < e < f < g$, тогаш збирот на трите броја $e, f, g$ не е помал од 50. Навистина, ако $d \geq 15$, тогаш

$$e + f + g \geq 16 + 17 + 18 = 51,$$

а ако $d \leq 14$, тогаш

$$a+b+c+d \le 11+12+13+14 = 50$$

и во овој случај $e+f+g \ge 50$.

9. Определи ја најмалата дропка која е поголема од $\frac{1}{2005}$, со која може да се поделат дропките $\frac{8}{15}, \frac{12}{35}$ и $\frac{20}{21}$, така што во сите три случаи добиениот количник е природен број.

**Решение.** Бараме дропка $\frac{a}{b}$, $\text{NZD}(a,b)=1$ таква што $\frac{8}{15}\cdot\frac{b}{a}, \frac{12}{35}\cdot\frac{b}{a}$ и $\frac{20}{21}\cdot\frac{b}{a}$ се природни броеви. Според тоа, треба да е

$$b = n\cdot \text{NZS}(15,35,21) = 105n.$$

Ја бараме најмалата можна дропка, па затоа $a=1$. Понатаму, потребно е $\frac{a}{b} > \frac{1}{2005}$, од каде добиваме $\frac{1}{105n} > \frac{1}{2005}$, односно $105n < 2005$. Оттука добиваме $n < \frac{401}{21}$, и како $n$ е природен број имаме $n < 20$. Конечно, најмалата дропка се добива кога $n$ е најголемиот можен број и тоа е $n=19$, што значи дека бараната дропка е $\frac{a}{b} = \frac{1}{19\cdot 105} = \frac{1}{1995}$.

10. Определи го најмалиот природен број поголем од 1 кој не може да се добие така што некој природен број ќе се зголеми за некој цел број проценти од 1% до 100%.

**Решение.** Броевите од 100 до 200 се добиваат кога бројот 100 редоследно ќе се зголемува за број проценти од 1 до 100.

Броевите од 51 до 100 се добиваат кога бројот 50 редоследно ќе се зголемува за парен број проценти од 2 до 100.

Броевите од 26 до 50 се добиваат кога бројот 25 редоследно ќе се зголемува за бројот проценти деливи со 4 (од 4 до 100).

Броевите од 21 до 25 ќе се добијат ако бројот 20 редоследно се зголемува за 5, 10, 15, 20 и 25 проценти.

Броевите од 11 до 20 ќе се добијат кога бројот 10 редоследно ќе се зголемува за бројот проценти деливи со 10 (од 10 до 100).

Броевите од 6 до 10 ќе се добијат кога бројот 5 редоследно ќе се зголемува за бројот проценти деливи со 20 (од 20 до 100).

Бројот 5 се добива кога бројот 4 ќе се зголеми за 25%, бројот 4 ќе се добие кога бројот 2 ќе се зголеми за 100%, бројот 3 ќе се добие кога бројот 2 ќе се зголеми за 50% и бројот 2 ќе се добие кога бројот 1 ќе се зголеми за 100%.

Броевите 202, 204, 206, 208, 210 се добиваат со зголемување на бројот 200 соодветно за 1, 2, 3, 4, 5 проценти. Бројот 201 се добива со зголемување на бројот 134 за 50%, бројот 203 се добива со зголемување на бројот 145 за 40%, бројот 205 со зголемување на бројот 164 за 25%, бројот 207 со зголемување на бројот 180 за 15%, бројот 209 со зголемување на бројот 190 за 10%.

Да претпоставиме дека 211 може да се добие со зголемување на некој број $m$ за $n$ проценти, каде $n$ е природен број, $1 \le n \le 100$. Тогаш $m\frac{100+n}{100} = 211$, односно $m(100+n) = 211 \cdot 100$, што не е можно, бидејќи 211 е прост број, а бројот на левата страна е производ на два броја поголеми од 1 и помали од 211. Значи, најмалиот број кој ги задоволува условите на задачата е бројот 211.

*Забелешка.* Некои од броевите од 2 до 210 може да се добијат на повеќе начини. Обиди се тоа да го направиш за барем пет броја.

11. Илија запишал пет цели броеви, а Матео за секој од овие два броја го пресметал нивниот збир. На тој начин ги добил следниве десет броеви: 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120, 121. Кои броеви ги запишал Илија?

**Решение.** Бидејќи сите збирови се меѓусебно различни и броевите кои ги запишал Илија се различни. Нека запишаните броеви се $a, b, c, d, e$ при што важи

$$a < b < c < d < e. \qquad (1).$$

Бидејќи секој од запишаните броеви се појавува во точно четири збира, заклучуваме дека збирот на сите броеви е четири пати помал од збирот на добиените збирови, односно $a+b+c+d+e = \frac{1156}{4} = 289$.

Понатаму, јасно е дека

$$a+b = 110,$$
$$a+c = 112,$$
$$c+e = 120,$$
$$c+d = 121.$$

Ако ги соберме првото и последното равенство добиваме

$$a+b+d+e = 231,$$

па затоа $c = 289 - 231 = 58$. Сега, редоследно наоѓаме

$a = 112 - 58 = 54$, $b = 110 - 54 = 56$, $e = 120 - 58 = 62$, $d = 121 - 62 = 59$.

12. Илија запишал пет цели броеви, а Марко за секои три од тие броеви го

пресметал нивниот збир. На тој начин ги добил следните 10 броеви:

20, 25, 27, 29, 30, 31, 34, 36, 39, 41.

Кои броеви ги запишал Илија?

**Решение.** *Прв начин*. Бидејќи сите збирови кои ги добил Марко се различни, заклучуваме дека сите броеви кои ги запишал Илија се различни. Нека Илија ги запишал броевите $a,b,c,d,e$, при што важи $a<b<c<d<e$. Секој од бараните броеви се појавува во шест збирови, па затоа

$$a+b+c+d+e=\frac{20+25+27+29+30+31+34+36+39+41}{6}=52.$$

Знаејќи го збирот на петте дадени броеви и збирот на некои три броја можеме да го пресмеаме збирот на другите два броја. Така ги добиваме збировите

11, 13, 16, 18, 21, 22, 23, 25, 27, 32.

Сега, како во претходната задача ги наоѓаме броевите 4, 7, 9, 14, 18, кои ги запишал Илија.

*Втор начин*. При истите ознаки како во првиот начин на решавање, на потполно идентичен начин добиваме

$$a+b+c+d+e=52.$$

Понатаму, имаме

$$a+b+c=20,$$
$$a+b+d=25,$$
$$b+d+e=39,$$
$$c+d+e=41.$$

Од првата и четвртата равенка следува $a+b+2c+d+e=61$, па затоа $c=61-52=9$. Слично, од првата и третата равенка добиваме $52+b=59$, т.е. $b=7$, од втората и четвртата $d=14$. Сега, лесно наоѓаме $a=4, e=18$.

13. Во разговор Драган му соопштил на Пајко: „Мојот дедо и јас неодамна прославивме роденден во ист ден. Моите години и годините на мојот дедо се изразуваат со исти цифри, а разликата на тие два броја е еднаква на нашиот куќен број.“ Потоа Драган му го соопштил на Пајко својот куќен број, по што Пајко брзо ги пресметал годините на Драган и неговиот дедо. При разумна претпоставка дека Драган има помалку од 100 години, определи го куќниот број на Драган.

**Решение.** Бројот на годините на Драган може да се запише во видот $10x+y$, каде $x$ и $y$ се цифри. Според тоа, дедото на Драган има

$10y + x$ години. Јасно, $x < y < 10$, па од условот на задачата добиваме дека куќниот број на Драган е $10y + x - (10x + y) = 9(y - x)$. Пајко, од кажувањето на Драган го дознал куќниот број, значи и разликата $y - x$. Бидејќи од знаењето на оваа разлика Пајко можел да ги определи броевите $x$ и $y$, заклучуваме дека овие броеви се еднозначно определени со разликата. Разликата може да е еден од броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Притоа само равенката $y - x = 8$ има единствено решение $x = 1, y = 9$. Значи, дедото има 91 година, Драган има 19 години, а нивниот куќен број е 72.

14. Аритметичката средина на четири броеви е 20. По додавањето на уште еден број, аритметичката средина на петте броеви ќе биде 18. Кој е додаденият број?

**Решение.** Бидејќи аритметичката средина на четирите броја е 20, збирот на четирите броја е 80, односно

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 80.$$

Аритметичката средина на петте броја е 18, односно

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \cdot 18, \text{ т.е. } 80 + x_5 = 90.$$

Одовде $x_5 = 10$.

15. Во текот на учебната година Коста правел неколку тестови по математика и притоа освоил одреден број поени. Ако Коста на следниот тест по математика освои 89 поени, тогаш просечниот број на освоени поени од тестовите ќе биде 91. Но, ако на следниот тест освои 64, тогаш просечниот број на освоени поени ќе биде 86. Колку тестови по математика направил Коста досега?

**Решение.** Нека $n$ е бројот на досега направени тестови по математика, а $x$ е вкупниот број на освоени поени од досегашните тестови. Ако на следниот тест по математика Коста освои 89 поени, тогаш вкупниот број на освоени поени ќе биде $x + 89$, а бројот на тестови $n + 1$. Според тоа, ја добиваме равенката $\frac{x+89}{n+1} = 91$. Доколку пак на следниот тест по математика Коста освои 64 поени, тогаш вкупниот број на освоени поени ќе биде $x + 64$, а бројот на тестови останува ист, т.е $n + 1$. Тогаш ја добиваме равенката $\frac{x+64}{n+1} = 86$. Ако ги поделиме овие равенки добиваме $\frac{x+89}{x+64} = \frac{91}{86}$, од каде наоѓаме $x = 366$. Конечно,

$n+1=\frac{366+89}{91}$, т.е. $n=4$. Значи, Коста направил 4 тестови по математика.

16. Рампо тргнал со автомобил од Прилеп за Битола и треба да помине пат долг $42\,km\,76\,m$. Колку пати ќе се заврти тркалото на автомобилот ако дијаметарот на тркалото е $0,5\,m$?

**Решение.** Дијаметарот на кругот е $d=0,5\,m$, па затоа неговиот периметар е $\text{®}\,d\approx 1,57\,m$. Должината на патот е $42\,km\,76\,m=42076\,m$, што значи дека тркалото ќе се заврти: $42076:1,57\approx 26800$ пати.

17. По неколку дождливи денови водостојот на реката Вардар се зголемил за 25%. Утредента се намалил за 10%, за да третиот ден по еднодневно врнење се зголемил за 10%. Четвртиот ден водостојот на Вардар се намалил за 20%. Дали по четвртиот ден водостојот на Вардар бил поголем или помал отколку на почетокот? Колкава е таа промена во проценти?

**Решение.** Нека на почетокот водостојот на Вардар бил $x$ метри. По првото зголемување водостојот бил $x+25\%x=1,25x$ метри. По првото намалување водостојот бил $1,25x-10\%\cdot 1,25x=1,25x-0,125x$ $=1,125x$ метри. По второто зголемување водостојот на реката Вардар бил $1,125x+10\%\cdot 1,125x=1,125x+0,1125x=1,2375x$ метри. Конечно, по второто намалување, односно по четвртиот ден, водостојот на Вардар бил: $1,2375x-20\%\cdot 1,2375x=1,2375x-0,2475x=0,99x$. Значи, водостојот на Вардар по четвртиот ден се намалил за 1%.

18. Моторциклист и велосипедист тргнале истовремено од местото $A$ во местото $B$. Велосипедистот застанал кога поминал половина од патот и продолжил понатаму во моментот кога на моторциклистот му преостанала една третина од патот до $B$. По доаѓањето во $B$, моторциклистот одма тргнал назад. Дали побрзо ќе стигне моторциклистот во $A$ или велосипедистот во $B$?

**Решение.** Со $x$ да го означиме растојанието меѓу $A$ и $B$. Бидејќи велосипедистот поминал третина од ова растојание пред моторциклистот да помине две третини, неговата брзина е поголема од половина од брзината на моторциклистот, т.е. $v_V>\frac{v_m}{2}$. Од моментот кога велосипедистот повторно тргнал, мотроциклистот до враќањето во $A$

треба да помине пат $\frac{4x}{3}$, а велосипедистот треба да помине пат $\frac{2x}{3}$. Притоа на велосипедистот да стигне во $B$ му е потребно време $\frac{2x}{3v_v}$, а на моторциклистот му е потребно време $\frac{4x}{3v_m}$. Од $v_v > \frac{v_m}{2}$ следува $\frac{2x}{3v_v} < \frac{4x}{3v_m}$, што значи дека велосипедистот побрзо ќе стигне во $B$ отколку моторциклистот во $A$.

19. Моторциклист и велосипедист тргнале истовремено од $A$ во $B$. Откако поминал третина од патот од $A$ до $B$, велосипедистот застанал и продолжил кога на моторциклистот му останало да помине третина од патот до $B$. Моторциклистот стигнувајќи во $B$, без застанување тргнал назад кон $A$. Кој ќе стигне побрзо: моторциклистот во $A$ или велосипедистот во $B$, ако немало други застанувања и постојано возеле секој со своја константна брзина?

**Решение.** Според условот на задачата велосипедистот потрошил помалку време да помине $\frac{1}{3}$ од патот од $A$ до $B$, отколку што потрошил моторциклистот да помине $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ од патот од $A$ до $B$. Тоа заначи дека на велосипедистот му е потребно помалку време да помине $2\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ од патот од $A$ до $B$, отколку што му е потребно на моторциклистот да помине $2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ од истиот пат. По продолжување на патот за да стигне до $B$ велосипедистот треба да помине пат еднаков на $\frac{2}{3}$ од патот од $A$ до $B$, а моторциклистот за да стигне во $A$ треба да помине $\frac{4}{3}$ од патот од $A$ до $B$. Значи, велосипедистот побрзо ќе стигне во $B$ отколку моторциклистот во $A$.

20. Даријан и Ведран со своите моторцикли извозеле од Скопје до Охрид. Даријан првата третина од патот ја возел со брзина од 20 километри на час, втората третина со брзина од 30 километри на час, а последната третина со брзина од 40 километри на час. Ведран првата третина од времето ја возел со брзина од 20 километри на час, втората третина од времето со брзина од 30 километри на час, а последната третина од времето со 40 километри на час. Кој од нив двајца побрзо стигнал во Охрид?

**Решение.** Ги пресметуваме средните брзини на движење на двајцата. Означувајќи ги со $v_1, v_2, v_3$ редоследно брзините од 20 километри на час, од 30 километри на час, односно од 40 километри на час, за Даријан имаме:

$$\frac{3s}{v_{sr}} = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} + \frac{s}{v_3},$$

каде $s$ е должина на третина од патот Скопје-Охрид. Така

$$v_{sr}(D) = \frac{3}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}} = 27,7\,km/h.$$

Од друга страна, за Ведран имаме: $3tv_{sr} = v_1t + v_2t + v_3t$, каде $t$ е третина од времетрањето на неговото патување. Значи,

$$v_{sr}(V) = \frac{v_1+v_2+v_3}{3} = 30\,km/h.$$

Заклучуваме дека Ведран побрзо стасал во Охрид.

21. Група работници за 4 дена ја проверила сообраќајната сигнализација на еден на еден магистрален пат. Првиот ден ја провериле сигнализацијата на $\frac{1}{17}$ од патот, вториот ден провериле на три пати подолг пат од првиот ден, третиот ден $60\,km$ повеќе од првиот ден, а четвртиот ден провериле онолку километри колку што провериле првиот и вториот ден заедно. Определи ја должината на овој магистрален пат.

**Решение.** Со $x$ да ја означиме должината на магистралниот пат. Првиот ден работниците провериле $\frac{1}{17}x$, вториот ден проверила $\frac{3}{17}x$, третиот ден провериле $\frac{3}{17}x + 60$ и четвртиот ден провериле $\frac{1}{17}x + \frac{3}{17}x = \frac{4}{17}x$. Значи, $\frac{1}{17}x + \frac{3}{17}x + \frac{3}{17}x + 60 + \frac{4}{17}x = x$, од каде добиваме $\frac{11}{17}x + 60 = x$, односно $\frac{6}{17}x = 60$. Значи, $x = \frac{17}{6}\cdot 60 = 179\,km$.

22. Две локомотиви се движат по праволиниски заемно нормални пруги кон точката на вкрстувањето. Првата од раскрсницата е оддалечена 80 километри и се движи со брзина од $30\,km/h$, а втората е оддалечена 40 километри и се движи со брзина од $40\,km/h$. По кое време растојанието меѓу локомотивите ќе биде најмало и кое е тоа растојание?

**Решение.** Точките во кои моментално се наоѓаат локомотивите и точката на вкрстување се темиња на правоаголен триаголник. По време $t$ катетите на триаголникот ќе бидат $80-30t$ и $40-40t$. Расто-

јанието меѓу локомотивите ќе биде

$$s=\sqrt{(80-30t)^2+(40-40t)^2}=\sqrt{(50t-80)^2+40^2}\ .$$

Значи, растојание ќе биде најмало кога $50t-80=0$, односно кога $t=\frac{8}{5}\,h=1\,h\,36\,\min$ и истото ќе изнесува $s=40\,km$.

23. Симона излегла од училиштето по 12 часот. Тогаш стрелките на нејзиниот часовник зафаќале агол од $55^\circ$. Дома стигнала пред 13 часот и тогаш стрелките на нејзиниот часовник зафаќале агол од $85^\circ$. Колку време и требало на Симона да стигне од училиштето до дома?

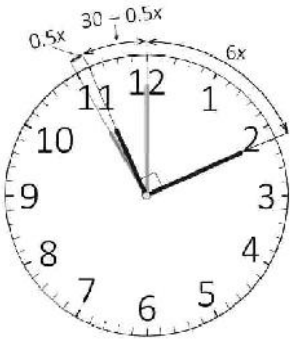
**Решение.** За 1 час минутната стрелка опишува $360^\circ$, а часовната $30^\circ$. Значи, за 1 минута минутната стрелка опишува $360^\circ:60=6^\circ$, а часовната $30^\circ:60=0{,}5^\circ$. Симона изглегла од училиште во 12 часот и $x$ минути, па затоа минутната стрелка опишала $6x^\circ$, а часовната $0{,}5x^\circ$. Аголот меѓу стрелките е $55^\circ$, па затоа $6x^\circ-0{,}5x^\circ=55^\circ$, од каде наоѓаме $5{,}5x=55$, односно $x=10$. Значи, Симона тргнала од училиште во $12\,h\,10\,\min$. На ист начин пресметуваме дека кога стигнала дома $360^\circ-6x^\circ+0{,}5x^\circ=85^\circ$, т.е. $x=50$. Според тоа, Симона дома стугнала во $12\,h\,50\,\min$. Конечно, таа од училиште до дома одела 40 минути.

24. Два пешаци тргнале точно во моментот кога Сонцето изгреало, првиот од местото $A$ во местото $B$, а вториот од $B$ во $A$. Секој одел со постојана брзина. На пладне се сретнале и продолжиле понатаму без застанување. Првиот стигнал во $B$ во 4 часот попладне, а вториот во $A$ во 9 часот навечер. Во колку часот Сонцето изгреало тој ден?

**Решение.** Со $x$ да го означиме времето од изгревање на Сонцето до пладне (изразено во часови). Првиот пешак одел $x$ часови до пладне и 4 часови после пладне, а вториот пешак одел $x$ часови до пладне и 9 часови после пладне. Да забележиме дека за секој пешак односот на времето е еднаков на односот на должината на патот до и по нивниата средба, т.е. $x:9=4:x$. Од добиената пропорција наоѓаме $x=6$. Според тоа, од изгревањето на Сонцето до пладне поминале 6 часа, т.е. Сонцето изгреало во 6 часот.

25. Стрелките на ѕидниот часовник во периодот од 11 до 12 часот точно во два моменти определуваат прав агол. Определи колку време поминало меѓу овие два моменти.

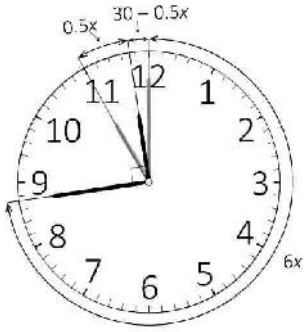
**Решение.** Нека $x$ минути по 11 часот стрелките на часовникот за прв пат формираат прав агол. За една минута минутната стрелка поминува $\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$, па за $x$ минути таа ќе помине $(6x)^\circ$. За еден час часовната стрелка поминува $\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$, па зат една минута таа ќе помине $\frac{30^\circ}{60}=0{,}5^\circ$. Значи, за $x$ минути часовната стрелка ќе помине $(0{,}5x)^\circ$.




Часовната стрелка тргнува од положба 11, а минутната од положба 12 (цртеж десно), па затоа тие за прв пат зафаќаат прав агол кога важи

$$30-0{,}5x+6x=90,$$

од каде добиваме $5{,}5x=60$, односно $x=\frac{600}{55}=10\frac{10}{11}\min$. Според тоа, меѓу 11 и 12 часот стрелките за прв пат ќе зафаќаат прав агол во $11\,h\,10\frac{10}{11}\min$.




На сличен начин определуваме кога стрелките по втор пат ќе зафаќаат прав агол (цртеж десно). Притоа важи

$$30-0{,}5x+6x=270$$

од каде добиваме $5{,}5x=240$, односно $x=\frac{2400}{55}=43\frac{7}{11}\min$. Според тоа, меѓу 11 и 12 часот стрелките за прв пат ќе зафаќаат прав агол во $11\,h\,43\frac{7}{11}\min$.

Конечно, меѓу двата временски моменти поминале

$$43\tfrac{7}{11}-10\tfrac{10}{11}=32\tfrac{8}{11}\min=32\min\tfrac{8\cdot 60}{11}\,s\approx 32\min 44\,s.$$

26. Седум џуџиња за 7 дена може да сосидаат ѕид од цигли со должина $70\,m$ работејќи по 7 часа на ден. Едно џуџе секој ден забушавало, па кога одело по цемент одмарало под сенка и тоа: првиот ден 1 час, вториотден 2 часа, третиот ден 3 часа, ..., седмиот ден 7 часа, а осмиот ден не дошло на работа. Колку време требало џуџињата да го сосидаат

ѕидот, ако преостанатите џуџиња работеле совесно по 7 часа на ден? (Џуџињата работат исто, за ист временски период секое џуџе завршува исто работа.)

**Решение.** Џуџето кое забушавало во текот на седумте дена не работело $1+2+3+...+7=28$ часа. Значи, за да ги одработат оние 28 часа кои не ги одработило џуџето што забушавало, секое од преостанатите 6 џуџиња треба осмиот ден да работи $26:6=4\frac{2}{3}\,h=4\,h\,40\,\min$. Според тоа, целата работа ќе биде завршена за 7 дена 4 часа и 40 минути.

27. Една зграда може да ја изѕидаат 12 ѕидари за 25 дена. Ако по 5 дена на друга работа се префрлат 4 ѕидари, уште колку дена им се потребни на преостанатите ѕидари да ја довршат работата?

**Решение.** Од условот на задачата следува дека работата што ја завршуваат 12 ѕидари за 20 дена треба да ја завршат $12-4=8$ ѕидари за $x$ денови. Според тоа, во првиот случај за завршувањето на работата се потребни $12\cdot 20=240$ работни дена на еден ѕидар, а во вториот случај се потребни $8x$ работни денови на еден ѕидар. Затоа $8x=240$, од каде следува $x=30$ денови.

28. Една зграда можат да ја изѕидаат 12 ѕидари за 35 дена. По 14 дена ѕидање 3 ѕидри биле префрлени на друга работа. Потоа по 8 дена 1 ѕидар бил вратен да работи на зградата. Уште колку време им е потрено на ѕидарите да ја завршат работата?

**Решение.** За да се изѕида зградата по требно е 1 ѕидар да работи $12\cdot 35=420$ дена, односно потребни се 420 дневници. Првите 14 дена работеле 12 работници, па се реализирани $12\cdot 16=168$ дневници. Следните 8 дена се реализирани $(12-3)\cdot 8=72$ дневници, па за завршување на зградата треба да се реализираат $420-(168+72)=180$ дневници. Бидејќи сега ѕидаат 10 ѕидари, тие работата ќе ја завршат уште за $180:10=18$ дена.

29. Секој час Максим прочитува еднаков број страници од една книга. Тој прво пресметал колку страници треба да чита секој час за да книгата ја прочита во точно зададен рок. Потоа пресметал дека со читање на книгата ќе заврши 2,5 часа пред рокот ако секој час прочита по две страници повеќе од планираното. Ако секој час прочита по четири страници повеќе од планираното, тогаш книгата ќе ја прочита 4,5 часа

пред рокот. Колку страници има книгата и колку време му треба на Максим за да ја прочита целата книга?

**Решение.** Нека $x$ е бројот на страници кои Максим ги прочитува секој час, а $y$ е бројот на часовите (рокот) за да ја прочита книгата. Значи, книгата има $xy$ страници. Ако секој час чита по 2 страници повеќе, целата книга ќе ја заврши за $y-2,5$ часа, па затоа важи $(x+2)(y-2,5)=xy$, односно $2y=2,5x+5$. Ако секој час чита по 4 страници повеќе, тогаш книгата ќе ја заврши за $y-4,5$ часа, па затоа важи $(x+4)(y-4,5)=xy$, односно $4y=4,5x+18$. Ако ја помножиме со 2 равенката $2y=2,5x+5$, добиваме $4y=5x+10$, па затоа важи $5x+10=4,5x+18$, од каде добиваме $x=16$. Сега, ако замениме во $2y=2,5x+5$, добиваме $2y=40+5$, односно $y=22,5$. Значи, Максим книгата ќе ја прочита за 22,5 часа и таа има $16\cdot 22,5=360$ страници.

30. Мартин е постар од своите ти сестри Ана, Ивана и Елена по 8, 10 и 13 години, соодветно. По една година, збирот на годините на сестрите на Мартин ќе биде за 39 поголем од годините на Мартин. Колку години има Мартин денес?

**Решение.** *Прв начин.* Нека Мартин денес има $x$ години. Тоа значи дека неговите сестри денес имаат $x-8, x-10$ и $x-13$ години. По една година, Мартин ќе има $x+1$ година, а неговите сестри ќе имаат $x-7, x-9$ и $x-12$ години. Затоа, $x+1+39=x-7+x-9+x-12$, од каде добиваме $x=34$. Значи, Мартин денес има 34 години.

*Втор начин*. Нека Мартин денес има $x$ години. Тоа значи дека неговите сестри денес имаат $x-8, x-10$ и $x-13$ години. По една година збирот на годините на сестрите се зголемува за 3, а годините на Мартин за 1, па затоа денес збирот на годините на сестрите е за $39-3+1=37$ поголем од годините на Мартин. Според тоа,

$$x-8+x-10+x-13=x+37,$$

од каде добиваме $x=34$. Значи, Мартин денес има 34 години.

31. Таткото и мајката заедно имаат 80 години. Нивните три деца имаат 9, 7 и 2 години. По неколку години збирот на годините на децата ќе биде еднаков на половина од збирот на годините на таткото и мајката. Колку години тогаш ќе има мајката, а колку таткото ако мајката е шест години помлада од таткото?

**Решение.** Нека денес мајката има $m$ години. Тогаш таткото има $m+6$ години, па затоа $m+m+6=80$, од каде добиваме $m=37$. Значи, денес мајката има 37, а таткото има 43 години.
Нека по $x$ години збирот на годините на децата е еднаков на половина од збирот на годините на таткото и мајката. Тоа значи дека $(9+7+2)+3x=\frac{80+2x}{2}$, од каде добиваме $x=11$. По 11 години мајката ќе има 48, а таткото ќе има 54 години.

32. Тревата на ливадата расте подеднакво густо и брзо. Познато е дека 60 крави може тревата на ливадата да ја испасат за 24 дена, а 30 крави за 60 дена. Колку крави можат да ја испасат тревата на ливадата за 100 дена?
**Решение.** Нека $p$ е количеството на тревата кое една крава го изедува за еден ден. За 24 дена 60 крави ќе изедат $60\cdot 24=1440p$, а за 60 дена 30 крави ќе изедат $30\cdot 60=1800p$ трева. Според тоа, за 36 дена на ливадата израстува $1800-1440=360p$ трева, односно $10p$ секој ден. На почетокот на ливадата имало $1440p-24\cdot 10p=1200p$ трева. До крајот на 100 дена вкупното количество ќе биде $1200p+100\cdot 10p=2200p$ трева. Значи, бараниот број крави е $\frac{2200}{100}=22$.

33. За време на појадокот секој член на едно семејство во својата чаша турил и кафе и млеко, со што направил точно $1{,}8\,dl$ бело кафе. За правењето на белото кафе секој од нив ги измешал кафето и млекото во друг однос. Еден член на семејството во својата чаша турил една осмина од вкупното количество кафе и една петтина од вкупното количество млеко. Колку членови има ова семејство, ако семејството го испило целото количество млеко и целото количество кафе:
**Решение.** Нека семејството има $n$ членови, кои испиле $k$ количество кафе и $m$ количество млеко. Од условот на задачата следува $k+m=1{,}8n$ и $\frac{1}{8}k+\frac{1}{5}m=1{,}8$, односно $5k+5m=9n$ и $5k+8m=72$. Понатаму, бидејќи секој член на семејството турил и кафе и млеко, добиваме $k>0, m>0$. Сега, бидејќи се спомнува еден од членовите на семејството, тоа брои најмалку два члена, т.е. $n\geq 2$. Ако ги одземеме добиените равенки наоѓаме $3m=72-9n$, т.е. $m=24-3n$. Да ги разгледаме можните распределби на кафе и млеко во зависност од

бројот на членовите на семејството.

| $n$ | $1{,}8n$ | $m=24-3n$ | $k=1{,}8m-n$ | Да/не |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3,6 | 18 | $-14{,}4$ | Не, $k<0$ |
| 3 | 5,4 | 15 | $-9{,}6$ | Не, $k<0$ |
| 4 | 7,2 | 12 | $-4{,}8$ | Не, $k<0$ |
| 5 | 9 | 9 | 0 | Не, $k=0$ |
| 6 | 10,8 | 6 | 4,8 | Да |
| 7 | 12,6 | 3 | 9,6 | Да |
| 8 | 14,4 | 0 | 14,4 | Не, $m=0$ |
| 9 | 16,2 | $-3$ | 19,2 | Не, $m<0$ |
| 10 | 18 | $-6$ | 24 | Не, $m<0$ |

За $n=2,3,4,5$ имаме $k\le 0$, а за $n\ge 8$ имаме $m\le 0$, што не ги задоволува условите на задачата. Значи, ова семејство може да има 6 или 7 членови.

За $n=7$ имаме $m=3, k=9{,}6$, а за $n=6$ имаме $m=6, k=4{,}8$. На читателот за вежба му оставаме во двата случаја да даде пример за можната распределба на кафето и млекото.

34. Резервоар со вода во еден национален парк секој ден се надополнува со 1 хектолитар вода. Едно стадо од 38 слонови, ќе ја испие целата вода од резервоарот за еден ден, додека пак стадо од 8 слонови ќе ја испие целата вода од резервоарот за 5 дена. Ако секој слон просечно пие исто количество вода, за колку дена, почнувајќи од денес, еден слон може да ја испие целата вода од резервоарот? (Слоновите почнуваат да пијат вода од резервоарот откако тој ќе биде надополнет со вода.)

**Решение.** Секој ден количеството на вода во резервоарот се зголемува за 1 хектолитар, односно за 100 литри вода. Во еден ден количеството на вода во резерварот е $V+100$, каде $V$ ја означува количината на вода која била во резервоарот. Според првиот услов, тоа е количината на вода која дневно ја пијат 38 слонови. Ако со $s$ ја означиме количината на вода (во литри) која ја пие еден слон дневно, тогаш од условите на задачата може да го формираме следниот систем равенки:

$$\begin{cases} V+100=38s \\ V+5\cdot 100=5\cdot 8s \end{cases}$$

чие решение е $s=200, V=7500$.

Значи, во резервоарот имало $7500\,l$ вода. Бидејќи во резервоарот секој ден се дотураат $100\,l$ вода, а еден слон просечно дневно пие $200\,l$ вода, заклучуваме дека за еден ден еден слон го намалува количеството вода за $100\,l$. Затоа тој резервоарот ќе го испразни за $7500:100=75$ дена.

35. а) Sиден часовник отчукува онолку пати колку што покажува стрелката на часовникот. Покрај тоа, секој половина час часовникот отчукува еднаш. Драган влегол во собата и по извесно време излегол од неа, во моментот кога во собата влегувал Павле. Во моментот кога од собата излегувал Павле, во собата влегувал Стојан. Секој од нив тројца во собата поминал исто време и тоа повеќе од 30 минути, а помалку од 2 часа. Секој од нив додека бил во собата случнал еднаков број отчукувања на часовникот. Определи го тој број.
б) Во друга прилика тројцата другари во собата биле по 140 минути во текот на еден ден, секој во различно време и секој додека бил во собата слушнал еднаков број отчукувања на часовникот. Определи го тој број.
**Решение.** а) Бидејќи секој поминал во собата повеќе од 30 минути, а помалку од 2 часа, бројот на периодите кога часовникот отчукувал може да е од 1 до 4.
Во случај да биле 2,3 или 4 периоди на отчукувања, а како временските интервали се еднакви и следуваат еден по друг, не е можно да имаме еднаков број на отчукувања во секој интервал, бидејќи бројот на отчукувањата расте со секој следен полн час.
Останува да го разгледаме случајот кога секој слушнал едно огласување на часовникот. Тоа е можно само ако секој од нив слушнал по едно отчукување. Таква можност имаме, на пример, ако Драган во собата е од 12:10 до 12:45, Павле од 12:45 до 13:20, а Стојан од 13:20 до 13:55. Во овој случај секој од нив во собата поминал по 35 минути и за тоа време слушнал точно едно отчукување начасовникот.
б) Треба да имаме предвид дека тројцата другари биле во собата по 140 минути во текот на еден ден, т.е. во интервал од 24 часа, сметајќи од полноќ до полноќ.
Бидејќи секој од нив поминал по 140 минути, бројот на интервалите во кои се огласувал часовникот за тоа време е еднаков на 4 или 5. Притоа првото огласување можело да почне на половина час или на цел час. На пример, вкупно 23 отчукувања во период од 140 минути

може да се слушнат во периодите: од 05:55 до 08:15, од 09:05 до 11:25, од 09:35 до 11:55, од 17:55 до 21:15, од 21:05 до 23:25, од 21:35 до 23:55. Некои од овие интервали се преклопуваат, но меѓу нив може да се изберат дури четири од кои никои два не се преклопуваат.

Проблемот се сведува на тоа во еден ден (од полноќ до полноќ) да се најдат три временски интервали со должини од по 140 минути така што во секој од нив се слуша еднаков број на отчукувања (да го означиме со $n$), при што никои два интервала не се преклопуваат и да го определиме бројот на отчукувањата во еден таков интервал.

Притоа можеме да земеме интервалите во кои има 4 интервали на отчукувања да почнуваат 5 минути по полн час или 35 минути по полн час, а оние во кли имаме 5 интервали на отчукувања на часовникот да почнуваат 25 минути по полн час или 55 минути по полн час. Со анализа на сите такви интервали и нивно споредувања, наоѓаме дека можни вредности за $n$ се; 15, 16, 17, 20, 23 и 26.

Веќе видовме дека за $n = 23$ постојат повеќе можности за избор на три такви интервали. На пример, тоа може да се интервалите:

од 05:55 до 08:15, од 09:05 до 11:25, од 17:55 до 21:15 или

од 05:55 до 08:15, од 09:35 до 11:55, од 21:05 до 23:25, итн.

Слично, наоѓаме дека по 17 отчукувања може да се слушнат во интервалите:

од 11.55 до 14.15, од 15.55 до 18.15, од 18.35 до 20.55 или

од 06.35 до 08.55, од 11.55 до 14.15, од 18.05 до 20.25 итн.

36. Во едно семејство има четири члена. Ако на Маја и се удвостручи степендијата, тогаш приходот на семејството ќе се зголеми за 7%, ако на мајката и се удвостручи платата, приходот на семејството ќе се зголеми за 30%, ако на таткото му се удвостручи платата, приходот на семејството ќе се зголеми за 35%. За колку проценти ќе се зголеми приходот на семејството ако на дедото му се удвостручи пензијата?

**Решение.** *Прв начин*. Ако на сите членови на семејството им се удвостручи приходот, тогаш приходот на семејството ќе се зголеми за 100%. Од овие 100% на Маја отпаѓаат 7%, на мајката 30%, на таткото 35% и на дадеото отпаѓаат $100 - (7 + 30 + 35) = 28\%$.

*Втор начин*. Ако на Маја и се удвостручи степендијата, тогаш приходот на семејството се зголемува за износот на нејзината степендија. Според тоа, степендијата на Маја е 7% од приходот на семејството. Аналогно, 30% од приходот е платата на мајката и 35% од приходот е

платата на таткото. Според тоа, $100-(7+30+35)=28\%$ од приходот на семејството е пензијата на дедото, па со нејзиното удвостручување приходот на семејството ќе се зголеми за 28%.

37. Кога продавачот Доне ја намалил цената на јаболката за 30% Марија за 350 денари можела да купи 3 килограми јаболка повеќе отколку пред намалувањето на цената. Определи ја цената на еден килограм јаболка пред намалувањето на цената.
**Решение.** Нека $x$ денари е цената на $1\,kg$ јаболка пред намалувањето на цената. По намалувањето на цената $1\,kg$ чини $0,7x$ денари. Пред намалувањето на цената Марија за 350 денари може да купи $\frac{350}{x}$ килограми, а по намалувањето на цената таа може да купи $\frac{350}{0,7x}$ килограми. Затоа $\frac{350}{0,7x}=\frac{350}{x}+3$, од каде добиваме $\frac{500}{x}-\frac{350}{x}=3$, односно $\frac{150}{x}=3$, па затоа $x=50$ денари.

38. Продавачот Ѓорѓи ја намалил цената на јаболката за 20% и притоа остварил добивка од 4%. Колкава добивка ќе остварел Ѓорѓи ако не ја намалел цената на јаболката?
**Решение.** Нека $x$ е набавната цена на $1\,kg$ јаболка, а $y$% е добивката која Ѓорѓи би ја остварил да не ја намалел цената. Почетната цена на јаболката била $x(1+\frac{y}{100})$ денари. По намалувањето од 20% цената на $1\,kg$ јаболка била $\frac{80}{100}x(1+\frac{y}{100})$ и притоа е остварена добивка од 4%, па затоа цената е $x(1+\frac{4}{100})$. Според тоа, $\frac{80}{100}x(1+\frac{y}{100})=x(1+\frac{4}{100})$, т.е. $0,8+0,008y=1,04$, од каде добиваме $y=30$. Значи, ако Ѓорѓи не ја намалел цената на јаболката ќе остварел добивка од 30%.

39. Фудбалска топка чинела 7200 денари. На распродажба прво цената била намалена за 20%, а потоа за уште 10%. Определи ја цената на топката по второто намалување на цената?
**Решение.** По првото поефтинување топката имала 80% од почетната цена, т.е. цената на топката е еднаква на $7200\cdot\frac{80}{100}=5760$ денари.
По второто поефтинување цената била 90% од цената на топката по

првото поефтинување, односно цената била $5760 \cdot \frac{90}{100} = 5184$ денари.

40. Матеј купил патики кои прво поскапеле за 15%, а потоа поефтиниле за 10% и за патиките платил 3312 денари. Колкава била цената на патиките пред првата промена на цената, т.е. пред поскапувањето?
**Решение.** Нека цената на почетокот била $x$ денари. По поскапувањето цената на патиките била $y = 1{,}15x$ денари. Потоа по поефтинувањето цената на патиките била $0{,}9y$ денари, па затоа $0{,}9y = 3312$, од каде добиваме $y = 3312 : 0{,}9 = 3680$. Значи, $1{,}15x = 3680$, односно $x = 3680 : 1{,}15 = 3200$. Значи, цената на патиките пред првата промена била 3200 денари.

41. Мајката му дала на Васко пари да купи 30 моливи. Но, во трговскиот центар имало рекламна акција при што: во замена за купон за купување на 20 моливи, на излезот се враќале 25% од платената сума, а за купување на 5 моливи се враќале 10% од платената сума. Кој е најголемиот број моливи што Васко може да ги купи за сумата која ја добил за купување на 30 моливи?
**Решение.** Да забележиме дека 25% од цената на 20 моливи се еднакви на цената на 5 моливи, а 10% од цената на 5 моливи се еднакви на цената на половина од еден молив. За добивање на максимален попуст Васко треба да постапи на слениов начин:
1) Се додека може купува по 20 моливи и одма трча до излезот да го менува купонот.
2) Ако недостасуваат пари за купување на 20 молии, но има за 5 моливи, тој купува 5 моливи и одма оди до излезот за да го смени купонот.
3) Потоа купува поединечни моливи.

Постапувајќи на овој начин Васко купува 20 моливи, на излезот добива пари за 5 моливи. Потоа купува 3 пати по 5 моливи и на излезот добива пари за пари за вредноста на 1,5 моливи. Потоа купува 1 молив. На овој начин Васко може да купи 36 моливи, по што му преостануваат пари за половина молив.

42. Во една слаткарница топче сладолед чинело 50 денари. Слаткарот Никола ја намалил цената на сладоледот, по што прометот од сладоледот се зголемил за 40%, а заработувачката се зголемила за 12%.

Колку чини топче сладолед по намалувањето на цената?

**Решение.** Ако со $k$ го означиме бројот на продадени топчиња сладолед, тогаш заработувачката пред намалувањето е $50k$. Бидејќи прометот се зголемил 40%, добиваме дека прометот по намалувањето бил $1,4k$. Заработувачката се зголемила за 12%, па новата заработувачка е $1,12 \cdot 50k$. Нека новата цена на сладоледот е $n$. Тогаш $n \cdot 1,4k = 1,12 \cdot 50k$, односно $n = \frac{1,12 \cdot 50}{1,4} = 40$.

43. Четрири пријателки Ана, Дорка, Марија и Теодора заедно купиле поклон за нивниот другар Методиј. Ана дала 40% од вкупната вредност на поклонот, Дорка дала третина од износот кој го дале другите три другарки, а Марија дала 25% од од износот кој го дале другите три другарки. Теодора дала 51 евро. Колку пари чинел поклонот?

**Решение.** Нека поклонот чини $x$ евра, а со $a, d, m$ и $t$ да ги означиме соодветно сумите кои ги дале Ана, Дорка, Марија и Теодора. Имаме $a + d + m + t = x$, $t = 51$, $a = 0,4x$, $3d = a + m + t$ и $4m = a + d + t$.

Од првата и четвртата равенка следува $4d = x$, односно $d = 0,25x$. Од првата и петтата равенка следува $5m = x$, т.е. $m = 0,2x$. Сега со замена во првата равенка добиваме $0,4x + 0,25x + 0,2x + 51 = x$, од каде наоѓаме $0,15x = 51$, односно $x = \frac{51 \cdot 100}{15} = 340$ евра.

44. Дваесет лубеници чинат толку евра колку што лубеници може да се купат за 500 евра. Колку чинат 10 лубеници?

**Решение.** Нека 20 лубеници може да се купат $x$ евра. Тогаш $x$ лубеници може да се купат за 500 евра, па затоа една лубеница чини $\frac{x}{20}$, односно $\frac{500}{x}$ евра. Оттука следува $\frac{x}{20} = \frac{500}{x}$, т.е. $x^2 = 10000$, односно $x = 100$. Конечно, бидејќи 20 лубеници чинат 100 евра, 10 лубеници чинат 50 евра.

45. Ако 45 тетратки чинат толку евра колку што тетратки може да се купат за 20 евра, колку чинат 75 тетратки?

**Решение.** Нека 45 тетратки чинат $x$ евра. Тогаш една тетратка чини $\frac{x}{45}$ евра. Но, од друга страна една тетратка чини $\frac{20}{x}$ евра, па затоа $\frac{20}{x} = \frac{x}{45}$, од каде добиваме $x^2 = 900$, односно $x = 30$. Значи, 30 тетрат-

ки чинат 20 евра, па затоа 75 тетратки чинат 50 евра.

46. Трговецот Климе купил грозје и калинки за вкупен износ од 5800 денари. Цената на грозјето била 40 денари за килограм, а на калинките 50 денари за килограм. При транспортот еден дел од овошјето го загубил квалитетот, па морал да фрли 14% од грозјето и 15% од калинките. Преостанатото грозје го продавал по 60 денри за килограм, а калинките по 80 денари за килограм. По колку килограми грозје и калинки купил Климе, ако по продажбата заработил 1934 денари?

