НИКОЛА РЕЧКОСКИ ВАСКО РЕЧКОСКИ

На нашиот драг пријател Фисто

со задоволство

ФУНКЦИИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ И РЕДОВИ

ОХРИД, 2012

Издавач:
Факултет за туризам и угостителство-Охрид

Печати:
Коста Абраш-Охрид

Тираж:
300 примероци

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

517.2/.9

РЕЧКОСКИ, Никола
Функции од повеќе променливи и редови / Никола Речкоски, Васко Речкоски. - Охрид : Факултет за туризам и угостителство, 2012. - 359 стр. ; 24 см

Библиографија: стр. 359

ISBN 978-9989-179-97-6
1. Речкоски, Васко [автор]
а) Математичка анализа - Диференцијално сметање - Редови
COBISS.MK-ID 90726410

ПРЕДГОВОР

Предмет на изучување на оваа книга се две централни области од математичката анализа: “функции од повеќе променливи” и “редови”.

Главната идеја ни беше не само да ги презентираме методите и техниката во примената на материјалот и од едниот и од другиот дел, туку изучувањето да е на едно поригорозно ниво, при што водевме сметка условите при доказите на теоремите и решавањето на примерите да бидат прецизно дадени се разбира во рамките на математичкиот апарат, кој што се користи тука , а тоа е Римановиот интеграл кој се базира главно на Жордановата мера. За подлабоко учење и поопшти резултати треба друг апарат пред се тоа е Лебеговиот и Риман-Стилтесовиот интеграл. Од таа причина некои важни резултати на кои се повикуваме на одредени места само се дефинирани без да бидат докажани.

За понатамошно учење читателот може да ги користи [9], [10], [14].

Но сепак Римановиот интеграл е во доволна мера доволен како од теориска гледна точка така и за примената и дава јасна претстава за главните нешта и го отвора патот за поопширни и подлабоки проучувања на двата дела.

Постои многу богата литература за овие математички дисциплини од различни нивоа: елементарни или воведни, потоа построги, па до монографии од највисоко ниво. И поради тоа не е едноставна работа да се даде еден солиден приказ поготово за функциите од повеќе променливи чија што теорија математичарите се мачеле повеќе од два века за да ја постават на една солидна основа за нивното изучување.

Инаку идејата за пишувањето на оваа книга се роди кај првиот автор по неговото долгогодишно искуство од предавањата на Електро-техничкиот и машинскиот факултет во Скопје како и на техничкиот факултет во Битола, како и личниот интерес за математичката анализа.

Во оваа книга се дава еден поисцрпен и попрецизен третман на Фуриевите редови затоа што тие се главниот дел-јадрото на една од најважните дисциплини во математиката и нејзината примена “хармониската анализа“.

Од таа гледна точка во книгата е посветена една глава за Фуриевите редови во која се дава доволно прецизен приказ за основните проблеми и дава солидна основа за нивно понатамошно изучување.

Книгата се состои од два дела и секој од нив се состои од глави. Да забележиме дека се решени голем број на примери и исто така се дадени голем број на задачи за вежба за кои се дадени напатствија за решавање.

Книгата е наменета пред се за студентите на математичките факултети, факултетот за физика, техничките факултети, па и за економските факултети пред се првиот дел.

Се претпоставува дека студентот го има ислушано почетниот курс по диференцијално и интегрално сметање, исто така има основни познавања од детерминантите, матриците како и аналитичната геометрија со векторска алгебра.

Содржина

Прв дел

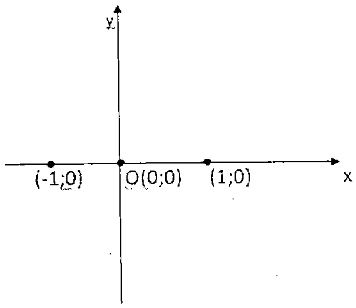
ФУНКЦИИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

ГЛАВА 1

Диференцијален рачун на функции од повеќе променливи

1. Правоаголен координатен систем во рамнина и простор

Знаеме, правоаголниот координатен систем во рамнина се состои од една фиксна точка О и две прави кои се сечат во точката O и се нормални меѓусебе. Точката O е координатен почеток, а правите се координатни прави.



Цртеж 1.

Хоризонталната права се вика x −оска или *апсциса*, и таа на десно од координатниот почеток е позитивна, а на лево е негативна.