**Решение.** Нека Климе купил $x$ килограми грозје и $y$ килограми калинки. Значи, $40x+50y=5800$, т.е. $4x+5y=580$. По фрлањето на неквалитетното овошје му останале $0{,}86x$ килограми грозје и $0{,}85y$ килограми калинки. Затоа $60\cdot 0{,}86x+80\cdot 0{,}85y=5800+1934$, односно $51{,}4x+68y=7734$. Од $4x+5y=580$ следува $x=\frac{580-5y}{4}$, па со замена во втората равенка добиваме $51{,}4\cdot\frac{580-5y}{4}+68y=7734$, од каде наоѓаме $y=72$. Сега, со замена во $x=\frac{580-5y}{4}$ добиваме $x=\frac{580-5\cdot 72}{4}=55$. Значи, Климе купил 55 килограми грозје и 72 килограми калинки.

47. За купување на училишен автобус кој ќе пренесува ученици од четири места $A,B,C,D$ потреби се 217500 евра. Местата ќе ги сносат трошоците пропорционално со бројот на жителите. Во местото $D$ има жители колку што заедно има во местата $A$ и $C$, во местото $A$ има 25% жители помалку отколку во местото $B$, а 20% повеќе отолку во местото $C$. Колку пари треба да даде секое место?

**Решение.** Нека местата $A,B,C,D$ соодветно треба да платат $a,b,c,d$ евра. Бидејќи плаќањето е пропорционално со бројот на жителите од условот имаме $a=1{,}2c$ и $a=0{,}75b$. Според тоа, $1{,}2c=0{,}75b$, од каде добиваме $b=1{,}6c$. Сега, $d=1{,}2c+c=2{,}2c$, па затоа

$$1{,}2c+1{,}6c+c+2{,}2c=217500,$$
$$6c=217500,$$
$$c=36250.$$

Значи, местото $A$ треба да плати $a=1{,}2\cdot 36250=43500$ евра, $B$ треба да плати $b=1{,}6\cdot 36250=58000$ евра, $C$ треба да плати $c=36250$ евра и $D$ треба да плати $d=2{,}2\cdot 36250=79750$ евра.

48. За една ракометна екипа е познато дека учествувал на турнир на кој одиграла неколку натпревари. На три натпревари екипата постигнала по 20 голови, на два натпревари постигнала по 15 голови, а на сите останати натпревари постигнала по 30 голови. Колку натпревари одиграла на турнирот екипата ако е познато дека таа на турнирот постигнала просечно 25 голови по натпревар?

**Решение.** Нека $x$ е бројот на натпреварите на кои екипата постигнала по 30 погодоци. Тоа значи дека екипата одиграла $3+2+x=x+5$ натпревари, на кои постигнала $3\cdot 20+2\cdot 15+30x=90+30x$ голови. Бидејќи просечниот број голови по натпревар е 25, добиваме $\frac{30x+90}{x+5}=25$, од каде наоѓаме $30x+90=25x+125$, т.е. $x=7$. Според тоа, на турнирот екипата одиграла $5+x=5+7=12$ натпревари, на кои постигнала $30x+90=30\cdot 7+90=300$ голови.

49. Марко треба 199 јаболки да распореди во 60 пакети. Во неколку пакети има по $x$ јаболки, а во останатите по 3 јаболки. Одреди ги сите можни вредности на $x$.

**Решение.** Нека имало $n$ пакети, кај кои во секој од нив имало по 3 јаболки. Тогаш бројот на пакети со по $x$ јаболки би бил $60-n$. Од условот на задачата ја составуваме равенката

$$3n+x\cdot(60-n)=199$$

која е еквивалентна со равенката $3n-180+x\cdot(60-n)=19$ односно со равенката

$$(60-n)\cdot(x-3)=19.$$

Бидејќи $x$ и $n$ ($n\le 60$) се природни броеви, добиваме дека постојат две решенија и тоа

$$\begin{cases}60-n=1\\ x-3=19\end{cases}$$

од каде се добива $x=22$ или

$$\begin{cases}60-n=19\\ x-3=1\end{cases}$$

од каде имаме дека $x=4$.

50. Ивана и Марија отишле на излет. Ивана носела бонбони, а Марија сливи. Половина од своите бонбони Ивана ѝ ги дала на Марија, а

половина од своите сливи Марија ѝ ги дала на Ивана. Потоа, Ивана изела 5 сливи по што ѝ останале три пати повеќе бонбони од сливи, а Марија изела 20 бонбони по што ѝ останале два пати помалку сливи од бонбони. Колку бонбони донела Ивана и колку сливи донела Марија на излетот?

**Решение.** Нека $b$ е бројот на бонбоните на Ивана, а $s$ е бројот на сливите на Марија. Откако Ивана ѝ ги дала на Марија половина од своите бонбони, а Марија ѝ ги дала на Ивана половина од своите сливи, секоја од нив имала $\frac{b}{2}$ бонбони и $\frac{s}{2}$ сливи. Од тоа што кога Ивана изела 5 сливи ѝ останале три пати повеќе бонбони од сливи, добиваме дека $\frac{b}{2}=3(\frac{s}{2}-5)$. Од тоа што кога Марија изела 20 бонбони ѝ останале два пати помалку сливи од бонбони, добиваме дека $\frac{b}{2}-20=2\cdot\frac{s}{2}$, т.е. $\frac{b}{2}=20+s$. Според тоа, $20+s=3(\frac{s}{2}-5)$, од каде наоѓаме $s=70$. Конечно, $\frac{b}{2}=20+70$, односно $b=180$. Значи, Ивана на излетот понела 180 бонбони, а Марија 70 сливи.

51. На еден натпревар се натпреварувале вкупно 2400 ученици во пет различни категории. Вкупниот број на ученици од првата и втората категорија е еднаков на $\frac{3}{5}$ од вкупниот број на ученици од третата, четвртата и петтата категорија. Односот на бројот на учениците од првата и втората категорија е 2:3, а односот на бројот на учениците од третата, четвртата и петтата категорија е 5:4:6. По колку ученици се натпреварувале во секоја категорија.

**Решение.** *Прв начин.* Со $a,b,c,d,e$ да го означиме бројот на учениците кои се натпреварувале во првата, втората, третата, четвртата и петтата категорија, соодветно. Нека $x=a+b$ и $y=b+c+d$. Тогаш $x=\frac{3}{5}y$ и $x+y=2400$, од каде добиваме $\frac{3}{5}y+y=2400$, т.е. $y=1500$ и затоа $x=2400-1500=900$. Понатаму, од $a:b=2:3$ и $a+b=900$ следува

$$a=\frac{900}{2+3}\cdot 2=360 \text{ и } b=\frac{900}{2+3}\cdot 3=540.$$

Од, $c:d:e=5:4:6$ и $c+d+e=1500$, следува

$$c=\frac{1500}{5+4+6}\cdot 5=500,\ d=\frac{1500}{5+4+6}\cdot 4=400 \text{ и } e=\frac{1500}{5+4+6}\cdot 6=600.$$

Конечно, во првата категорија се натпрварувале 360 ученици, во

втората 540 ученици, во третата 500, во четвртата 400 и во петтата 600 ученици.

*Втор начин*. Со $a,b,c,d,e$ да го означиме бројот на учениците кои се натпреварувале во првата, втората, третата, четвртата и петтата категорија, соодветно. Од условите на задачата следува

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=2400, \\ a+b=\frac{3}{5}(c+d+e), \\ a:b=2:3, \\ c:d:e=5:4:6. \end{cases}$$

Од последните две равенсва следува

$$a=2k,\ b=3k,\ c=5m,\ d=4m,\ e=6m$$

и ако замениме во првите две равенства, добиваме $5k+15m=2400$ и $5k=\frac{3}{5}\cdot 15m$, т.е. $5k+15m=2400$ и $5k=9m$. Ако од втората равенка замениме во првата, добиваме $24m=2400$, т.е. $m=100$ и оттука $5k=900$, т.е. $k=180$. Сега, лесно се добива дека

$$a=360,\ b=540,\ c=500,\ d=400 \text{ и } e=600.$$

Конечно, во првата категорија се натпрварувале 360 ученици, во втората 540 ученици, во третата 500, во четвртата 400 и во петтата 600 ученици.

52. Таткото има три сина. На крајот на секоја учебна година тој на секој син му поклонува толку книги колку што синот поминал години во училиште. Ниту едно дете во текот на школувањето не повторувало. На тој начин на крајот на една учебна година синовите собрале вкупно 55 книги. Кое одделение го завршил секој од синовите?

**Решение.** Бројот на книгите кои ги собрал секој син е еднаков на збирот на неколку членови од низата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Овие збирови редоследно се 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... Бројот 55 како збир на три члена на последната низа може да се запише на единствен начин и тоа $6+21+28=55$. Значи, синовите редоследно завршиле трето, шесто и седмо одделение.

53. Во едно училиште учениците од осмо одделение се распоредени во четири паралелки. Во првата паралелка има 19 ученици, во втората 1 повеќе отколку во првата, во третата третина од сите ученици и во четвртата неколку единесеттини од вкупниот број ученици. Колку

ученици има во осмо оддление во тоа училиште?

**Решение.** Во првата паралелка имало 19, а во втората 20 ученици. Ако $x$ е бројот на сите ученици, тогаш во третата паралелка имало $\frac{x}{3}$ ученици и во четвртата паралелка имало $\frac{n}{11}x$ ученици, каде $n$ е природен број помал од 11. Според тоа,

$$19+20+\tfrac{x}{3}+\tfrac{n}{11}x=x,$$

од каде добиваме $x=\frac{1287}{22-3n}$. Значи, бројот $22-3n$ е делител на бројот $1287=3^2\cdot 11\cdot 13$, од што следува дека $22-3n$ може да биде еднаков на 3, 9, 11 и 13. Со проверка добиваме дека само за $22-3n=13$ вредноста на $n$ е природен број. Конечно, во училиштето имало $x=\frac{1287}{13}=99$ ученици во осмо одделение.

54. Радмила на пазар донела корпа со јајца. На првиот купувач му продала половина од вкупниот број јајца и уште половина јајце. На вториот, му продала половина од преостанатите јајца и уште половина јајце. Слично, на третиот му продала половина од преостанатите јајца и уште половина јајце. Потоа, во корпата останало едно јајце. Колку јајца донела Радмила на пазарот?

**Решение.** *Прв начин*. Пред третиот купувач да купи половина јајце, во корпата имало 1,5 јајца, а пред да купи половина од јајцата, во корпата имало 3 јајца. Пред вториот купувач да купи половина јајце, во корпата имало 3,5 јајца, а пред да купи половина од јајцата, во корпата имало 7 јајца. Пред првиот купувач да купи половина јајце, во корпата имало 7,5 јајца, а пред да купи половина од јајцата, во корпата имало 15 јајца.

Значи, Радмила на пазарот донела 15 јајца.

*Втор начин*. Нека во корпата на Радмила имало $x$ јајца. Откако, првиот купувач купил половина од вкупниот број на јајца и уште половина јајце, во корпата останале $x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$ јајца. Откако, вториот купувач купил половина од преостанатите јајца и уште половина јајце, во корпата останале $\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{x-3}{4}$ јајца. Откако, третиот купувач купул половина од преостанатите јајца и уште половина јајце, во корпата останале $\frac{x-3}{4}-\frac{x-3}{8}-\frac{1}{2}=\frac{x-7}{8}$ јајца.

Затоа $\frac{x-7}{8}=1$, т.е. $x=15$. Конечно, Радмила на пазарот донела 15 јајца.

55. За одење на екскурзија се пријавиле $\frac{2}{7}$ повеќе ученици отколку што е планирано. Заради болест се откажале шестина од пријавените ученици, па на екскурзија отишле шест ученици повеќе отколку што е планирано. Колку ученици отишле на екскурзија?

**Решение.** Нека $x$ е бројот на учениците кои требало да одат на екскурзија. За екскурзијата се пријавиле $x+\frac{2}{7}x=\frac{9}{7}x$ ученици. Заради болест се откажале $\frac{1}{6}$ од пријавените, што значи дека на екскурзија отишле $\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{7}x=\frac{15}{14}x$ ученици. Значи, $\frac{15}{14}x=x+6$, од каде добиваме $x=84$. Значи, на екскурзија отишле $84+6=90$ уленици.

56. На натпревар по математика биле зададени 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат по 5 поени, за секоја задача која не е решена се добиваат 0 поени и за секоја задача која е неточно решена се губат по 3 поени. Колку задачи точно решил Андреј, ако тој освоил 37 поени?

**Решение.** Нека Андреј точно решил $x$ задачи, а неточно решил $y$ задачи. Значи, бројот на задачите кои не ги решил е $20-x-y$. Оттука следува дека $5x-3y=37$, односно $y=\frac{5x-37}{3}=2x-12-\frac{x+1}{3}$. За да $y$ е 0 или природен број мора да е $3|x+1$, од каде бидејќи $x\le 20$ добиваме $x+1\in\{3,6,9,12,15,18,21\}$, т.е $x\in\{2,5,8,11,14,17,20\}$. Со замена за најдените вредности за $x$ добиваме дека $y\in\{-9,-4,1,6,11,16,21\}$. Но, $y\ge 0$ и треба да е $x+y\le 20$, па затоа имаме само две решенија и тоа $x=8, y=1$ и $x=11, y=6$.

Конечно, Андреј точно решил 8, неточно решил 1 и не решавал 11 задачи, или точно решил 11, неточно решил 6 и не решавал 3 задачи.

57. Илија и Ѓорѓи продавале лубеници на пазар. Секој на почеток имал еднаков број лубеници и тој број бил поголем од 300, а помал од 400. Илија продал 8 пати повеќе лубеници од Ѓорѓи, по што му останале 9 пати помалку лубеници од Ѓорѓи. Колку лубеници имал секој од нив на почетокот?

**Решение.** Нека бројот на лубениците на почеткот бил $x$. Ѓорѓи продал $y$ лубеници и му останале $x-y$ лубеници. Тогаш Илија продал $8y$ и му останале $x-8y$ лубеници. Според условот на задачата имаме $x-8y=\frac{x-y}{9}$, од каде добиваме $8x=71y$. Бровите 8 и 71 се заемно прости, па затоа $x$ е делив со 71. Бидејќи $300<x<400$, добиваме $x=355$. Значи, на почетокот Илија и Ѓорѓи имале по 355 лубеници.

58. Продавачката во цвеќарницата направиле букет од ружи и каранфили. Таа потрошила $\frac{3}{8}$ од вкупниот број ружи и $\frac{3}{10}$ од вкупниот број каранфили. Ако букетот содржи еднаков број ружи и каранфили, колкав дел од вкупниот број ружи и каранфили е ставен во букетот?
**Решение.** Нека во цвеќарницата имало $x$ ружи и $y$ каранфили. Според тоа, во букетот имало $\frac{3}{8}x$ ружи и $\frac{3}{10}y$ каранфили. Во букетот имало еднаков број ружи и каранфили, па затоа $\frac{1}{8}x=\frac{1}{10}y=k$, од каде добиваме $x=8k, y=10k$. Значи, во цвеќарницата имало $x+y=18k$ цветови, а во букетот имало $\frac{3}{8}x+\frac{3}{10}y=6k$ цветови. Конечно, од $6k:18k=1:3$ следува дека продавачката во букетот ставила $\frac{1}{3}$ од ружите и каранфилите кои биле во цвеќарницата.

59. Музичка група има меѓу $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{5}$ женски членови. Определи го најмалиот може број членови на оваа група?
**Решение.** Женскиот дел на групата се $\frac{m}{n}$ од вкупниот број членови на групата ($m$ и $n$ се природни броеви и $m<n$). Го бараме најмалиот $n$ за кој важи $\frac{1}{2}<\frac{m}{n}<\frac{3}{5}$. Ако добиените неравенства ги помножиме со $10n$, ги добиваме неравенствата $5n<10m<6n$. Со проверка за $n=3$, $n=4, n=5, n=6$ гледаме дека немаме решение, а за $n=7$ имаме решение и тогаш $m=4$.

60. При првата средба на делегациите на Земјата Марс се покажало дека Марсовците имаат нозе како и луѓето, но се разликуваат по бројот на рацете и бројот на прстите на рацете. Иако Марсовци имало за 6 повеќе од луѓе, вкупниот број на прстите (на нозете и рацете) кај Мар-

совците бил за 1 помал отколку кај луѓето. Колку вкупно учесници имало на средбата?

**Решение.** Нека $n$ е вкупниот број прсти на рацете на еден Марсовец, а $k$ е бројот на луѓето на таа средба ($n$ и $k$ се цели ненегативни броеви). Тогаш на средбата имало $k+6$ Марсовци, секој со по 10 прсти на нозете и $n$ прсти на рацете, и $k$ луѓе со по 20 прсти (на рацете и нозете). Сега условот на задачата можеме да го запишеме во видот $(k+6)(10+n)+1=20k$. Последната равека е еквивалентна со равенката $(k+6)(10-n)=121$. Според тоа, $10-n$ е позитивен делител на бројот 121, кој не е поголем од 10. Тоа значи дека $10-n=1$,т.е. $n=9$ и затоа $k+6=121$, односно $k=115$. Значи, на средбата вкупно учествувале $115+121=236$ Марсовци и луѓе.

61. На една фарма има коњи и гуски. Бројот на главите и крилата на сите животни е еднаков на бројот на нивните нозе. Ако вкупно има 100 животни, колку се гуски, а колку се коњи?

**Решение.** Нека на фармата има $k$ коњи и $g$ гуски. Тогаш $k+g=100$ и $k+3g=4k+2g$. Од втората равенка добиваме $g=3k$ и ако замениме во првата равенка наоѓаме $4k=100$, т.е. $k=25$ и $g=75$. Значи, на фармата има 25 коњи и 75 гуски.

62. За ужинка во училиштето на Горјан има три вида пакетчиња и тоа: пакетче со 1 јаболко и 2 кајсии, пакетче со 1 јаболко и 2 банани, и пакетче со 1 јаболко, 1 кајсија и 1 банана. Куварот Марко во пакетчињата запакувал 2000 кајсии и 1000 банани. Колку јаболка запакувал Марко?

**Решение.** Нека $x, y, z$ се броевите на пакетчињата од првиот, вториот и третиот вид. Со $t$ да го означиме бројот на запакуваните јаболки. Од условот на задачата следува

$$2x+z=2000,$$
$$2y+z=1000,$$
$$x+y+z=t.$$

Ако ги собреме првите две равенства, добиваме $2(x+y+z)=3000$, од каде наоѓаме $t=x+y+z=1500$. Значи, куварот Марко запакувал 1500 јаболка.

63. Во кино сала има неколку редови седишта со по 17 седишта во секој ред. Местата во првиот ред се нумерирани со броевите 1, 2, ..., 17, во вториот ред со броевите 18, 19, ..., 34 итн. на сличен начин. Бројот на местото на кое седи Ана е еднаков на бројот на редот во кој седи Бојан. Збирот на броевите со кои се нумерирани нивните места е 175. Определи ги броевите со кои се нумерирани местата на Ана и Бојан.

**Решение.** Нека $x$ е бројот на местото на кое седи Ана и бројот на редот во кој седи Бојан. Тогаш бројот на местото на кое седи Бојан може да се запише во видот $17(x-1)+y$, каде $1\le y\le 17$. Според тоа, $x+17(x-1)+y=175$, односно $18x+y=192$. Но, $192=18\cdot 10+12$, па затоа $x=10$ и $y=12$. Значи, Ана седи на местото со број 10, а Бојан седи во десеттиот ред на местото $175-10=165$.

64. Во една кино-сала има неколку редови седишта со по 50 седишта во секој ред. Местата во првиот ред се нумерирани со броевите 1, 2, ..., 50, во вториот ред со броевите 51, 52, ..., 100 итн. на сличен начин. Бројот на местото на кое седи Милка е исто со бројот на редот во кој седи Љубинка. Ако апсолутната вредност на разликата на броевите на нивните места е 332, определи ги тие броеви.

**Решение.** Нека $x$ е бројот на местото на кое седи Милка и бројот на редот во кој седи Љубинка. Тогаш бројот на местото на кое седи Љубинка е $50(x-1)+y$, каде $1\le y\le 50$. Според тоа,

$$50(x-1)+y-x=332, \text{ т.е. } 49x+y=382.$$

Ако бројот 382 го поделиме со остаток со бројот 49 добиваме $382=49\cdot 7+39$. Според тоа, Милка седи во првиот ред на местото нумерирано со бројот 7, а Љубинка седи на местото број 339 во седмиот ред.

65. На стрелачки натпревар Марко гаѓал во мета со воздушна пушка. Десетка погодил исто толку пати колку пати што погодил осумка. Освен тоа, неколку пати погодил петка и така собрал 99 поени. Во 25% од стрелањата ја промашил метата. Колку пати вкупно Марко пукал од пушката?

**Решение.** Нека Марко $x$ пати погодил десетка (исто толку пати погодил и осумка), а $y$ пати погодил петка. Марко освоил $10x+8x+5y$ поени, што значуи дека $18x+5y=99$. Од последната равенка следува $9\mid y$, односно $y=9k$, па така ја добиваме равенката $18x+45k=99$,

која е еквивалентна на равенката $2x+5k=11$. Од последната равекка следува дека $k$ е непарен број, па како $k<3$, добиваме $k=1$, што значи $x=3$. Значи, $x=3$ и $y=9$, т.е. Марко погодил $2x+y=15$ пати. Овие 15 погодоци се 75% од стрелањата на Марко, што значи дека Марко стрелал 20 пати.

66. Филип, Кирил и Никола си испраќаат писма меѓу себе при што не добиваат писма од други луѓе. Притоа писмата се испраќаат според следниве правила:
    - Филип му испраќа писмо на Кирил секој втор ден, а на Никола секој петти ден,
    - Кирил му испраќа писмо на Филип одма по секои две добиени писма, а на Никола секој чртврт ден,
    - Никола му испраќа писмо на Филип одма по секои четири добиени писма, а на Кирил секој осми ден.

    Секое писмо патува еден ден, т.е. секое писмо стигнува следниот ден од денот кога е испратено. Кој е најмалиот број денови по кои Филип ќе добие 68 писма?

    **Решение.** Со $x$ да го означиме бројот на денови за кои Филип ќе добие 68 писма. Тоа значи дека Кирил и Никола заклучно со $(x-1)-$ от ден на Филип му испратиле 68 писма. Со $k$ и $n$ да го означиме бројот на писмата кои соодветно ги добиле Кирил и Никола заклучно со $(x-1)-$ от ден. Од условите на задачата следува дека заклучно со $(x-1)-$ от ден Кирил до Филип вкупно испратил $\frac{k}{2}$ писма, а Никола до Филип испратил вкупно $\frac{n}{4}$ писма. Според тоа, $\frac{k}{2}+\frac{n}{4}=68$, т.е. $2k+n=272$.

    Од друга страна, заклучно со $(x-1)-$ от ден Кирил вкупно добил онолку писма колку што испратиле Филип и Никола заклучно со $(x-2)-$ от ден. Бидејќи, Филип му испраќа писмо на Кирил секој втор ден, а Никола му испраќа писмо на Кирил секој осми ден добиваме дека $k=\frac{x-2}{2}+\frac{x-2}{8}=\frac{5(x-2)}{8}$. Слично бидејќи Филип му испраќа писмо на Никола секој петти ден, а Кирил му испраќа писмо на Никола секој четврт ден, добиваме дека $n=\frac{x-2}{5}+\frac{x-2}{4}=\frac{9(x-2)}{20}$. Сега, ако за $k$ и $n$ замениме во $2k+n=272$, добиваме

$$2\cdot\frac{5(x-2)}{8}+\frac{9(x-2)}{20}=272,$$
$$25(x-2)+9(x-2)=5440,$$
$$34x=5508,$$
$$x=162.$$

Значи, Филип ќе добие 68 писма по најмалку 162 дена.

67. Експресниот патнички воз, пред два дена наутро, тргнал од Гевгелија кон Скопје, со неколку вагони во кои имало одреден број патници. На станицата во Велес, од првиот вагон се симнал еден патник, од последниот вагон се симнале два патника, а не се качил ниту еден патник. Тргнувајќи од Велес, во секој вагон од возот имало еднаков број патници. Истиот воз, со два вагона помалку, попладнето тргнал од Скопје кон Гевгелија со 50 патници помалку во однос на патниците кои тргнале на патување со возот тоа утро од Гевгелија. Притоа, просечниот број на патници по вагон бил 30. Колкав е бројот на патници кои тргнале со возот тоа утро од Гевгелија?

**Решение.** Нека $n$ е бројот на вагони, а $x$ е вкупниот број на патници во возот кој патувал на релација Гевгелија-Скопје. Ако од првиот вагон се симне еден патник, а од последниот вагон се симнат два патника, тогаш вкупниот број на патници ќе биде $x-3$, па бројот на патници во еден вагон на релација Гевгелија-Скопје ќе биде еднаков на $\frac{x-3}{n}=k$, $k\in\mathbb{N}$, односно ќе важи $x-3=kn$.

На релација Скопје-Гевгелија бројот на вагони е еднаков на $n-2$, а вкупниот број на патници е еднаков на $x-50$. Од условот дека просечниот број на патници по вагон е 30 патника на релација Скопје-Гевгелија, добиваме дека $\frac{x-50}{n-2}=30$, односно $x-50=30(n-2)$.

Од $x-3=kn$ и $x-50=30(n-2)$ го добиваме системот

$$\begin{cases}x=kn+3\\(30-k)n=13.\end{cases}$$

Од втората равенка на системот равенки добиваме $30-k=1, n=13$ или $30-k=13, n=1$, односно $k=29, n=13$ или $k=17, n=1$

Од условот на задачата следува $n\geq 3, k\geq 1$, па единствено решение на задачата е $k=29, n=13$. Според тоа, $x=29\cdot 13+3=377+3=380$ односно бројот на патници кои тргнале со возот тоа утро од Гевгелија е 380.

# 4. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Јован со татко му, мајка му и браќата отишол да купи папагал. Кога влегле во продавницата на домашни миленичиња, помладиот брат, изненаден од бројот на папагалите, рекол:
   - Овде има повеќе од 50 папагали. Како сега да избереме?
   - Има помалку од 50 папагали, - тврдел постариот брат.
   - Има барем еден папагал, и тоа е единствено важно, - рекла мајката.
   - Интересно, - се вклучил во расправата таткото, - само една од трите ваши изјави соодветствува на реалната состојба.

   Излегувајќи со папагалот од продавницата, Јован размислувал за реченицата која ја кажал неговиот татко и се запрашал која од трите изјави е точна. Дали можеш да му помогнеш на Јован да го реши проблемот?

   **Решение.** Првите две изјави се противречни. Понатаму, ако првата изјава е точна, тогаш е точна и третата. Слично, ако е точна втората изјава, тогаш е точна и третата. Значи, останува да е точна само изјавата на мајката и тоа е случај кога во продавницата има точно 50 папагали. Во сите други случаи точни се две изјави.

2. За еден ден велиме дека е непарен ако неговата дата, месец и година се запишува само со непарни цифри. На пример 17 мај 1791 е непарен ден, бидејќи во неговиот запис со цифри 17.5.1791 има само непарни цифри.

   а) Колку непарни денови има во дваесеттиот век?

   б) Кој е последниот непарен ден до денес?

   в) Кој е првиот следен непарен ден?

   **Решение.** а) Во дваесеттиот век има 20 непарни години. Во секоја непарна година има 4 непарни месеци со по 11 непарни денови (јануари, март, мај и јули) и 2 непарни месеци со 10 непарни денови (септември и ноември). Споре тоа, во секоја непарна година има по $4 \cdot 11 + 2 \cdot 10 = 64$ непарни денови. Вкупно во дваесеттиот век има $25 \cdot 64 = 1600$ непарни денови.

   б) Тој ден е 19.11.1999.

   в) Тој ден е 1.1.3111.

3. За еден ден велиме дека е парен ако неговиот датум, месец и година се запишуваат само со парни цифри.
   а) Колку парни денови има во 3. милениум?
   б) Кој е првиот парен ден во третиот милениум?
   в) Кој е последниот парен ден во третиот милениум?
   **Решение.** а) Во третиот милениум има 5 парни векови и во секој од нив има по 25 парни години, одвен во 21. век кој има 24 парни години. Значи, во 3. милениум вкупно има 124 парни години. Во секоја парна година има 4 парни месеци со по 9 парни денови. Според тоа, во секоја парна година има 36 парни денови. Значи, во 3. милениум има $124 \cdot 36 = 4644$ парни денви.
   б) 2.2.2002, в) 28.8.2888.

4. Илија во сабота тргнал со воз од Скопје и стигнал во Минхен во понеделник. Забележал дека датумот (денот во месецот) на стигнување во Минхен е ист како и бројот на неговиот вагон, а бројот на седиштето е помал од бројот од вагонот. Меѓутоа, датумот кога седнал во возот бил поголем од бројот на вагонот. Определи го бројот на седиштето на кое седел Илија.
   **Решение.** Од условот на задачата следува дека Илија тргнал од Скопје на крајот на месецот, а стигнал во Минхен на почетокот на следниот месец. Не е можно да стигнал првиот ден во месецот, бидејќи бројот на седиштето е помал од бројот на вагонот, т.е. датумот кога стигнал во Минхен. Значи, денот на пристигнување во Минхен е вториот ден во месецот, а бројот на седиштето е 1.

5. Татко со четири сина треба да се превезе преку река. На располагање имаат чамец кој може да издржи терет од најмногу $100\,kg$. Таткото има $95\,kg$, најстариот син има $55\,kg$, вториот син има $35\,kg$, а двајцата најмлади синови имаат $30\,kg$ и $20\,kg$. Само таткото и двата постари сина знаат да веслаат. Како тие може да се префрлат преку реката и колку најмалку возења им се потребни?
   **Решение.** Синовите редоследно да ги наречеме Андреј ($55\,kg$), Бојан ($35\,kg$), Владо ($30\,kg$) и Горјан ($20\,kg$). Прво да забележиме дека со таткото не може да се вози ниту еден син, со Андреј може да е само со еден од другите три брата, а тројца може да се во чамецот само ако во него се најмладите три сина.

Да претпоставиме дека тие треба да се превезат од левиот на десниот брег. Бројот на возењата со чамецот од левиот на десниот брег е за 1 поголем од бројот на возењата од десниот на левиот брег. Три возења од левата на десната страна не се доволни, бидејќи при едно возење во чамецот ќе се наоѓа само таткото, при едно возење мора да се најмногу двајца (еден од нив е најстариот син), а бидејќи при секое возење од десната на левата страна се враќа барем еден, добиваме дека при едно возењеод левата на десната страна во чамецот треба да се четвориц, што не е можно. Ќе дадеме распоред на четири возења од левиот на десниот брег со кој сите ќе ја преминат реката.

1) Андреј и Бојан преминуваат на десната страна $(55+35<100)$ ,
2) Бојан се враќа на левата страна $(35<100)$ ,
3) Таткото преминува на десната страна $(90<100)$ ,
4) Андреј се враќа на левата страна $(55<100)$ ,
5) Андреј и Бојан преминуваат на десната страна $(55+35<100)$ ,
6) Бојан се враќа на левата страна $(35<100)$ ,
7) Бојан, Владо и Горјан преминуваат на десната страна $(35+30+20<100)$ .

6. Другарите Ацо, Бранко, Ведран и Горан се родени во иста година во четири различни месеци. Ацо е постар од Бранко 15 дена, Бранко од Ведран 22 дена, Ведран од Горан 23 дена. Ведран се родил во понеделник, а шестиот роденден го славел, исто така во понеделни. Во кој ден од неделата Ведран го славел третиот роденден?

**Решение.** Разликата во староста меѓу најстариот Ацо и најмладиот Горан е еднаква на 60 дена. Ова е можно само ако Ацо е роден на 31. јануари, а Горан на 1. април и тоа во проста година (во која месецот февруари има 28 дена). Лесно се гледа дека тогаш Бранко е роден на 15. февруари, а Ведран на 9. март. Значи, таа година 9 март бил во понеделник. По 6 години 9. март повторно ќе биде во понеделник, што значи дека збирот на броевите на деновите во тие шест години ќе биде делив со 7. Бидејќи во тие шест години има шест месеци февруари, заклучуваме дека меѓу нив еден или два имаат по 29 дена. Но, $365\cdot 5+366=2191$ е број делив со7, а бројот $365\cdot 4+366\cdot 2=2192$ не е делив со 7, од што следува дека во следните шест години по раѓањето на децата една била престапна, а преостанатите пет биле прости години. Сега, заедно со годината на раѓање, која исто така била

проста, имаме 7 последователни години меѓу кои само една е престапна. Тоа мора да е средната меѓу седумте години, т.е. годината во која децата го прославиле третиот роденден. Бидејќи $365 = 7 \cdot 52 + 1$ и $366 = 7 \cdot 52 + 2$, заклучуваме дека Ведран првиот роденден го прославил во вторник, вториот во среда и третиот во петок (меѓу вториот и третиот роденден поминале 366 дена, бидејќи Ведран е роден по 29 февруари).

7. Во кутија се наоѓаат 50 топчиња чии половини се различно обоени: 15 топчиња има една половина црвена, а другата им е сина, 18 топчиња има една црвена и друга зелена половина, а 17 топчиња е со една зелена и една сина половина. Кој е најмалиот број топчиња што треба да се извлече од кутијата, без гледање, така што меѓу извлечените топчиња сигурно има 25 топиња такви што едната нивна половина е обоена со иста боја?

**Решение.** Потребно е да се извадат најмалку 37 топчиња. Имено, ако случајно од секој од трите вида топчиња извлечеме по 12 топчиња, тогаш ќе имаме 36 топчиња, при што ќе постојат 24 половини обоени со иста боја. Со уште едно топче, односно со вкупно 37 случајно извлечени топчиња, ќе имаме најмалку 25 топчиња кои имаат иста обоена половина.

8. Марко има во џепот неколку банкноти. Ако без гледање од џебот извади три банкноти, меѓу нив обавезно ќе има банкнота од 50 денари, а ако без гледање од џебот извади четири банкноти, тогаш меѓу нив сигурно ќе има банкнота од 100 денари. Марко од џебот извадил пет банкноти. Кои се тие банкноти?

**Решение.** Од условот на задачата следува дека Марко во џебот има најмногу две банкноти различни од 50 денари и најмногу три банкноти различни од 100 денари. Од друга страна, во џебот има најмалку 5 банкноти, бидејќи Марко толку банкноти извадил од џебот. Не може да има повеќе од 5 банкноти, бидејќи тогаш би имало 4 од 50 денари, т.е. барем 4 различни од 100 денари. Значи, во џебот на Марко има точно 5 банкноти и тоа три од 50 и две од 100 денари.

9. Илија и Матеј замислиле по еден природен број и му го кажале на

Максим. Максим на еден лист хартија го запишал збирот на тие броеви, а на друг нивниот производ. Потоа едниот лист го скрил, а другиот, на кој бил бројот 2002, му го покажал на Илија и Матеј. Кога го видел бројот, Илија рекол дека не знае кој број го замислил Матеј. Кога тоа го слушнал, Матеј рекол дека не знае кој број го замислил Илија. Кој број го замислил Матеј?

**Решение.** Двајцата замислиле делители на бројот 2002 (во спротивно некој од двајцата би заклучил дека 2002 е збир на замислените броеви и би го определил другиот собирок). Но, дури и да знае дека Илија замислил делител на бројот 2002, Матеј не може да ја исклучи можноста дека 2002 е збир на замислените броеви. Но, збирот на делителите е еднаков на 2002 само во случај кога $1001+1001$ (другите делители се 2002 или помали од 1001). Значи, Матеј го замислил бројот 1001 (а Илија 2 или 1001), и тогаш навистина ниту еден со сигурност не може да знае кој број го замислил другиот.

10. Мајмун има три кокосови ореви. Едниот орев му паднал од 15. кат и се скршил. Дали мајмунот може со најмногу 5 обиди, со помош на преостанатите два ореви, да констатира кој е најнискиот кат од кој испутениот орев ќе се скрши?

**Решение.** Да. Прво треба да го пушти оревот од 5. кат. Ако оревот се скрши, тогаш преостанатиот орев го пушта редоследно од 1, 2, 3, 4. кат. Во најмногу пет обиди ќе го најде бараниот кат.

Ако оревот пуштен од 5. кат не се скрши, следното испуштање е од 9. кат. Ако оревот се скрши, тогаш преостантиот орев се испушта редоследно од 6, 7, 8. кат.

Ако оревот испуштен од 9. кат не се скрши, следното испуптање е од 12. кат. Ако се скрши, следното испуштање е редоследно од 10. и 11. кат.

Ако оревот испуштен од 12. кат не се скрши, тогаш следното испуштање е од 13. и 14. кат.

11. Тројца ученици играат пинг-понг на елиминација., т.е. играчот кој ќе изгуби меч му го отстапува местото на играчот кој во тој меч не играл. Вкупно се одиграни 17 мечеви. Ацо одиграл вкупно 10, Боро 15, а Владо 17 меча. Кој од нив загубил во шестиот меч?

**Решение.** Вкупно се одиграни $(10+17+15):2=21$ меч. Понатаму, ниту еден играч не пропуштил два последователни меча. Бидејќи Ацо

пропуштил 11 од 21 меч, тој ги играл сите мечеви со парен реден број и само тие. Значи, Ацо не го играл седмиот меч, па затоа тој е елиминиран со шестиот меч. Значи, шестиот меч Ацо го загубил.

12. Тројца играчи играат пинг-понг на испаѓање, играчот кој губи меч го отстапува местото на играчот кој не играл во тој меч. Се одиграле вкупно 17 меча. Ацо одиграл најмалку мечеви – вкупно 10. Колку меча одиграл Владо ако се знае дека тој одиграл повеќе мечеви од Борко?

**Решение.** Нека $x, y, z$ е бројот на мечевите кои ги одиграле Ацо, Борко и Владо, соодветно. Бидејќи во секој меч учествувале по двајца, добиваме дека $x+y+z=2\cdot 17=34$. Понатаму, Борко и Владо против Ацо одиграле 10 меча, а меѓусебно одиграле 7 меча. Тоа значи дека $y+z=2\cdot 7+10=24$. Понатаму, $x<y<z$, па како $x=10$, единствена можност е $y=11, z=13$. Значи, Владо одиграл 13 меча. Ваков распоред е даден подолу, при ознаки $A-$Ацо, $B-$борко и $V-$Владо:
$AB, AV, AB, AV, BV, AB, BV, AV, BV, AV, BV, AB, BV, AV, BV, AV, BV$.

13. Кате, Нена и Ана саделе цвеќиња. Ако Кате засади 16 цвеќиња повеќе отколку што засадила, тогаш би имала засадено толку цвеќиња колку што засадиле Нена и Ана заедно. Ако Нена засади 39 цвеќиња повеќе отколку што засадила, тогаш би имала засадено двојно повеќе отколку што засадиле Кате и Ана заедно. Нивните презимиња се Крстеска, Петрова и Милевска. Колку цвеќиња засадила секоја од нив и кое ѝ е презимето, ако бројот на цвеќиња што ги засадила Крстеска е делив со 5, бројот на цвеќиња што ги засадила Петрова е делив со 7, а бројот на цвеќиња што ги засадила Милевска е прост број и никоја не засадила повеќе од 15 цвеќиња.

**Решение.** Нека Кате, Нена и Ана засадиле $x, y$ и $z$ цвеќиња, соодветно. Од условот на задачата следува $x+16=y+z$, $y+39=2(x+z)$. Од првата равенка следува $y=x-z+16$, па ако замениме во втората добиваме $x-z+16+39=2x+2z$, од каде следува $x=55-3z$. Бидејќи $x\le 15$, од последната равенка добиваме $55-3z\le 15$, од каде добиваме $z\ge 13\frac{1}{3}$. Но, $z$ е природен број и не е поголем од 15, па затоа $z=14$ или $z=15$.

Ако $z=14$, добиваме $x=13$ и $y=15$. Притоа, $x=13$ е прост број

(Милевска), $y=15$ е делив со 5 (Крстеска) и $z=14$ е делив со 7 (Петрова).

Ако $z=15$, добиваме $x=10$ и $y=11$. Но, ниту еден од броевите 10, 11 и 15 не е делив со 7, па затоа во случајов немаме решение на задачата.

Значи, единствено решение е $x=13$, $y=15$ и $z=14$, односно Кате Милевска засадила 13 цвеќиња, Нена Крстеска засадила 15 цвеќиња и Ана Петрова засадила 14 цвеќиња.

14. На една забава имало 200 гости. Секој од нив секогаш говори вистина (вистинолубец), или секогаш лаже (лажливец). По свечената вечера 120 гости ја напуштиле забавата. Тие забавата ја напуштале еден по еден и секој од нив ја дал следнава изјава: „Меѓу оние кои останаа на забавата има повеќе лажливци, отколку вистинољубци.“ Колку лажливци имало на забавата?

**Решение.** Ќе докажеме дека на забавата има еднаков број на лажливци и вистинољубци. Нека $a$ е бројот на лажливците. Тогаш бројот на вистинољубците е $b$, при што важи $a+b=200$.

Прво ќе докажеме дека $b\le a$. Нека претпоставиме дека $b>a$. Бидејќи $a+b$ е парен број, мора да е $b\ge a+2$. Во тој случај забавата можеле да ја напуштаат само лажливци. Но, по претпоставка тие не се повеќе од половина, што противречи на условот на задачата.

Слично се докажува дека $b\ge a$. Имено, ако $a>b$, тогаш $a\ge b+2$, па забавата можеле да ја напуштаат само вистинољупци. Но, по претпоставка тие не се повеќе од половина, што противречи на условот на задачата.

Од $b\le a$ и $b\ge a$, следува $a=b$, т.е. на забавата има еднаков број лажливци и вистинољубци, што значи дека има 100 лажливци.

15. На еден остров живеат лажливци и витези (лажливците секогаш лажат, а витезите секогаш ја говорат вистината). Еден ден се состанале 12 островјани. Двајца од нив рекле: „Точно двајца од нас дванаесетте се лажливци“. Други четворица рекле: „Точно четворица од нас дванаесетте се лажливци“. Преостанатите шест рекле: „Точно шестмина од нас дванаесетте се лажливци“.

Колку лажливци имало на овој состанок?

**Решение.** Најмногу една од трите реченици може да е точна, бидејќи секои две се противречни една на друга. Можно е сите три реченици

да се неточни, односно на состанокот да имало 12 лажливци.
Ако е првата реченица точна, тогаш вкупниот број витези треба да е 10, па значи, покрај овие двајца, треба да има уште витези. Но, тогаш и нивните изјави треба да се точни, што не е случај.
На ист начин заклучуваме дека и втората реченица не е точна, бидејќи тоа би значело дека треба да имаме уште неколку изјави точни.
Третата реченица можеле да ја кажат шест витези, при што преостанатите шестмина ќе се лажливци, па затоа нивните шест изјави нема да се точни, а тие ги кажале првите две решеници.

16. Околу тркалезна маса седат 12 луѓе. Познато е дека секој од нив е или витез кој секогаш ја говори вистината, или лажливец кој секогаш лаже. Секој од нив изјавил: „Сите, освен можеби јас и моите соседи на масата, се лажливци.“ Колку витези седат на масата?
**Решение.** Ако сите се лажливци, тогаш сите изјави ќе бидат неточни, што противречи на дадената изјава. Ако се сите витези, тогаш сите изјави ќе бидат точни, што повторно противречи на дадената изјава. Значи, околу масата седат и витези и лажливци (најмалку девет). Значи, на масата има два соседи $A$ и $B$ такви што $A$ е витез, а $B$ е лажливец. Нека $B$ е од левата страна на $A$, а $C$ е десната страна на $A$. Сега е јасно дека сите освен $A$ и $C$ се лажливци и треба да се констатира дали $C$ е лажливец или витез. Ако $C$ е лажливец, тогаш изјавата која ќе ја даде $B$ ќе биде точна, што е противречност. Значи $C$ е витез. Конечно, околу масата седат два витеза и десет лажливци.

17. Од броевите $3, 2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ се добиваат нови три броја така што се пресметува аритметичката средина на секој пар броеви. Дали може со повторување на оваа постапка да се добијат броевите $4, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$ ?
**Решение.** Ако броевите $x, y, z$ ги замениме со броевите $\frac{x+y}{2}$, $\frac{y+z}{2}$, $\frac{z+x}{2}$, тогаш нивниот збир не се менува. Но,
$$3+2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=7\neq 6=4+1+\sqrt{3}+1\sqrt{3},$$
па затоа со повторување на дадената постапка од броевите $3, 2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ не може да се добијат броевите $4, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$.

18. Од броевите $3, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ може да се добијат три нови броеви така

што два од нив, $x$ и $y$ ќе се заменат со $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ и $\frac{x-y}{\sqrt{2}}$. Дали може со повторување на оваа постапка да се добијат броевите $\sqrt{2}, 2+\sqrt{2},$ и $2-\sqrt{2}$.

**Решение.** Со примена на дозволената постапка добиваме

$$(\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2+(\frac{x-y}{\sqrt{2}})^2=\frac{x^2+2xy+y^2}{2}+\frac{x^2-2xy+y^2}{2}=x^2+y^2,$$

што значи дека збирот на квадратите на дадените броеви не се менува. Сега, од

$$3^2+(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=15\neq 14=\sqrt{2}^2+(2+\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2,$$

па затоа не е можно од броевите $3, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ да се добијат броевите $\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}$.