Втората права се вика y −оска или *ордината*, и кај неа делот над x −оската е позитивен, а под x −оската е негативен.

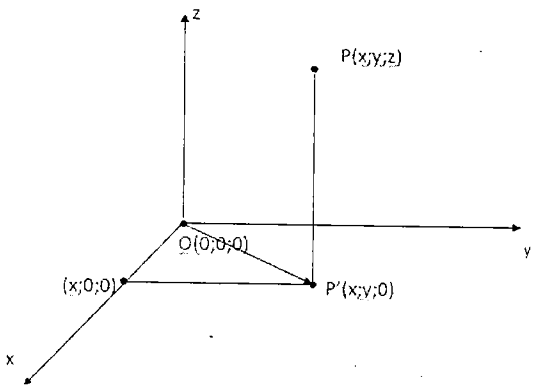
Тројката составена од координатниот почеток и двете ориентирани прави − координатните оски, го прават таканаречениот *правоаголен* или *Декартов координатен систем во рамнина.*

Сега, сосема аналогно, земаме фиксна точка O во просторот и три прави кои минуваат низ точката O и се нормални меѓу себе.

Освен тоа, тие се ориентирани со помош на стрелки, така што знаеме кој дел, на секоја од нив, им е позитивен, а кој негативен во однос на координатниот почеток.

Точката Oзаедно со трите ориентирани прави се вика *правоаголен координатен систем во просторот,* Слика 2.

Секои две прави, од трите координатни прави, определуваат рамнини: координатните прави кои ја определуваат хоризонталната рамнина се викаат, соодветно, x —оска (*апсциса*) и y —оска (*ордината*). Третата права која е нормална на x и y оските се вика z —оска или *апликата*. Очигледно, координатните прави x и y, заедно со почетокот O, претставуваат рамнински правоаголен координатен систем, што накратко ќе го означуваме со Oxy —рамнина (се чита "О икс ипсилон" или само" икс ипсилон" рамнина). На истиот начин имаме Oxz —рамнина и Oyz —рамнина. Овие три рамнини се викаат *координатни рамнини* и тие го делат просторот на осум делови кои се викаат *октанти*.



Цртеж 2.

Нека M е произволна точка во просторот. Низ точката M повлекуваме права паралелна со z —оската и ја наоѓаме прсечната точка M_1 со рамнината Oxy. Точката M_1 се вика ортогонална проекција за точката M на координатната рамнина Oxy. Координатите на M_1 во однос на координатниот систем Oxy ги означуваме, соодветно со x и y, и тие се викаат x и y координати. Отсечката $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}}$ ја определува координатата по z —оската и таа се вика z —координата или апликата.

Трите броја x, y и z точно ја определуваат положбата на точката M во однос на дадениот координатен систем и затоа се викаат нејзини координати. Кратко пишуваме $M(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$. На пример, точката $\mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, 0)$ ќе се наоѓа во Oxy —рамнината.

Ориентираната отсечка $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ се вика радиус вектор за точката M. Всушност, координатите на точката M се соодветните проекции врз координатните оски од нејзиниот радиус вектор $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{x}\vec{\imath} + \mathrm{y}\vec{\jmath} + \mathrm{z}\vec{k}$, каде $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ се единични вектори на координатните оски x, y и z соодветно.

Од оваа кратка дискусија заклучуваме дека, секоја точка $M(x,y,z)$ определува радиус вектор или само вектор $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ со координати x,y и z по однос на $\vec{i},\vec{j}$ и $\vec{k}$ соодветно. И обратно секој вектор $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ определува точка $M(x,y,z)$. Заради тоа точките во R^2, R^3 и.т.н во R^n ќе ги викаме и вектори. Пример $\vec{i}=(1,0,0), \vec{j}=(0,1,0), \vec{k}=(0,0,1)$. Од аналитичната геометрија познато ни е дека секој вектор $\vec{r}$ лежи на некоја права и таа права како и секоја друга што е паралелена со неа го определува правецот на векторот. Насоката е определена со неговите координати x,y и z, а додека должината на векторот или уште се вели нормата на векторот е определена со $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ за $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Должината на векторот вообичаено се обележува со $|\vec{r}|$ или со $\|\vec{r}\|$. Ние ќе ја користиме и едната и другата ознака, зашто во некои случаи е појасно ако се користи $\|\vec{r}\|$, но тоа ќе биде јасно од самата ситуација. Бидејќи векторот $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ го идентификуваме со соодветната точка (x,y,z) следователно можеме да зборуваме за норма на (x,y,z) и таа е