19. Неколку еднакви контејнери имаат вкупна 10 тони, при што масата на еден контејнер не е поголема од еден тон. Кој е најмалиот број камиони со носивост од 3 тони со кои со сигурност може да се пренесе целиот тој товар?

**Решение.** Прво ќе докажеме дека 4 камиони со носивост од 3 тони не се секогаш доволни. Тоа ќе биде, на пример, во случај кога имаме 13 контејнери, а масата во секој од нив е $\frac{10}{13}$ тони. Во тој случај ниту еден камион не може да носи повеќе од три такви контејнери. Сега ќе докажеме дека пет такви камиони е секогаш доволно. Навистина, во секој камион можеме да натовариме најмалку два тони товар, бидејќи се додека во камионот се наоѓаат помалку од 2 тони товар, може да се додаде уште еден контејнер (чија маса, според условот на задачата, е помала од еден тон). На тој начин во камионите може да се натоварат сите 10 тони товар.

20. Определи го минималниот број камиони со носивост од 3 тони со кои одеднаш може да се превозат 50 контејнери со маси: $370\,kg, 372\,kg,$ $374\,kg, ..., 466\,kg, 468\,kg$.

**Решение.** Масата на најлесните 8 контејнери е поголема од 3 тони, па затоа седум камиони не се доволни одеднаш да ги пренесат сите 50 контејнери.

Ќе докажеме дека 8 камиони се доволни за одеднаш да се пренесат сите 50 контејнери. Масата на било кои 6 контејнери и помала од 3

тони, бидејќи масата на најтешките 6контејнери е 2778 килограми. Лесно се гледа и дека масата на било кои 7 од најлесните 14 контејнери е помала од 3 тони. Според тоа, товарот може да се распореди така што на два камиони ќе се распоредат најлесните 14 контејнери, на секој по 7, а преостанатите 36 контејнери произволно по 6 ќе се натоварат на преостанатите 6 камиони.

21. Илија има 2007 тегови чии маси редоследно се 1, 2, 3, ..., 2007 грама. Еден тег загубил. Дали потоа преостанатите тегови може да ги подели на две груши со еднакви маси и со ист број на тегови во секоја група?
**Решение.** Задачата да ја преформулираме на следниов начин: Ако од множеството од првите 2007 природни броеви се отстрани еден број, дали преостанатите броеви може дасе поделат на две множества кои ги задоволуваат следниве услови:
1) во секое множество има по 1003 броја,
2) збирот на броевите од првото множество е еднаков на збирот на броевите од второто множество.

Меѓу броевите од 1 до 2007 има 1003 парни и 1004 непарни броја. Ако се отстрани непарен број, тогаш пресотануваат 1003 непарни броја, па затоа збирот на сите броеви е непарен. Според тоа, не е можно преостанатите броеви да се поделат во две множества со еднакви збирови на броевите во секое од двете множества.

Да го разгледаме случајот кога е отстранет парен број. Постојат две можности и тоа:

а) Отстранетиот број е делив со 4, т.е. е од видот $4k$. Пред него се наоѓаат $4k-1$ броеви (природните броеви од 1 до $4k-1$), а зад него се наоѓаат $2007-4k$ броеви. Тогаш броевите $4k-3, 4k-2, 4k-1,$ $4k+1, 4k+2, 4k+3$ може да се поделат на две тричлени множества од по три броја, со еднакви збирови во двете множества, множество $A$ кое го формираат броевите $4k-3, 4k+1, 4k+2$ и множество $B$ кое го формираат броевите $4k-2, 4k-1, 4k+3$. Останаа нераспределени $4m=4(k-1)$ броеви помали од отстранетиот број (тоа се броевите од 1 до $4k-4$) и $4n=2007-(4k+3)=2004-4k$ последователни природни броеви поголеми од отстранетио број (тоа се броевите од $4k+4$ до 2007).

Првите $4m$ последователни природни броеви можеме да ги распоредиме во две множества од по $2m$ броеви со еднакви збирови. Еден

од можните начини за ова распоредување е: ги запишуваме броевите во растечки редослед, а потоа броевите

$$1,2,...,m-1,m,3m+1,3m+2,...,4m-1,4m$$

ги ставаме во множество $A_1$, а броевите

$$m+1,m+2,...,3m-1,3m$$

ги ставаме во множество $B_1$. Притоа збирот на броевите во секое од двете множества е еднаков на $m(4m+1)$.

На ист начин ги распоредуваме и последователните $4n$ природни броеви поголеми од отстранетиот број. Имено, прво ги запишуваме последователно овие $4n$ природни броја, а потоа ги делиме на четири групи така што во првата група се првите $n$ броја, во втората група се вторите $n$ броја, во третата група се третите $n$ броја и во четвртата група се последните $n$ броја. Сега, во множеството $A_2$ ги ставаме броевите од првата и четвртата група, а во множеството $B_2$ ги ставаме броевите од втората и третата група.

Конечно, со множествата $D=A\cup A_1\cup A_2$ и $E=B\cup B_1\cup B_2$ се добива саканата поделба.

б) Ако отстранетиот број е од видот $4k+2$, тогаш прво на две множества ги делиме броевите $4k+1,4k+3,4k+4,4k+5,4k+6,4k+7$ така што во множеството $A$ се броевите $4k+1,4k+5,4k+7$, а во множеството $B$ се броевите $4k+3,4k+4,4k+6$. Понатаму постапката е иста како во случајот под а).

22. Во вреќа имаме шеќер во прав. Располагаме со вага со два таса и тег од $1\,g$. Кој е потребниот најмал број мерења за да измериме $1\,kg$ шеќер?

**Решение.** Најмалиот број мерења е 10. Прво мериме $1\,g$ шеќер. Потоа ставајќи го тегот на едниот тас и веќе имерениот $1\,g$ шеќер мериме 2 грама шеќер. Така добивме 3 грама измерен шеќер. Сега можеме да измериме ново количество од 4 грама, користејќи го тегот и веќе измерените 3 грама шеќер. Слично, во следните чекори можеме да измериме 8, 16, 32 грама,со што по 6 чекори добиваме вкупно 63 грама шеќер. Во седмиот чекор ќе измериме уште 62 грама шеќер, ставајќи го на едниот тас 63 грама измерениот шеќер, а на другиот тас тегот од $1\,g$ и уште 62 грама шеќер. Значи, во седмиот чекор имаме 125 грама шеќер. Сега во следните три чекори секој пат ја удвојуваме

масата на измерениот шеќер, па со десеттото мерење ќе добиеме 1000 грама, т.е. 1 килограм шечер. Со помалку од 10 мерење не можеме да зимериме 1000 грама шеќер, бидејќи со седмото мерење можеме да измериме најмногу $63+64=127$ грама, со осмото најмногу $127+128=255$ грама, а со деветтото најмногу $255+256=511$ грама.

23. Илија има 13 лубеници. Тој има вага со чија помош може да ја измери вкупната маса на две лубеници, но не може да измери маса само на една лубеница или на повеќе од две лубеници. Дали со осум мерења Илија може да ја определи масата на сите лубениц?

**Решение.** Да тргнеме од тоа дека по истите услови вкупната маса на три лубеници може да се определи со три мерења. Имено, ги мериме првата и втората, втората и третата, третата и првата, ги собираме добиените маси и делиме со 2.

Ако бројот на лубениците е парен $2n$, тогаш со $n$ мерења можеме да ја определиме нивната вкупна маса, мерејќи по две и собирајќи ги добиените $n$ маси.

Да се вратиме на нашата задача. Вкупната маса на првите 10 лубеници ја мериме со пет мерења, а вкупната маса на преостанатите три лубеници со три мерења, што е вкупно осум мерења.

24. Меѓу 103 златници два се неисправни, се разликуваат само според масата од останатите. Познато е дека сите исправни златници се со иста маса, а исто така и сите неисправни се со иста маса. Со помош на три мерење на вага без тегови определи дали случајно избран златник е исправен или неисправен.

**Решение.** Одделуваме три групи со по 34 златници во секоја. Да ги означиме со $A,B,C$. Ги споредуваме групите $A$ и $B$, а потоа групите $B$ и $C$. Јасно е дека сите три групи не може да имаат иста маса. Ако при едното мерење вагата не е во рамнотежа, а при другото е во рамнотежа заради определеност ќе земеме дека првиот пат вагата не е во рамнотежа. Првата можност е $A>B$ и $B=C$. Тогаш или во $B$ и $C$ сите златници се исправни, па неисправниот златник е потежок од исправниот, или во двете од овие групи по еден златник е неисправен и тој е полесен од останатите. Останува само да се констатира дали во третата група има неисправен златник. За таа цел ја делиме третата група $C$ на две со по 17 златници и ги споредуваме нивните маси.

Втората можност е $A<B$ и $B=C$, па постапуваме аналогно, само

заклучуваме дека во $B$ и $C$ сите златници се исправни, па неисправниот златник е полесен од исправниот, или во двете групи по еден златник е неисправен и тој е потежок од другите.

Случајот кога двете први мерења не се во рамнотежа се разгледува аналогно, имајќи предвид дека групата $B$ која учествува во двете мерења мора или двата пати да биде полесна или двата пати потешка.

25. Марко има 185 златници и знае дека меѓу нив има 7 фалсификувани. Сите исправни златници имаат еднаква маса, а фалсификуваните исто така имаат иста маса, но се малку полесни од исправните. Марко треба на Илија да му даде 23 златници. Дали може само со три мерења на вага без тегови да се изберат 23 исправни златници?

**Решение.** Да одделиме еден златник, а останатите да ги поделиме во две купчиња од по 92 златници. По споредувањето на овие две купчиња на вагата, го избираме она со поголема маса (ако имаат иста маса, тогаш било кое). Јасно, во избраното купче може да има најмногу три фалсификувани златници. Избраното купче го делиме на две купчиња од по 46 златници. По споредување на вагата повторно го избираме купчето со поголема маса (ако имаат иста маса – било кое). Во него има најмногу еден неисправен златник. На крајот, ова последно купче го делиме на две со по 23 златници. Во купчето со поголема маса сите златници се исправни.

26. Марко замислил двоцифрен број. Илија треба да го погоди бројот кој го замислил Марко. За таа цел тој на таблата запишува двоцифрени броеви. Марко покрај запишаниот број пишува знак + ако запишаниот број се совпаѓа со замисленият број, а знак − ако кај запишаниот и замисленият број се совпаѓаат цифрите само во една места вредност. Во сите други случаи не пишува ништо. Дали Илија може да го погоди замисленият број со најмногу 10 обиди?

**Решение.** Да. Илија редоследно ги запишува броевите:

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

Ако замисленият број е еден од запишаните, тој ќе биде погоден во најмногу девет обиди.

Ако замисленият број има цифра на единиците 0, во девет обиди ќе биде погодена неговата прва цифра, па како во тој случај Марко ќе запише само еден знак −, со тоа ќе заклучиме дека цифрата на единиците е 0 и бројот ќе биде погоден точно во 9 обиди.

Во останатите случаи Марко најкасно во деветтиот обид два броја ќе ги означи со знак $-$. Нека се тоа броевите $\overline{aa}$ и $\overline{bb}$. Тогаш замисленият број е $\overline{ab}$ или $\overline{ba}$. Како десетти број Илија ќе го запише едниот од овие два броја. Ако Марко запише знак +, тогаш тоа е бараниот број, а во спротивно другиот број е бараниот број.

27. На колку начини во записот
$$P > R > O > B > L > E > M > I$$
буквите може да се замена со цифри така што сите неравенства ќе бидат точни.

**Решение.** Во записот се појавуваат 8 различни букви, што значи дека треба да избереме 8 различни цифри. Тоа можеме да го направиме кога од десетте цифри ќе отстраниме 2 цифри. Последното можеме да го направиме на $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ начини. Значи, имаме 45 начини на замена на буквите со цифри така што сите неравенства ќе бидат исполнети.

28. На колку начини во записот
$$B > R > O > K > U > L > A$$
буквите може да се замена со цифри така што сите неравенства ќе бидат точни.

**Решение.** Во записот се појавуваат 7 различни букви, што значи дека треба да избереме 7 различни цифри. Тоа можеме да го направиме кога од десетте цифри ќе отстраниме 3 цифри. Последното можеме да го направиме на $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$ начини. Значи, имаме 120 начини на замена на буквите со цифри така што сите неравенства ќе бидат исполнети.

29. Илија напишал комјутерска програма, која множи три од внесените 6 броја, и го печати нивниот производ. Програмата ги избира броевите случајно, па може да избира ист број повеќе пати. Потоа ги внел броевите $\sqrt{7}, \sqrt{9}, \sqrt{11}, 4, 5, 6$. Колку различни рационални броеви може да отпечати компјутерот?

**Решение.** Бидејќи $\sqrt{9} = 3$, меѓу дадените броеви има 4 рационални. Ако овие броеви се појавуваат само по еднаш во производот, добиваме 4 решенија (избираме три од четири броја). Кога секој од овие броеви се појавува два пати во производот, тогаш со преостанатите

броеви дава по 3 решенија, па затоа во овој случај имаме $4 \cdot 3 = 12$ решенија. Секој рационален број може три пати да се појавува како множител, па затоа имаме уште 4 решенија. Дадените ирационални броеви даваат рационален број само ако ги помножиме самите со себе, па за секој имаме по 4 решенија или вкупно $2 \cdot 4 = 8$ решенија. Значи, комјутерот може да отпечати $4 + 12 + 4 + 8 = 28$ различни рационални производи.

30. На колку начини може да се изберат четири сложени броја помали од 50 така што секои два се заемно прости?

**Решение.** Секој сложен број помал од 50 мора да е делив со еден од простите броеви 2, 3, 5, 7. Од друга страна, секој од четирите барани броеви мора да содржи како прост множител точно еден од броевите 2, 3, 5, 7, бидејќи секои два се заедно прости. Значи, меѓу избраните броеви мора да се броеви $25 = 5^2$ и $49 = 7^2$. Бројот кој содржи прост множител 3 мора да е $3^2 = 9, 3^3 = 27, 3 \cdot 11 = 33, 3 \cdot 13 = 39$. Во првите два случаја за четвртиот број имаме 10 можности: 4, 8, 16, 32, 22, 26, 34, 38, 44, 46; во третиот случај 8 можности (се исфрлаат 22 и 44), во четвртиот случај 9 можности (се исфрла26). Значи, вкупниот број можности е $10 + 10 + 8 + 9 = 37$.

31. Определи го бројот на седумцифрените палиндроми (броеви кои исто се читаат од лево на десно и од десно на лево).

**Решение.** Седумцифрените палиндроми се од видот $\overline{abcdcba}$. Цифрата $a$ не може да биде еднаква на 0, па затоа за неа имаме 9 можности, додека за цифрите $b, c$ и $d$ имаме по 10 можности. Според тоа, имаме $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ седумцифрени палиндроми.

32. Определи го бројот на трицифрените броеви кај кои барем едната цифра е парна.

**Решение.** Бројот на сите трицифрени броеви е 900. Ако еден трицифрен број не содржи парна цифра, тогаш за цифрата на единиците имаме 5 можности, за цифрата на десетките 5 можности и за цифрата на стотките 5 можности. Значи, имаме $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ трицифрени броеви кај кои ниту една цифра не е парна. Значи, бројот на трицифрени броеви кај кои барем една цифра е парна и еднаков на $900 - 125 = 775$.

33. Определи го бројот на трицифрените броеви во чиј запис има точно две еднакви цифри.
**Решение.** На првото место не може да е цифрата 0, па затоа цифрата на првото место може да се избере на 9 начини. За секој таков избор постојат 9 барани броеви во кои цифрите на второто и третото место се еднакви и се различни од првата цифра, 9 кај кои втората цифра е еднаква на првата и 9 кај кои третата цифра е еднаква на првата. Значи, бараниот број броеви е $9 \cdot (9+9+9) = 243$.

34. Колку има четирицифрени броеви во чиј запис се појавуваат две различни цифри, секоја по два пати
**Решение.** Ако една од цифрите е 0, тогаш има 27 такви броеви, бидејќи за секоја од преостанатите 9 цифри местото за 0 може да се избере на 3 начини. Ако двете цифри кои учествуваат во записот се различни од 0, тогаш има 216 такви цифри, бидејќи две цифри различни од 0 може да се изберат на $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ начини, а местата на кои е се запише едната од тие две цифри може да се изберат на $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ начини. Според тоа, бројот на бараните броеви е
$$9 \cdot 3 + 6 \cdot 36 = 27 + 216 = 243.$$

35. Определи го бројот на шестцифрените броеви запишани со различни цифри кај кои цифрите 5 и 6 се соседни.
**Решение.** Цифрите 5 и 6 треба да се соседни, па затоа тие во бројот може да се во два редоследа 56 и 65. Во двата случаја комбинацијата на овие две цифри ќе ја разгледуваме како една цифра, а за да добиеме шестцифрен број треба да избереме уште 4 цифри. За првата цифра на петцифрениот број имаме 8 можности и тоа: 1, 2, 3, 4, 56 (или 65), 7, 8 и 9. За втората цифра имаме 8 можности, бидејќи можеме да ги земеме сите неискористени цифри од првиот избор и цифрата 0, за третата цифра имаме 7 можности, за четвртата 6 ножности и за петтата 5 можности. Според тоа, бројот на бараните броеви е $2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 26880$.

36. Определи го бројот на шестцифрените природни броеви запишани со различни цифри кај кои цифрите 0, 1 и 2 се соседни во било кој поредок.
**Решение.** Цифрите 0, 1 и 2 можат да бидат соседни во шест варијанти:

012, 021, 102, 120, 210, 201. Во секоја од овие шест комбинации овие три цифри ќе ги набљудуваме како една цифра, а за да добиеме шестцифрен број потребни ни се уште три цифри, па бараните броеви се од видот $\overline{abcd}$, каде на местото на една буква е запишана една од горните тројки комбинации. Разликуваме два случаја:

- Ако на местото на првата буква е запишана една од тројките, тогаш имаме само четири можности (комбинација со 0 на првото место не е можна), за втората буква имаме7 можности, за третата буква имаме 6 можности и за четвртата буква имаме 5 можности. Значи во овој случај имаме $4\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 840$ такви шестцифрени броеви.
- Ако на местото на првата буква не е тројка, тогаш таа може да биде на местото на втората, третата и четвртата буква. Тогаш за првата буква има 7 можности а за преостанатите три букви имаме 6, 6 и 5 можности. Значи, во овој слулај имаме $3\cdot 7\cdot 6\cdot 6\cdot 5 = 3780$ такви шестцифрени броеви.

Конечно, бараниот број броеви е $840 + 3780 = 4620$.

37. Определи го бројот на непарните седумцифрени броеви кај кои производот на цифрите е парен број.

**Решение.** За да седумцифрениот број биде непарен, цифрата на единиците мора да е непарна цифра. За да производот на цифрите на седумцифрениот број е парен, мора да има најмалку една парна цифра, што значи дека една од преостанатите 6 цифри мора да е парна. Ако сите преостанати 6 цифри се непарни, тогаш шроизводот на цифрите на седумцифрениот број ќе биде непарен. Вакви шестцифрени броеви има $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 5^6 = 15625$. Сите преостанати шестцифрени броеви, кои вкупно се $9\cdot 10^5 - 5^6$ имаат производ на цифрите парен број. Значи, непарни седумцифрени броеви чиј производ на цифрите е парен број се $5\cdot(9\cdot 10^5 - 5^6) = 5^6\cdot(9\cdot 2^5 - 5) = 4421875$.

38. Определи го бројот на петцифрените палиндроми деливи со 45.

**Решение.** Бараните броеви се делив со 45, што значи дека се деливи со 5 и со 9. Од деливоста со 5 следува дека цифрата на единиците е 0 или 5. Но, бидејќи бројот е палиндром, цифрата на единиците е еднаква со првата цифра, па затоа мора да е различна од 0. Значи, првата и последната (петтата) цифра на бараните броеви е 5. Според

тоа, бараните броеви се од видот $\overline{5aba5}$. Сега, од деливост со 9 следува дека збирот $10+2a+b$ треба да е делив со 9. Бидејќи броевите $a$ и $b$ се едноцифрен, можни се три случаја:

1) $2a+b=8$, па во овој случај добиваме
$$(a,b)=(0,8),(1,6),(2,4),(3,2),(4,0),$$
а бараните броеви се 50805, 51615, 52425, 53235 и 54045.

2) $2a+b=17$, па во овој случај добиваме
$$(a,b)=(4,9),(5,7),(6,5),(7,3),(8,1),$$
а бараите броеви се 54945, 55755, 56565, 57375 и 58185.

3) $2a+b=26$, па во овој случај добиваме $(a,b)=(9,8)$, па го имаме само бројот 59895.

Значи, имаме 11 петцифрени палиндроми деливи со 45.

39. Определи го бројот на петцифрените палиндроми деливи со 55.

**Решение.** Бараните броеви се деливи со 5 и со 11. Од деливоста со 5 следува дека цифрата на единиците може да е 0 или 5. Но, броевите се палиндроми, т.е. цифрата на единиците е и цифра на десетилјадитите, па затоа таа не може да е 0. Значи, првата и петтата цифра е 5. Според тоа, бараните броеви се од видот $\overline{5aba5}$ и бројот $10+b-2a$ треба да е делив со 11. Бидејќи $a$ и $b$ се едноцифрени броеви, од деливоста со 11 следува:

1) $10+b=2a$, одкаде ги добиваме решенијата: 55055, 56265, 57475, 58685 и 59895.

2) $10+b=2a+11$, од каде ги добиваме решенијата 50105, 51315, 52525, 53735 и 54945.

Според тоа, има 10 петцифрени палиндроми деливи со 55.

40. Еден град е поделен на седум општини. Градските власти решиле во градот да изградат по едно ново училиште, библиотека и градинка. На колку начини тоа може да се направи ако уште е одлучено зградите на училиштето и градинката да не се во иста општина?

**Решение.** Бидејќи за изградба на библиотеката не постојат услови, општината во која ќе биде изградена може да се избере на 7 начини. Училиштето исто така можеме да го изградиме во било која од 7 општини, па остануваат 6 општини за да се избере каде ќе се гради градинката (без општината која е избрана за училиптето). Според тоа, постојат $7\cdot 7\cdot 6=294$ можности за избор каде ќе се градат трите

објекти.

41. Дванаесет витези на тркалезната маса треба да формираат двочлена делегација која треба да го посети кралот Артур. На колку начини тоа може да се направи, ако во делегацијата не може да се витези кои се соседи на тркалезната маса?
**Решение.** Секој витез може да биде во делегација со 9 други витези, бидејќи витезите кои му се соседни отпаѓаат. Имаме 12 витези, па добиваме дека бројот на двочлените делегации $12 \cdot 9 : 2 = 54$. Делењето со 2 е извршено бидејќи секоја делегација $XY$ е броена два пати (еднаш кога $X$ се комбинира со другите 9 витези, и вторпат кога $Y$ се комбинира со другите 9 витези).

42. Во една училница се наоѓаат шест еднакви клупи: три зелени, една црвена и две портокалови. На колку начини може да се наредат клупите во еден ред, една до друга, така што црвената клупа ќе биде до портокалова клупа?
**Решение.** Со $P, C, Z$ да означиме портокалова, црвена и зелена клупа.
*Прв случај*. Портокаловата клупа е во редот по црвената клупа, па тие две клупи $CP$ ги сметаме како неделива целина од пет елементи $CP, P, Z, Z, Z$. Блокот $CP$ можеме да го ставиме на 5 места, потоа на 4 места можеме да ја ставиме портокаловата клупа $P$, па трите места ги пополнуваме со зелени клупи. Значи, имаме $5 \cdot 4 = 20$ распореди.
*Втор случај*. Портокаловата клупа е во редот пред црвената клупа, па тие две клупи $PC$ ги сметаме како неделива целина од пет елементи $PC, P, Z, Z, Z$. Блокот $PC$ можеме да го ставиме на 5 места, потоа на 4 места можеме да ја ставиме портокаловата клупа $P$, па трите места ги пополнуваме со зелени клупи. Значи, имаме $5 \cdot 4 = 20$ распореди.
Притоа некои разместувања се два пати броени бидејќи во некои распореди $P$ е истовремено и пред $C$ и по $C$ (блокот $PCP$). Бидејќи притоа црвената клупа не може да е ниту прва ниту последна, два пати се броени четири начини на разместувања (кога црвената клупа е 2., 3., 4. и 5. по ред). Значи, вкупно имаме $20 + 20 - 4 = 36$ различни распореди.

43. Разгледуваме нескладни правоаголници со целобројни должини на страни. Кои се побројни: оние со периметар 1996 или оние со периметар 1998?

**Решение.** Нека $a,b$ се должините на страните на правоаголникот $a \le b$. Тогаш во првиот случај $2(a+b)=1996$, т.е. $a+b=998$, па $a$ може да прима вредности 1, 2, ..., 499. Значи, имаме 499 правоаголници со периметар 1996.

Во вториот случај добиваме $2(a+b)=1998$, т.е. $a+b=999$, па $a$ може да прима вредности 1, 2, 3, ..., 499.

Значи, бројот на правоаголници со периметар 1996 и целобројни должини на страни е еднаков на бројот на правоаголници со периметар 1998 и целобројни должини на страни.

44. Разгледуваме нескладни правоаголници со целобројни должини на страни. Кои се поброjни: оние со периметар 2014 или оние со периметар 2016?

**Решение.** Нека $a,b$ се должините на страните на правоаголникот $a \le b$. Тогаш во првиот случај $2(a+b)=2014$, т.е. $a+b=1007$, па $a$ може да прима вредности 1, 2, ..., 503. Значи, имаме 503 правоаголници со периметар 2014.

Во вториот случај добиваме $2(a+b)=2016$, т.е. $a+b=1008$, па $a$ може да прима вредности 1, 2, 3, ..., 503, 504.

Значи, бројот на правоаголници со периметар 2016 и целобројни должини на страни е поголем од бројот на правоаголници со периметар 2014 и целобројни должини на страни.

45. На колку начини можеме броевите во множеството $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ да ги обоиме со црвена, зелена или сина боја, така што секој број е обоен со различна боја во однос на сите негови делители?

**Решение.** *Прв начин*. Броевите 5 и 7 не се делители еден на друг ниту имаат вистински делители меѓу дадените броеви, па затоа можеме да ги обоиме на $3\cdot 3=9$ начини независно од останатите броеви. Бројот 6 има два вистински делители 2 и 3 кои не се делители еден на друг, па ќе ги разликуваме следниве случаи:

1) Броевите 2 и 3 се обоени во различни бои. Броевите 2 и 3 можеме да ги обоиме на 6 начин, додека бојата на бројот 6 е еднозначно определена. Броевите 4 и 9 можеме да ги обоиме само на по 2 начина, додека бојата на бројот 8 е еднозначно определена. Според тоа, во овој случај имаме $6\cdot 2\cdot 2=24$ начини на боење.
2) Броевите 2 и 3 се обоени со иста боја. Броевие 2 и 3 можеме да ги

обоиме на 3 начини, а бројот 6 на 2 начини. Броевите 4 и 9 можеме да ги обоиме на 2 начини, додека бојата на бројот 8 е еднозначно определена. Според тоа,во овој случај имаме $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ боења.

Конечно, вкупниот број на кој може да се направат бараните боења е $(24 + 24) \cdot 9 = 432$.

*Втор начин*. Броевите 2, 4 и 8 мора да се обоени со различни бои, што може да се направи на 6 начини. Бидејќи 2 е делител на 6, бројот 6 може да се обои со некоја од преостанатите две бои. Бидеќи 3 е делител на 6 и за него имаме две можности за боење, а потоа и за 9 имаме 2 можности за боење. Броевите 5 и 7 се заемно прости со секој од преостанатите броеви, па може да се обојат со било која боја, секој на 3 начини. Конечно, имаме $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 432$ начини на боење.

46. Дали е можно во темињата на секој триаголник да се запише по еден број така што должината на секоја страна да биде еднаква на збирот на броевите запишани во нејзините темиња?

**Решение.** Да. Во секое теме треба да се запипе бројот кој е еднаков на должината на тангентната отсечка од та теме до допирната точка со впишаната кружница во триаголникот.

47. Дали постои четириаголник таков што во секое негово теме може да се запише по еден број таков што должината на секоја страна на четириаголникот е еднаква на збирот на броевите запишани во нејзините темиња?

**Решение.** Да. Таков е секој тангентен четириаголник. Во секое теме треба да се запише бројот кој е еднаков на должината на тангентата од тоа теме до допирната точка со впишната кружница на четириаголникот.

48. Педесет луѓе седат околу тркалезна маса.

а) Дали меѓу нив сигурно има едно лице кое седи меѓу две лица од ист пол?

б) Дали меѓу нив може да постојат две такви лица?

**Решение.** а) Нека претпоставиме дека такво лице не постои. Тогаш околу масата луѓето се разместени така што секои две лица со од ист пол ...ЖЖММЖЖММЖЖММ... Ако сега од масата стане секое второ лице, на масата ќе останат 25 лица при што распоредот ќе биде

...ЖМЖМЖМ... Последното противречи на фактот дека на масата останаа непарен број лица, кои треба да се распределени во парови. Од добиената противречност следува меѓу седнатие 50 луѓе сигурно има едно лице кое седи меѓу две лица од ист пол.

б) Нека еден маж, да кажеме $A$ го ставиме да седи меѓу две жени (Слично е и ако ставиме жена да седи меѓу двајца мажи.) Ако не постои уште едно лице лице кај кое двата соседи се од ист пол, тогаш и од левата и од десната страна на $A$ се по две жени. Ако мажот $A$ стане од масата, остануваат 49 лица. Ако меѓу нив не постои уште едно лице со два соседи од ист пол, тогаш распоредот мора да е таков што ќе се менуваат парови соседи од ист пол. Последното не е можно, бидејќи имаме непарен број лица.

Нека мажот $A$ е меѓу двајца мажи $B$ и $C$ (или жена меѓу две жени). Ако не постои уште едно лице со два соседи од ист пол, тогаш по станувањето од масата на лицата $A,B,C$, преостанатите 47 лица мора да се распоредени така што ќе се менуваат парови соседи од ист пол. Последното противречи на тоа што имаме непарен број лица.

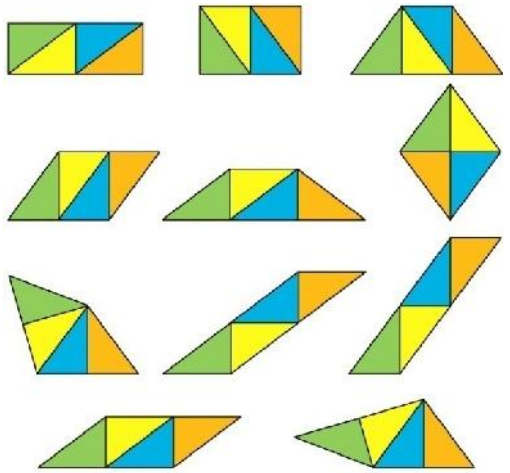
Конечно, од горните разгледувања следува дека меѓу седнатите 50 луѓе може да има две лица секое од кои седи меѓу лица од иста пол.

49. Дадена е низата природни броеви: 1, 2, 3, 4, 5, ..., 2007, 2008, 2009. Во еден чекор може на секој број да му го замениш местото со друг број или да го оставиш бројот на своето место. Кој е најмалиот број потребни чекори од дадената низа да ја добиеш низата 2, 3, 4, 5, ..., 2007, 2008, 2009, 1?

**Решение.** Бараниот распоред може да се добие во најмалку два чекори. *Прв чекор*: бројот 1 го заменува местото со бројот 2008, 2 со 2007 итн. додека бројот 2009 останува на своето место. Така се добива низата 2008, 2007, ..., 2, 1, 2009. *Втор чекор*: бројот 2008 го заменува местото со бројот 2, 2007 со 3, итн. бројот 1 со бројот 2009, а бројот 1005 останува на своето место. Така се добива низата 2, 3, ..., 2007, 2008, 2009, 1.

50. На располагање имаме четири пластични складни правоаголни триаголници со должини на страни $30\,cm$, $40\,cm$ и $50\,cm$. Колку различни нескладни конвексни четириаголници може да се добијат со спојување на овие четири триаголници? Не е потребно да се докажува конвексноста, туку само да се нацртаат четириаголниците.

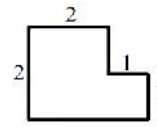
**Решение.** Можните конвексни четириаголници се прикажани на долните цртежи.



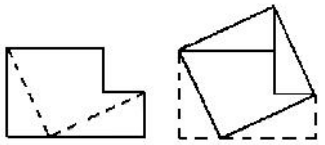
51. Располагаме со 12 стапови со должини $13\,dm$. Дали можеме да ги исечеме на делови со должини $3\,dm, 4\,dm, 5\,dm$ така што од добиените делови да може да осставиме 13 правоаголни триаголници со страни со должини $3\,dm, 4\,dm, 5\,dm$ ?

**Решение.** Да. На пример, можеме 5 стапови да ги пресечиме на по три дела со должини $4\,dm, 4\,dm, 5\,dm$, 4 стапови да по три дела со должини $3\,dm, 5\,dm, 5\,dm$ и 3 стапови на по четири делови со должини $3\,dm, 3\,dm, 3\,dm, 4\,dm$. Така добиваме по 13 стапови со должини $3\,dm, 4\,dm, 5\,dm$.

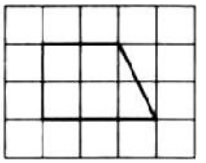
52. Фигурата прикажана на цртежот десно расечи ја на најмал можен број делови од кои може да се состави квадрат.



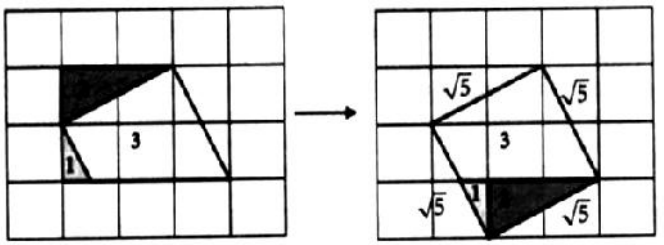

**Решение.** Плоштината на дадената фигура е еднаква на $2\cdot 3-1\cdot 1=5=(\sqrt{5})^2$. Според тоа, страната на квадратот кој треба да се добие е еднаква на $\sqrt{5}$. Очигледно со едно сечење тоа не може да се постигне. Понатаму, за да добиеме страни со должина $\sqrt{5}$ ќе искористиме дека $2^2+1^2=\sqrt{5}^2$, што значи дека треба да отсечеме правоаголни триаголници со катетите 2 и 1. На долните цртежи е покажано како целта може да се постигне со две сечења.



53. Правоаголниот трапез прикажан на цртежот десно чии основи се 2 и 3, а висината е 2, подели го на три дела од кои а се состави квадрат.



**Решение.** Плоштината на трапезоте еднаква на 5, па затоа должината на страна на квадратот треба да биде еднаква на $\sqrt{5}$. Бидејќи $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, бараното расекување е дадено на долниот цртеж лево, а составувањето на квадратот е дадено на долниот цртеж десно.




54. Правилен дванаесетаголник расечи го на 6 делови од кои може да се состави квадрат со иста плоштина.

**Решение.** На долните цртежи се дадени две можни расекувања на правилниот дванаесетаголник од кои се составен квадрат со иста плоштина како и дванаесетаголникот.

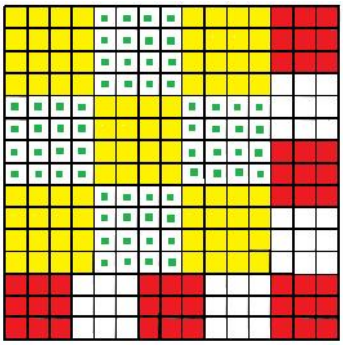
Прв начин:

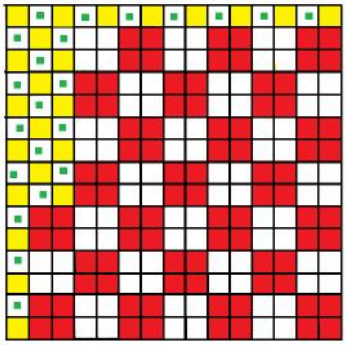

Втор начин:


55. Дали е можно квадрат со страна 15 да се подели на $n$ квадрати со страна $a$ и $n$ квадрати со страна $b$ ($n,a,b$ се природни броеви)?

**Решение.** Од условот на задачата следува $n(a^2+b^2)=15^2=225$. Од тука следува дека $n \mid 225$, односно $n \in \{1,3,5,9,15,25,45,75,225\}$.

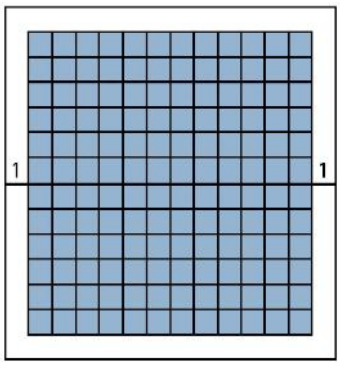
1) Ако $n \in \{3,15,25,75,225\}$ така $a^2+b^2 \in \{75,15,9,3,1\}$, но такви броеви $a$ и $b$ не постојат.
2) Ако $n \in \{1,5\}$, тогаш $a^2+b^2 \in \{225,45\}$. Тогаш $a=12, b=9$, односно $a=6, b=3$, но вакви квадрати не може да се распоредат на квадрат со страна 15.
3) Ако $n=9$, тогаш $a^2+b^2=25$, па е $a=4, b=5$ (цртеж долу лево).
4) Ако $n=45$, тогаш $a^2+b^2=5$, па е $a=2, b=1$ (цртеж долу десно).





56. Горјан има коцка со целобројни должини на рабови (изразени во сантметри). Тој коцката ја обоил и потоа ја расекол на единечни коцки. На Андреј му ги дал коцките кои имаат еден обоен ѕид. Андреј пребројал дека добил 864 коцки. Помогни му на Андреј да ја определи должината на работ на големата коцка.

**Решение.** На секој ѕид на големата коцка се наоѓаат еднаков број мали коцки кои имаат по точно еден обоен ѕид. Значи, на секој ѕид имаме $864:6=144$ мали коцки со по еден обоен ѕид. Овие мали коцки на секој ѕид определуваат квадрат со целобројна должина на страна. Сега, од $144=12\cdot 12$ следува дека страната на тој квадрат е $12\,cm$. Но, должината на работ на коцката е за $2\,cm$ поголема, што значи дека големата коцка има раб $12+2=14\,cm$.



57. Дадена е шаховска табла со димензии $5\times 5$. Дали е можно шаховската фигура скокач (коњ) која се наоѓа во долниот лев агол на таблата во следните 24 потези да го посети секое поле на таблата? Ако е можно со броеви од 1 до 24 означи го редоследот на потезите.

**Решение.** Можно е. Еден од можните редоследи на потезите е даден на долниот цртеж.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 23 | 18 | 13 | 4 |
| 17 | 12 | 5 | 8 | 19 |
| 22 | 7 | 24 | 3 | 14 |
| 11 | 16 | 1 | 20 | 9 |
| * | 21 | 10 | 15 | 2 |

58. Во секои од три квадрати $3\times 3$ се запишани броевите од 1 до 9, во секое поле по еден број. Докажи дека во множеството $A=\{1,2,...,9\}$ постојат два броја кои ниту во еден од тие три квадрати не се соседни, т.е. не се наоѓаат во соседни полиња. Соседни се полињата кои имаат заедничка страна.

**Решение.** Секој квадрат да го обоиме шаховски така што се добиваат 4 бели и 5 црни полиња. При вакво боење секои две соседни полиња се различно обоени. Броевите од множеството $A$ да ги поделиме во 8 групи:

ЦЦЦ, ЦЦБ, ЦБЦ, ЦББ, БЦЦ, БЦБ, ББЦ, ББББ,

(ЦБЦ значи дека бројот од таа група во првиот квадрат е на црно поле во вториот на бело и во третиот на црно поле). Бидејќи има повеќе броеви отколку полиња, некоја група содржи најмалку два броја.Тоа значи дека броевите од таа група не се соседни во ниту еден квадрат, бидејќи во секој квадрат се на полиња со иста боја.

59. а) Во секои од четири квадрати со димензии $5\times 5$ се запишани броевите од 1 до 25, во секое поле по еден број. Докажи дека во множеството $A=\{1,2,3,...,25\}$ постојат два броја кои во ниту еден од четирите квадрати не се соседни, т.е. не се наоѓаат во соседни полиња. Две полиња се соседни ако имаат заедничка страна.

б) Во секои од седум квадрати со димензии $5\times 5$ се запишани броевите од 1 до 25, во секое поле по еден број. Докажи дека во множеството $A=\{1,2,3,...,25\}$ постојат два броја кои во ниту еден од четирите квадрати не се соседни, т.е. не се наоѓаат во соседни полиња.

**Решение.** а) Секој квадрат да го обоиме шаховски, така шро се добиваат 12 бели и 13 црни полиња. Соседните полиња се различно обоени. Броевите од множеството $A$ ги делиме во 16 групи:

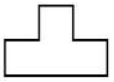
ЦЦЦЦЦ, ЦЦЦЦБ, ЦЦЦБЦ, ..., БББЦ, БББББ.

(ЦБЦЦЦ значи дека број од таа група во првиот квадрат е на црно, во вториот на бело, во третиот на црно и во четвртиот на црно поле). Бидејќи има повеќе броеви отколку групи, некоја група содржи барем два броја. Броевите од иста група не се соседни во ниту еден квадрат, бидејќи во секој квадрат се на полиња со иста боја.

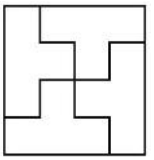
б) Од броевите од 1 до 25 може да се формираат $\frac{25\cdot 24}{2}=300$ различни парови броеви. Од друга страна во секој квадрат имаме $2\cdot 5\cdot 4=40$ парови соседни броеви. Секоја заедничка страна на две полиња означува еден таков пар. Тоа значи дека во сите седум квадрати имаме $7\cdot 2\cdot 5\cdot 4=280$ парови соседни полиња. Според Принципот на Дирихле постои пар броеви кои не се соседи во ниту еден од седумте квадрати.

*Забелешка*. Јасно, решението под б) може да се примени и за задачата под а).

60. Дали стандардна шаховска табла, со 64 полиња, може да се покрие со фигури прикажани на цртежот десно. Фигурите не смее да се преклопуваат и да излегуваат надвор од таблата.



**Решение.** Да. Шаховската табла можеме да ја поделиме на четири квадрати со димензии $4\times 4$, а секој таков квадрат може да се покрие со четири од дадените фигури на начин како што е прикажано на цртежот десно.



61. Дали е можно на табла со димензии $10\times 10$, обоена на шаховски начин, да се постават 10 топа, пет на бели, пет на црни полиња, така што никои два топа нема меѓусебно да се напаѓаат?

**Решение.** Да ги нумерираме сите колони со броевите од 1 до 10, тргнувајќи од горниот ред и левата колона. На овој начин на секое поле им е придружен пар координати. На секој топ му го придружуваме збирот на координатите на полето во кое се наоѓа топот. Овој збир е непарен за црните и е парен за белите полиња.

Да разгледаме еден распоред на 10 топови кои не се напаѓаат. Во овој распоред во секој ред и секоја колона мора да има по еден топ, па затоа збирот на броевите придружени на топовите ќе биде еднаков на $S=2\cdot(1+2+...+10)=2\cdot 55=110$. Од друга страна, ако на црните полиња има 5 топови, а на белите се другите 5 топови, тогаш имаме збир

на 5 парни и 5 непарни броја, што е непарен број. Противречност. Значи, бараниот распоред не е можен.

62. Киро и Темјана си играат со две исти коцки, на секоја од кои се запишани броевите $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, 3, \frac{1}{2}, \sqrt{5}$ (не секој ѕид по еден број). Двајцата одеднаш ги фрлаат коцките. Киро победува ако производот на два добиени броја е рационален, а Темјана победува ако производот на двата добиени броја е ирационален. Кој има поголеми шанси да победи?

**Решение.** Производот на два рационални броја е рационален број. На секоја коцка имаме по три рационални броја и комбинирајќи го секој со секој број добиваме $3 \cdot 3 = 9$ рационални производи. Понатаму, производот на два еднакви ирационални броја е рационален број, па така добиваме уште 3 рационални производи. Според тоа имаме $9 + 3 = 12$ рацинални производи. Вкупно имаме $6 \cdot 6 = 36$ производи, што значи дека бројот на ирационални производи е $36 - 12 = 24$. Значи, во играта поголеми шанси да победи има Темјана.

# 5. ГЕОМЕТРИЈА

## 5.1. ТРИАГОЛНИК

1. За должините на страните на еден триаголник важи релацијата

$$2a^2 + 3b^2 + c^2 = 2b(2a + c).$$

Каков е овој триаголник?

**Решение.** Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$2a^2 - 4ab + 2b^2 + b^2 + 2bc + c^2 = 0,$$

$$2(a-b)^2 + (b-c)^2 = 0.$$

Последното равенство е исполнето ако и само ако $a = b = c$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамностран.

2. Нека $a, b, c$ се должините на страните $BC, CA, AB$ на триаголникот $ABC$, при што важи $\angle A = 60^\circ$. Докажи, дека

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc.$$

**Решение.** Нека $BD$ е висината на триаголникот $ABC$. Со примена на Питагоровата теорема на триаголниците $ABD$ и $BCD$ добиваме дека

$$a^2 - (b - \tfrac{c}{2})^2 = c^2 - (\tfrac{c}{2})^2,$$

т.е. $a^2 - b^2 + bc + \frac{c^2}{4} = c^2 - \frac{c^2}{4}$, од каде следува $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

3. (Обратна Питагорова теорема). Нека $a, b, c$ се страни на даден $\triangle ABC$ и притоа важи равенството

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Докажи дека внатрешниот агол наспроти страната $c$ е прав.

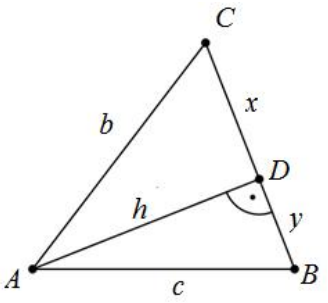
**Решение.** Со примена на Питагорова теорема ќе го докажеме следното посилно тврдење:

За $\triangle ABC$ е триаголник со страни $a = BC$, $b = AC$ и $c = AB$ важи:

1) ако $\angle ACB < 90^\circ$, тогаш $c^2 < a^2 + b^2$,

2) ако $\angle ACB > 90^\circ$, тогаш $c^2 > a^2 + b^2$.

Доказ на 1). Висината спуштена од било кое од темињата $A$ и $B$ е во внатрешноста на триаголникот $ABC$ (бидејќи $\measuredangle C < 90°$ ). При ознаки како на цртежот ( $x = CD, y = BD$ ), користејќи ја Питагоровата теорема имаме:

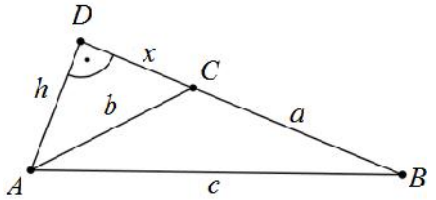



$$a^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$
$$b^2 = h^2 + x^2, \quad c^2 = h^2 + y^2.$$

Оттука,

$$a^2 + b^2 = c^2 + (2x^2 + 2xy) = c^2 + 2x(x+y) = c^2 + 2xa > c^2.$$

Доказ на 2). Висината спуштена од било кое од темињата $A$ и $B$ е во надворешноста на триаголникот $ABC$ (бидејќи $\measuredangle C > 90°$ ). При ознаките како на цртежот ( $x = CD$, $y = BD$ ), користејќи ја Питагоровата теорема, имаме:




$$a^2 = (y-x)^2 = y^2 - 2xy + x^2,$$
$$b^2 = h^2 + x^2, \quad c^2 = h^2 + y^2.$$

Оттука

$$a^2 + b^2 = c^2 - (2xy - 2x^2) = c^2 - 2x(y-x) = c^2 - 2xa < c^2.$$

Од претходните разгледувања следува дека, ако внатрешниот агол наспроти страната $c$ не е прав агол, тогаш $a^2 + b^2 \neq c^2$, од што следува тврдењето на задачата.

4. Нека $a, b$ и $c$ се должинина страните на даден триаголник. Ако

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) + ac(a+c) - bc(b+c),$$

докажи дека овој триаголник е правоаголен.

**Решение.** Имаме

$$a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) - ac(a+c) + bc(b+c) = 0,$$
$$a^3 - a^2b - a^2c + b^3 - b^2a + b^2c + c^3 - c^2a + c^2b = 0,$$
$$a^2(a-b-c) - b^2(a-b-c) - c^2(a-b-c) = 0,$$
$$(a^2 - b^2 - c^2)(a-b-c) = 0.$$

Но, $a < b + c$, т.е. $a - b - c \neq 0$, па од последното равенство следува $a^2 - b^2 - c^2 = 0$, т.е. $a^2 = b^2 + c^2$. Сега, од обратната Питагорова теорема следува дека триаголникот е правоаголен.

5. Дадени се изразите

$a = 3^{2022} - 3^{2021} + 3^{2020}$, $b = 14\sqrt{2} \cdot 3^{2020}$, $c = 3^{2021} - 3^{2022} + 3^{2023}$.

Докажи дека $a, b$ и $c$ се должини на страни на правоаголен триаголник.

**Решение.** Имаме:

$$a = 3^{2022} - 3^{2021} + 3^{2020} = 3^{2020} \cdot (3^2 - 3 + 1) = 7 \cdot 3^{2020}$$

и

$$c = 3^{2021} - 3^{2022} + 3^{2023} = 3^{2021} \cdot (1 - 3 + 3^2) = 7 \cdot 3^{2021}.$$

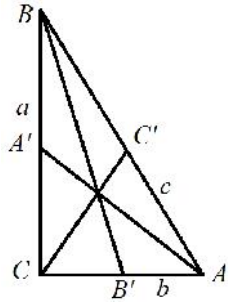
Понатаму,

$$a^2 + b^2 = 49 \cdot 3^{4040} + 392 \cdot 3^{4040} = 441 \cdot 3^{4040}$$
$$= 49 \cdot 9 \cdot 3^{4040} = 49 \cdot 3^{4042} = c^2,$$

па од обратната Питагорова теорема следува дека $a, b$ и $c$ се должини на страни на правоаголен триаголник.

6. Во правоаголен триаголник $ABC$ со прав агол во темето $C$ должините на тежишните линии се $t_a, t_b$ и $t_c$. Докажи дека $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$.

**Решение.** Во правоаголен триаголник тежишната линија повлечена кон хипотенузата е еднаква на половина од хипотенузата, т.е. $\overline{CC'} = t_c = \frac{c}{2}$. Понатаму,




$$\overline{AA'} = t_a, \overline{BB'} = t_b, \overline{CA'} = \frac{a}{2}, \overline{CB'} = \frac{b}{2},$$

па од Питагоровата теорема следува

$$t_a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} \text{ и } t_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Според тоа,

$$t_a^2 + t_b^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{5}{4}(a^2 + b^2)$$
$$= \frac{5}{4}c^2 = 5(\frac{c}{2})^2 = 5t_c^2,$$

што и требаше да се докаже.

7. Во правоаголниот триаголник $ABC$, должините на тежишните линии кои соодветствуваат на катетите се $2\sqrt{13}\,cm$ и $\sqrt{73}\,cm$. Определи ја должината на хипотенузата на овој триаголник.

**Решение.** Нека $t_a, t_b$ и $t_c$ се должините на тежишните линии соодветни на катетите и хипотенузата на триаголникот $ABC$. Од претходната задача следува

$$5t_c^2 = t_a^2 + t_b^2 = (2\sqrt{13})^2 + (\sqrt{73})^2 = 52 + 53 = 125,$$

од каде добиваме $t_c = 5\,cm$. Конечно, $c = 2t_c = 10\,cm$.

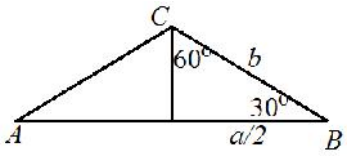
8. Определи ги мерните броеви на страните на рамнокрак триаголник со должина на основата $a$ и должина на кракот $b$ ако

$$a^3 + b^3 + 3b^2(b-a) + 2b(b^2 - a^2) = 0.$$

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned} 0 &= a^3 + b^3 + 3b^2(b-a) + 2b(b^2 - a^2) \\ &= a^3 + 6b^3 - 3b^2a - 2a^2b \\ &= a(a^2 - 3b^2) + 2b(3b^2 - a^2) \\ &= (a^2 - 3b^2)(a - 2b). \end{aligned}$$

Од неравенството на триаголник следува $a - 2b \neq 0$, па затоа од последното равенство добиваме $a^2 = 3b^2$, односно $a = b\sqrt{3}$. Значи, $\frac{a}{2} = b\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. половината од страната на рамнокракиот триаголник е еднаква на висината на рамностран триаголник со страна $b$. Последното значи дека аглите на рамнокракиот триаголник се $30^\circ$ и $120^\circ$ (види цртеж).




9. Даден е правоаголен триаголник $ABC$ со катети $a$ и $b$, хипотенуза $c$ висина кон хипотенузата $h$. Докажи дека триаголникот со должини на страни $h, c+h, a+b$ исто така е правоаголен.

**Решение.** Имаме, $ab = ch$ и $a^2 + b^2 = c^2$, па затоа

$$(a+b)^2 + h^2 = a^2 + 2ab + b^2 + h^2 = c^2 + 2ch + h^2 = (c+h)^2.$$

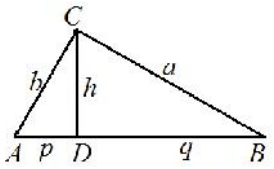
Сега од обратната Питагорова теорема следува дека триаголникот со должини на странаи $h, c+h, a+b$ е правоаголен.

10. Нека $E$ е произволна точка на катетата $AC$ и $F$ е точка на хипотенузата $AB$ на правоаголниот $\triangle ABC$ таква што $\angle EFA = 90^\circ$. Докажи, дека $\angle ECF = \angle EBF$.

**Решение.** Од $\angle BFE = \angle BCE = 90^\circ$, следува дека темињата $C$ и $F$ на четириаголникот $BCEF$ лежат на кружницата со дијаметар $EB$. Според тоа, $\angle ECF = \angle EBF$, како агли на иста тетива $EF$.

11. Нека $h$ е должината на висината $CD$ која соодветствува на хипотенузата $AB$ на правоаголниот триаголник $ABC$ и нека $\overline{AD} = p$ и $\overline{BD} = q$. Докажи дека $pq = h^2$.

**Решение.** Нека $a$ и $b$ се должините на катетите $BC$ и $AC$ и $c$ е должината на хипотенузата на правоаголниот триаголник $ABC$ (цртеж десно). Тогаш




$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ и } ab = 2P = ch.$$

Понатаму, од Питагоровата теорема применета на триаголниците $ADC$ и $BDC$ следува дека $p^2 = b^2 - h^2$ и $q^2 = h^2 - a^2$, па затоа

$$\begin{aligned} p^2q^2 &= (b^2 - h^2)(a^2 - b^2) \\ &= a^2b^2 - h^2(a^2 + b^2) + h^4 \\ &= a^2b^2 - c^2h^2 + h^4 \\ &= h^4, \end{aligned}$$

од каде следува $pq = h^2$.

12. Определи ја плоштината на правоаголниот триаголник со периметар $36\,cm$, кај кој за хипотенузата $c$ и катетите $a$ и $b$ важи $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$.

**Решение.** Од $a + b + c = 36$ добиваме $a + b = 36 - c$, па ако замениме во $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$, добиваме $\frac{36-c}{c} = \frac{7}{5}$, па затоа $\frac{36}{c} - 1 = \frac{7}{5}$, од каде следува $\frac{36}{c} = \frac{12}{5}$, т.е. $c = \frac{5 \cdot 36}{12} = 15\,cm$. Понатаму, со замена во $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$ добиваме $\frac{a+b}{15} = \frac{7}{5}$, односно $a + b = 21$, па затоа $(a+b)^2 = 21^2$. Според тоа, $a^2 + 2ab + b^2 = 441$. Меѓутоа, $a^2 + b^2 = 15^2 = 225$, па ако замениме во

претходното равенство добиваме $225+2ab=441$, односно $ab=108$. Конечно, за плоштината на триаголникот наоѓаме $P=\frac{ab}{2}=54\,cm^2$.

13. Пресметај го периметарот на правоаголниот триаголник со плоштина $30\,cm^2$, ако за страните на правоаголниот триаголник важи $5a=b+c$ ($c$ е хипотенуза).

**Решение.** Од равенството $5a=b+c$ следува $c=5a-b$, па ако замениме во равенството $c^2=a^2+b^2$, добиваме $(5a-b)^2=a^2+b^2$, од каде добиваме $25a^2-10ab+b^2=a^2+b^2$, па затоа $24a^2=10ab$, односно $a=\frac{5}{12}b$. Сега, $30=P=\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}b^2$, па затоа $b^2=144$. Значи, $b=12\,cm$, па $a=\frac{5}{12}\cdot 12=5\,cm$ и $c=\sqrt{5^2+12^2}=13\,cm$. Конечно,

$$L=a+b+c=5+12+13=30\,cm.$$

14. Даден е правоаголен триаголник со катети $5\,cm$ и $12\,cm$. Определи го радиусот на впишаната кружница во овој триаголник.

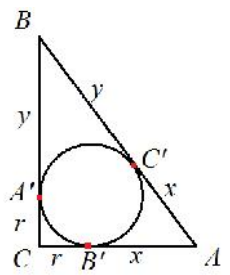
**Решение.** Од Питагоровата теорема следува дека хипотенузата на триаголникот е $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13\,cm$. Понатаму, за плоштината на триаголникот добиваме $P=\frac{ab}{2}=\frac{5\cdot 12}{2}=30\,cm^2$. Од друга страна $P=\frac{a+b+c}{2}r$, каде $r$ е радиусот на впишана кружница, па затоа $\frac{5+12+13}{2}r=30$, т.е. $r=2\,cm$.

15. Даден е правоаголен триаголник со хипотенуза $20\,cm$. Ако радиусот на впишаната кружница е $4\,cm$, пресметај го периметарот на овој триаголник.

**Решение.** Нека $C',B',A'$ се точките во кои впишаната кружница ги допира соодветно хипотенузата $AB$ и катетите $AC, BC$ на правоаголниот триаголник $ABC$ (цртеж десно). Тогаш од својствата на тангентните отсечки следува

$\overline{AB'}=\overline{AC'}=x,\ \overline{BC'}=\overline{BA'}=y,\ \overline{CA'}=\overline{CB'}=r$.

Понатаму, $a=y+r, b=x+r, c=x+y$, па затоа



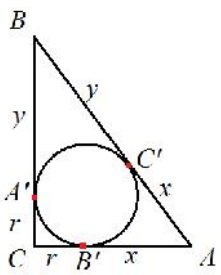
$$L = a + b + c = (y + r) + (x + r) + c$$
$$= 2r + (x + y) + c = 2r + 2c$$
$$= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 20 = 48\,cm,$$

што и требаше да се пресмета.

16. Даден е правоаголен триаголник со радиус на впишаната кружница е $4\,cm$, кај кој катетите се разликуваат за $4\,cm$, пресметај го периметарот на овој триаголник.

**Решение.** Нека $C', B', A'$ се точките во кои впишаната кружница ги допира соодветно хипотенузата $AB$ и катетите $AC, BC$ на правоаголниот триаголник $ABC$ (види цртеж). Тогаш од својствата на тангентните отсечки следува

$\overline{AB'} = \overline{AC'} = x,\ \overline{BC'} = \overline{BA'} = y,\ \overline{CA'} = \overline{CB'} = r$.




Понатаму,

$$a = b + 4,\ c = x + y = b - r + a - r = b - 4 + b + 4 - 4 = 2b - 4.$$

Сега, од Питагоровата теорема последователно добиваме

$$(b + 4)^2 + b^2 = (2b - 4)^2,$$
$$2b^2 + 8b + 16 = 4b^2 - 16b + 16,$$
$$b^2 = 12b.$$

Но, $b > 0$, па од последното равенство следува $b = 12\,cm$. Значи,

$$a = 12 + 4 = 16\,cm,\ c = 2 \cdot 12 - 4 = 20\,cm \text{ и } L = a + b + c = 48\,cm.$$

17. Даден е правоаголен триаголник со хипотенуза $20\,cm$. Ако катетите се разликуваат за $4\,cm$, пресметај го периметарот на овој триаголник.

**Решение.** Нека $a$ и $b$ се должините на катетите, а $c$ е хипотенузата на триаголникот. Од условот на задачата следува $a = b + 4$. Сега, од Питагоровата теорема следува

$$(b + 4)^2 + b^2 = 20^2, \text{ т.е. } 2b^2 + 8b + 16 = 400.$$

Последната равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$b^2 + 4b - 192 = 0,$$
$$(b + 2)^2 - 14^2 = 0,$$
$$(b - 12)(b + 16) = 0.$$

Сега, производ на два броја е еднаков на нула, ако барем еден од

множителите е еднаков на нула, па од последната равенка следува $b-12=0$ или $b+16=0$, односно $b=12$ и $b=-16$. Но, $b>0$, па затоа единствено решение е $b=12\,cm$. Значи, $a=b+4=16\,cm$ и

$$L=a+b+c=48\,cm.$$

18. Должините на катетите на правоаголен триаголник се изразени со цели броеви сантиметри. Ако хипотенузата е $20\,cm$, пресметај го периметарот на овој триаголник.

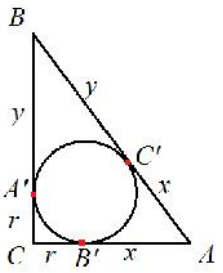
**Решение.** Нека $a$ и $b$ се катетите и $c=20\,cm$ е хипотенузата во правоаголниот триаголник $ABC$. Од Питагоровата теорема следува

$$a^2+b^2=20^2.$$

Сега, бидејќи должините на катетите $a$ и $b$ изразени во сантиметри се цели броеви, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a<b$. Според тоа, подредената тројка природни броеви $(a,b,20)$ е Питагорова тројка. Понатаму, ако искористиме дека единствена Питагорова тројка во која најголемиот број е 20 е тројката $(12,16,20)$, добиваме дека $a=12$, $b=16$ и $L=a+b+c=48\,cm$.

19. Должините на катетите на правоаголен триаголник се изразени со цели броеви сантиметри. Ако радиусот на впишаната кружница е $4\,cm$, пресметај го периметарот на овој триаголник.

**Решение.** Нека $a$ и $b$ се катетите, $c$ е хипотенузата и $r=4\,cm$ е радиусот на впишаната кружница во правоаголниот триаголник $ABC$. При ознаки како на цртежот десно имаме $a=y+4$, $b=x+4$ и $c=x+y$. Јасно, $x,y$ се природни броеви поголеми од 4 и без ограничување на општоста можеме да земеме дека $y>x$. Сега, од Питагоровата теорема следува равенката




$$(y+4)^2+(x+4)^2=(x+y)^2,$$

која е еквивалентна со равенката

$$(x-4)(y-4)=32.$$

Понатаму, при дадените услови од последната равенка следуваат системите равенки

$$\begin{cases} x-4=1 \\ y-4=32 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-4=2 \\ y-4=16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-4=4 \\ y-4=8 \end{cases}$$

чии решенија се соодветно $x=5,\ y=36$; $x=6,\ y=20$ и $x=8,\ y=12$.

Според тоа, задачата има три решенија и тоа:

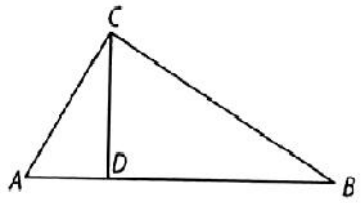
а) $a=40\ cm, b=9\ cm, c=41\ cm$ и $L=90\ cm$,

б) $a=24\ cm, b=10\ cm, c=26\ cm$ и $L=60\ cm$,

а) $a=16\ cm, b=12\ cm, c=20\ cm$ и $L=48\ cm$.

20. Висината која соодветствува на хипотенузата на правоаголниот триаголник е $3\ cm$, а едната катета е $5\ cm$. Определи ја должината на хипотенузата на овој триаголник.

**Решение.** Нека $ABC$ е даденият триаголник со прав агол во темето $C$, во кој се катета $\overline{BC}=5\ cm$ и висина $\overline{CD}=3\ cm$. Од Питагоровата теорема применета на триаголникот $BCD$ следува $\overline{BD}=4\ cm$. Понатаму, $\triangle BCD\sim\triangle BAC$, па затоа

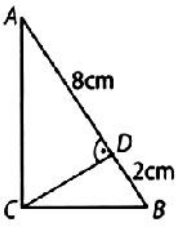



$$\overline{BD}:\overline{BC}=\overline{CD}:\overline{CA}.$$

Оттука добиваме $\overline{AC}=3,75\ cm$. Сега, од Питагоровата теорена применета на триаголникот $ABC$ следува $\overline{AB}=6,25\ cm$

21. Висината на правоаголниот триаголник ја дели хипотенузата на два дела со должини $2\ cm$ и $8\ cm$. Пресметај го периметарот на овој триаголник.

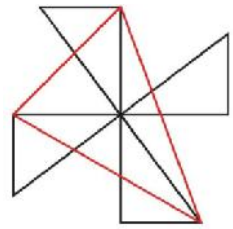
**Решение.** При ознаки како на цртежот десно триаголниците $DAC$ и $DCB$ се слични, па затоа важи



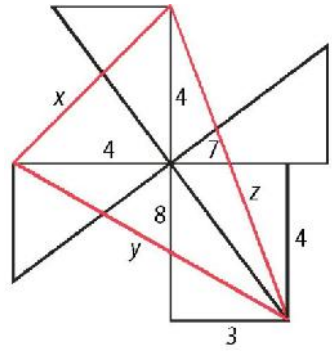

$$\overline{DA}:\overline{DC}=\overline{DC}:\overline{DB},$$

од каде што за висината $CD$ добиваме $\overline{DC}=4\ cm$. Сега, со примена на Питагоровата теорема на триаголниците $DAC$ и $DCB$, за кои за секој од нив ни се познати двете катети ги пресметуваме катетите на триаголникот $ABC$. Така, добиваме $\overline{AC}=4\sqrt{5}\ cm$ и $\overline{BC}=2\sqrt{5}\ cm$. Конечно, периметарот на триаголникот $ABC$ е $L=2(5+3\sqrt{5})\ cm$.

22. Правоаголниот триаголник со катети 3 и 4, го ротираме за агол од $90^\circ$ три пати околу едно теме, како што е прикажано на цртежот десно. Потоа поврзуваме три од добиените темиња како на цртежот, со што го добиваме црвениот триаголник. Дали овој триаголник е правоаголен?



**Решение.** Страните на црвениот триаголник да ги означиме со $x, y$ и $z$. Должините на хипотенузите на складните триаголници се 5. Отсечката $x$ е хипотенуза на правоаголен триаголник со катети 4 и 4, па затоа $x=\sqrt{32}$. Отсечката $z$ е хипотенуза на правоаголен триаголник со катети 3 и 8, па затоа $z=\sqrt{73}$. Отсечката $y$ е хипотенуза на правоаголен триаголник со катети 4 и 7, па затоа $y=\sqrt{65}$. Конечно, бидејќи

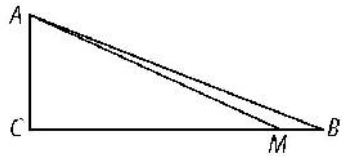



$$\sqrt{32}^2+\sqrt{65}^2=97\neq 73=\sqrt{73}^2,$$

од обратната Питагорова теорема следува дека црвениот триаголник не е правоаголен.

23. Даден е правоаголен триаголник $ABC$ со прав агол во темето $C$, $\overline{AB}=3$ и $\overline{AC}=1$. На отсечката $BC$ е дадена точка $M$ таква што $\overline{BM}:\overline{CM}=1:7$. Што е поголемо $\overline{BC}$ или $\overline{AM}$.

**Решение.** Од Питагоровата теорема следува $\overline{CB}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=3^2-1^2=8$, т.е. $\overline{CB}=2\sqrt{2}$. Од $\overline{BM}:\overline{CM}=1:7$ следува $\overline{CM}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$. Од Питагоровата теорема следува $\overline{AM}^2=\overline{CM}^2+\overline{AC}^2=(\frac{7\sqrt{2}}{4})^2+1^2=\frac{57}{8}$. Бидејќи $\frac{57}{8}<\frac{64}{8}$, добиваме $\overline{AM}^2<\overline{CB}^2$, па затоа $\overline{AM}<\overline{CB}$.




24. Нека точката $D$ е средина на хипотенузата $AB$ на правоаголниот

триаголник $ABC$, $\angle BAC = 35^\circ$. Точката $B_1$ е симетрична на точката $B$ во однос на $CD$. Определи ја мерката на $\angle AB_1C$.

**Решение.** Точката $D$ е центар на опишаната кружница околу триаголникот $ABC$ (нацртај цртеж). Од $\overline{DB} = \overline{DB_1} = \overline{DC}$ следува дека точката $B_1$ лежи на таа кружница. Според тоа, $\angle AB_1B = \angle ACB = 90^\circ$ (агли над дијаметар) и $\angle BB_1C = \angle BAC = 35^\circ$. Бидејќи $\angle BDC$ е остар (заради $\overline{BC} < \overline{AC}$), точката $B_1$ лежи на пократкиот лак $AC$ на опишаната кружница. Затоа

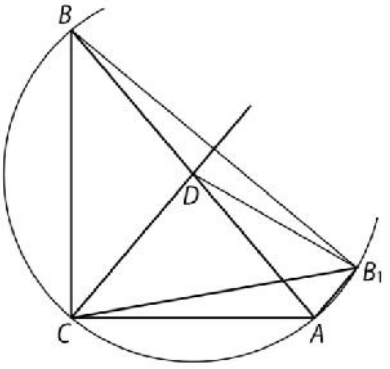
$$\angle AB_1C = \angle AB_1B + \angle BB_1C = 90^\circ + 35^\circ = 125^\circ.$$

25. Нека $D$ е средината на хипотенузата $AB$ на правоаголниот триаголник $ABC$, $\angle BAC = 50^\circ$. Точката $B_1$ е симетрична на точката $B$ во однос на $CD$. Определи ја мерката на $\angle AB_1C$.

**Решение.** Точката $D$ е центарот на опишаната кружница околу триаголникот $ABC$, па бидејќи

$$\overline{DB_1} = \overline{DB} = \overline{DC},$$

точката $B_1$ припаѓа на оваа кружница (цртеж десно). Понатаму,




$$\angle BB_1C = \angle BAC = 50^\circ \text{ и}$$

$$\angle ABB_1 = \angle ACB = 90^\circ.$$

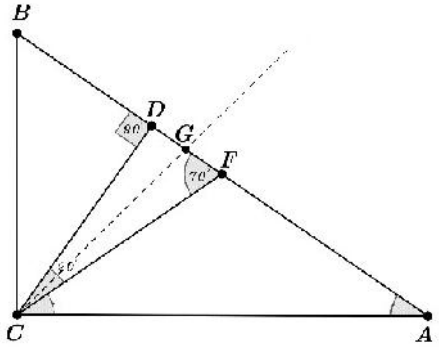
Имаме $\angle BAC > \angle ABC$, па затоа $\overline{BC} > \overline{AC}$, од каде следува дека $\angle BDC$ е тап. Затоа точката $B_1$ лежи на подолгиот лак $\overset{\frown}{AC}$ на опи-шаната кружница. Затоа

$$\angle AB_1C = \angle AB_1B - \angle BB_1C = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

26. Даден е правоаголен триаголник $ABC$ со прав агол во темето $C$. Нека $D$ е подножјето на висината повлечена од темето $C$ и $F$ е средината на страната $AB$. Ако аголот меѓу висината $CD$ и тежишната линија $CF$ е еднаков на $20^\circ$, определи ја големината на аголот меѓу симетралата на аголот во темето $C$ и тежишната линија $CF$.

**Решение.** Нека $G$ е пресечната точка на симетралата на аголот во темето $C$ и хипотенузата $AB$. Триаголникот $FDC$ е правоаголен со прав агол во темето $D$ и од $\angle DCF = 20^\circ$ следува $\angle CFD = 70^\circ$. Затоа важи

$$\angle CFA = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$



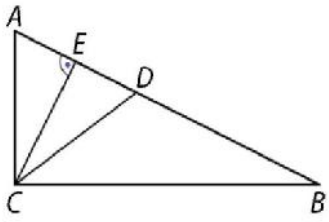

Понатаму, триаголникот $CAF$ е рамнокрак со агол при врвот $\angle CFA = 110^\circ$, па затоа важи $\angle ACF = \angle FAC = 35^\circ$. Конечно,

$$\angle FCG = \angle ACG - \angle ACF = 45^\circ - 35^\circ = 10^\circ.$$

27. Нека $D$ е точка на хипотенузата $AB$ на правоаголниот триаголник $ABC$, и нека $\overline{CA} = \overline{CD} = \sqrt{5}$ и $\overline{CB} = 2\sqrt{5}$. Определи ги плоштината и периметарот на триаголникот $BCD$.

**Решение.** Нека $E$ е подножјето на висината спуштена од темето $C$ на хипотенузата $AB$. Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = 5.$$



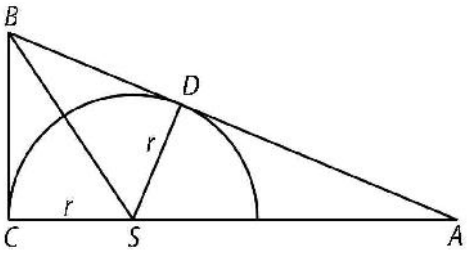

Од плоштината на триаголникот $ABC$ имаме $\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2} = 5 = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{EC}}{2} = \frac{5\cdot\overline{EC}}{2}$, од каде добиваме $\overline{EC} = 2$. Побнатаму, од Питагоровата теорема следува $\overline{ED} = \overline{EA} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{EC}^2} = 1$, па затоа $\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = 3$. За периметарот на триаголникот $BCD$ имаме

$$P = P_{ABC} - P_{ACD} = 5 - \frac{\overline{AD}\cdot\overline{EC}}{2} = 3,$$

а неговиот периметар е $L = 3 + 3\sqrt{5}$.

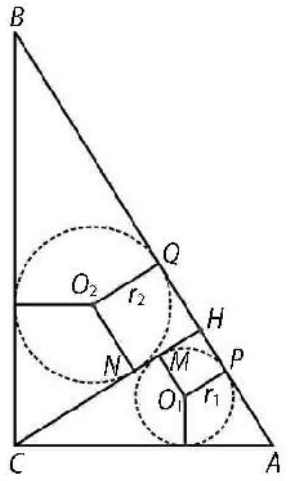
28. Правоаголен триаголник $ABC$ има катетите $\overline{AC} = 12\,cm$ и $\overline{BC} = 5\,cm$. Полукружница со центар на страната $AC$ ја допира катетата $BC$ во точката $C$, а хипотенузата $AB$ во точка $D$. Определи ја должината на радиусот на оваа полукружница.

**Решение.** Од Питагоровата теорема следува $\overline{AB}=13\,cm$. Нека $S$ е центарот на полукружницата (цртеж десно). Тогаш $\overline{SC}=\overline{SD}=r$, каде $D$ е радиусот на полукружницата. Бидејќи полукружницата ја допира страната $AB$ во точката $D$, добиваме дека $SD\perp AB$, па затоа $P_{ABC}=P_{BCS}+P_{ABS}$, од каде добиваме $12\cdot 5=5r+13r$, односно $r=\frac{10}{3}\,cm$.




29. Во правоаголен триаголник $ABC$ со катети $\overline{AC}=6\,cm$ и $\overline{BC}=8\,cm$ е повлечена висината $CH$. Во секој од добиените триаголници $AHC$ и $BCH$ се впишани кружници кои висината ја допираат во точките $M$ и $N$. Определи ја должината на отсечката $MN$.

**Решение.** Центрите на впишаните кружници во триаголниците $AHC$ и $BCH$ да ги означиме редоследно со $O_1$ и $O_2$, раиусите на кружниците со $r_1$ и $r_2$, а допирните точки на кружниците и хипотенузата со $P$ и $Q$ (цртеж десно). Четириаголниците $PHMO_1$ и $NHQO_2$ се квадрати со страни $r_1$ и $r_2$. Од Питагоровата теорема следува $\overline{AB}=10\,cm$. Од плоштината на триаголникот $ABC$ имаме $\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\overline{AB}\cdot\overline{CH}$, па затоа $\overline{CH}=4{,}8\,cm$. Со примена на Питагоровата теорема на триаголниците $AHC$ и $BCH$ добиваме $\overline{BH}=6{,}4\,cm$ и $\overline{AH}=3{,}6\,cm$. Со $L'$ и $L''$ да ги означиме периметрите на триаголниците $AHC$ и $BCH$, соодветно. Тогаш од плоштините на овие триаголници добиваме $\overline{AH}\cdot\overline{CH}=r_1\cdot L'$ и $\overline{BH}\cdot\overline{CH}=r_2\cdot L''$, од каде наоѓаме $r_1=1{,}2cm$ и $r_2=1{,}6\,cm$. Затоа $\overline{MN}=r_2-r_1=0{,}4\,cm$.




30. Во рамнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза со должина

$45\,cm$ е впишан правоаголник. Две негови темиња лежат на хипотенузата, а другите две на катетите. Определи ја плоштината на правоаголникот, ако должината на едната страна е 40% од должината на нејзината соседна страна.

**Решение.** Нека $ABC$ е рамнокрак правоаголен триаголник со прав агол во темето $C$ и нека $MNKL$ е правоаголник впишан во триаголникот $ABC$ при што темињата $M$ и $N$ се на хипотенузата (види ги долните цртежи). Во правоаголните триаголници $AML$ и $BNK$ важи $\measuredangle LAM = \measuredangle KBN = 45^\circ$, па затоа тие се рамнокраки правоаголни триаголници. Според тоа, $\overline{AM} = \overline{ML} = \overline{NK} = \overline{BN}$.

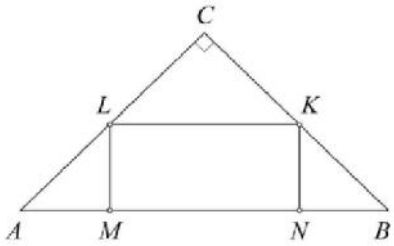
*Прв случај*. Нека $\overline{MN} > \overline{NK}$. Тогаш $\overline{MN} = x$, $\overline{NK} = 0,4x$, па затоа

$$0,4x + x + 0,4x = 45,$$

од каде добиваме $1,8x = 45$, т.е. $\overline{MN} = x = 25\,cm$. Значи,

$$\overline{NK} = 0,4 \cdot 25 = 10\,cm.$$

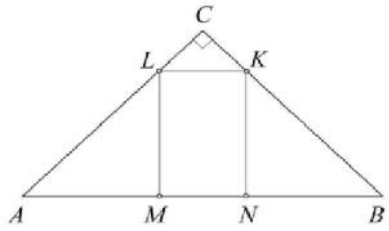
Според тоа, плоштината на правоаголникот е $P = 250\,cm^2$.




*Втор случај*. Нека $\overline{MN} < \overline{NK}$. Тогаш $\overline{MN} = 0,4x$, $\overline{NK} = x$, па затоа

$$x + 0,4x + x = 45,$$

од каде добиваме $2,4x = 45$, односно $\overline{NK} = x = 18,75\,cm$. Според тоа, $\overline{MN} = 0,4 \cdot 18,75 = 7,5\,cm$.

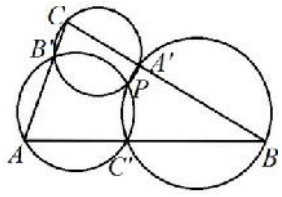



Значи, плоштината на правоаголникот е $P = 140,625\,cm^2$.

31. Во триаголникот $ABC$, на страните $AB, BC$ и $CA$ редоследно се избрани точки $C', A'$ и $B'$. Докажи дека кружниците опишани околу триаголниците $A'B'C$, $A'C'B$ и $B'C'A$ се сечат во една точка.

**Решение.** Нека $P$ е пресечната точка на кружниците опишани околу триаголниците $A'C'B$ и $A'B'C$. Од својствата на перифериските агли следува

$$\measuredangle CBA + \measuredangle C'PA' = 180^\circ,$$



$$\measuredangle A'PB' + \measuredangle BCA = 180^\circ .$$

Затоа

$$\measuredangle B'PC' = 360^\circ - \measuredangle C'PA' - \measuredangle A'PB' = \measuredangle CBA + \measuredangle BCA ,$$

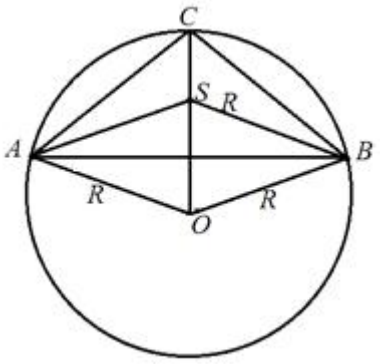
па затоа

$$\measuredangle C'AB' + \measuredangle C'PB' = \measuredangle BAC + \measuredangle C'PB' = \measuredangle BAC + \measuredangle CBA + \measuredangle BCA = 180^\circ .$$

Конечно, од последното равенство следува дека точките $A, C', P, B'$ лежат на иста кружница, што значи дека кружниците опишани околу триаголниците $A'B'C$, $A'C'B$ и $B'C'A$ се сечат во точката $P$.

32. Даден е триаголник $ABC$. Определи ги неговите агли, а ко центарот на опишаната кружница околу триаголникот $ABC$ и центарот на впишаната кружница во триаголникот $ABC$ се симетрични во однос на правата $AB$.

**Решение.** Нека $O$ и $S$ се соодветно центрите на опишаната и впишаната кружница во триаголникот $ABC$. Точките $O$ и $S$ се симетрични, па затоа важи $\overline{AS} = \overline{AO} = \overline{BO} = \overline{BS} = R$. Од $\overline{AS} = \overline{BS} = R$, следува

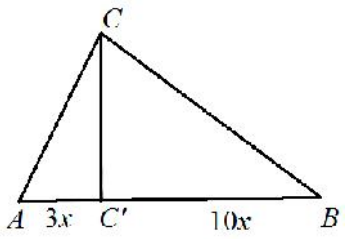



$$\measuredangle SAB = \measuredangle SBA = \frac{\sim}{2} ,$$

и како $BS$ е симетрала на аголот $\measuredangle ABC$ добиваме дека триаголникот $ABC$ е рамнокрак. Бидејќи $\overline{AO} = \overline{CO}$, триаголникот $CAO$ е рамнокрак, па затоа важи $\frac{3\sim}{2} = 90^\circ - \sim$, од каде добиваме $5\sim = 180^\circ$, т.е. $\sim = 36^\circ$. Значи, $= 36^\circ$ и $¥ = 108^\circ$.

33. Во триаголникот $ABC$ важи $\overline{AC} = 41$ и $\overline{BC} = 50$. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот $ABC$ ако висината $CC'$ ја дели страната $AB$ во однос $3:10$.

**Решение.** Од условот $\overline{AC'} : \overline{BC'} = 3:10$ следува $\overline{AC'} = 3x, \overline{BC'} = 10x$. Сега, од Питагоровата теорема применета на триаголниците $ACC'$ и $BCC'$ добиваме



$$41^2-(3x)^2=50^2-(10x)^2,$$
$$1681-9x^2=2500-100x^2,$$
$$91x^2=819,$$
$$x^2=9,$$
$$x=3.$$

Според тоа, $\overline{AC'}=9$, $\overline{BC'}=30$, па затоа $\overline{AB}=39$ и

$$\overline{CC'}=\sqrt{50^2-30^2}=40.$$

Значи, периметарот на триаголникот е

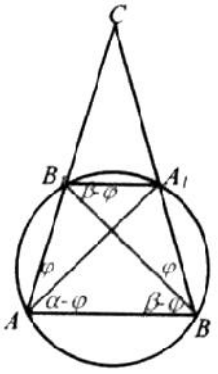
$$L=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=39+50+41=130,$$

а неговата плоштина е

$$P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CC'}}{2}=\frac{39\cdot 40}{2}=780.$$

34. Нека $AA_1$ и $BB_1$ се тежишни линии на триаголникот $ABC$. Ако $\sphericalangle CAA_1=\sphericalangle CBB_1$, докажи дека $\overline{AC}=\overline{AB}$.

**Решение.** Бидејќи $\sphericalangle CAA_1=\sphericalangle CBB_1=\ddot{}$, важи $\sphericalangle B_1AA_1=\sphericalangle A_1BB_1=\ddot{}$. Според тоа, точките $A,B,A_1,B_1$ лежат на една кружница.



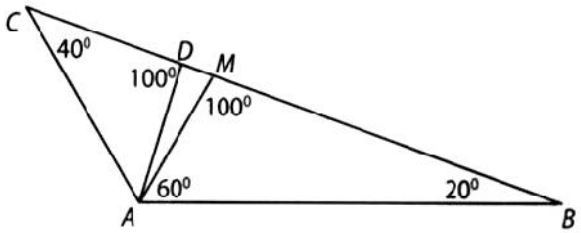

Бидејќи $A_1B_1$ е средна линија на триаголникот $ABC$, добиваме $A_1B_1\parallel AB$. Според тоа,

$$\sphericalangle A_1AB=\sphericalangle A_1B_1B=\sim-\ddot{},$$
$$\sphericalangle A_1AB=\sphericalangle ABB_1=\ -\ddot{},$$

па затоа $\sim-\ddot{}=\ -\ddot{}$, т.е. $\sim=\ $. Значи, триаголникот $ABC$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AC}=\overline{AB}$.

35. Во триаголникот $ABC$ важи $\sphericalangle B=20^\circ,\sphericalangle C=40^\circ$ и должината на симетралата $AM$ на $\sphericalangle A$, $M\in BC$ е еднаква на $2\,cm$. Определи ја разликата на должините на страните $BC$ и $AB$.

**Решение.** Имаме $\sphericalangle BAC=180^\circ-(20^\circ+40^\circ)=120^\circ$, од каде следува $\sphericalangle BAM=\sphericalangle CAM=60^\circ$. Нека $D$ е точка на страната $BC$ таква што $\overline{BD}=\overline{BA}$. Тогаш $\overline{CD}=\overline{BC}-\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{AB}$. Во рамнокракиот триаголник $BAD$ важи $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BDA=(180^\circ-20^\circ):2=80^\circ$.




Бидејќи $\measuredangle AMC$ е надворешен агол за триаголникот $BAM$, добиваме $\measuredangle AMC = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$. Значи, $\measuredangle AMC = \measuredangle BDA$, од каде следува дека триаголникот $AMD$ е рамнокрак, со основа $MD$. Понатаму,

$$\measuredangle CAD = \measuredangle BAC - \measuredangle BAD = 120^\circ - 80^\circ = 40^\circ,$$

односно $\measuredangle CAD = \measuredangle DCA$. Значи, триаголникот $CAD$ е рамнокрак триаголник со основа $AC$. Затоа $\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{AM} = 2\,cm$.

36. Во внатрешноста на триаголникот $ABC$ се избрани две точки. Растојанието од едната точка до страните на триаголникот се $1\,cm, 3\,cm$ и $15\,cm$, а од другата точка (во истиот редослед) се $4\,cm, 5\,cm$ и $11\,cm$. Определи го радиусот на впишаната кружница во триаголникот $ABC$.

**Решение.** Нека $a,b,c$ се должините на страните на триаголникот $ABC$, $S$ е неговата плоштина и $r$ е радисуот на впишаната кружница. Познато е дека

$$r = \frac{2S}{a+b+c}. \qquad (*)$$

Ако првата точка ја поврземе со темињата на триаголникот $ABC$, тогаш истиот го делиме на три триаголници, а збирот на нивните плоштини е еднаков на плоштината на триаголникот $ABC$. Затоа

$$a + 3b + 15c = 2S. \qquad (1)$$

Аналогно од втората точка ја добиваме равенката $4a + 5b + 11c = 2S$, која е еквивалентна со равенката

$$8a + 10b + 22c = 4S. \qquad (2)$$

Ако од (2) ја одземеме (1) добиваме $7(a+b+c) = 2S$. Конечно, со замена во (*) добиваме

$$r = \frac{7(a+b+c)}{a+b+c} = 7\,cm.$$

37. Должините на две страни на триаголникот $ABC$ се разликуваат за $4\,cm$, должината на третата страна е $20\,cm$ и радиусот на впишаната

кружница во триаголникот $ABC$ е $4\,cm$. Пресметај го периметарот на овој триаголник.

**Решение.** Нека $a$ и $b$ се должините на две страни на триаголникот, а $c = 20\,cm$ е должината на неговата трета страна. Од условот на задачата следува $a = b + 4$. Понатаму, за полупериметарот на триаголникот добиваме $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{(b+4)+b+20}{2} = b + 12$, па затоа плоштината на триаголникот е $P = sr = 4s = 4(b+12)$. Од друга страна според Хероновата формула плоштината на триаголникот е

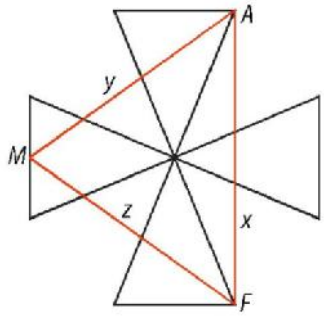
$$\begin{aligned} P &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{(b+12)(b+12-b-4)(b+12-b)(b+12-20)} \\ &= \sqrt{96(b+12)(b-8)}. \end{aligned}$$

Според тоа, ако искористиме дека $b+12>0$, од последните две равенства редоследно добиваме

$$\begin{aligned} &4(b+12) = \sqrt{96(b+12)(b-8)}, \\ &16(b+12)^2 = 96(b+12)(b-8), \\ &b+12 = 6(b-8) \\ &5b = 60, \\ &b = 12\,cm. \end{aligned}$$

Значи, $a = b + 4 = 16\,cm$ и $L = a + b + c = 48\,cm$.