$$\|(x,y,z)\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Вектор со норма 1 се вика единичен вектор или орт. Понатаму даден вектор $\vec{r}$ кој што е со почеток во $O(0,0,0)$ и крај во точката $M(x,y,z)$ се обележува и со $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, меѓутоа тој вектор може да има почеток и во некоја друга точка, но и тогаш е тој истиот вектор. Се разбира тоа следи од дефиницијата за еднаквост на вектори. Да забележиме дека во понатамошното излагање може да има места каде вектор може да се обележи без стрелка, но тоа ќе биде јасно од самиот контекст. Таквата пракса е вообичаена во модерната математика, на пример во линеарната алгебра, функционалната анализа итн.

Аналогно на R^2 и R^3 се дефинира R^4 чии што елементи се подредени четворки од реални броеви $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, и.т.н. го потсетуваме читателот да ја има во предвид придавката подредени, зашто ако два различни броја си ги променат местата тогаш се добива нов елемент од R^4. Сега исто како во R^3 елементите од R^4 ќе ги викаме точки или вектори определени со 4 броеви кои се викаат координати на точката (векторот). И во овој случај векторите од R^4 ќе ги обележуваме со $x,y,z,...$и секој од нив како што видовме е определен со четири броеви кои претставуваат координати.

Збир на два вектори и производ на вектор со број се дефинира потполно аналогно како за две и три димензии, имено

$$x+y=(x_1,x_2,x_3,x_4)+(y_1,y_2,y_3,y_4)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4)$$

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3,\alpha x_4)$$

Нулта точка (нулти вектор) е $O(0,0,0,0)$. Во R^4 посебна улога играат векторите

$$e_1=(1,0,0,0), e_2=(0,1,0,0), e_3=(0,0,1,0), e_4=(0,0,0,1).$$

Користејќи ги дефинираните операции за собирање и множење на вектор со број очигледно е дека даден вектор x може да се претстави на следниот начин

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$$

Но ниту еден од векторите e_1, e_2, e_3 и e_4 не може да се претстави на тој начин со помош на останатите три вектори;

Пример $(0,0,0,1) \neq \alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,1,0) = (\alpha, \beta, \gamma, 0)$, каде α, β и γ се реални броеви. Заради оваа многу важна особина на овие четири вектори велиме дека тие се независни меѓу себе. И бидејќи секој вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ може да се добие од нив на погоре опишаниот начин се вели, дека e_1, e_2, e_3 и e_4 се една база за R^4.

Од тука произлегува терминологијата: R^2 е дводимензионален, R^3 е тридимензионален, R^4 е четиридимензионален. Аналогно се дефинира просторот R^n. Имено просторот R^n се состои од подредени n —торки на реални броеви.

На пример $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ каде што x_i и y_j се реални броеви за $i, j = 1,2, \dots, n$.

И во овој случај двете основни операции се

$$x + y = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) =$$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \dots, \alpha x_n),$$

α е реален број.

База во R^n се векторите $e_1 = (1,0, \dots, 0), e_2 = (0,1,0, \dots, 0), e_n = (0,0, \dots, 1)$.

Секој вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ може да се претстави со помош на векторите e_j за $j = 1,2, \dots, n$ на следниот начин

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Поради оваа особина R^n се вика $n-$ димензионален простор. Напоменуваме дека реалните броеви R се од една димензија, зашто секој број α е еднаков на $\alpha \cdot 1$, што значи дека бројот 1 е база во R, а α е координата по однос на 1.

Скаларен производ на вектори

Овој поим ни е познат од векторската алгебра и од аналитичната геометрија и ние тука сосема на кратко ќе се потсетиме.