38. Основите на рамнокраките триаголници на цртежот десно се со должина 10, а краците се со должина 13. Овие четири триаголнци имаат едно заедничко теме. Соседните триаголници се слики еден на друг при ротација околу врвот за агол $90^\circ$. Пресметај го периметарот на триаголникот $AMF$, каде $M$ е средина на страната на која и припаѓа.




**Решение.** Да ги означиме основите на дадените триаголници со $AB$, $CD, EF, GH$ а заедничкото теме се $O$ (цртеж десно). Триаголниците $MAO$ и $MFO$ се складни, бидејќи $MO$ е заедничка страна, $\overline{OA} = \overline{OF}$ и $\angle MOA = \angle MOF$. Според тоа, $\overline{MA} = \overline{MF}$, т.е. триаголникот $AFM$ е рамнокрак. Нека $N$ и $P$ се редоследно средините на $AB$ и $EF$.

Четириаголникот $PFAN$ е правоагоник. Основата $AF$ на триаголникот $AMF$ е еднаква на $PN$, што значи

$$\overline{AF} = \overline{PN} = 2\sqrt{13^2 - 5^2} = 2 \cdot 12 = 24 .$$

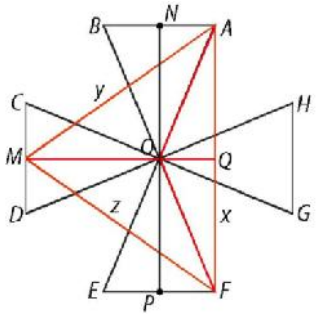
Нека $Q$ е средината на $AF$. Тогаш

$$\overline{MQ} = \overline{MO} + \overline{OQ} = \overline{MO} + \overline{AN} = 12 + 5 = 17 .$$

Од триаголникот $MQA$ следува

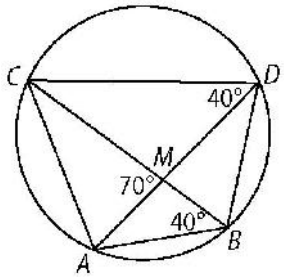
$$\overline{MA} = \sqrt{17^2 + 12^2} = \sqrt{433} .$$

Конечно, периметарот на триаголникот $AMF$ е $L = 24 + 2\sqrt{433}$.




39. Триаголниците $ABC$ и $ADC$ имаат заедничка страна $AC$. Отсечките $AD$ и $BC$ се сечат во точка $M$, при што $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 40^\circ$, $\overline{BD} = \overline{AB}$ и $\measuredangle AMC = 70^\circ$. Определи ги аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$.

**Решение.** Од $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 40^\circ$ следува дека точките $A, B, C, D$ лежат на една кружница (цртеж десно). Понатаму, од $\measuredangle AMC = 70^\circ$ следува $\measuredangle AMB = 110^\circ$ и од триаголникот $AMB$ следува $\measuredangle BAM = 30^\circ$. Сега, бидејќи $\overline{BD} = \overline{AB}$, добиваме дека триаголникот $ABD$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle BDA = 30^\circ$.




Сега, $\measuredangle ACB = \measuredangle BDA = 30^\circ$, бидејќи е периферискиагол над тетивата $AB$. Од гриаголникот $ABD$ добиваме $\measuredangle ABD = 120^\circ$, па затоа $\measuredangle CBD = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$. Понатаму, $\measuredangle CAD = CBD = 80^\circ$ како периферискиагли на тетивата $CD$. Според тоа, аглите на триаголникот $ABC$ се: $\measuredangle ABC = 40^\circ$, $\measuredangle ACB = 30^\circ$ и $\measuredangle CAB = 110^\circ$, а аглите на триаголникот $ADC$ се: $\measuredangle ADC = 40^\circ$, $\measuredangle ACD = 60^\circ$ и $\measuredangle CAD = 80^\circ$

40. Должините на страните на еден триаголник се три последователни парни природни броеви. Определи ги страните на триаголникот ако неговата плоштина е еднаква на $24\,cm^2$.

**Решение.** Нека $a = 2n - 2, b = 2n, c = 2n + 2$ се должините на станите на триаголникот. Од Хероновата формула добиваме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{3n\cdot n\cdot(n+2)(n-2)}=\sqrt{3n^2(n^2-4)}$$

па затоа

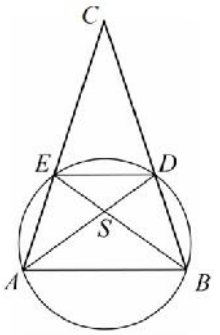
$$\begin{aligned}
&3n^2(n^2-4)=24^2,\\
&(n^2)^2-4n^2-192=0,\\
&(n^2)^2-16^2-4n^2+4\cdot 16=0,\\
&(n^2-16)(n^2+16)-4(n^2-16)=0,\\
&(n^2-16)(n^2+12)=0,\\
&(n-4)(n+4)(n^2+12)=0.
\end{aligned}$$

Од последната равенка следува $n=4$, што значи дека должините на страните на триаголникот се $a=6\,cm, b=8\,cm, c=10\,cm$.

41. Нека $AD$ и $BE$ се симетралите на аглите при основата на рамнокракиот триаголник $ABC$. Докажи дека $\overline{AE}=\overline{ED}=\overline{DB}$.

**Решение.** *Прв начин*. Од $\angle ABE=\angle ADE$ следува дека точките $A,B,D,E$ лежат на една кружница (види цртеж). Сега, равенствата $\overline{AE}=\overline{ED}=\overline{DB}$ следуваат од равенствата

$$\angle ABE=\angle DAE=\angle BAD.$$

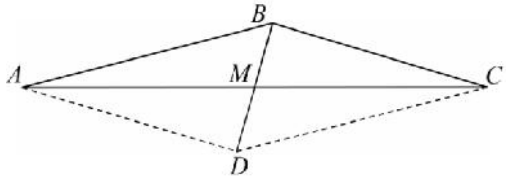



*Втор начин*. Од признакот АСА следува дека триаголниците $ABD$ и $BAD$ се складни, па затоа $\overline{AE}=\overline{DB}$ и $\overline{AD}=\overline{BE}$. Оттука според признакот САС следува складноста на триаголниците $ADE$ и $BED$. Нека $S$ е пресекот на симетралите $AD$ и $BE$. Тогаш триаголниците $ABS$ и $DES$ се рамнокраки со заеднички врв $S$ и еднакви агли при врвот (накрсни агли). Затоа и аглите при основите им се еднакви, од каде следува $\angle EAD=\angle EDA$, т.е. триаголникот $ADE$ е рамнокрак. Затоа $\overline{AE}=\overline{ED}$. Заради симетрија важи $\overline{ED}=\overline{DB}$, што и требаше дасе докаже.

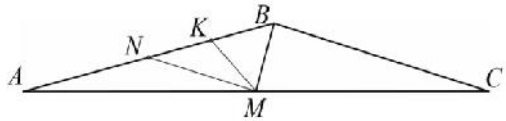
42. Во триаголникот $ABC$ тежишната линија $BM$ е четири пати пократка од страната $AB$ и со неа формира агол од $60^\circ$. Определи ја мерката на $\angle ABC$.

**Решение.** *Прв начин*. Нека $D$ е точка таква што четириаголникот

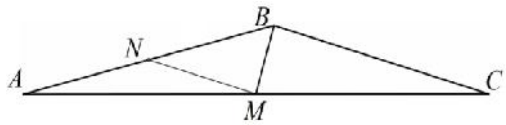
$ABCD$ е паралелограм. Тогаш $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BD}$ и како $\measuredangle ABD = 60^\circ$ заклучуваме дека триаголникот $ABD$ е половина од рамностран триаголник, т.е. е правоаголен. Според тоа, $\measuredangle ABC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.




*Втор начин*. Нека $N$ е средината на $AB$, а $K$ е средината на $BN$ (види цртеж). Од $\overline{BK} = \overline{BM}$ и $\measuredangle KBM = 60^\circ$, следува дека триаголникот $BMK$ е рамностран, па затоа $\measuredangle BMK = 60^\circ$. Триаголникот $MNK$ е рамнокрак ($\overline{KM} = \overline{KN}$) со агол при врвот $\measuredangle MKN = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Заоа аголот при основата е $\measuredangle KNN = 30^\circ$, од каде следува дека $\measuredangle BMN = \measuredangle BMK + \measuredangle KMN = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, па и $\measuredangle MBC = 90^\circ$ (наизменични агли). Според тоа, $\measuredangle ABC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.




*Трет начин*. Нека $N$ е средината на $AB$ (види цртеж). Во триаголникот $BMN$ имаме $\overline{BN} = 2 \cdot \overline{BM}$ и $\measuredangle NBM = 60^\circ$, па затоа тој е половина од рамностран триаголник, т.е. $\measuredangle BMN = 90^\circ$. Сега $\measuredangle MBC = 90^\circ$ (наизменични агли), па затоа $\measuredangle ABC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.




43. Дали постои триаголник со висини 1, 2, 3?

**Решение.** Нека претпоставиме дека таков триаголник постои. Нека $P$ е плоштината на триаголникот, $a, b, c$ се должините на неговите страни и $h_a = 1, h_b = 2, h_c = 3$. Тогаш $P = \frac{a}{2} = \frac{2b}{2} = \frac{3c}{2}$, па затоа $a = 2P$, $b = P$ и $c = \frac{2P}{3}$. Сега, добиваме $a = 2P > P + \frac{2P}{3} = b + c$, што противречи на неравенството на триаголник. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои триаголник чии висини се 1, 2 и 3.

44. Во триаголник две висини се еднакви на 6 и 10. Докажи дека третата висина е помала од 15.

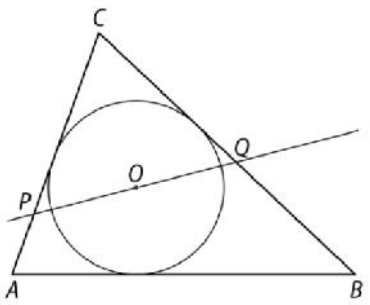
**Решение.** Нека $h_a = 6, h_b = 10$ и $h_c$ се висините кои редоследно соодветствуваат на страните $a, b$ и $c$. Тогаш за плоштината на триаголникот добиваме $2P = 6a = 10b = c \cdot h_c$, од каде наоѓаме

$$a = \frac{P}{3}, b = \frac{P}{5}, c = \frac{2P}{h_c}.$$

Бидејќи $c > a - b$ имаме $\frac{2P}{h_c} > \frac{P}{3} - \frac{P}{5}$, односно $\frac{2}{h_c} > \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$. Конечно, $h_c < 15$.

45. Докажи дека секоја права која ги полови и плоштината и периметарот на даден триаголник минува низ центарот на впишаната кружница на тој триаголник.

**Решение.** Нека правата $a$ ги сече страните $AC$ и $BC$ на триаголникот $ABC$ редоследно во точките $P$ и $Q$ (види цртеж). Нека $O$ е центарот на впишаната кружница на триаголникот $ABC$ и $r$ е нејзиниот радиус. Според тоа, $P_{PABQO} = \frac{r(\overline{PA}+\overline{AB}+\overline{BQ})}{2}$ и $P_{POQC} = \frac{r(\overline{PC}+\overline{CQ})}{2}$. Бидејќи $a$ правата го дели периметарот на триаголникот на два еднакви дела, добиваме $\overline{PA}+\overline{AB}+\overline{BQ} = \overline{PC}+\overline{CQ}$, па затоа од горните равенства следува $P_{PABQO} = P_{POQC} = \frac{1}{2}P_{ABC}$. Но, според претпоставката правата $a$ ја дели и плоштината на триаголникот на два еднакви делови, т.е. $P_{PABQ} = P_{PQC} = \frac{1}{2}P_{ABC}$, па затоа важи $P_{PQOC} = P_{PQC}$. Од последното равенство следува $O$ лежи на правата $PQ$, што и требаше да се докаже.




Доказот на тврдењето е сличен и во случајот кога правата $a$ содржи некое теме на триаголникот. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

46. Должините на страните на триаголникот се три последователни природни броја, не помали од 3. Докажи дека висината која соодветствува на средната по должина страна ја дели таа страна на два дела чии должини се разликуваат за 4.

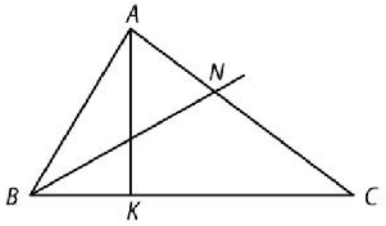
**Решение.** Нека $n-1, n, n+1$ се должините на страните на триаголникот, $h$ е висината повлечена кон средната страна и $x$ и $y$, $x<y$ се отсечоците кои висината ги отсекува на таа страна. Тогаш

$$x+y=n,$$
$$x^2=(n-1)^2-h^2,$$
$$y^2=(n+1)^2-h^2.$$

Оттука добиваме $y^2-x^2=4n$ и како $x+y=n$, добиваме $y-x=4$.

47. Нека $K$ е подножјето на висината повлечена од темето $A$ на триаголникот $ABC$. Нека $BN$ е симетралата на аголот во темето $B$ $(N\in AC)$. Определи ги мерките на аглите на триаголникот $ABC$ ако $\measuredangle KAB=\measuredangle ACB$ и $\measuredangle BNC=99^\circ$.

**Решение.** Нека $\measuredangle ABN=¢$. Тогаш $\measuredangle CBN=¢$ и $\measuredangle ABC=2¢$. Од правоаголниот триаголник $ABK$ добиваме следува $\measuredangle BAK=90^\circ-2¢$, а од триаголникот $BNC$ имаме

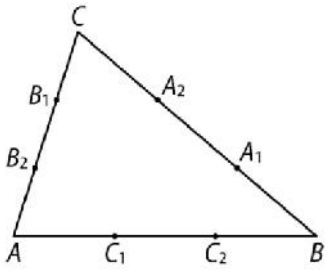



$$\begin{aligned}\measuredangle BCN&=180^\circ-\measuredangle BNC-\measuredangle NBC\\&=180^\circ-99^\circ-¢\\&=81^\circ-¢.\end{aligned}$$

Бидејќи $\measuredangle BCN=\measuredangle ACB$ и по услов $\measuredangle KAB=\measuredangle ACB$, ја добиваме равенката $81^\circ-¢=90^\circ-2¢$, од каде следува $¢=9^\circ$. Понатаму,

$$\measuredangle ABC=2\cdot 9^\circ=18^\circ,\ \measuredangle ACB=81^\circ-9^\circ=72^\circ \text{ и } \measuredangle BAC=92^\circ.$$

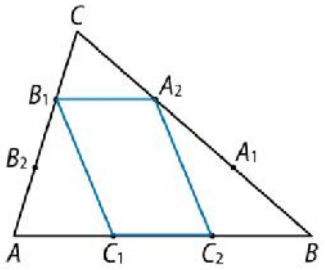
48. Даден е триаголник $ABC$. На страната $AB$ се означени точки $C_1$ и $C_2$, на страната $BC$ точки $A_1$ и $A_2$, а на страната $AC$ точки $B_1$ и $B_2$ (види цртеж). Познато е дека



$$\overline{AC_1} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_2B},$$
$$\overline{BA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2C},$$
$$\overline{CB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2A}.$$

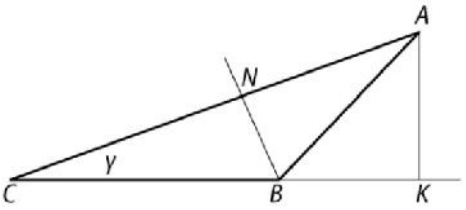
Докажи дека триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ се складни.

**Решение.** Од Талесовата теорема лесно следува дека четириаголникот $C_1B_1A_2C_2$ е паралелограм, па затоа $\overline{C_2A_2} = \overline{B_1C_1}$. Слично се докажува дека $\overline{C_1A_1} = \overline{B_1A_2}$ и $\overline{A_1B_1} = \overline{B_2C_2}$. Сега од признакот ССС следува дека триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ се складни.




49. Подножјето $K$ на висината повлечена од темето $A$ во триаголникот $ABC$ припаѓа на продолжението на страната $BC$. Нека $BN$ е симетрала на $\angle CBA$, ($N \in AC$). Определи ги мерните броеви на аглите триаголникот $ABC$ ако $\angle KAB = \angle ACB$ и $\angle BNC = 99^\circ$.

**Решение.** Точката $K$ лежи на продолжението на страната $BC$ преку точката $B$, бидејќи $\angle ACB$ е остар, што следува од тоа што $\angle BNC = 99^\circ$. Според тоа, $\angle ABC$ е тап агол (види цртеж). Нека $\angle ACB = ¥$. Бидејќи $\angle ABC$ е надворешен агол за триаголникот $AKB$, добиваме дека $\angle ABC = 90^\circ + ¥$. Бидејќи $BN$ е симетрала на $\angle ABC$, од триаголникот $BNC$ добиваме




$$99^\circ + ¥ + \frac{90^\circ + ¥}{2} = 180^\circ.$$

Оттука следува

$$\angle ACB = ¥ = 24^\circ, \quad \angle ABC = 90^\circ + ¥ = 114^\circ \text{ и } \angle BAC = 42^\circ.$$

50. Даден е триаголник $ABC$. Нека $ABC_1$ и $BCA_1$ се рамнострани триаголници кои со триаголникот $ABC$ немаат заеднички внатрешни точки.

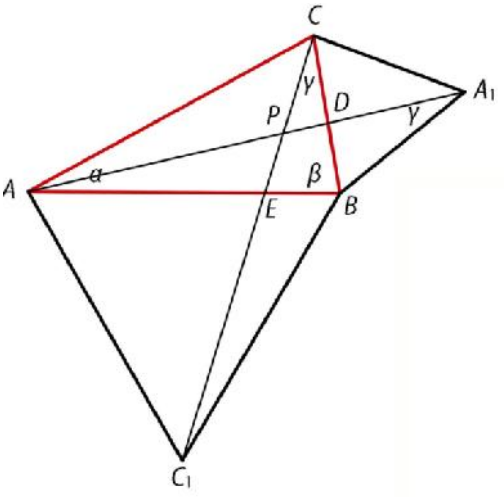
а) Докажи дека $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$.

б) Определи го аголот меѓу правите $AA_1$ и $CC_1$.

**Решение.** а) Од

$$\measuredangle ABA_1 = \measuredangle ABC + 60^\circ = \measuredangle C_1BC$$

(цртеж), следува дека триаголниците $AA_1B$ и $C_1CB$ се складни, па затоа $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$.




б) Нека отсечките $AA_1$ и $CC_1$ се сечат во точката $P$. Аглите на $\triangle CPA_1$ се

$$\measuredangle A_1CP = 60^\circ + \measuredangle BCC_1,$$

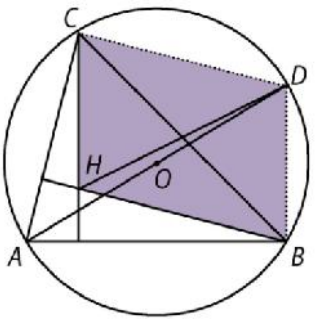
$$\measuredangle CA_1P = 60^\circ - \measuredangle BA_1A$$

и $\measuredangle CPA_1$. Од складноста на триаголниците $AA_1B$ и $C_1CB$ следува $\measuredangle BCC_1 = \measuredangle BA_1A$, па затоа

$$\begin{aligned}\measuredangle CPA_1 &= 180^\circ - \measuredangle A_1CC_1 - \measuredangle CA_1A \\ &= 180^\circ - (60^\circ + \measuredangle C_1CB) - (60^\circ - \measuredangle AA_1B) \\ &= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ\end{aligned}$$

51. Нека $H$ е ортоцентар и $O$ е центар на опишаната кружница на остроаголниот триаголник $ABC$. Нека $D$ е пресекот на опишаната кружница и правата определена со точките $A$ и $O$. Докажи дека отсечките $HD$ и $BC$ се преполовуваат.

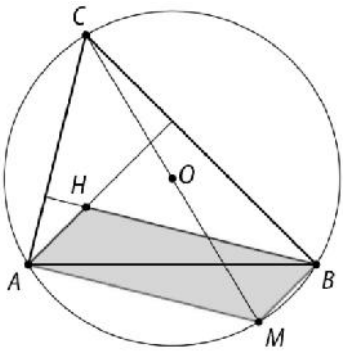
**Решение.** Правата определена со точките $A$ и $O$ минува низ центарот на кружницата, па затоа отсечката $AD$ е нејзин дијаметар. Триаголниците $ABD$ и $ADC$ се правоаголни, па затоа $AB \perp BD$ и $AC \perp CD$. Според тоа, важи $CH \perp AB$ и $BH \perp AC$, па затоа важи $CH \parallel BD$ и $BH \parallel CD$. Оттука следува дека четириаголникот $BDCH$ е паралелограм, па затоа неговите



дијагонали $HD$ и $BC$ се преполовуваат.

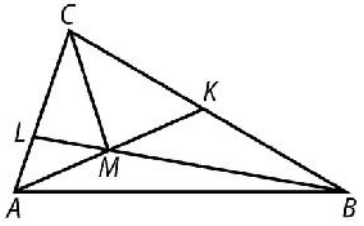
52. Нека $H$ е ортоцентар и $O$ е центар на опишаната кружница околу остроаголниот триаголник $ABC$. Нека правата $CO$ по втор пат ја сече опишаната кружница. Докажи дека плоштините на триаголниците $AMB$ и $ABH$ се еднакви.

**Решение.** Бидејќи правата $CO$ минува низ центарот на кружницата, отсечката $CM$ е нејзин дијаметар. Триаголниците $AMC$ и $BMC$ се правоаголни, па затоа $MA \perp CA$ и $MB \perp BC$. Исто така, $BH \perp AC$ и $AH \perp BC$, па затоа важи $MA \| BH$ и $MB \| AH$. Според тоа, четириаголникот $AMBH$ е паралелогран, па затоа триаголниците $AMB$ и $ABH$ се складни, т.е. имаат еднакви плоштини.




53. Нека точката $K$ е средина на страната $BC$ на триаголникот $ABC$, а $L$ е точка на страната $AC$, таква што $\overline{CL} = 2\overline{AL}$. Ако $AK$ и $BL$ се сечат во точката $M$, докажи дека плоштината на триаголникот $ABC$ е четири пати поголема од плоштината на триаголникот $ABM$.

**Решение.** Бидејќи точката $K$ ја дели страната $BC$ на два еднакви дела, и бидејќи висините од заедничкото теме $M$ на триаголниците $BKM$ и $KMC$ се еднакви, добиваме $P_{BKM} = P_{KMC}$. Слично од $\overline{CL} = 2\overline{AL}$ и еднаквоста на висините од заедничкото теме на триаголниците $CLM$ и $LMC$, добиваме дека $P_{CLM} = 2P_{LAM}$. Аналогно се добива




$$P_{ABK} = P_{AKC} \text{ и } P_{CLB} = 2P_{ALB}.$$

Сега,

$$P_{ABM} = P_{ABK} - P_{MBK} = P_{AKC} - P_{MKC} = P_{AMC}.$$

Според тоа, имаме

$$P_{ABM} = P_{AMC} = P_{AML} + P_{LMC} = 3P_{AML}.$$

Понатаму,

$$2P_{BKM} + P_{CLM} = P_{CLB} = 2P_{ALB} = 2P_{ABM} + 2P_{LAM},$$

па како $P_{CLM} = 2P_{LAM}$ добиваме

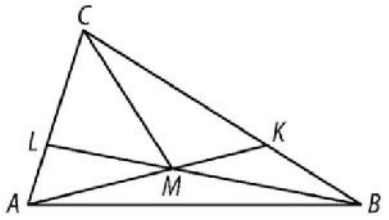
$$2P_{BKM} = 2P_{ABM}\text{, т.е. } P_{BKM} = P_{ABM}.$$

Конечно,

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{ABK} + P_{AKC} \\ &= P_{ABM} + P_{BKM} + P_{KCM} + P_{CAM} \\ &= P_{ABM} + 2P_{BKM} + 3P_{AML} \\ &= 2P_{ABM} + 2P_{BKM} = 4P_{ABM}. \end{aligned}$$

54. Нека $K$ е точка на страната $BC$ на триаголникот $ABC$ таква што $\overline{KC} = 2\overline{BK}$, а $L$ е точка на страната $AC$ таква што $\overline{CL} = 2\overline{AL}$. Ако отсечките $AK$ и $BL$ се сечат во точката $M$ докажи дека плоштината на триаголникот $ABC$ е пет пати поголема од плоштината на триаголникот $ABM$.

**Решение.** Бидејќи $\overline{CL} = 2\overline{AL}$ и соодветните висини повлечени од темето $M$ на триаголниците $AML$ и $CML$ се еднакви, добиваме $2P_{AML} = P_{LMC}$. Слично се добива $2P_{BMK} = P_{CMK}$.




Користејќи уште еднаш дека $\overline{CL} = 2\overline{AL}$ и еднаквоста на соодветните висини од темето $B$ за триаголниците $LBC$ и $LAB$ се добива $2P_{ABL} = P_{CBL}$. Слично се добива $2P_{AKB} = P_{AKC}$. Сега важи

$P_{ABC} = 3P_{ABL} = 3P_{AML} + 3P_{ABM}$ и $P_{ABC} = 3P_{ABK} = 3P_{ABM} + 3P_{BMK}$,

од каде добиваме $3P_{AML} = P_{ABC} - 3P_{ABM} = 3P_{BMK}$. Според тоа,

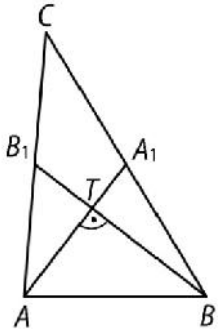
$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{AML} + P_{LMC} + P_{ABM} + P_{CMK} + P_{BKM} \\ &= 3P_{AML} + P_{ABM} + 3P_{BMK} \\ &= P_{ABC} - 3P_{ABM} + P_{ABM} + P_{ABC} - 3P_{ABM} \\ &= 2P_{ABC} - 5P_{AML}, \end{aligned}$$

односно $P_{ABC} = 5P_{ABM}$, што и требаше да се докаже.

55. Должините на две заемно нормални тежишни линии на триаголникот $ABC$ се $\overline{AA_1} = 9\,cm$ и $\overline{BB_1} = 12\,cm$. Пресметај ги должините на страните на триаголникот.

**Решение.** Бидејќи тежиштето ја дели тежишната линија во однос 2:1,

добиваме $\overline{AT}=6\,cm$ и $\overline{BT}=8\,cm$. Според тоа, од Питагоровата теорема следува $\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10\,cm$ (види цртеж). Повторно од Питагоровата теорема применета на триаголниците $ATB_1$ и $BTA_1$ добиваме:




$$\overline{AB_1}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}\,cm,$$

$$\overline{BA_1}=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}\,cm.$$

Значи,

$\overline{AB}=10\,cm$, $\overline{AC}=4\sqrt{13}\,cm$ и $\overline{BC}=2\sqrt{73}\,cm$.

56. Две страни на триаголникот имаат должини $20\,cm$ и $30\,cm$, а висината која соодветствува на третата страна е еднаква на артиметичката средина на другите две висини. Определи ја должината на третата страна на триаголникот.

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a=20\,cm$ и $b=30\,cm$. Нека $P$ е плоштината на триаголникот. Имаме $\frac{ah_a}{2}=P=\frac{bh_b}{2}$, од каде со замена за $a$ и $b$ добиваме $10h_a=15h_b$, т.е. $h_a=1{,}5h_b$. Но, $h_c=\frac{h_a+h_b}{2}=1{,}25h_b$, па затоа

$$c=\frac{2P}{h_c}=\frac{bh_b}{1{,}25h_b}=\frac{30}{1{,}25}=24\,cm.$$

57. Должините на страните на триаголникот се $13\,cm, 40\,cm$ и $45\,cm$. Определи ја должината на најдолгата висина на овој триаголник.

**Решение.** За полупериметарот на триаголникот добиваме

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13+40+45}{2}=49\,cm,$$

па затоа од Хероновата формула за плоштината на овој триаголник добиваме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{49\cdot(49-13)(49-40)(49-45)}=252\,cm^2.$$

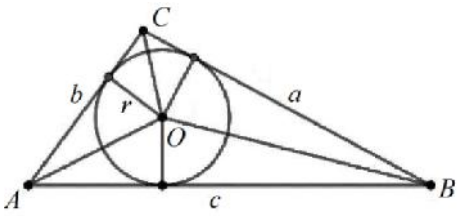
Најдолга висина е висината која соодветствува на најкратката страна и за неа важи $\frac{13h}{2}=252$, од каде добиваме $h=\frac{504}{13}=38\frac{10}{13}\,cm$.

58. Докажи дека во секој триаголник $ABC$ важи формулата

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

каде $h_a, h_b, h_c$ се висините, а $r$ е радиусот на впишаната кружница во триаголникот.

**Решение.** Нека $O$ е центарот на впишаната кружница на триаголникот $ABC$ (види цртеж). Плоштината на триаголникот $ABC$ е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците $ABO, ACO, BCO$. Висината на секој од овие триаголници е еднаква на $r$, па затоа




$$P=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}.$$

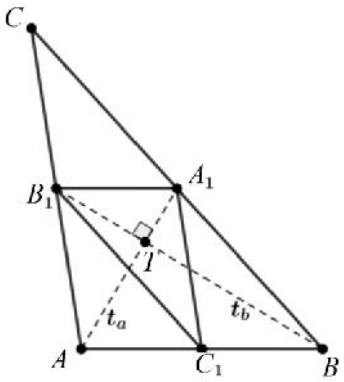
Сега, ако земеме предвид дека $\frac{2P}{a}=h_a, \frac{2P}{b}=h_b, \frac{2P}{c}=h_c$, од последното равенство последователно добиваме

$$\frac{ar}{2P}+\frac{br}{2P}+\frac{cr}{2P}=1,$$
$$\frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}=1,$$
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r},$$

што и требаше да се докаже.

59. Даден е триаголник $ABC$ со меѓусебно нормални тежишни линии $t_a=12\,cm$ и $t_b=20\,cm$. Пресметај ја плоштината на $\triangle ABC$.

**Решение.** *Прв начин.* Со $A_1, B_1, C_1$ ги означуваме средините на страните $BC, CA, AB$, соодветно. Имаме $\overline{AA_1}=t_a=12\,cm$ и $\overline{BB_1}=t_b=20\,cm$. Ги разгледуваме триаголниците $AC_1B_1, A_1B_1C_1, C_1BA_1$ и $B_1A_1C$. За $\triangle AC_1B_1$ имаме $\overline{AC_1}=\frac{\overline{AB}}{2}$, $\overline{AB_1}=\frac{\overline{AC}}{2}$, и $\overline{C_1B_1}=\frac{\overline{BC}}{2}$ како средна линија во $\triangle ABC$. Триаголникот $A_1B_1C_1$ е триаголник чии страни се средните линии на $\triangle ABC$, па важи $\overline{A_1C_1}=\frac{\overline{AC}}{2}$,



$\overline{A_1B_1}=\frac{\overline{AB}}{2}$, и $\overline{C_1B_1}=\frac{\overline{BC}}{2}$. За $C_1BA_1$ имаме $\overline{C_1B}=\frac{\overline{AB}}{2}$, $\overline{BA_1}=\frac{\overline{BC}}{2}$, и $\overline{C_1A_1}=\frac{\overline{CA}}{2}$ како средна линија во $\triangle ABC$. За $\triangle B_1A_1C$ имаме $\overline{B_1C}=\frac{\overline{AC}}{2}$, $\overline{CA_1}=\frac{\overline{BC}}{2}$, и $\overline{B_1A_1}=\frac{\overline{BA}}{2}$ како средна линија во $\triangle ABC$.

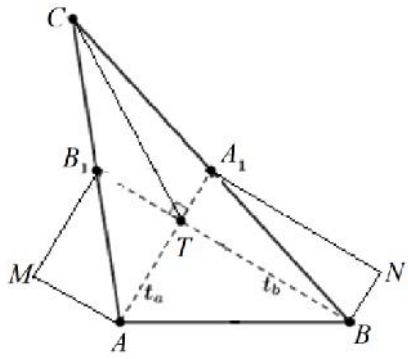
Од досега изнесеното следува дека $\triangle ABC$ е составен од четири складни триаголници. Нека со $P'$ ја означиме плоштината на секој од четирите складни триаголника. Тогаш плоштината на $\triangle ABC$ е $P=4P'$. Според тоа доволно е да ја пресметаме плоштината $P'$.

Бидејќи $A_1B_1$ е средна линија во $\triangle ABC$, таа е паралелна со $AB$, што значи дека $ABA_1B_1$ е трапез за чии дијагонали важи $AA_1\perp BB_1$. Од овде, плоштината на трапезот ќе биде $P_{ABA_1B_1}=\frac{\overline{AA_1}\cdot\overline{BB_1}}{2}=\frac{12\cdot 20}{2}=120\,cm^2$.

Бидејќи трапезот е составен од трите складни триаголници $AC_1B_1$, $A_1B_1C_1$ и $C_1BA_1$, секој со плоштина $P'$, добиваме $P_{ABA_1B_1}=3P'$. Оттука $P'=40\,cm^2$ и $P=4P'=160\,cm^2$.

*Втор начин.* Со $A_1, B_1$ ги означуваме средините на страните $BC$ и $AC$, соодветно, па $\overline{AA_1}=t_a=12\,cm$ и $\overline{BB_1}=t_b=20\,cm$. Бидејќи тежиштето ги дели тежишните линии во однос 1:2 се добива:

$$\overline{AT}=8\,cm,\ \overline{TA_1}=4\,cm,$$
$$\overline{AT}=\frac{40}{3}\,cm \text{ и } \overline{TB_1}=\frac{20}{3}\,cm.$$




Бидејќи плоштината на $\triangle BTC$ е еднаква на плоштината на правоаголникот $BTA_1N$, и плоштината на $\triangle ATC$ е еднаква на плоштината на правоаголникот $ATB_1M$, следува дека плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на збирот од плоштините на правоаголниците $BTA_1N$, $ATB_1M$ и триаголникот $ABT$. Според тоа, плоштината на $\triangle ABC$ е

$$\frac{40}{3}\cdot 4+\frac{20}{3}\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot\frac{40}{3}\cdot 8=160\,cm^2.$$

60. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle CAB=3\angle ABC$. Нека $L$ е пресечната точка на симетралата на $\angle ACB$ со страната $AB$ и нека

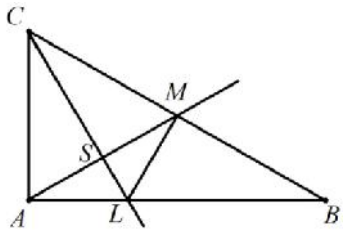
$$P_{\triangle ALC} : P_{\triangle LBC} = 1:2,$$

каде $P_{\triangle ALC}$ и $P_{\triangle LBC}$ се соодветно плоштините на $\triangle ALC$ и $\triangle LBC$. Определи ги големините на аглите на $\triangle ABC$

**Решение.** За аглите на $\triangle ABC$ ќе ги користиме стандардните ознаки. Тогаш $\sim = \measuredangle CAB = 3\measuredangle ABC = 3$ Нека $M$ е точка на $BC$ таква што $\measuredangle BAM =$ . Значи, $\triangle ABM$ е рамнокрак и важи $\overline{MA} = \overline{MB}$. Понатаму,

$\measuredangle MAC = \measuredangle BAC - \measuredangle BAM = 2$ и

$\measuredangle AMC = \measuredangle BAM + \measuredangle ABM = 2$ ,




што значи $\triangle AMC$ е рамнокрак и важи $\overline{AC} = \overline{MC}$.

Нека $S$ е пресекот на $AM$ и $CL$. Сега $CS$ е симетрала на $\measuredangle ACB$ и $\triangle AMC$ е рамнокрак со врв $C$, па затоа $CS$ е висина во овој триаголник, што значи дека $CL$ е симетрала на страната $AM$ во $\triangle AMC$, па затоа и во $\triangle AML$. Тоа значи дека $\triangle AML$ е рамнокрак, односно $\overline{AL} = \overline{ML}$.

Понатаму, $\overline{AC} = \overline{MC}$, $\overline{AL} = \overline{ML}$ и $\overline{CL} = \overline{CL}$, па затоа $\triangle ALC \cong \triangle MLC$, односно $P_{\triangle ALC} = P_{\triangle MLC}$. Од последното равенство и од условот на задачата следува

$$2P_{\triangle ALC} = P_{\triangle LBC} = P_{\triangle LBM} + P_{\triangle LMC} = P_{\triangle LBM} + P_{\triangle ALC},$$

т.е. $P_{\triangle ALC} = P_{\triangle LBM}$, па затоа $P_{\triangle LBM} = P_{\triangle MLC}$. Но, во триаголниците $LBC$ и $LMC$ висините повлечени од темето $L$ се еднакви, па од последното равенство следува дека соодветните основи се еднакви, т.е. $\overline{MB} = \overline{MC}$. Значи, $\overline{AC} = \overline{MC} = \overline{MB} = \overline{MA}$, т.е. $\triangle AMC$ е рамностран. Според тоа, $\measuredangle ACB = \measuredangle ACM = \measuredangle MAC = 60^\circ$, па како $\measuredangle MAC = 2$ , добиваме $= 30^\circ$ и конечно $\sim = 3 = 90^\circ$.

61. Нека природните броеви $a,b,c$ се должини на страните на еден триаголник. Ако висината повлечена кон страната $a$ е еднаква збирот на останатите две висини, тогаш $a^2 + b^2 + c^2$ е квадрат на природен број. Докажи!

**Решение.** Нека $h_a, h_b, h_c$ се должините на висините повлечени кон страните $a,b,c$, соодветно. Од условот на здачата имаме $h_a = h_b + h_c$. Но, $ah_a = bh_b = ch_c$, па затоа $\frac{h_c}{a} = \frac{h_a}{c}$ и $\frac{h_b}{a} = \frac{h_a}{b}$. Сега, со замена во

$h_a = h_b + h_c$ добиваме $\frac{h_a}{a} = \frac{h_b+h_c}{a} = h_a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})$, односно $\frac{1}{a} = \frac{b+c}{bc}$. Последното равенство го квадрираме и добиваме $\frac{1}{a^2} = \frac{b^2+2bc+c^2}{b^2c^2}$, од каде последователно следува:

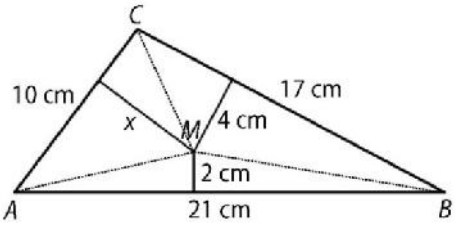
$$b^2c^2 = a^2(b^2 + 2bc + c^2),$$
$$b^2c^2 = a^2(a^2 + b^2 + c^2 + 2bc - a^2),$$
$$b^2c^2 = a^2(a^2 + b^2 + c^2) + 2a^2bc - a^4,$$
$$a^2(a^2 + b^2 + c^2) = b^2c^2 - 2a^2bc + a^4,$$
$$a^2(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 - bc)^2,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = (a - \frac{bc}{a})^2.$$

Од $\frac{1}{a} = \frac{b+c}{bc}$ следува $\frac{bc}{a} = b + c$, па како $b$ и $c$ се природни броеви следува дека $\frac{bc}{a}$ е природен број, што значи дека $a - \frac{bc}{a}$ е цел број. Конечно, $(a - \frac{bc}{a})^2$ е квадрат на цел број, што значи дека е квадрат на природен број, па од $a^2 + b^2 + c^2 = (a - \frac{bc}{a})^2$ следува дека $a^2 + b^2 + c^2$ е квадрат на природен број, што и требаше да се докаже.

62. Страните на $\triangle ABC$ се $\overline{AB} = 21\,cm, \overline{BC} = 17\,cm$ и $\overline{AC} = 10\,cm$. Во внатрешноста на триаголникот е земена точка $M$ која од страната $AB$ е оддалечена $2\,cm$, а од страната $BC$ е оддалена $4\,cm$. Определи го растојанието од точката $M$ до страната $AC$.

**Решение.** Според Хероновата формула за плоштината на триаголникот $ABC$ добиваме

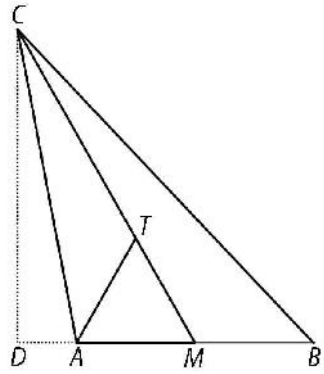
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 14} = 84\,cm^2.$$



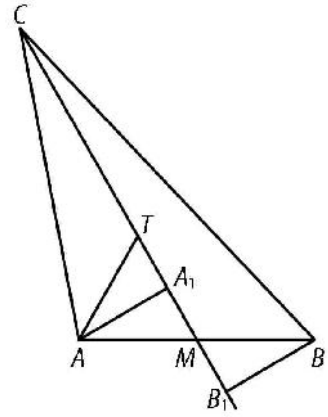

Од друга страна плоштината на триаголникот $ABC$ можеме да ја пресметаме како збир на плоштините на триаголниците $ABM, BCM, CAM$, па затоа $\frac{21 \cdot 2}{2} + \frac{17 \cdot 4}{2} + \frac{10 \cdot x}{2} = 84$, од каде добиваме $x = 5{,}8\,cm$.

63. Точката $M$ е средина на страната $AB$ на триаголникот $ABC$, а $T$ е неговото тежиште. Ако триаголникот $AMT$ е рамностран триаголник со должина на страна $1\,cm$, определи и должините на страните на триаголникот $ABC$.

**Решение.** *Прв начин*. Точката $M$ е средина на страната $AB$, па затоа важи $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\,cm$. Понатаму, тежиштето $T$ ја дели тежишната линија $CM$ во однос 2:1, па затоа $\overline{CM}=3\,cm$. Нека $D$ е подножјето на нормалата повлечена од темето $C$ на правата $AB$. Тогаш триаголникот $DMC$ е правоаголен со агли $90^\circ,60^\circ,30^\circ$, па затоа е половина од рамностран триаголник. Според тоа, $\overline{DM}=\frac{3}{2}\,cm$ и $\overline{CD}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\,cm$. Според тоа, $\overline{DA}=\frac{1}{2}\,cm$ и $\overline{DB}=\frac{5}{2}\,cm$, па со примена на Питагоровата теорема на триаголниците $DAC$ и $DBC$ добиваме $\overline{AC}=\sqrt{7}\,cm$ и $\overline{BC}=\sqrt{13}\,cm$.

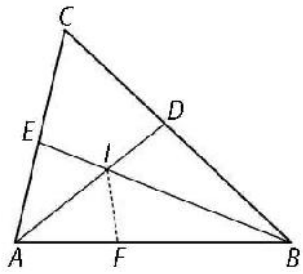



*Втор начин*. Како и во првиот начин на решавање имаме $\overline{AB}=2\,cm$ и $\overline{CM}=3\,cm$. Нека $A_1$ и $B_1$ се подножјата на нормалите повлечени од темињата $A$ и $B$ на правата $CM$ (цртеж десно). Триаголниците $AMA_1$ и $BMB_1$ се правоаголни триаголници со агли $90^\circ,60^\circ,30^\circ$, па затоа се половина од рамностранти триаголници. Според тоа, важи $\overline{AA_1}=\overline{BB_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm$ и $\overline{MA_1}=\overline{MB_1}=\frac{1}{2}\,cm$. Затоа $\overline{CA_1}=\frac{5}{2}\,cm$ и $\overline{CB_1}=\frac{7}{2}\,cm$. Сега, со примена на Питагоровата теорема на триаголниците $AA_1C$ и $BB_1C$, добиваме $\overline{AC}=\sqrt{7}\,cm$ и $\overline{BC}=\sqrt{13}\,cm$.



64. Даден е триаголник $ABC$ во кој $\measuredangle BCA = 60^\circ$. Нека симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната $BC$ во точката $D$, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната $AC$ во точката $E$. Докажи дека $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BD}$.

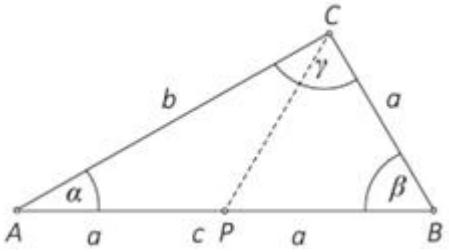
**Решение.** Нека точката $I$ е центар на впишаната кружница на триаголникот $ABC$ и нека точката $F$ на отсечката $AB$ е таква што $\overline{AF} = \overline{AE}$. Сега доволно е да докажеме дека $\overline{BF} = \overline{BD}$.




Да означиме $\measuredangle BAC = \sim$ и $\measuredangle ABC =$ . Тогаш $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD = \frac{\sim}{2}$ и $\measuredangle ABE = \measuredangle CBE = \frac{}{2}$. Од триаголникот $BEC$ добиваме $\measuredangle BEC = 120^\circ - \frac{}{2}$, па затоа $\measuredangle AEI = 60^\circ + \frac{}{2}$. Бидејќи триаголникот $AFI$ е складен со триаголникот $AEI$ (признак САС: $\overline{AF} = \overline{AE}$, $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD = \frac{\sim}{2}$ и $\overline{AI} = \overline{AI}$), добиваме дека $\measuredangle AFI = \measuredangle AEI = 60^\circ + \frac{}{2}$. Оттука следува $\measuredangle BFI = 120^\circ - \frac{}{2}$. Од друга страна, од триаголникот $ADC$ имаме $\measuredangle ADC = 120^\circ - \frac{\sim}{2}$, па затоа $\measuredangle BDI = 60^\circ + \frac{\sim}{2}$. Но, од $\measuredangle BCA = 60^\circ$ следува $\sim + = 120^\circ$, односно $\frac{\sim}{2} = 60^\circ - \frac{}{2}$, од каде добиваме $\measuredangle BDI = 60^\circ + 60^\circ - \frac{}{2} = 120^\circ - \frac{}{2} = \measuredangle BFI$. Сега, според признакот АСА добиваме дека триаголниците $BFI$ и $BDI$ се складни (сите агли се еднакви и имаат заедничка страна). Од оваа складност следува $\overline{BF} = \overline{BD}$.

65. Определи ги аглите на разностран триаголник ако средниот по големина агол е аритметилка средина на другите два агли и ако должината на најголемата страна е два пати поголема од должината на најмата страна.

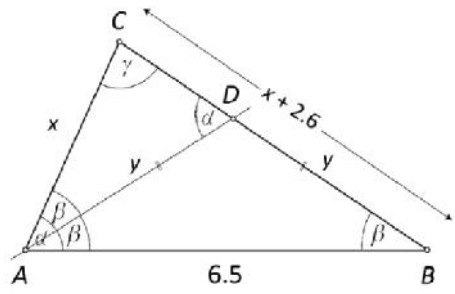
**Решение.** Нека триаголникот е $ABC$. За страните и аглите ќе ги користиме стандардните ознаки, при што без ограничување на општоста можеме да



земеме дека $a<b<c$ (цртеж десно). Од условот на задачата имаме $c=2a$ и уште важи ~ < <¥, па затоа 2 =~ +¥. Со замена во ~ + +¥ =180° доби-ваме 3 =180°, односно =60°. Нека $P$ е средината на страната $AB$. Сега, триаголникот $PBC$ е рамнокрак со агол при врвот =60°, па затоа тој е рамностран. Значи, $\overline{PC}=\overline{PB}=\frac{c}{2}$, т.е. $P$ е центар на опишаната кружница околу триаголникот $ABC$, од каде заклучуваме дека триаголникот $ABC$ е правоаголен. Според тоа, ¥ =90° и затоа ~ =90°−60°=30°.

66. Во остроаголен триаголник $ABC$ важи $\measuredangle BAC=2\measuredangle CBA$, $\overline{AB}=6,5\,cm$, а должината на страната $BC$ е за $2,6\,cm$ поголема од должината на страната $AC$. Определи го должините на страните $AC$ и $BC$.

**Решение.** Нека $D$ е пресекот на симетралата на $\measuredangle BAC$ и страната $BC$ на триаголникот $ABC$ (види цртеж). Од условот на задачата имаме $\measuredangle CBA=$ $\frac{1}{2}\measuredangle BAC$, т.е. $=\frac{\sim}{2}$. Понатаму, $\measuredangle DAC=\measuredangle BAD=\measuredangle ABD=$ , па




затоа триаголникот $ABD$ е рамнокрак и $\overline{AD}=\overline{BD}=y$. Ако ставиме $\overline{AC}=x$, тогаш од условот ма задачата имаме $\overline{BC}=x+2,6$, па затоа $\overline{CD}=\overline{BC}-\overline{BD}=x+2,6-y$. Според признакот А-А триаголниците $ADC$ и $ABC$ се слични, па затоа

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \text{ и } \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

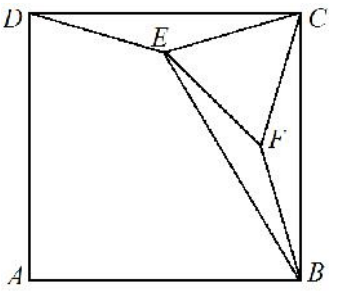
односно

$$\frac{x}{y}=\frac{x+2,6}{6,5} \text{ и } \frac{x+2,6-y}{y}=\frac{x}{6,5}.$$

Според тоа, $6,5x=xy+2,6y$ и $6,5x+16,9-6,5y=xy$. Ако од втората равенка ја одземеме првата добиваме $16,9-6,5y=-2,6y$, од следува $y=\frac{13}{3}$. Оттука со замена во $6,5x=xy+2,6y$ наоѓаме $x=5,2$. Според тоа, $\overline{AC}=5,2\,cm$ и $\overline{AB}=7,8\,cm$.

## 5.2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е дадена точка $E$ таква што $\triangle CDE$ е рамнокрак со агол од $150^\circ$ кај темето $E$. Определи ги аглите на $\triangle ABE$.

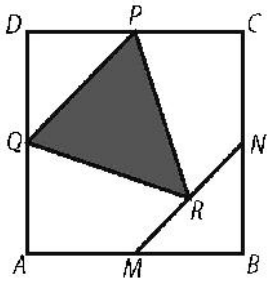



**Решение.** Нека $F$ е точка во внатрешноста на квадратот таква што $\triangle BCF$ е рамнокрак со агол од $150^\circ$ кај темето $F$. Од $\triangle CDE \cong \triangle BCF$ следува $\overline{CE} = \overline{CF}$ и како $\measuredangle ECF = 90^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 60^\circ$ следува дека $\triangle ECF$ е рамностран. Според тоа, $\overline{EF} = \overline{CF} = \overline{BF}$ и како

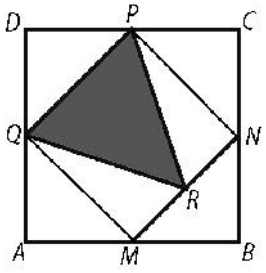
$$\measuredangle BFE = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ,$$

заклучуваме дека $\triangle BCF \cong \triangle BEF$. Според тоа, $\overline{BC} = \overline{BE}$. Аналогно се докажува дека $\overline{AE} = \overline{AD}$. Значи, $\triangle ABE$ е рамностран, па сите негови агли се еднакви на $60^\circ$.

2. Точките $M, N, P, Q$ се средини на страните на квадратот $ABCD$, а $R$ е средина на отсечката $MN$ (цртеж десно). Кој дел од плоштината на квадратот е осенчен?

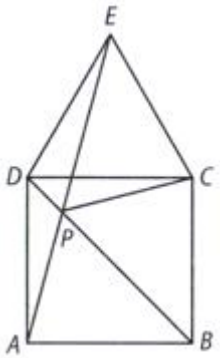



**Решение.** Средините $M, N, P, Q$ на страните на квадратот $ABCD$ се темиња на нов квадрат (цртеж лево). Неговата плоштина е еднаква половина од плоштината на квадратот $ABCD$.



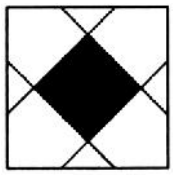

Понатаму, плоштината на триаголникот $PQR$ е еднаква на половина од плоштината на квадратот $MNPQ$. Според тоа, осенчена е една четвртина од плоштината на дадениот квадрат. На читеталот за вежба му препуштаме да го докаже секое од горните тврдења искоритени во решението на задачата.

3. Нека $E$ е точка во надвор од квадратот $ABCD$ таква што $CDE$ е рамностран триаголник и нека $P$ е пресечната точка на отсечките $AE$ и $BD$. Докажи дека $\overline{PE} = \overline{PB}$.




**Решение.** Триаголникот $AED$ е рамнокрак со агол при врвот $D$ еднаков на $150^\circ$, па затоа $\measuredangle DAE = \measuredangle DAP = 15^\circ$, од каде што следува $\measuredangle BAP = 75^\circ$. Триаголниците $BAP$ и $BCP$ се складни (признак САС: $\overline{AB} = \overline{CB}$, $\overline{PB} = \overline{PB}$ и $\measuredangle ABP = \measuredangle CBP = 45^\circ$), па затоа $\measuredangle PCB = \measuredangle PAB = 75^\circ$. Оттука следува дека $\measuredangle PCD = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$, па затоа важи $\measuredangle ECP = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$. Сега, од признакот САС следува дека триаголниците $ECP$ и $BCP$ се складни (важи $\overline{EC} = \overline{CB}$, $\overline{PC} = \overline{PC}$ и $\measuredangle ECP = \measuredangle BCP = 75^\circ$). Од оваа складност следува $\overline{PE} = \overline{PB}$.

4. Секоја страна на квадратот е поделена на три еднакви дека и некои од делбените точки се поврзани со што е добиена фигурата прикажана на цртежот десно. Колкав дел од квадратот претставува обоената фигура?



**Решение.** *Прв начин*. Ако ги повлечеме дијагоналите на квадратот и отсечките кои чии крајни точки се делбените осум точки и се паралелни на дијагоналите го добиваме цртежот десно. Дијагоналите на квадратот се заемно нормални и паралелните делбени отсечки се еднакво оддалечени, па затоа фигурата содржи 12 мали квадрати и 12 рамнокраки правоаголни триаголници, такви што плоштината на секој е еднаква на половина од плоштината на еден мал квадрат. Плоштината на целиот квадрат е еднаква на плоштината на 18 мали квадрати од кои 4 се обоени. Значи обоениот дел е еднаков на $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ од квадратот.

*Втор начин*. Нека $a$ е страната на дадениот квадрат. Страните на обоениот четириаголник се паралелни со дијагоналите на квадратот, и се-

која од нив е еднаква на $x=\frac{a}{3}\sqrt{2}$ (Зошто?). Според тоа, обоениот четириаголник е квадрат со плоштина $x^2=\frac{2a^2}{9}$. Конечно, обоениот дел е $\frac{2a^2}{9}:a^2=\frac{2}{9}$ од даденият квадрат.

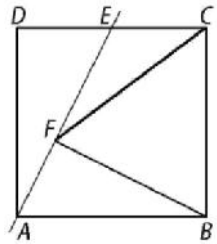
5. Во рамностран триаголник со должина на страна $6\,cm$ е впишана кружница, а во кружницата е впишан квадрат. Определи ја плоштината на овој квадрат. Определи го односот на плоштините на триаголникот и квадратот.

**Решение.** Плоштината на рамностраниот триаголник е $P_t=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, па затоа $P_t=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}\,cm^2$. Радиусот на впишана кружница на рамностраниот триаголник е еднаков на третина од неговата висина, па затоа $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{6\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}\,cm$. Дијагоналата на квадратот впишан во кружницата е еднаква на дијаметарот на кружницата, па затоа $d=2r=2\sqrt{3}\,cm$. Сега за плоштината на квадратот добиваме $P_k=\frac{d^2}{2}=\frac{(2\sqrt{3})^2}{2}=6\,cm^2$. Според тоа, $P_t:P_k=9\sqrt{3}:6=3\sqrt{3}:2$

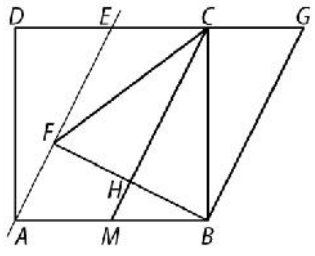
6. Катетите на правоаголниот триаголник се со должини $6\,cm$ и $12\,cm$. Околу овој триаголник е опишан круг, а околу кругот е опишан квадрат. Определи ја плоштината на овој квадрат.

**Решение.** Бидејќи $a=6\,cm, b=12\,cm$, од Питагоровата теорема следува $c=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5}\,cm$. Сега, дијаметарот на опишаната кружница околу триаголникот е $d_{ok}=c=6\sqrt{5}\,cm$. Понатаму, должината на страната на квадратот опишан околу кружница е едаква на дијаметарот на кружницата, па затоа важи $a_k=6\sqrt{5}\,cm$. Конечно, за плоштината на квадратот добиваме $P_k=a_k^2=(6\sqrt{5})^2=180\,cm^2$.

7. Нека точката $E$ е средина на страната $CD$ на квадратот $ABCD$ и нека $F$ е подножјето на нормалата повлечена од темето $B$ на правата $AE$ (види цртеж десно). Докажи дека $\overline{CF}=\overline{CD}$

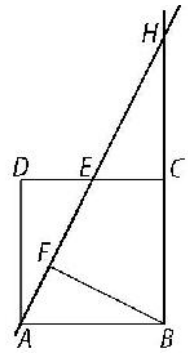


**Решение.** *Прв начин*. Повлекуваме отсечки $MC$ и $BG$ кои се паралелни и еднакви со отсечката $AE$ (види цртеж лево).



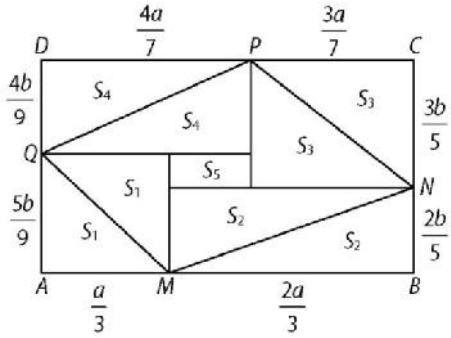

Паралелограмите $AMCE$ и $MBGC$ се складни, бидејќи пократките страни им се еднакви половината од страната на квадратот, а подолгите на отсечката $AE$ и имаат еднакви остри агли. Бидејќи плоштините на овие паралелограми се еднакви и $BF$ е нормална на $AE$ заклучуваме дека $FH$ и $BH$ се висини кои соодветствуваат на подолгите страни на паралелограмите и дека $\overline{FH} = \overline{BH}$. Триаголниците $FHC$ и $BHC$ се правоаголни (со прави агли во темето $H$), имаат заедничка катета и еднакви катети $FH$ и $BH$. Значи, триаголниците $FHC$ и $BHC$ се складни, па затоа нивните хипотенузи се еднакви, односно $\overline{FC} = \overline{BC}$. Конечно, страните на квадратот се еднакви, па затоа $\overline{FC} = \overline{BC} = \overline{DC}$.

*Втор начин*. Нека $H$ е пресечната точка на правите $AE$ и $BC$ (види цртеж десно). Правоаголните триаголници $ADE$ и $HCE$ се складни (имаат две еднакви катети и два еднакви остри агли). Оттука следува дека $\overline{CH} = \overline{AD} = a$, каде $a$ е должината на страната на квадратот. Должината на хипотенузата на правоаголниот триаголник $BFH$ е еднаква на $2a$, а $CF$ е негова тежишна линија која соодветствува на оваа хипотенуза. Затоа $\overline{FC} = \overline{BC} = a$. Конечно, страните на квадратот се еднакви, па затоа $\overline{FC} = \overline{BC} = \overline{DC}$.




8. Даден е правоаголник $ABCD$ со плоштина $1890\,cm^2$. Точките $M, N, P, Q$ ги делат страните $AB, BC, CD, DA$ редоследно во однос $1:2, 2:3, 3:4, 4:5$. Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.

**Решение.** Ако должините на страните на правоаголникот ги означиме со $a$ и $b$, тогаш должините на отсечките на кои со точките $M, N, P, Q$ се поделени страните се дадени на цртежот десно (Провери!). Според



тоа бараната плоштина е

$$P_{MNPQ} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

и притоа важи

$$ab = 2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) + S_5 .$$

Понатаму, имаме

$$S_5 = (a - \tfrac{a}{3} - \tfrac{3a}{7})(b - \tfrac{2b}{5} - \tfrac{4b}{9}) = \tfrac{1}{27}ab ,$$

па затоа

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \tfrac{1}{2}(ab - \tfrac{1}{27}ab) = \tfrac{13}{27}ab .$$

Според тоа,

$$P_{MNPQ} = \tfrac{13}{27}ab + \tfrac{1}{27}ab = \tfrac{14}{27}ab = \tfrac{14}{27}\cdot 1890 = 980\ cm^2 .$$

9. Определи ги сите целобројни должини на страните на правоаголник чии мерни броеви на плоштината и периметарот се еднакви.

**Решение.** Нека $a$ и $b$ се целобројни должини на страни на правоаголник. Од условот на задачата следува $ab = 2(a+b)$. Оваа равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$ab - 2a - 2b = 0,$$
$$a(b-2) - 2(b-2) = 4,$$
$$(a-2)(b-2) = 4.$$

Бидејќи $4 = 4\cdot 1 = 2\cdot 2$ од последната равенка следува:

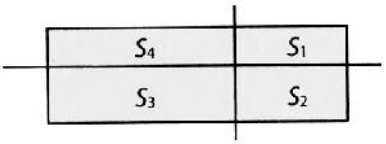
1) $a-2 = 4, b-2 = 1$, од каде добиваме $a = 6, b = 3$,

2) $a-2 = 2, b-2 = 2$, од каде добиваме $a = b = 2$.

Според тоа, задачата има две решенија и тоа едното е правоаголник со страни 6 и 3, а другото е правоаголник со страни 4 и 4.

10. Правоаголник со две прави паралелни на неговите страни е поделен на четири мали правоаголници. Дадени се периметрите на трите мали правоаголници. Определи го периметарот на четвртиот мал правоаголник.

**Решение.** Збирот на периметрите на двата помали правоаголници без заедничка страна е еднаков на периметарот на големиот правоаголник. Според тоа, збирот на нивните периметри е еднаков на збирот на периметрите на другите два помали



правоаголници. Сега, ако периметрите на помалите правоаголници ги означиме со $S_1, S_2, S_3, S_4$ (види цртеж), тогаш $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$, од каде во случајот кога се дадени периметрите $S_1, S_2, S_3$, добиваме $S_4 = S_1 + S_3 - S_2$.

11. Должините на страните на правоаголникот се цели броеви. Ако едната страна се зголеми за 99, а другата се намали за 1, се добива нов правоаголник со иста плоштина како и почетниот. Определи ги должините на страните на правоаголникот ако должината на пократката страна е двоцифрен, а на плоштината е четирицифрен број.

**Решение.** Нека должините на страните на правоаголникот се $a$ и $b$. Според условот на задачата $ab = (a+99)(b-1)$, од каде добиваме $99(b-1) = a$, односно $b = \frac{a}{99} + 1$. Оттука следува дека $a$ е подолгата страна. Кога $b$ прима вредности 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, тогаш $a$ прима вредности 99,198,297,..., 792, 891, 990, а плоштината на правоаголникот прв пат станува петцифрен број за $b = 11$, т.е. $ab = 11 \cdot 990 = 10890$. Значи, $b = 10$ е единствен двоцифрен број за кој плоштината $ab = 10 \cdot 891 = 8910$ е четирицифрен број. Значи, $a = 891$. Навистина, $891 \cdot 10 = (891+99) \cdot (10-1) = 990 \cdot 9 = 8910$.

12. Нека $ABCD$ е правоаголник и $CDM$ и $AND$ се рамнострани триаголници во надворешноста на тој правоаголник. Докажи дека триаголникот $BMN$ е рамностран.

**Решение.** Според признакот САС триаголниците $BCM$ и $NAB$ се складни (види цртеж). Затоа

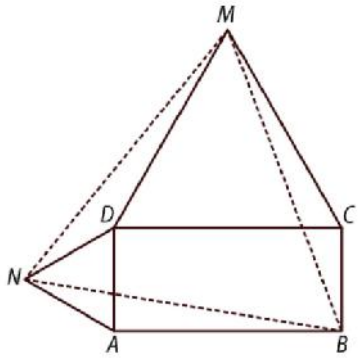
$\overline{BM} = \overline{NB}$ и $\sphericalangle CBM = \sphericalangle ANB$.

Бидејќи

$\sphericalangle ABN + \sphericalangle ANB = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

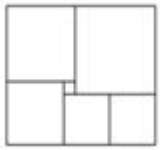
и

$$\begin{aligned}\sphericalangle NBM &= 90^\circ - \sphericalangle ABN - \sphericalangle CBM \\ &= 90^\circ - \sphericalangle ABN - \sphericalangle ANB\end{aligned}$$



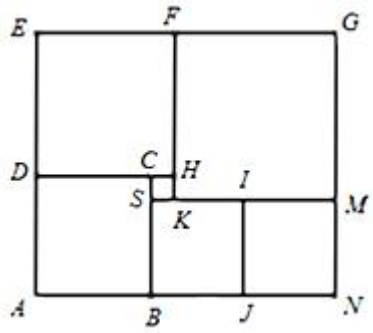

добиваме $\sphericalangle NBM = 90^\circ - 30^\circ = 60$. Според тоа, триаголникот $BMN$ е рамностран.

13. Правоаголник е разделен на шест квадрати, како што е прикажано на цртежот. Одреди ја плоштината на правоаголникот, ако страната на најмалиот квадрат е $2m$.



**Решение.** Нека $x$ е страната на квадратот $ABCD$. Тогаш страната на квадратот $DHFE$ е $x+2$, т.е. $\overline{DE}=\overline{EF}=x+2$. Да забележиме дека $\overline{BS}=\overline{NM}=x-2$. Така имаме дека $\overline{BN}=2x-4$. Значи,

$\overline{AN}=3x-4$ и $\overline{AE}=2x+2$.




За $\overline{FG}$ имаме

$$\overline{FG}=\overline{AN}-\overline{EF}=(3x-4)-(x+2)=2x-6.$$

Аналогно добиваме

$$\overline{MG}=\overline{AE}-\overline{NM}=(2x+2)-(x-2)=x+4.$$

Од $\overline{FG}=\overline{MG}$ ја добиваме равенката $2x-6=x+4$, од каде се добива дека $x=10$. Така имаме дека

$$\overline{AN}=3\cdot 10-4=26 \text{ и } \overline{AE}=2\cdot 10+2=22.$$

Значи плоштината на правоаголникот е $P=22\cdot 26=572m^2$.

14. Страните на еден правоаголен триаголник се последователни природни броеви. Периметарот на правоаголниот триаголник е $12dm$. Над секоја страна од триаголникот е конструиран квадрат. Одреди ја плоштината на добиената фигура.

**Решение.** Страните на триаголникот се последователни природни броеви, т.е. тие се $x-1$, $x$ и $x+1$. Бидејќи периметарот на триаголникот е $12dm$, добиваме $x-1+x+x+1=12dm$, од каде со решавање на равенката имаме $3x=12dm$, т.е. $x=4dm$. Следува дека страните на триаголникот имаат должини $3dm$, $4dm$ и $5dm$. Плоштината на правоаголниот триаголник е $P_{\triangle}=\frac{3\cdot 4}{2}dm^2=6dm^2$, а плоштините на квадратите се:

$P_1=3\cdot 3dm^2=9dm^2$, $P_2=4\cdot 4dm^2=16dm^2$ и $P_3=5\cdot 5dm^2=25dm^2$.

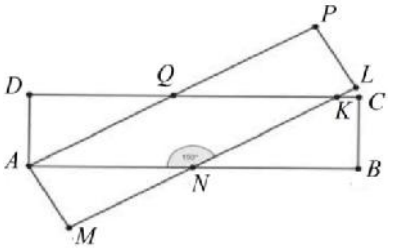
Плоштината на добиената фигура е

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_{\triangle} = 9 + 16 + 25 + 6 = 56\,dm^2 .$$

15. Два складни правоаголника *ABCD* и *AMLP* со должини на страни

$$\overline{AB} = \overline{ML} = 24cm\ ,\ \overline{BC} = \overline{LP} = 6cm$$

се преклопуваат како на цртежот десно. Пресечната точка на страните *AP* и *CD* е точката *Q*, а пресечните точки на страната *ML* со страните *AB* и *CD* се точките *N* и *K*, соодветно. Пресметај ја плоштината на четириаголникот *ANKQ* и должината на отсечката *NB*, ако $\measuredangle ANL = 150^\circ$.




**Решение.** Имаме,

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{ML} = \overline{PA} = 24cm \text{ и } \overline{BC} = \overline{LP} = \overline{DA} = \overline{AM} = 6cm .$$

Бидејќи четириаголникот *ABCD* е правоаголник, $N \in AB$ и $K, Q \in CD$, за *AN* и *KQ* важи $AN \parallel KQ$, и бидејќи четириаголникот *AMLP* е правоаголник, $Q \in AP$ и $N, K \in ML$ за *AQ* и *NK* важи $AQ \parallel NK$. Значи, четириаголникот *ANKQ* е паралелограм. Од $\measuredangle ANL = 150^\circ$ следува дека $\measuredangle BNL = 180^\circ - \measuredangle ANL = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, т.е. $\measuredangle NAQ = 30^\circ$. Според тоа, важи $\measuredangle QAD = 90^\circ - \measuredangle NAQ = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Триаголникот *QDA* е правоаголен, па затоа $\measuredangle DQA = 90^\circ - \measuredangle QAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Значи, $\overline{AQ} = 2\overline{AD} = 12cm$. Бидејќи четириаголникот *ANKQ* е паралелограм и *AM* и *AD* се негови висини, добиваме дека $P_{ANKQ} = \overline{AN} \cdot \overline{AD}$ и $P_{ANKQ} = \overline{NK} \cdot \overline{AM}$. Оттука $\overline{AN} \cdot \overline{AD} = \overline{NK} \cdot \overline{AM}$. Но, $\overline{AM} = \overline{AD}$ и $\overline{NK} = \overline{AQ}$, па добиваме дека $\overline{NK} = \overline{AN}$, т.е. $\overline{AN} = \overline{NK} = \overline{AQ} = 12cm$. Според тоа, плоштината на четириаголникот *ANKQ* е еднаква на $P_{ANKQ} = 72\ cm^2$. Од $\overline{NB} = \overline{AB} - \overline{AN}$, добиваме дека $\overline{NB} = 12\ cm$.

16. Нормалите повлечени од темињата *B* и *D* кон дијагоналата *AC* на правоаголникот *ABCD* ја делат дијагоналата на три еднакви дела. Должината на помалата страна на правоаголникот е $\sqrt{2}\ cm$. Определи ја должината на другата страна на правоаголникот.

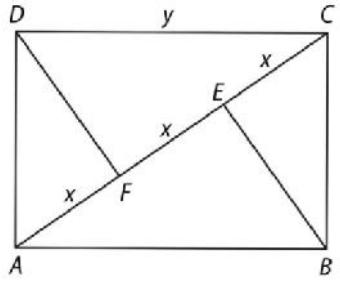
**Решение.** Нека $\sqrt{2}\,cm$ е должината на пократката страна. Да ја означиме должината на другата страна со $y$, подножјата на нормалите со $E$ и $F$ и должината на дијагоналата со $3x$ (цртеж десно). Тогаш од Питагоровата теорема применета на триаголниците $BCE$, $BEA$ и $ABC$ следува

$$2-x^2=y^2-4x^2,\ 2+y^2=9x^2,$$

од каде добиваме

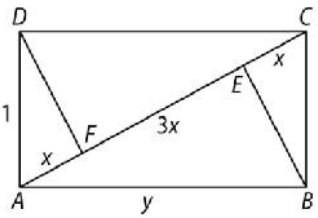
$$2+3x^2=y^2 \text{ и } 2+y^2=9x^2.$$

Ако првото равенство го помножиме со 3 и го собереме со второто равенство, по средувањето добиваме $8=2y^2$, од каде следува $y=2\,cm$.




17. Нормалите повлечени од темињата $B$ и $D$ кон дијагоналата $AC$ на правоаголникот $ABCD$ ја делат дијагоналата на три дела во однос $1:3:1$. Должината на поналата страна на правоаголникот е $1\,cm$. Определи ја должината на другата страна на правоаголникот.

**Решение.** Со $y$ да ја означиме должината на подолгата страна на правоаголникот, подножјата на нормалите повлечени од $B$ и $D$ со $E$ и $F$, соодветно, а должината на дијагоналата со $5x$ (види цртеж). Тогаш, од Питагоровата теорема применета на триаголниците $BCE$, $BEA$, $ABC$ следува

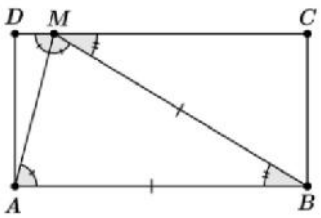



$$1-x^2=y^2-16x^2,\ 1+y^2=25x^2,$$

од кацде добиваме $x^2=\frac{1}{5}$. Соред тоа, $y^2=25\cdot(\frac{1}{5})^2-1$, т.е. $y=2$.

18. Даден е правоаголик $ABCD$ каде $\overline{AB}=2\overline{BC}$. На страната $CD$ е избрана точката $M$, така што симетралата на $\measuredangle DMB$ минува низ темето $A$. Определи ја големината на $\measuredangle AMB$.

**Решение.** Нека $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b$. Тогаш $\overline{AB}=2b$. Бидејќи $AM$ е симетрала на $\measuredangle DMB$, добиваме $\measuredangle DMA=\measuredangle AMB$. Од



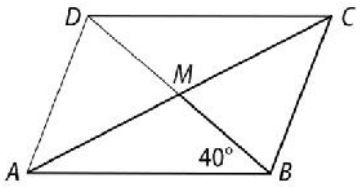
друга страна, $\measuredangle DMA = \measuredangle BAM$, како наизменични агли. Значи, $\measuredangle BAM = \measuredangle AMB$, па затоа триаголникот $AMB$ е рамнокрак и $\overline{BM} = \overline{AB} = 2b$. Според тоа, во правоаголниот триаголник $BMC$ едната катета е $\overline{BC} = b$, а другата е $\overline{BM} = 2b$, па затоа тој е половина од рамностран триаголник со страна $\overline{BM} = 2b$. Оттука добиваме $\measuredangle CBM = 60^\circ$, што значи дека $\measuredangle BMC = 30^\circ$. Оттука следува дека

$$\measuredangle DMB = 180^\circ - \measuredangle BMC = 180^\circ - 30^\circ,$$

па затоа $\measuredangle AMB = \frac{1}{2}\measuredangle DMB = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$.

19. Во триаголникот $ABC$ тежишната линија $BM$ е два пати пократка од страната $AB$ и со неа формира агол од $40^\circ$. Определи го $\measuredangle ABC$.

**Решение.** Ја продолжуваме тежишната линија $BM$ до точка $D$ така што $\overline{MD} = \overline{BM}$. Тогаш четириаголникот $ABCD$ е паралелолрам, а триаголникот $ABD$ е рамнокрак ($\overline{AB} = \overline{BD}$), па затоа $\measuredangle BDA = \measuredangle BAD = 70^\circ$. Бидејќи, $\measuredangle MBC = \measuredangle MDA = 70^\circ$ (наизменични агли), па затоа $\measuredangle ABC = 40^\circ + 70^\circ = 110^\circ$




20. Периметарот на еден паралелограм е еднаков на $26\,cm$, а збирот на плоштините на квадратите конструирани над две соседни страни на паралелограмот е $97\,cm^2$. Определи ги должините на страните на паралелограмот.

**Решение.** Нека должините на страните на паралелограмот се $a$ и $b$. Од условот на задачата следува $a + b = 13$ и $a^2 + b^2 = 97$. Ако во втората равенка замениме од првата $b = 13 - a$, последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&a^2 + (13-a)^2 = 97,\\
&a^2 + 13^2 - 2\cdot 13\cdot a + a^2 = 97,\\
&2a^2 - 26a + 72 = 0,\\
&a^2 - 13a + 36 = 0,\\
&a(a-4) - 9(a-4) = 0,\\
&(a-4)(a-9) = 0.
\end{aligned}$$

Производ на два броја е еднаков на 0, ако барем еден од множителите е еднаков на 0, па од последната равенка следува $a-4=0$ или $a-9=0$, односно $a=4$ или $a=9$. За $a=4$ имаме $b=13-a=9$, а за $a=9$ имаме $b=1-9=4$. Значи, должините на страните на паралелограмот се $4cm$ и $9\,cm$.

21. Паралелелограм со две прави паралелни на неговите страни е поделен на четири помали паралелограми. Периметрите на три од помалите паралелограми се еднакви на 100, 70 и $50\,cm$. Определи ја

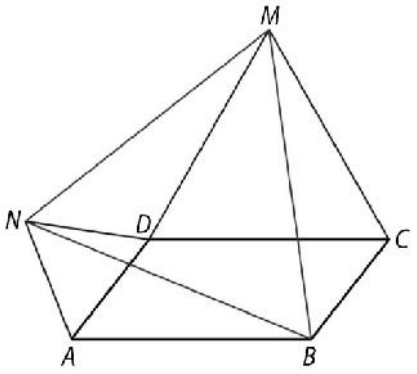
а) најмалата, б) најголемата

можна вредност која може да ја има четвртиот од малите паралелограми.

**Решение.** Во зависност од тоа која од трите вредности ја има периметарот на паралелограмот кој со четвртиот паралелограм нема заедничка страна, периметарот на четвртиот паралелограм може да биде $70+50-100=20\,cm$, $50+100-70=80\,cm$ или $70+100-50=120\,cm$.

Значи, периметарот на четвртиот паралелогра може да биде најмногу $120\,cm$, а најмалку $20\,cm$.

22. Нека $ABCD$ е паралелограм, а $CDM$ и $ADN$ се рамностранни триаголници кои лежат надвор од паралелограмот $ABCD$. Докажи дека триаголникот $BMN$ е рамностран.




**Решение.** Ако $\measuredangle ABC=\measuredangle ADC=\sim$, тогаш $\measuredangle BCD=\measuredangle BAD=180^\circ-\sim$.

Сега, $\measuredangle BCM=\measuredangle NAB=240^\circ-\sim$ и затоа триаголниците $BCM$ и $NAB$ се складни (CAC), па затоа важи $\overline{BM}=\overline{NB}$, $\measuredangle CBM=\measuredangle ANB$. Сега, бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle NBM &= \measuredangle ABC-(\measuredangle ABN+\measuredangle MBC)\\ &=\sim-(\measuredangle ABN+\measuredangle ANB)\\ &=\sim-(180^\circ-\measuredangle BCM)\\ &=\sim-(180^\circ-(240^\circ-\sim))\\ &=60^\circ,\end{aligned}$$

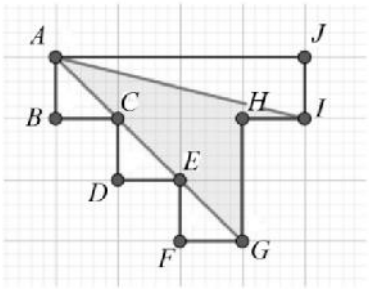
и $\overline{BM}=\overline{NB}$ добиваме дека триаголникот $BMN$ е рамностран.

23. Даден е паралелограм $ABCD$ со должини на страни $10\,cm$ и $4\,cm$. Симетралата на аголот во темето $B$ ја сече страната $CD$ во точката $E$. Определи го односот на плоштината на трапезот $ABED$ и паралелограмот $ABCD$.

**Решение.** За триаголникот $BCE$ важи $\measuredangle CBE = \measuredangle ABE = \frac{1}{2}\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ABE = \measuredangle CEB$ како агли со паралелни краци, па затоа овој триаголник е рамнокрак (направи цртеж). Затоа $\overline{CE} = \overline{BC} = 4\,cm$, што значи $\overline{DE} = \overline{DC} - \overline{EC} = 6\,cm$. Нека $h$ е должината на висината на паралелограмот. Плоштината на паралелограмот $ABCD$ е $P = \overline{AB}\cdot h = 10h$, плоштината на трапезот $ABED$ е $P_1 = \frac{\overline{AB}+\overline{DE}}{2}\cdot h = \frac{10+6}{2}\cdot h = 8h$. Според тоа, $P : P = 10h : 8h = 5 : 4$.

24. Пресметај ги плоштината и периметарот на осенчениот четириаголник $AGHI$, ако

$$\overline{HI} = \overline{IJ} = \sqrt{2}\,.$$




**Решение.** Имаме:

$$\overline{HI} = \sqrt{2}\,,\ \overline{GH} = 2\overline{IJ} = 2\sqrt{2}\,,$$

а од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AI} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{34}\,,$$

$$\overline{AG} = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 6\,.$$

Според тоа, периметарот на четириаголникот $AGHI$ е

$$L = 6 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{34} = 6 + (3 + \sqrt{17})\sqrt{2}\,.$$

За плоштината на четириаголникот $AGHI$ имаме

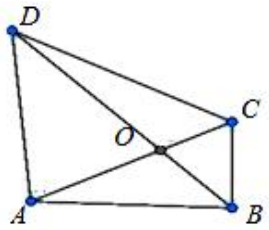
$$P = P_{ACI} + P_{CHG} = \frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{2} = 3 + 4 = 7\,.$$

25. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите се сечат во точка $O$. Ако триаголниците $AOB$ и $COD$ имаат еднакви плоштини тогаш четириаголникот $ABCD$ е трапез или паралелограм. Докажи!

**Решение.** Да забележиме дека

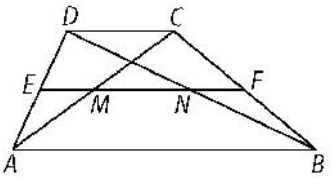
$$P_{ABD} = P_{AOB} + P_{AOD} = P_{COD} + P_{AOD} = P_{ACD} \qquad (*)$$

Триаголниците $ABD$ и $ACD$ имаат заедничка страна $AD$, па од (*) следува дека имаат еднакви висини спуштени кон $AD$ (од $B$ и $C$ соодветно). Значи, точките $B$ и $C$ се на исто растојание од правата $AD$. Бидејќи точките се на иста страна од правата $AD$ следува дека $BC \| AD$.




26. Докажи дека делот на средната линија на трапезот кој е меѓу неговите дијагонали е еднаков на полуразликата на основите.

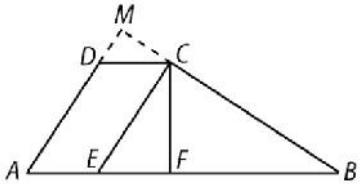
**Решение.** Со $M$ и $N$ да ги означиме пресечните точки на средната линија $EF$ на трапезот $ABCD$ со дијагоналите $AC$ и $BD$, соодветно. Точката $F$ е средина на страната $BC$ и $FN$ е паралелна со $CD$, па затоа $FN$ е средна линија на триаголникот $BCD$, односно $\overline{FN} = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{b}{2}$. Слично заклучуваме дека $EM$ е средна линија на триаголникот $ACD$ и $\overline{EM} = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{b}{2}$. Понатаму, $EF$ е средна линија на трапезот, што значи $\overline{EF} = \frac{a+b}{2}$. Конечно,




$$\overline{MN} = \overline{EF} - (\overline{EM} + \overline{NF}) = \frac{a+b}{2} - (\frac{b}{2} + \frac{b}{2}) = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

27. Краците на трапезот се со должини $6\,cm$ и $8\,cm$ и припаѓаат на прави кои се заемно нормални. Определи ја плоштината на тој трапез, ако едната основа е два пати подолга од другата.

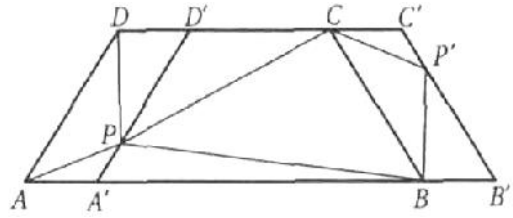
**Решение.** Нека $ABCD$ е трапез кој ги задоволува условите на здачата. Нека $E$ е точка на основата $AB$ таква што $CE \| AD$. Понатаму, $\measuredangle AMB = 90^\circ$, па затоа $\measuredangle ECB = 90^\circ$ (агли со паралелни краци). Според тоа, триаголникот $ECB$ е правоаголен со хипотенузи $\overline{BC} = 8\,cm$ и $\overline{EC} = \overline{AD} = 6\,cm$ (од $CE \| AD$ и $AE \| DC$ следува дека четириаголникот $AECD$ е паралелограм). Сега, од Питагоровата теорема добиваме $\overline{EB} = \sqrt{\overline{EC}^2 + \overline{CB}^2} = 10\,cm$. Но, $\overline{AB} = 2b$ и $\overline{AE} = \overline{DD}$



$=b$, па затоа $10\,cm=\overline{EB}=\overline{AB}-\overline{AE}=a-b=2b-b=b$. Висината на трапезот е еднаква на висината на триаголникот $EBC$ и може да ја пресметаме преку плоштината на овој триаголник: $\frac{\overline{EB}\cdot h}{2}=\frac{\overline{EC}\cdot\overline{CB}}{2}$, односно $\frac{10h}{2}=\frac{6\cdot 8}{2}$, т.е. $h=4{,}8\,cm$. Конечно, плоштината на трапезот е $P=\frac{a+b}{2}h=\frac{10+20}{2}\cdot 4{,}8=72\,cm^2$.

28. Точка $P$ е внатрешна за рамнокракиот трапез $ABCD$ и таа е поврзана со темињата на трапезот. Докажи дека може да се конструира четириаголник со страни складни на отсечките $PA, PB, PC, PD$, а кој може да се впише во трапезот $ABCD$ (на секоја страна на трапезот припаѓа по едно теме на четириаголникот).

**Решение.** Низ точката $P$ повлекуваме права паралелна со $AD$ и нека $A'$ и $D'$ се пресечните точки на оваа права со $AB$ и $DC$, соодветно (цртеж десно). Нека точката $P'$ е таква што $\triangle APD\cong\triangle CP'B$. Низ точката $P'$ повлекуваме права паралелна на правата $BC$ која страните $AB$ и $DC$ ги сече соодветно во точките $B'$ и $C'$. Тогаш четириаголникот $A'B'C'D'$ е трапез, во кој е впишан четириаголникот $PBP'C$ (Докажи!). Притоа важи $\overline{AP}=\overline{CP'}, \overline{DP}=\overline{BP'}, \overline{BP}=\overline{BP}, \overline{CP}=\overline{CP}$, од што конечно следува тврдењето на задачата.

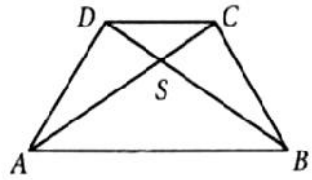



29. Во четириаголникот $ABCD$ страната $AB$ е паралелна со страната $CD$ и дијагоналите $AC$ и $BD$ се сечат во точката $S$. Докажи дека плоштините на триаголниците $ASD$ и $BSC$ се еднакви.

**Решение.** Плоштината на триаголникот $ABC$ е еднаква на плоштината на триаголникот $ABD$, бидејќи двата троаголника имаат заедничка страна и еднакви висини повлечени кон неа. Според тоа,

$$P_{ABD}-P_{ABS}=P_{ABC}-P_{ABS},$$
$$P_{ASD}=P_{BSC},$$

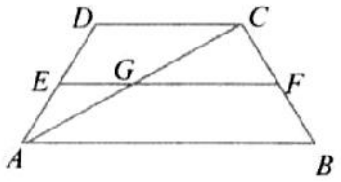
што и требаше да се докаже.



30. Во трапезот $ABCD$ дијагоналата $AC$ ја дели средната линија на отсечки со должини $2\,cm$ и $5\,cm$. Определи го односот на плоштините на триаголниците $ABC$ и $ACD$.

**Решение.** Бидејќи $EF$ е средна линија на трапезот $ABCD$, заклучуваме дека $EG$ е средна линија на триаголникот $ACD$ и $GF$ е средна линија на триаголникот $ABC$. Значи,

$$\overline{AB} = 2\overline{GF} = 10\,cm,$$
$$\overline{CD} = 2\overline{EG} = 4\,cm.$$

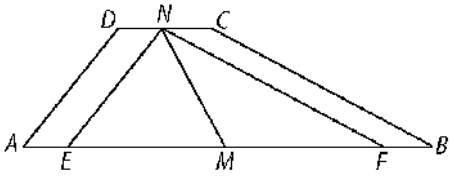



Нека $h$ е висината на трапезот $ABCD$. Според тоа,

$$P_{ABC} : P_{ACD} = \frac{\overline{AB}\cdot h}{2} : \frac{\overline{CD}\cdot h}{2} = \overline{AB} : \overline{CD} = 5:2.$$

31. Збирот на аглите при поголемата основа на трапезот $ABCD$ е еднаков на прав агол. Докажи дека отсечката која ги поврзува средините на основите на трапезот е еднаква на полуразликата на неговите основи.

**Решение.** Нека $M$ и $N$ се средините на основите на трапезот $ABCD$ (цртеж десно). Низ точката $N$ повлекуваме прави паралелни со краците $AD$ и $BC$ на трапезот кои основата $AB$ ја сечат во точките $E$ и $F$. Четириаголниците $AEND$ и $FBCN$ се паралелограми, па затоа




$$\overline{EF} = \overline{AB} - (\overline{AE} + \overline{FB}) = \overline{AB} - (\overline{DN} + \overline{NC}) = \overline{AB} - \overline{DC} = a - b.$$

Понатаму, $\measuredangle NEF = DAB$ и $\measuredangle NFE = \measuredangle CBA$, па затоа

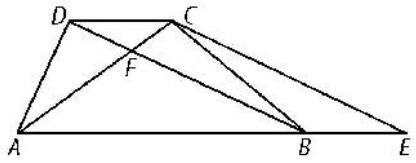
$$\measuredangle NEF + \measuredangle NFE = \measuredangle DAB + \measuredangle CBA = 90^\circ,$$

што значи дека триаголникот $EFN$ е правоаголен. Конечно, од $\overline{EM} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ и $\overline{MF} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ следува дека $M$ е средина на $EF$, т.е. $NM$ е тежишна линија во правоаголниот триаголник повлечена кон хипотенузата, па затоа $\overline{NM} = \frac{\overline{EF}}{2} = \frac{a-b}{2}$, што и требаше да се докаже.

32. Дијагоналите на трапезот се заемно нормални и нивните должини се $6\,cm$ и $8\,cm$. Пресметај ги висината и плоштината на трапезот.

**Решение.** Нека $E$ е точка на продолжението на основата $AB$, таква

што $\overline{BE}=\overline{CD}=b$ (цртеж десно). Тогаш четириаголникот $BECD$ е паралелограм, па затоа $\overline{CE}=\overline{DB}=8\,cm$ и $\measuredangle ACE=\measuredangle AFB=90^\circ$ (аги со паралелни краци). Од Питагоровата теорема применета на триаголникот $ACE$ следува $\overline{AE}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CE}^2}=10\,cm$. Понатаму, за плоштината на трапезот добиваме




$$P=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DB}}{2}=\frac{6\cdot 8}{2}=24\,cm^2.$$

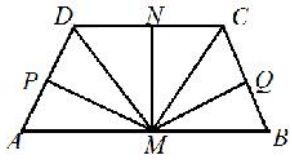
Од друга страна

$$P=\frac{(\overline{AB}+\overline{CD})\cdot h}{2}=\frac{(\overline{AB}+\overline{BE})\cdot h}{2}=\frac{\overline{AE}\cdot h}{2},$$

па затоа $24=\frac{10h}{2}$, односно $h=4{,}8\,cm$.

33. Во трапезот $ABCD$ симетралите на тапите агли на трапезот се сечат во точката $M$ која припаѓа на основата $AB$. Определи ги должините на страните на трапезот $ABCD$, ако висината на трапезот е $\overline{MN}=12$, а должините на симетралите на тапите агли се $\overline{CM}=13$ и $\overline{DM}=15$.

**Решение.** Нека симетралите на аглите во темињата $C$ и $D$ се сечат на основата $AB$ во точката $M$ и нека подножјата на нормалите повлечени од точката $M$ на краците $AD$ и $BC$ се соодветно точките $P$ и $Q$, а $MN$ е висина на трапезот.




Од складноста на триаголниците $MPD$ и $MND$, односно $NQC$ и $MNC$ следува дека $\overline{PM}=\overline{MN}=\overline{MD}=12$. Од друга страна

$\overline{DN}^2=\overline{DM}^2-\overline{MN}^2=15^2-12^2=225-144=81$, т.е. $\overline{DN}=\overline{DP}=9$ и

$\overline{CN}^2=\overline{CM}^2-\overline{MN}^2=13^2-12^2=169-144=25$, т.е. $\overline{CN}=\overline{CQ}=5$.

Значи,

$$\overline{CD}=\overline{CN}+\overline{ND}=5+9=14.$$

Понатаму, од својствата на аглите на трансферзалата и од тоа што $CM$ е симетрала на $\measuredangle ADM$ следува $\measuredangle AMD=\measuredangle MDN=\measuredangle ADM$, т.е. триаголникот $AND$ е рамнокрак. Слично, $\measuredangle BMC=\measuredangle MCN=\measuredangle BCM$, т.е. триаголникот $BMC$ е рамнокрак. Според тоа, $\overline{AD}=\overline{AM}$ и $\overline{BC}=\overline{BM}$.

Ако $\overline{AP}=x, \overline{BQ}=y$ , тогаш $\overline{AD}=\overline{AM}=9+x$ и $\overline{BC}=\overline{BM}=5+y$, па затоа $\overline{AM}^2=\overline{AP}^2+\overline{PM}^2$, т.е. $(9+x)^2=x^2+12^2$, од каде добиваме $x=3,5$ и $\overline{BM}^2=\overline{BQ}^2+\overline{MQ}^2$, т.е. $(5+y)^2=y^2+12^2$, од каде добиваме $y=11,9$. Значи,

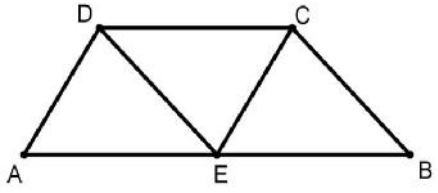
$$\overline{AD}=9+x=9+3,5=12,5,\ \overline{BC}=5+y=5+11,9=16,9.$$

Страните на трапезот се:

$$\overline{AB}=\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AD}+\overline{BC}=12,5+16,9=29,4,$$
$$\overline{BC}=16,9,\ \overline{CD}=14 \text{ и } \overline{AD}=12,5.$$

34. Определи ја плоштината на трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB}=18\,cm$ и $\overline{CD}=9\,cm$, а краци $\overline{BC}=6\,cm$ и $\overline{AD}=5\,cm$.

**Решение.** Нека $E$ е средина на страната $AB$, односно нека $\overline{AE}=\overline{EB}=9\,cm$ (цртеж десно). Од $\overline{CD}=9\,cm$ следува дека четириаголниците $AECD$ и $EBCD$ се паралелограми, па затоа $\overline{AD}=\overline{EC}$ и $\overline{ED}=\overline{BC}$. Според тоа, триаголници $AED, EBC$ и $CDE$ имаат три еднакви страни, па од признакот ССС следува дека тие се меѓусебно складни. Должините на страните на овие триаголници се $5\,cm, 6\,cm$ и $9\,cm$. Сега, од Хероновата формула добиваме



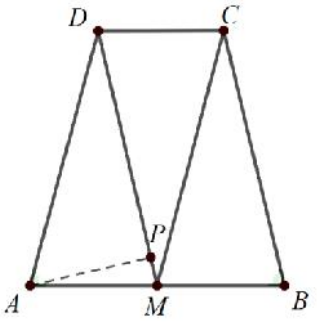

$$P=3\sqrt{10(10-9)(106)(10-5)}=3\sqrt{200}=30\sqrt{2}\ cm.$$

35. Аголот при основата на рамнокрак трапез е еднаков на $75^\circ$, основите се однесуваат како $2:1$, должината на кракот е еднаква на $30\,cm$. Пресметај ја плоштината на овој трапез.

**Решение.** Од $\overline{AB}:\overline{CD}=2:1$ следува $\overline{AB}=2\overline{CD}$. Нека $M$ е средина на $AB$. Ако ставиме $\overline{CD}=b$, добиваме $\overline{AB}=2b$ и $\overline{AM}=\overline{MB}=b$. Од $AB \| CD$ и $\overline{CD}=\overline{MB}$ следува дека $MBCD$ е паралелограм. Слично, $AMCD$ е паралелограм. Според тоа,

$$\overline{AD}=\overline{MC} \text{ и } \overline{BC}=\overline{MD},$$

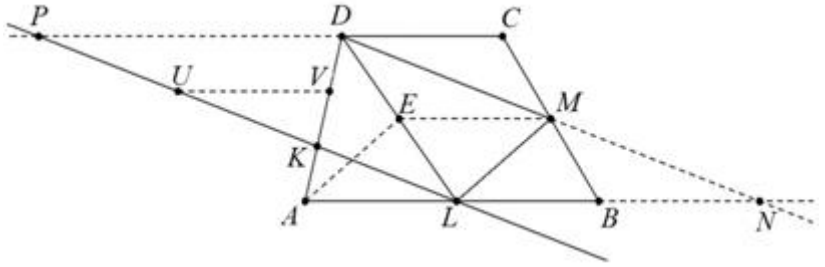
што значи дека триаголниците $AMD$, $MBC$ и $CDM$ се рамнокраки триаголници со крак $30\,cm$, основа $b$, агол при основата еднаков на $75^\circ$ и агол при врвот еднаков на $180^\circ - 2\cdot 75^\circ = 30^\circ$.




Нека $AP$ е висината на триаголникот $AMD$. Тогаш триаголникот $APD$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 15\,cm$. Конечно, плоштината на трапезот е $P = 3P_{AMD} = 3\cdot\frac{30\cdot 15}{2} = 675\,cm^2$.

36. Во трапезот $ABCD$ симетралата на аголот во темето $D$ ја сече основата $AB$ во точката $L$ и точката $M$ е средина на страната $BC$, Правата паралелна на $DM$, која минува низ точката $L$, ја сече $AD$ во точката $K$. Ако $\angle DLM$ е прав агол, определи го односот $\overline{DK} : \overline{KA}$.

**Решение.** Нека продолжението на $DM$ ја сече $AB$ во точката $N$, а продолжението на $LK$ ја сече $CD$ во точката $P$. Нека $\overline{LB} = x$ и $\overline{CD} = y$. Од $\overline{MC} = \overline{MB}$, $\angle CMD = \angle BMN$ и $\angle DCM = \angle NMB$ следува дека триаголниците $DCM$ и $NBM$ се складни, па затоа $\overline{BN} = \overline{CD} = y$.

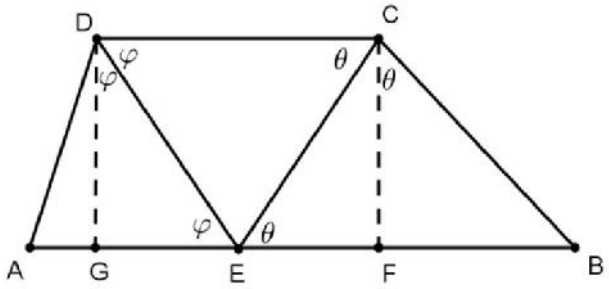



Од $LN \parallel DP$ и $PL \parallel DN$ следува дека четириаголникот $PLND$ е паралелограм, па затоа $\overline{PD} = \overline{LN} = \overline{LB} + \overline{BN} = x + y$. Понатаму, $DL$ е симетрала на аголот во темето $D$, па затоа $\angle LDC = \angle ADL$. Од друга страна $AB \parallel CD$, па $\angle ALD = \angle LDC$, како наизменични агли. Според тоа, $\angle ALD = \angle LDC = \angle ADL$, што значи дека триаголникот $LDA$ е рамнокрак, со основа $DL$. Тоа значи дека висината $AE$ повлечена кон основата $DL$ е и тежишна линија. Но, тоа значи дека $EM$ е средна

линија во триаголникот $LND$, па затоа $\overline{EM}=\frac{\overline{LN}}{2}=\frac{x+y}{2}$. Понатаму, според условот $\measuredangle DLM$ е прав агол, па како $AE\perp DL$, добиваме дека $AE\parallel LM$, што значи дека четириаголникот $ALME$ е паралелограм. Според тоа, $\overline{AL}=\overline{EM}=\frac{x+y}{2}=\frac{\overline{PD}}{2}$. Нека $U$ и $V$ се средните на отсечките $PK$ и $DK$. Тоа значи дека $UV$ е средна линија на триаголникот $PDK$, па затоа $\overline{UV}=\frac{\overline{PD}}{2}=\overline{AL}$. Сега, од $\overline{UV}=\overline{AL}$, $\measuredangle LAK=\measuredangle UVK$ и $\measuredangle AKL=\measuredangle VKU$ следува дека триаголниците $UVK$ и $LAK$ се складни. Затоа важи $\overline{DK}=2\overline{KV}=2\overline{KA}$, односно $\overline{DK}:\overline{KA}=2:1$.

37. Симетралите на внатрешните агли кај темињата $C$ и $D$ на трапезот $ABCD$ се сечат во точката $E$, која лежи на основата $AB$. Ако $\overline{CE}=13\,cm$, $\overline{DE}=15\,cm$, а висината на трапезот е $12\,cm$, определи ги должините на страните на овој трапез.

**Решение.** Бидејќи основите на трапезот се паралелни, а правите $CE$ и $DE$ се нивни трансферзали, добиваме дека $\measuredangle CDE=\measuredangle AED$, односно $\measuredangle DCE=\measuredangle BEC$. Според тоа, триаголниците $BCE$ и $AED$ се рамнокраки. Да означиме $\overline{AD}=\overline{AE}=d$ и $\overline{BC}=\overline{BE}=c$. Нека $G$ и $F$ се подножјата на висините повлечени од темињата $D$ и $C$, соодветно. Тогаш $\overline{EG}=\sqrt{15^2-12^2}=9\,cm$ и $\overline{EF}=\sqrt{13^2-12^2}=5\,cm$.

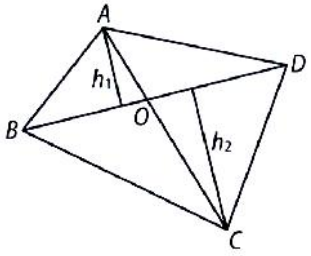



Исто така $\overline{DE}^2-\overline{EG}^2=\overline{AD}^2-\overline{AG}^2$, односно $15^2-9^2=d^2-(d-9)^2$, од каде добиваме $d=12{,}5\,cm$. Слично важи $\overline{CE}^2-\overline{EF}^2=\overline{BC}^2-\overline{BF}^2$, т.е. $13^2-5^2=c^2-(c-5)^2$, од каде добиваме $c=16{,}9\,cm$. Значи, должините на основите се $\overline{AB}=c+d=29{,}4\,cm$ и $\overline{CD}=\overline{GE}+\overline{EF}=14\,cm$.

38. Дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точ-

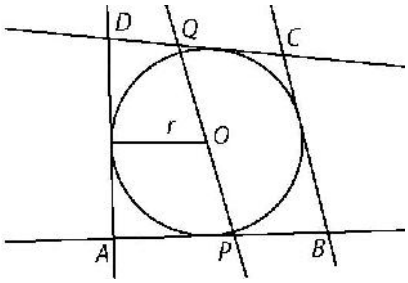
ката $O$ и го делат четириаголникот на триаголниците $OAB, OBC,$ $OCD$ и $ODA$. Докажи дека производот на плоштините на триаголниците $OAB$ и $OCD$ е еднаков на производот на плоштините на триаголниците $OBC$ и $ODA$.

**Решение.** Плоштините на наведените триаголници да ги означиме редоследно со $P_1, P_2, P_3, P_4$. Нека $h_1$ и $h_2$ се должините на нормалите повлечени од темињата $A$ и $C$ на дијагоналата $BD$. Тогаш $h_1$ е заедничка висина на триаголниците $OAB$ и $ODA$ повлечена од темето $A$, а $h_2$ е заедничка висина на триаголниците $OBC$ и $OCD$ повлече-на од темето $C$. Тогаш $P_1 = \frac{\overline{BO}\cdot h_1}{2}, P_2 = \frac{\overline{BO}\cdot h_2}{2}, P_3 = \frac{\overline{DO}\cdot h_2}{2}$ и $P_4 = \frac{\overline{DO}\cdot h_1}{2}$, па затоа $P_1 \cdot P_3 = \frac{\overline{BO}\cdot h_1}{2}\cdot\frac{\overline{DO}\cdot h_2}{2} = \frac{\overline{BO}\cdot h_2}{2}\cdot\frac{\overline{DO}\cdot h_1}{2} = P_2 \cdot P_4$.




39. Докажи дека секоја права која ги полови периметарот и плоштината на тангентен четириаголник минува низ центарот на опишаната кружница на тој четириаголник.

**Решение.** Нека правата $a$ ги сече страните $AB$ и $CD$ на тангентниот четириаголник $ABCD$ во точките $P$ и $Q$ (цртеж десно). Нека $O$ е центарот на впишаната кружница на четириаголникот $ABCD$ и $r$ е нејзиниот радиус. Тогаш според условот на задачата имаме $\overline{PA} + \overline{AD} + \overline{DQ} = \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CQ}$, па затоа важи




$$S_{PADQO} = \frac{r(\overline{PA}+\overline{AD}+\overline{DQ})}{2} = \frac{r(\overline{PB}+\overline{BC}+\overline{CQ})}{2} = S_{PBCQO}.$$

Но, $S_{PADQO} + S_{PBCQO} = S_{ABCD}$ и затоа $S_{PADQO} = S_{PBCQO} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Но, според условот на задачата важи $S_{PADQ} = S_{PBCQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, па затоа $S_{PADQ} = S_{PADQO}$, од каде што следува дека точката $O$ пришаѓа на правата $PQ$.

Слично се докажуваат случаите кога правата $a$ сече две соседни страни на четириаголникот или кога содржи едно или две темиња на четириаголникот. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

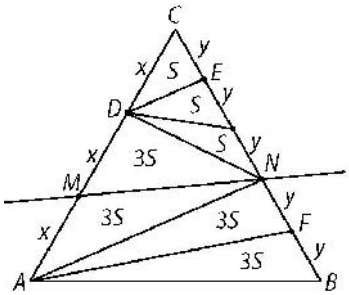
40. Конвексен четириаголник со своите дијагонали е поделен на четири триаголници чии плоштини се различни цели броеви од множеството $\{3,4,5,6,7,8,9\}$. Определи ја плоштината на овој четириаголник.

**Решение.** Нека $a,b,c,d$ се плоштините на четирите делбени триаголници на четириаголникот. Според претходната задача производот некои два броја од множеството $\{3,4,5,6,7,8,9\}$ треба да се еднакви на производот на други два броја од ова множество, те.е треба да важи $ab=cd$. Оттука следува дека ниту еден од броевите не може да е еднаков на 5 или 7. Значи, остануваат броевите 3, 4, 6, 8 и 9. Со разгледување на деливоста на можните производи лесно се добива дека единствено решение е 3, 4, 6 и 8 ($3\cdot 8=4\cdot 6$). Значи, плоштината на четириаголникот е еднаква на $3+4+6+8=21$.

41. Даден е рамностран триаголник $ABC$. На страната $AC$ е дадена точка $M$ таква што $\overline{AM}:\overline{MC}=1:2$, а на страната $BC$ е дадена точка $N$ таква што $\overline{BN}:\overline{NC}=2:3$. Определи го односот на плоштините на четриаголникот $ABNM$ и триаголникот $CMN$.

**Решение.** Од условот на задачата следува дека $\overline{AM}=x, \overline{MC}=2x$, $\overline{BN}=2y$, $\overline{NC}=3y$. Ако плоштината на триаголникот $CDE$ ја означиме со $S$, тогаш користејќи дека два триаголника со еднакви страни и соодветни висини имаат еднакви плоштини, се добива

$$P_{CND}=3P_{CED}=3S,$$
$$P_{AMN}=P_{MDN}=P_{CND}=3S,$$
$$P_{CMN}=6S,\ P_{ANC}=9S.$$




Понатаму, $P_{ANC}=3P_{CEA}$, од каде добиваме $P_{CEA}=3S$, па затоа

$$P_{ABF}=P_{AFN}=P_{CEA}=3S.$$

Значи, $P_{ABMN}=9S$. Конечно,

$$P_{ABMN}:P_{CMN}=9S:6S=3:2.$$

## 5.3. ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

1. Правилен шестаголник и правилен триаголник имаат еднакви плоштини. Која фигура има поголем периметар?

   **Решение.** Нека плоштината на правилниот шестаголник, односно правилниот триаголник е $P$. Ако $a$ е должината на страната на шестаголникот, тогаш $P=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$. Слично, ако $b$ е должината на страната на триаголникот, тогаш $P=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Значи, $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, од каде добиваме $b=a\sqrt{6}$. Според тоа, за периметарот на правилниот триаголник $L$ и периметарот на шравилниот шестаголник $L'$ добиваме е

   $$L=3b=3a\sqrt{6}>6a=L',$$

   т.е. триаголникот има поголем периметар од шестаголникот.

2. Во кружница се впишани рамностран триаголник и правилен шестаголник. Докажи дека плоштината на шестаголникот е два пати поголема од плоштината на триаголникот.

   **Решение.** Нека $a$ е страната на правилниот шестаголник и $x$ е страната на рамностраниот триаголник. Тогаш $P_6=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Страната на триаголникот е еднаква на пократката дијагонала на шестаголникот, т.е. $a=d=a\sqrt{3}$. Значи, плоштината на триаголникот е

   $$P_3=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

   Конечно,

   $$P_6=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=2\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}=2\cdot P_3.$$

3. Дадена е кружница $k(O,r)$. Околу кружницата се опишани правилен четириаголник и правилен шестаголник. Определи го односот на плоштините на овие многуаголници.

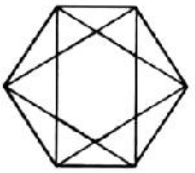
   **Решение.** Правилниот четириаголник опишан околу кружницата е квадрат со страна $a=2r$, каде $r$ е радисуот на кружницата. Според тоа, плоштината на квадратот е $P=4r^2$. Радиусот на впишаната кружница на правилниот шестаголник е $r=\frac{a'\sqrt{3}}{2}$, од каде добиваме

$a' = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Според тоа, плоштината на правилниот шестаголник е

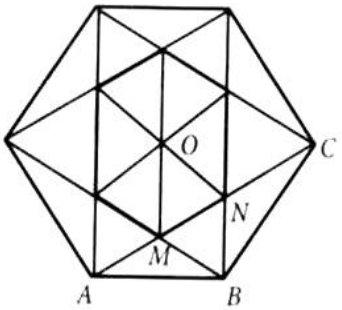
$$P' = 6 \cdot \frac{a'^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}(\frac{2r\sqrt{3}}{3})^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}r^2 .$$

Конечно, бараниот однос на плоштините е $\frac{P}{P'} = \frac{4r^2}{2\sqrt{3}r^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

4. Пресеците на пократките дијагонали на даден правилен шестаголник се темиња на нов шестаголник (види цртеж). Определи го односот на плоштините на двата шестаголници.

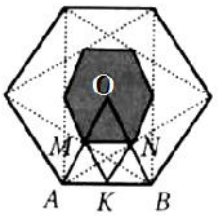


**Решение.** При ознаки како на цртежот лево триаголниците $ABM$, $BNM$ и $BCN$ имаат еднакви плоштини, а триаголниците $MNB$ и $MNO$ се складни (Докажи!).




Ако $P$ е плоштината на некој од овие триаголници, тогаш плоштината на дадениот шестаголник е еднаква на $18P$, а плоштината на шестаголникот чии темиња се пресеците на пократките дијагонали е еднаква $6P$. Оттука следува дека односот на нивните плоштини е $3:1$.

5. Средините на пократките дијагонали на правилен шестаголник се темиња на нов шестаголник (види цртеж). Определи го односот на плоштините на двата шестаголници.




**Решение.** Нека $O$ е центарот на дадениот шестаголник, $K$ е средината на страната $AB$ на дадениот шестаголник и $M$ и $N$ се средините на $OA$ и $OB$ соодветно. Триаголниците $AKM, KBN, NMK$ и $MNO$ се складни (Докажи!). Дадениот шестаголник се состои од 24 такви четириаголници, а новиот шестаголник се состои од 6 такви шестаголници. Според тоа, односот на нивните плоштини е $4:1$.

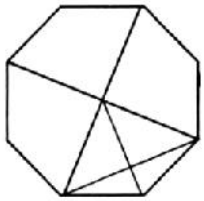
6. Во правоаголник чија една страна е $a\,cm$ е впишан правилен шестаголник чии темиња припаѓаат на страните на правоаголникот. Определи ја плоштината на овој шестаголник.

**Решение.** Нека страната на шестаголникот е $x\,cm$. Можни се два случаја и тоа:

1) Дадена е поголемата страна на правоаолникот, при што таа е еднаква на големата дјагонала на шестаголникот. Затоа $a = 2x$, т.е. $x = \frac{a}{2}$. Бидејќи плоштината на правилен шестаголник со страна $x\,cm$ е $P = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}\,cm^2$, добиваме $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}\,cm^2$.
2) Дадена е помалата страна на правоаголникот, при што таа е еднаква на двократната висина на карактеристичниот триаголник на шестаголникот, т.е. $a = x\sqrt{3}$. Значи, $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Бидејќи плоштината на правилен шестаголник со страна $x\,cm$ е $P = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}\,cm^2$, добиваме $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\,cm^2$.

7. Докажи дека плоштината на правилен осумаголник е еднаква на производот на должините на неговата најдолга и најкратка дијагонала.

**Решение.** Нека $d'$ е најкратката и $d''$ е најдолгата дијагонала на осмуаголникот. Осумаголникот ќе го поделиме на четири складни делтоиди со плоштина $P'$ (цртеж десно). Дијагоналите на овие делтоиди се $d'$ и $\frac{d''}{2}$. Плоштината на осумаголникот е

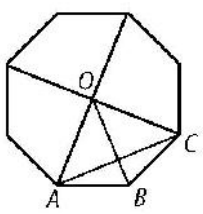


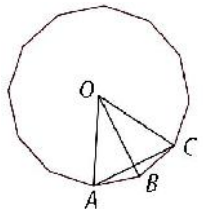
$$P = 4P' = 4\frac{d'\frac{d''}{2}}{2} = d'd'',$$

што и требаше да се докаже.

8. Во кружница $k(O,r)$ се впишани правилен осумаголник и правилен дванаесетаголник. Определи го односот на плоштините на овие многуаголници.

**Решение.** Правилниот осумаголник го делиме на четири складни делтоиди (цртеж долу лево). Помалата дијагонала на секој од овие делтоиди е еднаква на радиусот на кружницата, т.е. $d' = r$, а поголемата дијагонала е еднаква на хипотенузата на рамнокракиот правоаголен триаголник $ACO$, т.е. $d'' = r\sqrt{2}$. Значи, плоштината на правилниот осумаголник е $P_8 = 4\frac{d'd''}{2} = 2r^2\sqrt{2}$.



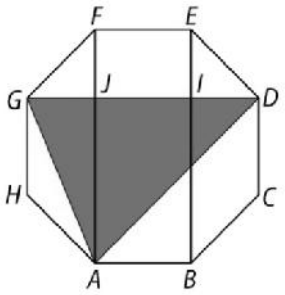




Правилниот дванаесетаголник го делиме на шест делтоиди. Бидејќи централниот агол на дванаесетаголникот е еднаков на $30^\circ$, аголот при темето $O$ на рамнокракиот триаголник $ACO$ е еднаков на $60^\circ$, па затоа тој е рамностран. Според тоа, дијагоналите на делтоидот $ABCO$ се $d_1 = d_2 = r$. Значи, плоштината на правилниот дванаесетаголник е $P_{12} = 6 \cdot \frac{d_1 d_2}{2} = 3r^2$.

Конечно, бараниот однос на плоштините на осумагилникот и дванаесетаголникот е $P_8 : P_{12} = \frac{2r^2\sqrt{2}}{3r^2} = 2\sqrt{2} : 3$.

9. Даден е правилен осумголник $ABCDEFGH$ со должина на страна $2\ cm$. Определи ја плоштината на триаголникот $ADG$.

**Решение.** Нека $J$ е пресечната точка на отсечките $DG$ и $AF$ (цртеж десно). Плоштината на триаголникот $ADG$ е $P = \frac{\overline{DG}\cdot\overline{AJ}}{2}$. Триаголникот $GJF$ е рамнокрак правоаголен чија хипотенуза е $\overline{FG} = 2\ cm$, па затоа $\overline{GJ} = \overline{JF} = \sqrt{2}\ cm$. Слично, $\overline{ID} = \overline{IE} = \sqrt{2}\ cm$. Понатаму, важи на потополно ист начин наоѓаме дека $\overline{JI} = \overline{FE} = 2\ cm$, па затоа




$$\overline{DG} = (2 + 2\sqrt{2})\ cm \text{ и } \overline{AJ} = \overline{DJ} = (2 + \sqrt{2})\ cm.$$

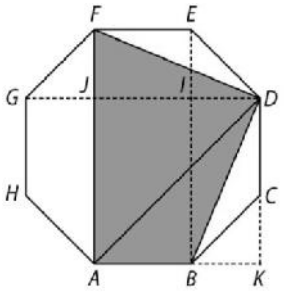
Конечно,

$$P = \frac{(2+2\sqrt{2})\cdot(2+2\sqrt{2})}{2} = (4 + 3\sqrt{2})\ cm^2.$$

10. Даден е правилен осумаголник $ABCDEFGH$ со должина на страна $a = 2\ cm$. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABDF$.

**Решение.** Четириаголникот $ABDF$ да го поделиме на триаголниците $ABD$ и $ADF$ и нека $K$ е подножјето на нормалата од точката $D$ на

правата $AB$, а $I$ и $J$ се пресечните точки на правата $DG$ со правите $BE$ и $AF$, соодветно (види цртеж).

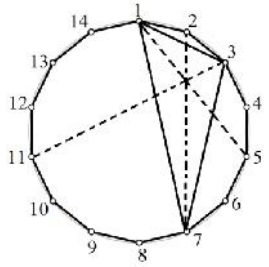



Триаголниците $GJF$, $DIE$ и $BKC$ се рамнокраки правоаголни со хипотенузи $a = 2\,cm$, па затоа нивните катети се $\sqrt{a} = \sqrt{2}\,cm$. Сега е јасно дека $\overline{AB} = 2\,cm$, $\overline{AF} = 2(1+\sqrt{2})\,cm$, $\overline{DJ} = \overline{DK} = (2+\sqrt{2})\,cm$. Според тоа,

$$\begin{aligned} P_{ABDF} &= P_{ABD} + P_{ADF} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{DK}}{2} + \frac{\overline{AF}\cdot\overline{DJ}}{2} \\ &= \frac{2\cdot(2+\sqrt{2})}{2} + \frac{2\cdot(1+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2})}{2} \\ &= (2+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2}) \\ &= (2+\sqrt{2})^2 = (6+4\sqrt{2})\,cm^2. \end{aligned}$$

11. Докажи дека дијагоналите $A_1A_5$, $A_2A_7$ и $A_3A_{11}$ на правилниот четиринаесетаголник $A_1A_2A_3...A_{12}A_{13}A_{14}$ се сечат во една точка.

**Решение.** Нека $k$ е опишаната кружница околу дадениот правилен четиринаесетаголник (цртеж десно). Лесно се гледа дека $A_1A_5$, $A_3A_{11}$ и $A_7A_2$ се симетрали на аглите на триаголникот $A_1A_3A_7$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.




12. Нека $A_1A_2...A_{15}$ е правилен петнаесетаголник впишан во кружница со центар $O$. Точката $L$ е средина на лакот $A_3A_4$, точката $M$ е средина на страната $A_1A_2$ и $N$ е средина на отсечката $OL$. Докажи дека $\measuredangle OMN = 30^\circ$.

**Решение.** Триаголникот $OA_1A_2$ е рамнокрак, па затоа $OM \perp A_1A_2$. Бидејќи централниот агол на правилниот петнаесетаголник е $24^\circ$, дбиваме $\measuredangle A_1OL = \measuredangle A_1OA_2 + \measuredangle A_2OA_3 + \measuredangle A_3OL = 60^\circ$, од што следува дека триаголникот $OA_1L$ е рамностран. Затоа $A_1N \perp OL$ и $\measuredangle OA_1N = 30^\circ$. Четириаголникот $OA_1MN$ е тетивен бидејќи $\measuredangle ONA_1 = \measuredangle OMA_1 = 90^\circ$. Затоа $\measuredangle OMN = \measuredangle OA_1N = 30^\circ$, како агли над лакот $\overset{\frown}{ON}$.

## 5.4. РАЗНИ ЗАДАЧИ

1. Колку страни има конвексен многуаголник кај кој сите агли се еднакви, ако збирот на сите негови надворешни агли со еден внатрешен агол е еднаков на $468^\circ$?

   **Решение.** Збирот на надворешните агли на конвексен многуаголник е еднаков на $360^\circ$. Значи, внатрешниот агол на многуаголникот е еднаков на $468^\circ - 360^\circ = 108^\circ$. Сега, од формулата за збирот на аглите на $n-$аголник следува дека $n = 5$.

2. Колку страни има конвескен многуаголник кај кој збирот на внатрешните агли со еден надворешен агол е еднаков на $2250^\circ$?

   **Решение.** Збирот на внатрешните агли на конвексен $n-$аголник е $(n-2)\cdot 180^\circ$. Сега, од условот на задачаа следува

   $$(n-2)\cdot 180^\circ + x = 2250^\circ .$$

   Бидејќи $x < 180^\circ$, добиваме $x = 90^\circ$ и $n = 14$.

3. Ако бројот на страните на еден конвексен многуаголник се зголеми два пати, тогаш бројот на неговите дијагонали се зголемува пет пати. Определи го збирот на внатрешните агли на овој многуаголник.

   **Решение.** Ако бројот на страните на многуаголникот е $n$, тогаш $\frac{2n(2n-3)}{2} = 5\frac{n(n-3)}{2}$, од каде добиваме $2(2n-3) = 5(n-3)$, т.е. $n = 9$. Збирот на аглите на овој многуаголник е:

   $$S = (9-2)\cdot 180^\circ = 7\cdot 180^\circ = 1260^\circ .$$

4. Ако бројот на дијагоналите на многуаголникот се зголеми за 235 се добива бројот на дијагоналите на многуаголникот кој има за 10 повеќе страни од претходниот многуаголник. Кои се тие многуаголници?

   **Решение.** Од условот на задачата следува

   $$\frac{n(n-3)}{2} + 235 = \frac{(n+10)(n+7)}{2}.$$

   Од последната равенка добиваме $n^2 - 3n + 470 = n^2 + 17n + 70$, односно $n = 20$. Значи, тоа се дваесетаголник и триесетаголник.

5. Даден е многуаголник чиј вкупен број на дијагонали и страни е 78. Пресметај го збирот на внатрешните агли на овој многуаголник.

**Решение.** Бројот на дијагоналите на $n$-аголникот е $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$, па затоа $\frac{n(n-3)}{2} + n = 78$, од каде добиваме $n(n-1) = 156$. Но, $156 = 12 \cdot 13$, па од последното равенство следува $n = 13$.

6. Дали постои $n-$аголник кај кој бројот на неговите дијагонали е за 2010 поголем од бројот на неговите страни?

**Решение.** Бројот на дијагоналите на $n-$аголникот е $\frac{n(n-3)}{2}$, што значи дека треба да видиме дали во множеството природни броеви има решение равенката $\frac{n(n-3)}{2} = n + 2010$. Последната равенка е еквивалентна со равенката $n^2 - 5n = 4200$,т.е. со равенката $n(n-5) = 4200$. Сега, бидејќи $4200 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ заклучуваме дека 4200 не може да се претстави како производ на два броја чија разлика е 5, бидејќи најмалата разлика е еднаква на $7 = 67 - 60$, при што $4200 = 60 \cdot 67$.

7. Правилен многуаголник со $n$ страни има 15 дијагонали помалку од правилен многуаголник со $n+2$ страни. За колку е внатрешниот агол на првиот многуаголник помал од внатрешниот агол на вториот многуаголник?

**Решение.** Од условот на задачата следува $\frac{n(n-3)}{2} + 15 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$, т.е. $n^2 - 3n + 30 = n^2 + n - 2$, од каде добиваме $n = 8$. Внатрешниот агол на правилниот усомаголник е еднаквн на $180^\circ - \frac{360^\circ}{8} = 135^\circ$, а внатрешниот агол на правилниот десетаголник е еднаков на $180^\circ - \frac{360^\circ}{10} = 144^\circ$.

Според тоа, внатрешниот агол на првиот многуаголник е за $9^\circ$ помал од внатрешниот агол на вториот многуаголник.

8. Дали постои конвексен многуаголник кај кој бројот на дијагоналите е еднаков на точен квадрат на некој природен бро?

**Решение.** Ако постои таков многуаголник, тогаш треба да важи $\frac{n(n-3)}{2} = k^2$ за некој природен број $k$. Значи, $n(n-3) = 2k^2$. Ако

$n=2k$ и $n-3=k$, тогаш $k=3$ и $n=6$. Според тоа, конвексниот шестаголник е еден многуаголник со такво својство. Шестаголникот има $\frac{6\cdot(6-3)}{2}=9=3^2$ дијагонали.

9. Два многуаголници вкупно имаат 119 дијагонали. Бројот на страните на едниот од двата многуаголници е за 1 поголем од бројот на страните на другиот многуаголник. Колку страни има секој многуаголник?
**Решение.** Нека бројот на страните на дадените многуаголници е $x$ и $x+1$. Тогаш бројот на дијагоналите е еднаков на $\frac{x(x-3)}{2}$ и $\frac{(x+1)(x-2)}{2}$, па затоа $\frac{x(x-3)}{2}+\frac{(x+1)(x-2)}{2}=119$, од што последователно ги добиваме еквивалентните равенки

$$\begin{aligned}
&2x^2-4x-2=2\cdot 119,\\
&x^2-2x-120=0,\\
&x^2-12x+10x-120=0,\\
&x(x-12)+x(x-12)=0,\\
&(x-12)(x+10)=0.
\end{aligned}$$

Од последната равенка следува $x=12$ или $x=-10$, па како $x>0$ заклучуваме дека $x=12$. Според тоа, многуаголниците имаат 12 и 13 страни.

10. Определи го бројот на паровите природни броеви $m$ и $n$ такви што бројот на дијагоналите на $m$ – аголникот е поголем од бројот на дијагоналите на $n$ – аголникот за 2007.
**Решение.** Од условот на задачата последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&\frac{m(m-3)}{2}-\frac{n(n-3)}{2}=2\cdot 2007,\\
&m^2-3m-n^2+3n=2\cdot 2007,\\
&(m-n)(m+n)-3(m-n)=2\cdot 2007,\\
&(m-n)(m+n-3)=2\cdot 3^2\cdot 223.
\end{aligned}$$

Според тоа, имаме точно шест парови со саканото својство:

| $m-n$ | 1 | 2 | 3 | 6 | 9 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m+n-3$ | 4014 | 2007 | 1338 | 669 | 446 | 223 |
| $m$ | 2009 | 1006 | 672 | 339 | 229 | 122 |
| $n$ | 2008 | 1004 | 669 | 333 | 220 | 104 |

11. Многуаголник кој има $n$ страни има $kn, (k \in \mathbb{N})$ дијагонали. Докажи дека $n$ е непарен број.

**Решение.** Ако многуаголникот има $n$ страни, тогаш има $\frac{n(n-3)}{2}$ дијагонали. Според тоа, $\frac{n(n-3)}{2} = kn$, од каде добиваме $n-3=2k$, односно $n=2k+3$. Конелно, тврдењето следува од тоа што за секој $k \in \mathbb{N}$ бројот од видот $2k+3$ е непарен број.

12. Нека $A_1A_2...A_n$ е правилен $n-$аголник со стана $a=10\,cm$. Пресметај го неговиот периметар ако $\measuredangle A_5A_1A_2 = 12^\circ$.

**Решение.** Нека $O$ е центарот на $n-$аголникот. Бидејќи $\measuredangle A_5A_1A_2$ е периферискиагол на лакот над кој $\measuredangle A_5OA_2$ е централен агол, следува дека

$$\measuredangle A_5OA_2 = 2\measuredangle A_5A_1A_2 = 24^\circ.$$

Но,

$$\measuredangle A_2OA_3 = \measuredangle A_3OA_4 = \measuredangle A_4OA_5 = ¨$$

е централниот агол на многуаголникот, па затоа важи $\measuredangle A_5OA_2 = 3¨$. Според тоа, $3¨ = 24^\circ$, т.е. $¨ = 8^\circ$. Понатаму, од $n¨ = 360^\circ$ следува $n = \frac{360^\circ}{8^\circ} = 45$, па затоа $L = 45 \cdot 10 = 450\,cm$.

13. Колкав е периферискиот агол над кружниот лак чија должина е 22% од должината на кружната линија?

**Решение.** Централниот агол кој соодветствува на даденот кружен лак е еднаков на $360^\circ \cdot \frac{22}{100} = 79,2^\circ = 79^\circ 12'$. Периферискиот агол е еднаков на половина од соодветниот централен агол, т.е. е еднаков на $39^\circ 36'$.

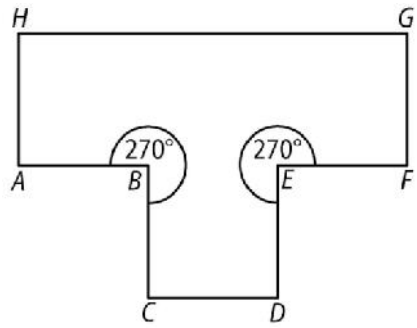
14. Колкав дел од кружницата (во проценти) припаѓа на периферискиот агол еднаков на $32^\circ 24'$?

**Решение.** Даденият агол е еднаков на $32 + \frac{24}{60} = 32 + 0,4 = 32,4^\circ$. Според тоа, соодветниот централен агол е еднаков на $2 \cdot 32,4^\circ = 64,8^\circ$. Бидејќи на кружницата соодветствува централен агол од $360^\circ$, што е

100% од кружницата, од пропорцијата $360^\circ : 100\% = 64{,}8^\circ : x$, добиваме $x = 18\%$.

15. Во осумаголникот $ABCDEFGH$ страната $GH$ е три пати подолга од сите преостанати страни, шест негови агли се по $90^\circ$ и два се по $270^\circ$. Ако плоштината на четириаголникот $AFGH$ е еднаква на $15\,cm^2$, колкава е плоштината на овој осумаголник?

**Решение.** Осумаголникот има седум еднакви страни, а како има два агли кои се еднакви на $270^\circ$ и шест агли кои се еднакви на $90^\circ$, тој не е конвексен и изгледа како на цртежот.

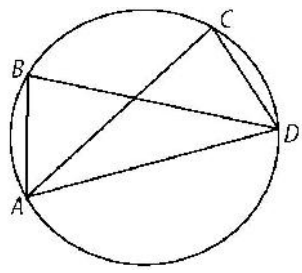



Ако седумте еднакви страни ги означиме со $a$, а страната $GH$ со $3a$, тогаш од плоштина на четириаголникот $AFGH$ добиваме $3a^2 = 15\,cm^2$, односно $a^2 = 5\,cm^2$. Конечно, плоштината на осумаголникот е еднаква на $4a^2 = 20\,cm^2$.

16. На кружницата $k$ редоследно во насока на движењето на стрелките на часовникот се дадени точките $A, B, C, D$ така што важи $\overline{AB} = \overline{CD}$. Докажи дека $\overline{AC} = \overline{BD}$.

**Решение.** Имаме, $\overline{AB} = \overline{CD}$ и бидејќи над еднакви тетиви соодветствуваат еднакви периферискиагли, добиваме

$$\measuredangle ADB = \measuredangle CAD = \sim \ .$$




Понатаму,

$$\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = \quad ,$$

како периферсики агли над тетивата $AD$. Според тоа,

$$\measuredangle ADC = \measuredangle DAB = 180^\circ - \sim - \quad ,$$

па од признкот АСА следува дека триаголниците $ABD$ и $ACD$ се складни ($\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$, $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\measuredangle ADC = \measuredangle DAB$). Од оваа складност следува $\overline{AC} = \overline{BD}$.

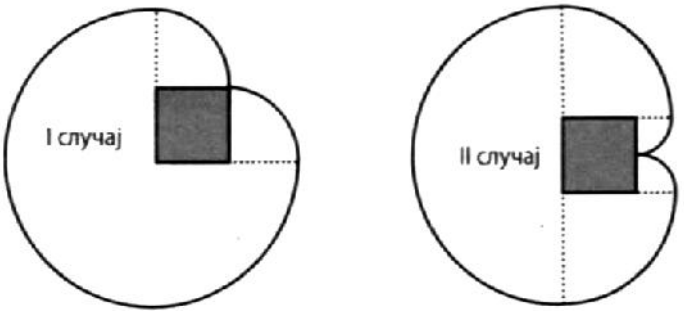
17. Ангел на дедо му на село му помагал во работата. Козјиот обор е во квадратна форма со должина на страна $4\,m$. Ангел врзал коза со конец од надворешнатаа страна на оборот точно во точка која е теме на тој квадрат. Должината на конецот е $8\,m$. Колкава е плоштината на површината од која козата може да ја испаси тревата? Дали таа плоштина ќе биде поголема ако Ангел козата ја врзе на средината на една од страните на квадратот?

**Решение.** Во првиот случај козата е врзана во долното лево теме и притоа плоштината која и е достапна за пасење е еднаква на

$$\tfrac{3}{4}\cdot 8^2\text{®} + \tfrac{1}{2}\cdot 4^2\text{®} = 56\text{®}\ .$$

Во вториот случај козата е врзана во средината на левата ветикална страна и притоа плоштината која и е достапна за пасење е еднаква на

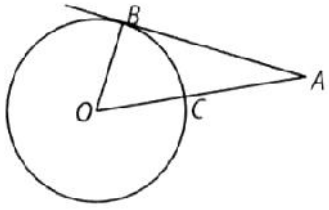
$$\tfrac{1}{2}\cdot(8^2\text{®} + 4^2\text{®} + 2^2\text{®}) = 52\text{®}\ .$$




Значи, за козата е поповолен првиот начин на врзување.

18. Должината на тангентата од точката $A$ на кружницата $k(O,r)$ е еднаква на $8\,cm$. Ако најкраткото растојание од точката $A$ до кружницата $k$ е еднакво на $4\,cm$, определи ги периметарот и плоштината на кругот $k$.

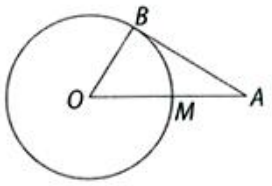
**Решение.** При ознаки како на цртежот десно триаголникот $ABO$ е правоаголен со катети $\overline{AB} = 8\,cm$ и $\overline{OB} = r$. Понатаму, најкраткото растојание од точката $A$ до кружницата $k$ е растојанието од точката $A$ до пресечната точка меѓу отсечката $AO$ и кружницата $k$. Значи, $\overline{AC} = 4\,cm$. Според тоа, $\overline{AO} = \overline{AC} + \overline{CO} = 4 + r$. Сега, од Питагоровата теорема следува



$\overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AO}^2$, односно $8^2 + r^2 = (4+r)^2$. Од последната равенка добиваме $r = 6\,cm$. Според тоа, периметарот на кругот е $L = 2\pi r = 12\pi\,cm$, а неговата плоштина е $P = \pi r^2 = 36\pi\ cm^2$.

19. Должината на тангентната отсечка повлечена од точката $A$ на кружницата $k(O, 5\,cm)$ е еднаква на $12\,cm$. Определи го најкраткото растојание од точката до кружницата.

**Решение.** Нека тангентата ја допира кружницата во точката $B$. Тогаш $OB$ и $AB$ се заемно нормални, т.е. триаголникот $OAB$ е правоаголен. Од Питагоровата теорема следува

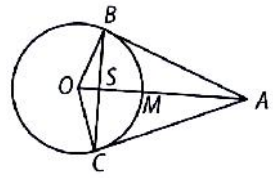



$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,cm.$$

Ако $M$ е пресечната точка на отсечката $AO$ и кружницата $k$, тогаш најкраткото растојание од точката $A$ до кружницата е должината на отсечката $AM$, односно $\overline{AM} = \overline{AO} - \overline{OM} = 13 - 5 = 8\,cm$.

20. Од точката $A$ се повлечени тангентите на кружницата $k(O, 9\,cm)$, кои кружницата ја допираат во точките $B$ и $C$. Ако должината на тетивата $BC$ е $14{,}4\,cm$, определи го најкраткото растојание од точката $A$ до кружницата $k$.

**Решение.** Триаголникот $OAB$ е правоаголен $(OA \perp AB)$. Точката $S$ е средина на тетивата $BC$, па затоа $\overline{BS} = 7{,}2\,cm$. Понатаму,

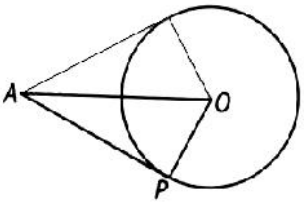



$$P_{\triangle OAB} = \frac{\overline{OB}\cdot\overline{AB}}{2} \text{ и } P_{\triangle OAB} = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{BS}}{2},$$

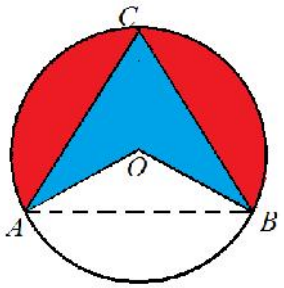
па затоа $\frac{\overline{OB}\cdot\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{BS}}{2}$, од каде добиваме $\overline{OB}\cdot\overline{AB} = \overline{OA}\cdot\overline{BS}$, односно $9\cdot\overline{AB} = 7{,}2\cdot\overline{OA}$, па затоа $\overline{AB} = 0{,}8\cdot\overline{OA}$. Сега, од Питагоровата теорема следува $\overline{OA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2$, па затоа $\overline{OA}^2 = (0{,}8\overline{OA})^2 + 9^2$, од каде добиваме $0{,}36\overline{OA}^2 = 81$, т.е. $\overline{OA} = 15\,cm.$ Конечно, најкраткото растојание од точката $A$ до кружницата $k$ е $\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM} = 15 - 9 = 6\,cm.$

21. Аголот меѓу тангентните отсечки повлечени од точката $A$ на кружницата $k$ е еднаков на $60^\circ$. Ако должината на тангентната отсечка од точката $A$ на кружницата $k$ е $6\,cm$, определи ги периметарот и плоштината на кругот $k$.

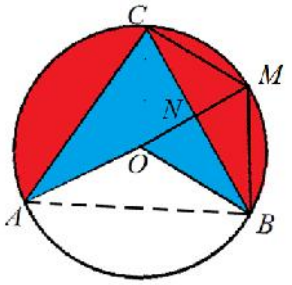
**Решение.** Двата правоаголни триаголника,чии катети се еднакви на тангентните отсечки и на радиусот на кружницата се скалдни. Оттука следува дека $\measuredangle PAO = 30^\circ$. Според тоа, триаголникот $AOP$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{AO} = 2\overline{OP}$. Сега, од Питагоровата теорема следува $r = \overline{OP} = 2\sqrt{3}\,cm$, па затоа $L = 4\sqrt{3}\pi\,cm$ и $P = 12\pi\,cm^2$.




22. Нека $ABC$ е рамностран триаголник околу кој е опишана кружница со центар $O$ (цртеж десно). Спореди ги плоштините на деловите на кругот обоени со црвена, сина и бела боја.




**Решение.** Плоштината на црвениот дел на кругот се состои од плоштината на два кружни отсечоци, што значи дека $P_c = 2P_o$. Плоштината на синиот дел од кругот се состои од плоштината на два триаголника (триаголниците $AOC$ и $BOC$ се складни) што значи дека $P_s = 2P_t$. Плоштината на белиот дел од кругот се состои од плоштината на еден кружен исечок и еден триаголник, т.е. $P_b = P_o + P_t$. Триаголникот $BCO$ е рамнокрак со агол при врвот $360^\circ : 3 = 120^\circ$, па затоа агол при основата е еднаков на $(180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$.

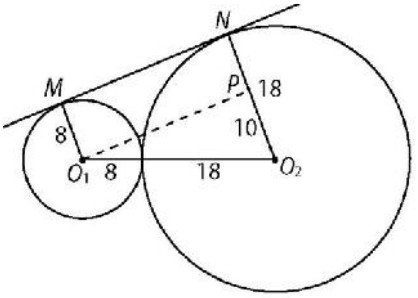



Нека $OM \perp BC$ и $OM \cap BC = N$. Тогаш триаголникот $OBM$ е рамностран ($\overline{OB} = \overline{OM}$ и $\measuredangle BOM = 60^\circ$) и како $\measuredangle OBN = 30^\circ$ заклучуваме дека $BN$ е висина во триаголникот $OBM$ па затоа триаголниците $OBN$ и $MBN$ се складни, што значи дека триаголниците $OBC$ и $MBC$ се складни. Според тоа, $P_o > P_t$. Оттука следува дека

$$2P_o > P_o + P_t > 2P_t \text{, т.е. } P_c > P_b > P_s .$$

23. Кружниците $k_1$ и $k_2$ чии радиуси се еднакви на $8\,cm$ и $18\,cm$ се допираат надворешно. Една заедничка тангента на дадените кржници ги допира кружниците во различни точки $M$ и $N$. Определи ја должината на отсечката $MN$.

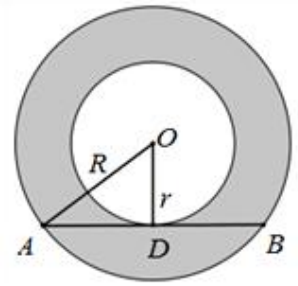
**Решение.** Нека заедничката тангента ја допира помалата кружница во точката $M$, а поголемата во точката $N$ (цртеж десно). Нека точката $P$ е подножјето на нормалата повлечена од центарот $O_1$ на радиусот $O_2N$. Бидејќи $\overline{O_1P} = \overline{MN}$, од Питагоровата теорема следува




$$\overline{MN}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_2P}^2 = 26^2 - 10^2 = 576 \text{, т.е. } \overline{MN} = 24\,cm .$$

24. Нека се дадени две концентрични кружници и нека тетива на поголемата кружница што ја допира помалата кружница има должина $2\,cm$. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен!

**Решение.** Нека со точката $O$ го означиме центарот на дадените кружници, со $AB$ дадената тетива и со $D$ ја означиме средината на $AB$.



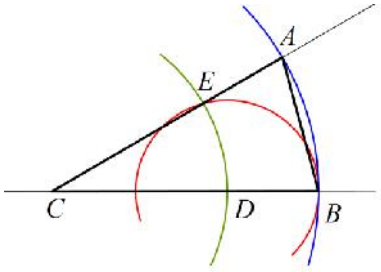

Радиусите на кружниците се $R = \overline{OA}$ на поголемата и $r = \overline{OD}$ на помалата. Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle ADO$ добиваме $R^2 - r^2 = \overline{AD}^2 = 1$.

Плоштината на прстенот е

$$P = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi = 1 \cdot \pi = \pi\ cm^2 .$$

25. Дадени се колинеарни точки $C, B$ и $D$, при што точката $D$ е меѓу точките $C$ и $B$. Конструирај рамнокрак триаголник $ABC$ со теме при врвот $C$, теме на основата $B$, кај кој $AD$ е симетрала на аголот при основата.

**Решение.** *Анализа*. Нека претпоставиме дека бараниот триаголник е конструиран и нека $E$ е точка на кракот $AC$ таква што $BE$ е симетрала на аголот кај темето $B$. Сега $\overline{ED}=\overline{DB}$, па затоа точката $E$ е на кружницата $k(D,\overline{DB})$. Од друга страна $\overline{CE}=\overline{CD}$ (бидејќи $\overline{AE}=\overline{DB}$), па затоа точката $E$ е на кружницата $k(C,\overline{CD})$. Третото теме е на правата $CE$ при што важи $\overline{CA}=\overline{CB}$.



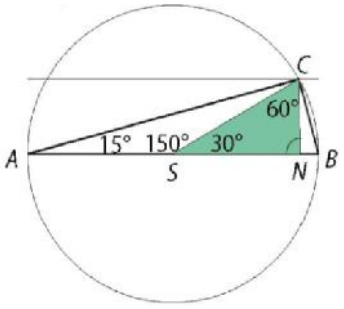

*Конструкција*. Конструираме кружница $k'=k(D,\overline{DB})$ и кружница $k''=k(C,\overline{CD})$. Во пресекот на кружниците $k'$ и $k''$ ја наоѓаме точката $E$. Повлекуваме права $a$ низ точките $C$ и $E$ и конструираме кружница $k'''=k(C,\overline{CB})$. Во пресекот на $a$ и $k'''$ ја наоѓаме точката $A$.

*Дпказ*. Непосредно следува од анализата и коснтрукцијата.

*Дискусија*. Бидејќи триаголникот $CED$ е рамнокрак со врв $C$, решение постои ако $\overline{CD}>\frac{\overline{DE}}{2}$, т.е. $\overline{CD}>\frac{\overline{DB}}{2}$. Навистина,во тој случај кружниците $k'$ и $k''$ се сечат во две точки, па имаме две решенија. Ако $\overline{CD}<\frac{\overline{DB}}{2}$, тогаш кружниците $k'$ и $k''$ не се сечат, па во тој случај реѓение не постои. Во граничниот случај $\overline{CD}=\frac{\overline{DB}}{2}$ бараниот триаголник се дегенерира во отсечка.

26. Конструирај правоаголен триаголник со хипотенуза $12\,cm$ и висина која соодветствува на хипотенузата $3\,cm$. Определи ги аглите на овој триаголник.

**Решение.** Конструираме отсечка $AB$ со должина $12\,cm$ и над неа конструираме кружница чиј центар е средината $S$ на отсечката $AB$. Потоа конструираме права која е паралелна на $AB$ и е на растојание $3\,cm$ од $AB$. Нека $C$ е едната од двете пресечни точки на правата и кружницата. Триаголникот

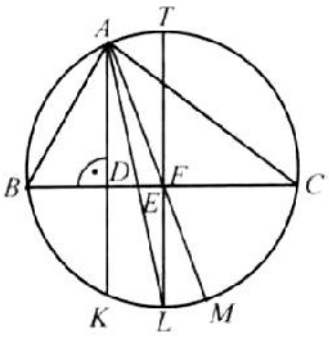


$ABC$ е бараниот триаголник. На читателот за вежба му препуштаме да ги реализира четирите етапи: анализа, конструкција, доказ и дискусија за решавање на конструк-тивна задача.

Да ги определиме аглите на триаголникот $ABC$. Нека $CN$ е висината повлечена кон хипотенузата. Тогаш $\overline{CN} = 3\,cm$ и $\overline{SC} = 6\,cm$, што значи дека триаголникот $SCN$ е половина од рамностран триаголник. Според тоа, $\measuredangle CSN = 30^\circ$, па затоа $\measuredangle CSA = 150^\circ$. Понатаму, триаголникот $CAS$ е рамнокрак, и како аголот при врвот е $\measuredangle CSA = 150^\circ$, добиваме $\measuredangle SAC = 15^\circ$. Конечно, аглите на триаголникот $ABC$ се еднакви на $15^\circ, 75^\circ$ и $90^\circ$.

27. Нека се $AD, AE, AF$ висината, симетралата на аголот и тежишната линија повлечени од темето $A$ на триаголникот $ABC$ ($D, E, F$ припаѓаат на страната $BC$). Продолженијата на висината $AD$, симетралата $AE$ и тежишната линија $AF$ ја сечат опишаната кружница во точките $K, L$ и $M$, соодветно. Конструирај го триаголникот $ABC$ ако се дадени точките $K, L$ и $M$ со својата положба.

**Решение.** *Анализа*. Нека точките $K, L, M$ ги задоволуваат условите од формулацијата на задачата. Овие три точки определуваа кружница чиј дијаметар $MT$ минува низ точката $F$ (види цртеж). Бидејќи $LT$ е симетрала на страната $BC$ и $AK \perp BC$, добиваме дека $AK \parallel LT$.

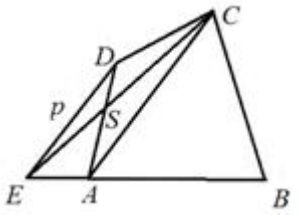



*Конструкција*. Конструираме кружница $k$ која минува низ точките $K, L$ и $M$. Низ точката $K$ конструираме права паралелна со $LO$, каде $O$ е центарот на кружницата $k$. Нека $A$ е пресекот на таа права со кружницата $k$. Точката $A$ е едно теме на бараниот триаголник. Во пресекот на $AM$ и $LO$ се наоѓа точката $F$. Сега темињата $B$ и $C$ на бараниот триаголник се добиваат како пресечни точки на кружницата $k$ и нормалата на правата $LO$ во точката $F$.

*Доказот и дискусијата* ги оставаме на читателот за вежба.

28. Даден е четириаголник $ABCD$. Конструирај триаголник чија плоштина е еднаква на плоштината на дадениот четириаголник.

**Решение.** Низ точката $D$ повлекуваме права паралелна на $AC$ и нека $E$ е пресечната точка на оваа права со правата $AB$. Тогаш четириаголникот $ACDE$ е трапез, па затоа $P_{CSD} = P_{ASE}$. Затоа важи



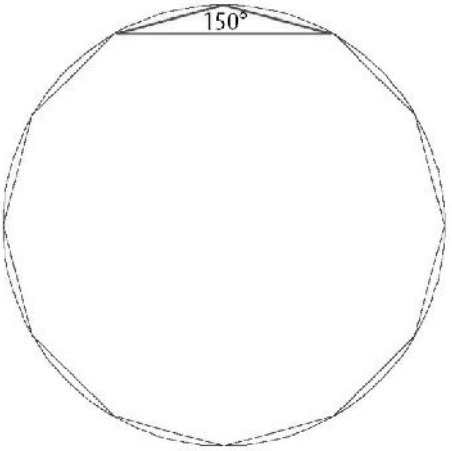

$$P_{ABCD} = P_{ABCS} + P_{CSD}$$
$$= P_{ABCS} + P_{EAS} = P_{EBC},$$

т.е. триаголникот $EBC$ е бараниот триаголник.

29. Конструирај правилен многуаголник чии три соседни темиња се темиња на рамнокрак триаголник со агли при основата еднакви на $15^\circ$.

**Решение.** Аголот при врвот на рамнокракиот триаголник е еднаков на

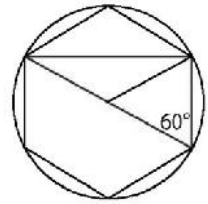
$$180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ.$$




Неговиот надворешен агол е еднаков на $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Збирот на надворешните агли на бараниот правилен $n-$аголник е еднаков на $360^\circ$ и сите се меѓусебно еднакви. Според тоа, станува збор за $360^\circ : 30^\circ = 12$ аголник. Конструираме кружница $k$ и на неа конструираме тетива еднаква на радиусот. Ја конструираме симетралата на тетивата и во пресекот со помалиот лак на кружницата го добиваме третото теме на рамнокракиот триаголник со агли при основата еднакви на $15^\circ$. Сега темињата на дванаесетаголникот ги добиваме со пренесување на кракот на добиениот триаголник на кружницата $k$.

30. Даден е правоаголен триаголник чиј еден остар агол е $60^\circ$. Конструирај правилен многуаголник, чии три темиња се темињата на дадениот триаголник и кој има најмал можен број страни.

**Решение.** Другиот остар агол на правоаголниот триаголник е $30^\circ$. Ја




конструираме опишаната кружница околу триаголникот, чиј центар е на хипотенузата на триаголникот. За да добиеме многуаголник со најмал можен број страни, треба да провериме дали е можно две темиња на триаголникот да се соседни темиња на многуаголникот. Јасно, ова е можно за темињата кај правиот агол и кај аголот од $60^\circ$. Ако го поврземе темето на правиот агол со средината на хипотенузата, добиваме централен агол од $60^\circ$. Овој централен агол всушност е централен агол на правилниот шестаголник чија страна е пократката катетат на правоаголниот триаголник. Сега лесно се конструира овој шестаголник.

# 6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{THREE} + \overline{FIVE} = \overline{EIGHT} .$$

**Решение.** Цифрата $E$ не може да е помала од 5, бидејќи тогаш $E + E$ ќе биде едноцифрен број $T$ поголем од $E$. Но, $T$ е прва цифра на првиот собирок $\overline{THREE}$, па тој би бил поголем од збирот $\overline{EIGHT}$, што не е можно. Не може да е $E = 5$, бидејќи тогаш $T = 0$, па првиот собирок би почнувал со 0. Понатаму, $E$ не може да е ниту една од цифрите 6, 7, 8, бидејќи тогаш цифрата $T$ соодветно би била 2, 4, 6, т.е. би била за 2 помала од цифрата на збирот, што не е можно. Конечно, $E$ не е ниту 9, бидејќи по собирање на цифрите ќе имаме пренос 1, па при собирање на цифрите на десетките добиваме дека $V = H$. Според тоа, бројниот ребус нема решение.

2. Природните броеви кои се запишуваат само со цифрите 0 и 5 се наредени во низа по големина. Кој е 64-тиот број во таа низа?

**Решение.** Првата цифра на ваквите броеви е 5, додека на сите преостанати можни места може да се цифрите 0 или 5. Бидејќи бројот на таквите едноцифрени броеви е 1, на двоцифрените е $1 \cdot 2 = 2$, на трицифрените е $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ и воопшто на $n-$цифрените е $2^{n-1}$, од тоа што $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$, добиваме дека бараниот 64-ти број по големина е првиот седумцифрен број од даденият вид, а тоа е бројот 5000000.

3. Природните броеви кои се запишуваат само со цифрите кои се деливи со 3 се подредени во низа во растечки редослед. Кој е 256-тиот број во таа низа?

**Решение.** Овие броеви се запишани само со цифрите 0, 3, 6 и 9. Бидејќи првата цифра не може да е 0, добиваме дека едноцифрени броеви има 3, двоцифрени броеви се $3 \cdot 4 = 12$, трицифрени се $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ итн. $n-$цифрени се $3 \cdot 4^{n-1}$. Сега, од $3 + 12 + 48 + 192 = 255$, следува дека 256-тиот по големина број ќе биде најмалиот петцифрен број од

дадениот вид, а тоа е бројот 30000.

4. Голема свеќа изгорува за 1 час и чини 60 денари. Мала свеќа изгорува за 11 минути и чини 11 денари. Дали може да се измери време од 1 минута по цена од 150 денари?
**Решение.** Истовремено запалуваме една голема и една мала свеќа. Во моментот кога малата свеќа ќе догори запалуваме нова мала свеќа итн. Во моментот кога ќе догори петтата мала свеќа истовремено запалуваме две мали свеќи (шеста и седма) и шестата мала свеќа ја гасиме во моментот кога ќе догори големата свеќа. На тој начин добиваме дел од шестата свеќа кој догорува за 6 минути. Сега палиме нова мала свеќа (осма) и во моментот кога ќе догори седмата мала свеќа, го палиме остатокот од шестата мала свеќа. Времето од моментот кога ќе догори осмата мала свеќа и моментот кога ќе догори остатокот од шестата свеќа е точно 1 минута.
Значи, вкупно потрошивме 1 голема и 8 мали свеќи, односно вкупно потрошивме $60+8\cdot 11=148$ денари.

5. Во одделението на Горјан има 12 ученици за кои е констатирано дека сите се родени во различни месеци. Покрај тоа, разликата во староста на било кои два од овие 12 ученици е помала од една година. Меѓу нив Ацо е најстар и тоа е 214 дена постар од семиот по ред Марко. Определи го роденденот на Марко.
**Решение.** Седумте најстари со родени во седум последователни месеци. Заради разликата од 214 дена меѓу Ацо и Марко, во тие седум месеци мора да има најмалку 215 дена. Бидејќи $215=7\cdot 30+5$, последното е можно само ако меѓу овие седум месеци има пет кои имаат по 31 ден. Тоа може да се само месеците јули, август, септември, октомври, ноември, декември и јануари. Значи, најстариот ученик Ацо е роден на 1-ви јули, а седмиот по ред Марко е роден на 31-ви јануари следната година.

6. Дали може од множеството $S=\{1,2,...,200\}$ да се изберат помалку од 59 различни броеви чиј збир е еднаков на збирот на преостанатите броеви од ова множество?
**Решение.** Збирот на сите броеви од множеството $S$ е
$$1+2+3+...+200=\frac{200\cdot(200+1)}{2}=20100,$$

а збирот на најголемите 58 броеви од множеството $S$ е:

$$143+144+...+199+200=(143+200)+(144+199)+...+(171+172)$$
$$=29\cdot 343=9947.$$

Бидејќи $9947<10050=20100:2$, не е можно од множеството $S$ да се изберат од 59 броеви чиј збир е еднаков на збирот на преостанатите броеви од ова множество.

7. Дадени се множествата

$$S_1=\{1\},\ S_2=\{2,3\},\ S_3=\{4,5,6\},\ S_4=\{7,8,9,10\},...$$

Определи го збирот на елементите на множеството $S_{2007}$.

**Решение.** Множеството $S_1$ има 1 елемент, множеството $S_2$ има 2 елементи итн. множеството $S_{2006}$ има 2006 елементи. Според тоа, множествата $S_1$, $S_2$, ..., $S_{2006}$ вкупно имаат

$$1+2+...+2006=\frac{2006\cdot 2007}{2}=1003\cdot 2007$$

елементи. Понатаму, множеството $S_{2007}$ има 2007 елементи, т.е. $S_{2007}=\{1003\cdot 2007+1,1003\cdot 2007+2,...,1003\cdot 2007+2007\}$. Конечно, збирот на елементите на множеството $S_{2007}$ е:

$$A=(1003\cdot 2007+1)+(1003\cdot 2007+2)+...+(1003\cdot 2007+2007)$$
$$=1003\cdot 2007\cdot 2007+(1+2+...+2007)$$
$$=1003\cdot 2007\cdot 2007+\frac{2007\cdot 2008}{2}$$
$$=1003\cdot 2007\cdot 2007+1004\cdot 2007$$
$$=2007\cdot(1003\cdot 2007+1004)$$
$$=4042148175.$$

8. Природните броеви од 1 до 2014 се поделени во парови (секој број е точно во еден пар), потоа е пресметан збирот на секој пар броеви, а потоа е пресметан производот на сите 1007 збирови. Дали добиениот производ може да е квадрат на некој природен број?

**Решение.** Да. Првите шест броја ќе ги поделиме во парови (1, 5), (2, 4) и (3,6). Производот на збировите на овие парови е $6\cdot 6\cdot 9=18^2$. Преостанатите броеви ќе ги поделиме во парови (7, 2014), (8, 2013), ..., (1010, 1011). Вакви парови има 1004 и збирот во секој пар е 2021. Затоа производот на збировите е $2021^{1004}$. Конечно, производот на

сите 1007 збирови е точниот квадрат $(18 \cdot 2021^{502})^2$.

9. Природните броеви од 2 до 2015 се поделени во парови (секој број е точно во еден пар), потоа е пресметан збирот на секој пар броеви, а потоа е пресметан производот на сите 1007 збирови. Дали добиениот производ може да е квадрат на некој природен број?
**Решение.** Да. Првите шест броја ги делиме на паровите (2, 7), (3, 6) и (4, 5). Производот на збировите на овие парови е $9^3 = 27^2$. Преостанатите броеви ги делиме на паровите: (8, 2015), (9, 2014), ..., (1011, 1012). Збирот на двата броја во секој пар е 2013, а како бројот на паровите е парен број 1004, добиваме дека производот на овие збирови е еднаков на $2023^{1004}$. Значи, производот на сите 1007 збирови е $(27 \cdot 2023^{502})^2$.

10. На седум ливчиња се запишани сите цели броеви од 5 до 11, на секое ливче по еден број. Потоа ливчињата се измешани, па прво Марио зел три ливчиња, а по него Илија зел две ливчиња. Преостанатите ливчиња ги отстраниле, без да знаат кои броеви се на нив запишани. Откако ги видел броевите на своите ливчиња, Марио рекол: „Јас знам дека збирот на броевите на твоите ливчиња е парен.“ Марио и Илија се одлични математичари. Кои броеви биле запишани на ливчињата на Марио?
**Решение.** Марио ги знаел броевите кои биле запишани на четирите ливчиња кои не биле кај него, но не знаел кои броеви се кај Илија. Значи, тој не можел да го изведе својот заклучок само во случајот ако збирот на било кои два од четирите броја е парен. Последното е можно само ако сите броеви на тие четири ливчиња се со иста парност Но, има само три парни броеви, па затоа тие не може да се сите парни. Значи, сите броеви се непарни, а сите ливчиња со парните броеви се кај Марио,т.е. Марио ги има ливчињата со броевите 6, 8 и 10.

11. Теодор напишал програма која во секој чекор извршува една од следниве операции: даден број го множи со 4 или даден број го собира со 5. Кој е најмалиот број чекори за да од бројот 2 се добие бројот 2012?
**Решение.** Бројот 2012 може да се добие како производ на броевите 4 и 503. Понатаму, бројот 503 не е делив со 4, па затоа тој е добиен од

некој број собран со бројот 5, а тоа е бројот $503-5=498$. Понатаму, $498-5=493$, $493-5=488$, $488:4=122$, $122-5=117$, $117-5=112$, $112:4=28$, $28:4=7$ и $7-5=2$. Според тоа, потребни се најмалку 10 чекори.

12. Екипите на градовите $A$ и $B$ имале натпревар во брзопотезен шах на 100 табли. Во секоја екипа имало и мажи и жени и во секоја екипа имало повеќе мажи од жени, со тоа што во екипата на градот $B$ имало повеќе жени отколку во екипата на градот $A$. Сите мажи од градот $B$ имале за противници мажи од градот $A$. Во партиите на кои играле само мажи шахистите од градот $A$ победиле во три партии од секои пет, а во партиите на кои играле само жени шахистките од градот $B$ победиле во две партии од секои три. Ниту една партија не завршила нерешено (реми). Вкупниот резултат бил $59:41$ за градот $A$. Колку мажи играле во екипата на градот $A$?

**Решение.** Со $m$ да го означиме бројот на мажите од градот $A$, а со $n$ бројот на мажите од градот $B$. Ако се имна предвид бројот на партиите во кои победила екипата на градот $A$, добиваме

$$\frac{3n}{5}+\frac{100-m}{3}+\frac{2m-2n}{3}=59,$$
$$9n+500-5m+10m-10n=885,$$
$$5m-n=385,$$

каде $100>m>n>50$. Од последната равенка следува $n=5k$, за некој $k\in\mathbb{N}$. Значи, $5m-5k=385$, т.е. $m=k+77$. Според тоа, $11\le k\le 19$, бидејќи во спротивно $n\le 50$ или $m\ge 100$).

Понатаму, бројот $199-m=100-k-53=47-k$ мора да е делив со 3, што е точно само за $k=11, k=14$ и $k=17$. Значи, сите услови на задачата се задоволени само за $m=11+77=88$, $m=14+77=91$ и $m=17+77=84$. Според тоа, во екипата на градот $A$ имало 88, 91 или 94 мажи.

13. Десет шахисти на шаховски турнир играат секој со секого по две партии. Секој играч за победа добива 1 поен, за нерешен резултат двата играча добиваат по 0,5 поени и за пораз не се добиваат поени, ниту се губат поени. Колку најмалку поени треба да има некој шахист за да со сигурност се заклучи дека има повеќе поени од сите останати учесници на турнирот?

**Решение.** Секој играч со преостанатите 9 играчи одиграл по 2 партии,

што значи вкупно 18 партии. За да еден играч со сигурност обезбеди прво место на турнирот мора да победи осум противници по два пати и со преостанатиот играч едната партија да ја победи, а едната да ја одигра нерешено.Оттука следува дека бараниот број поени е 17,5. Ниту еден друг учесник на турнирот не може да има толку или повеќе поени. Ако постои друг играч кој ги победил осумте играчи по 2 пати и така собрал 16 поени, тогаш тој може да има најмногу 16,5 поени бидејќи со воочениот играч добил само 0,5 поени.

14. Должините на страните на правоаголен триаголник (изразени во сантиметри) се двоцифрени броеви. Најмалиот и најголемиот од тие броеви имаат иста цифра на единиците и двата броја се прости. Двата најголеми броја се последователни природни броеви, а разликата на најмалиот и најголемиот број е за 10 помала од третиот број. Определи ги страните на овој триаголник.
**Решение.** Нека страните на триаголникот се $a,b,c$, така да $a>b>c$. Од условот на задачата следува $a=b+1$ и $a-c=b-10$. Од овие равенки следува $c=11$, па најголемиот број се завршува на цифрата 1. Такви двоцифрени прости броеви се 31, 41, 61 и 71. Со непосредна проверка се добива решението $a=61$ и $b=60$.

15. Даден квадрат е поделен на 100 помали квадрати, од кои 99 имаат должина на страна 1. Определи ја плоштината на дадениот квадрат.
**Решение.** Должината на страната на стотиот квадрат исто така мора да е природен број. Ако таа должина е еднаква на $k$ и ако $n$ е должината на почетниот квадрат, тогаш мора да важи $n^2-k^2=99$, односно $(n-k)(n+k)=99$. Делители на бројот 99 се 1, 3, 9, 11, 33 и 99. Сега од $n-k<n+k$ следува:
   1) $n-k=1, n+k=99$, од каде добиваме $n=50, k=49$, па плоштината на почетниот квадрат е 2500.
   2) $n-k=3, n+k=33$, од каде добиваме $n=18, k=15$, па плоштината на почетниот квадрат е 324.
   3) $n-k=9, n+k=11$, од каде добиваме $n=10, k=1$, па плоштината на почетниот квадрат е 100.

16. Квадрат е исечен на 2010 помали квадрати. Само еден од малите квадрати има должина на страна различна од 1 (сите преостанати

квадрати имаат должина на страна 1). Определи ја плоштината на почетниот квадрат.

**Решение.** Големиот квадрат да го означиме со $X$ и нека должината на неговата страна е $x$, а нека $y \neq 1$ е должина на страната на малиот квадрат кој го означуваме со $Y$. Бидејќи имаме 2009 мали квадрати со должина на страна 1, добиваме

$$x^2 - y^2 = 2009 . \qquad (1)$$

Квадратот $X$ има барем една страна која нема заеднички точки со квадратот $Y$. Оваа страна е покриена само со страните на малите квадрати со должина на страна 1, па затоа $x$ е природен број. Сега, имајќи го ова предвид заклучуваме дека и $y$ е природен број. Значи, равенката (1) треба да ја решиме во множеството природни броеви. Имаме, $(x-y)(x+y) = 2009$, па како $2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41$ и притоа важи $0 < x-y < x+y$, можни се следниве случаи:

1) $x-y=1$, $x+y=2009$ од каде добиваме $x=1005$, $y=1004$, а плоштината на квадратот $X$ е $x^2 = 1005^2 = 1010025$.
2) $x-y=7$, $x+y=287$ од каде добиваме $x=147$, $y=140$, а плоштината на квадратот $X$ е $x^2 = 147^2 = 21609$.
3) $x-y=41$, $x+y=49$ од каде добиваме $x=45$, $y=4$, а плоштината на квадратот $X$ е $x^2 = 45^2 = 2025$.

17. Докажи дека коцка со раб со должина 13 може да се расечи на 2016 мали коцки со рабови со должини 1, 2 и 3. Колку коцки притоа се со раб со должина 3?

**Решение.** Со $x, y, z$ да ги означиме коцките со рабови 1, 2 и 3, соодветно. Бидејќи $13^3 = 2197$, за да постои саканото расекување мора системот

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2016, \\ x + 8y + 27z &= 2197, \end{aligned}$$

да има решение во множеството природни броеви. Ако првата равенка ја одземеме од втората добиваме $7y + 26z = 181$, од каде добиваме $y = 25 - 4z - \frac{2z-6}{7}$. Последната равенка има само едно решение во множеството природни броеви $z=4, y=11$. Тогаш $x=2001$. Според тоа, коцка $13 \times 13 \times 13$ може да се расечи на 2001 коцки со раб 1, 11

коцки со раб 2 и 4 коцки со раб 3.

18. Докажи дека коцка со раб со должина 13 може да се расече на 2017 мали коцки со рабови со должини 1, 2 и 3. Колку коцки се со раб со должина 3?

**Решение.** Со $x, y, z$ да го означиме бројот на коцките соодветно со должина на раб 1, 2, 3. Бидејќи $13^3 = 2197$ од условот на задачата следува дека за постои саканото расекување потребно и доволно е системот равенки:

$$\begin{cases} x + y + z = 2017, \\ x + 8y + 27z = 2197, \end{cases}$$

да има решение во множеството природни броеви. Ако од втората равенка ја одземеме првата, добиваме $7y + 26z = 180$, од каде наоѓаме $z \le 6$ и $y = 25 - 4z + \frac{2z+5}{7}$. Јасно, единствена можност е $z = 1$, од каде следува $y = 22$, па затоа $x = 2017 - 22 - 1 = 1994$.

Според тоа, коцка $13 \times 13 \times 13$ може да се расече на 2017 коцки од кои 1994 се со страна со должина 1, 22 се со страна со должина 2, а една коцка е со страна со должина 3.

19. Земени се 27 коцки за играње, со ѕидови нумерирани на вообичаен начин со броеите од 1 до 6, така што збирот на броевите запишани на спротивните ѕидови е 7, и од нив е составена голема коцка со димензии $3 \times 3 \times 3$. Кој е најголемиот можен збир на броевите видливи на ѕидовите на големата коцка?

**Решение.** Од сите 27 коцки, една е на средина на големата коцка и ниту еден број запишан на неа не се гледа. Шест коцки се во средините на ѕидовите коцки и тие може да се постават така што ќе се гледа бројот 6. Имаме 12 коцки кои се во средината на рабовите на големата коцка и тие може да се постават така што ќе се гледаат броевите 5 и 6. Конечно, 8 коцки се во темињата на големата коцка и тие може да се постават така што ќе се гледаат броевите 4, 5 и 6. Значи, најголемиот можен збир е

$$6 \cdot 6 + 12 \cdot (5 + 6) + 8 \cdot (4 + 5 + 6) = 36 + 132 + 120 = 288.$$

20. На колку начини бројот 2024 може да се претстави како производ на три различни природни броја? Редоследот на множителите не е важен.

**Решение.** Имаме $2024 = 1 \cdot 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Да ги разгледаме сите производи во кои 1 е еден од множителите. Тогаш

$$2024 = 1 \cdot 2 \cdot 1012 = 1 \cdot 4 \cdot 506 = 1 \cdot 8 \cdot 253 = 1 \cdot 11 \cdot 184$$
$$= 1 \cdot 22 \cdot 92 = 1 \cdot 23 \cdot 88 = 1 \cdot 44 \cdot 46.$$

Ако 2 е најмалиот множител, сите можности се:

$$2024 = 2 \cdot 4 \cdot 253 = 2 \cdot 11 \cdot 92 = 2 \cdot 22 \cdot 46 = 2 \cdot 23 \cdot 44.$$

Ако 4 е најмалиот множител, сите можности се

$$2024 = 4 \cdot 11 \cdot 46 = 4 \cdot 22 \cdot 23.$$

Ако 8 е најмалиот множител, сите можности се $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$.

Значи, вкупниот број можности се 14.

21. Определи ги сите природни броеви кои може да се прикажат како производ на пет множители за кои важи:
- секој множител е прост број,
- барем три множители се еднакви,
- збирот на сите пет множители е 40.

**Решение.** Ако сите пет множители се еднакви, тогаш $5a = 40$, па $a = 8$, што не е прост број. Ако четири множители се еднакви, тогаш $4a + b = 40$, па $b$ е парен број, т.е. $b = 2$ и добиваме $a = 9{,}5$ што не е природен број.

Нека $a, b, c$ се прости множители на бараниот број каде $a$ е простиот број кој се појавува три пати. За другите два броја не се знае дали се различни меѓу себе. Важи $3a + b + c = 40$. Можни се следниве случаи:

| $a$ | $3a$ | $b + c$ | $a^3bc$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 34 | $2^3 \cdot 3 \cdot 31 = 744$ |
| 2 | 6 | 34 | $2^3 \cdot 5 \cdot 29 = 1160$ |
| 2 | 6 | 34 | $2^3 \cdot 11 \cdot 23 = 2024$ |
| 2 | 6 | 34 | $2^3 \cdot 17 \cdot 17 = 2312$ |
| 3 | 9 | 31 | $3^3 \cdot 2 \cdot 29 = 1566$ |
| 5 | 15 | 25 | $5^3 \cdot 2 \cdot 23 = 5750$ |
| 7 | 21 | 19 | $7^3 \cdot 2 \cdot 17 = 11662$ |
| 11 | 33 | 7 | $11^3 \cdot 2 \cdot 5 = 13310$ |
| 13 | 39 | 1 | Нема решение |

Ако во разложувањето се појават три последователни природни броја

поголеми или еднакви на 13, збирот на преостанатите два множители ќе биде помал од 2, што не е можно. Тоа значи дека горните решенија се единствени.

Ако $x = a^3bc$, каде $a,b,c$ се различни прости множители, тогаш негови делители се:

$$1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b, c, ac, a^2c, a^3c, bc, abc, a^2bc, a^3bc,$$

што значи дека има 16 делители. Затоа броевите 744, 1160, 2024, 1566, 5750, 11662 и 13310 имаат по 16 делители.

Ако $x = a^3b^2$, каде $a,b$ се различни прости множители, тогаш негови делители се:

$$1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b, b^2, ab^2, a^2b^2, a^3b^2,$$

што значи дека има 12 делители. Затоа бројот 2312 има 12 делители.

22. Марија во компјутер запишува деветцифрен природен број користејќи ги цифрите 0, 1, 2, 5, 6, 8 и 9. Забележала дека нејзиниот комјутер прави грешки при исписот. На екранот на комјутерот ги испишува бројот во обратен редослед на цифрите и истовремено заменува некои цифри како што е прикажано во табелата.

| Внес | 0 | 1 | 2 | 5 | 6 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Испис | 0 | 1 | 5 | 2 | 9 | 8 | 6 |

На пример, кога ќе го внесе бројот 211586089 на екранот се јавува бројот 680982115. Определи го бројот на деветцифрените броеви кои на екранот ќе испишат така како што се внесени.

**Решение.** Нека $\overline{abcdefghi}$ е девет цифрен број. Според условот на задачата цифрата $e$ при запишување на бројот во обратен редослед ќе остане на своето место, па затоа $e \in \{0,1,8\}$.

Понатаму, цифрата $a$ е водечка, па затоа $a \neq 0$. Цифрите $a$ и $i$ ги менуваат местата, па затоа $a \in \{1,2,3,6,8,9\}$, а цифрата $i$ е напоно определена со цифрата $a$. На сличен начин се заклучува дека $b \in \{0,1,2,5,6,8,9\}$, $c \in \{0,1,2,5,6,8,9\}$, $d \in \{0,1,2,5,6,8,9\}$, а цифрите $f$, $g,h$ се наполно определени со цифрите $d,c,b$. Според тоа, бараниот број броеви е $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6174$.

23. Нека $a,b,c$ се должините на страните на триаголникот $ABC$. Ако една страна на триаголникот е подолга од $37\ cm$, докажи дека

$$a^2+b^2+c^2>2006\,cm^2.$$

**Решение.** Нека $a,b,c$ се должините на страните на триаголникот $ABC$ и $c>37\,cm$. Тогаш $a+b>c$, па затоа $a^2+2ab+b^2>c^2$. Понатаму, од $(a-b)^2\geq 0$ следува $a^2+b^2\geq 2ab$, па затоа

$$2(a^2+b^2)\geq a^2+2ab+b^2>c^2, \text{ т.е. } a^2+b^2>\tfrac{1}{2}c^2.$$

Конечно,

$$a^2+b^2+c^2>\tfrac{3}{2}c^2>\tfrac{3}{2}\cdot 37^2>2006\,cm^2.$$

24. Нека $a,b,c$ се должини на страни на произволен триаголник. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2<2ab+2bc+2ca. \qquad (1)$$

**Решение.** Од неравенството на триаголник $a>|b-c|$ следува $a^2>(b-c)^2$, односно $a^2>b^2+c^2-2bc$. Слично, $b^2>c^2+a^2-2ca$ и $c^2>a^2+b^2-2ab$. Ако ги собереме последните три неравенства, го добиваме неравенството

$$a^2+b^2+c^2>2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca,$$

кое е еквивалентно на неравенството (1).

25. Нека $a,b,c$ се должините на страните на произволен триаголник. Докажи дека

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3. \qquad (1)$$

**Решение.** Од неравенството на триаголник следува $a>|b-c|$, па затоа $a^2>(b-c)^2$, односно $a^2+2bc>b^2+c^2$. Значи, $\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}>1$. Слично се докажува дека $\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}>1$ и $\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>1$. Ако ги собереме последните три неравенства, го добиваме неравенството (1).

26. Дадени се правоаголник и квадрат со еднакви плоштини. Нека $a$ и $b$ се две соседни страни на правоаголникот, а $c$ е страната на квадратот. Докажи дека

$$a+b-c>R\sqrt{2},$$

каде $R$ е радиусот на опишаната кружница околу правоаголникот.

**Решение.** Да забележиме дека

$$c=\sqrt{ab} \text{ и } R\sqrt{2}=\frac{2R}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Задачата се сведува на докажување на следново тврдење: За произволни и различни $a,b>0$ важи неравенството

$$a+b>\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Ставајќи $c=\sqrt{ab}$ и $d=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, имаме $ab=c^2$ и $a^2+b^2=2d^2$.

Според тоа,

$$(a+b)^2=2(c^2+d^2)=(c+d)^2+(c-d)^2\geq(c+d)^2,$$

и знак за равенство важи ако и само ако $c=d$. Според тоа,

$$a+b\geq c+d$$

и знак за равенство важи ако и само ако $c=d$. Останува да забележиме дека равенството $c=d$ е еквивалентно со равенството $a=b$. Навистина,

$$c=d \quad\Leftrightarrow\quad 2ab=a^2+b^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0=(a-b)^2.$$