Нека

$$\vec{r_1} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k} \text{ и } \vec{r_2} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$$

тогаш

$$\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = \|\vec{r_1}\| \cdot \|\vec{r_2}\| \cdot cos\varphi$$

се вика скаларен производ каде што φ е агол меѓу двата вектора, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Во координатна форма скаларниот производ на векторите $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$ е

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot cos\varphi$$

или

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \|(x_1, y_1, z_1)\| \cdot \|(x_2, y_2, z_2)\| cos\varphi$$

$$|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2| \leq \|(x_1, y_1, z_1)\| \cdot \|(x_2, y_2, z_2)\| \cdot |cos\varphi|$$

Бидејќи $|cos\varphi| \leq 1$ следи

$$|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2| \leq \|(x_1, y_1, z_1)\| \|(x_2, y_2, z_2)\|$$

Ова неравенство е едно од најважните неравенства во математиката и се вика неравенство на Шварц. Во просторот R^n, ако $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ тогаш

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

исто и за y и важи

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Ако $\varphi = \pi/2$ векторите се нормални (ортогонални) и скаларниот производ е еднаков на нула.

2. Поим и дефиниција на функција од повеќе променливи

Многу појави во реалниот свет не зависат само од една големина, туку од две, три, па и повеќе. Појавата чиј што исход зависи од повеќе причини, од повеќе големини, велиме дека е функција од повеќе променливи. Променливите од кои што зависи појавата, функцијата, се нејзините аргументи, или независно променливи големини, а функцијата, јасно, зависи од нив.

Пример 1. Волуменот на цилиндарот со радиус x и висина y е еднаков на $V = \pi x^2 y$. Во овој пример x и y се аргументи, а волуменот е функција од нив и затоа, аналогно на функциите од една променлива, ќе пишуваме

$$V(x, y) = \pi x^2 y.$$

Читаме: "ве икс запирка ипсилон еднакво на ..."

На пример, ако радиусот $x = 4$, а висината $y = 5$, тогаш

$$V(4,5) = \pi(4)^2 \cdot 5 = 80\pi$$

Пример 2. Ако должината, ширината и висината на паралелопипедот се x, y и z, соодветно, тогаш волуменот е $V = xyz$. Во овој случај, волуменот како функција (појава) зависи од три големини x, y и z кои се независни променливи, а волуменот V е функција од нив и по аналогија ќе пишуваме $V(x, y, z) = xyz$. На пример за $x = 1, y = 2$ и $z = 6$, волуменот е $V(1,2,6) = 12$

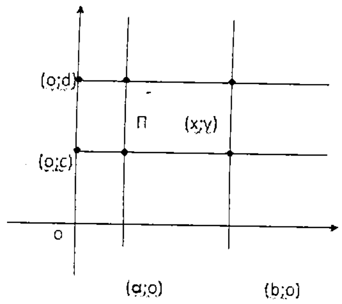
Волуменот на цилиндарот е конкретен пример за функција од две независно променливи, а волуменот на паралелопипедот е конкретен пример на функција од три независно променливи големини.

Во општ случај, постојат функции од четири, пет и повеќе аргументи и најопшто функции од n независни променливи. Ние главно, ќе работиме со функции од две и три независно променливи големини.

Инаку, и функциите од повеќе променливи ги обележуваме на истиот начин како и функциите од една променлива. На пример, со $f(x, y)$ (читај " еф од икс запирка ипсилон"), или $g(x, y)$ или, $F(x, y, z)$ итн.

Функцијата од две независни променливи, $z = f(x, y)$ ќе биде определена за некои парови (x, y), т.е во некои точки во рамнината. Според тоа, дефиниционата област на функција од две променливи е некое множество точки од рамнината. Најчесто, ние ќе земаме тоа да биде правоаголникот Π.

$$\Pi = \{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



Цртеж 3.

Пример 1. Дефинициона област на функцијата

$$f(x,y) = 2x - 3y + 1$$

е целата Oxy рамнина, бидејќи формулата со која е дефинирана функцијата е определена за секои x и y од множеството R.

$$f(-1,2) = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + 1 = -2 - 6 + 1 = -7$$

$$f(0,0) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

Пример 2. Да се определи дефиниционата област на функцијата

$$z = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$$

Тука именителот треба да биде различен од нула, значи не смее да биде

$$R^2 - x^2 - y^2 = 0 \text{ или } x^2 + y^2 = R^2$$

Од каде гледаме дека функцијата е секаде определена, освен во точките од кружницата $x^2 + y^2 = R^2$. На пример $z(R,0)$ не е дефинирано, бидејќи $R^2 + 0^2 = R^2$.

Задачи за вежби

Да се определат дефиниционите области на функциите

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \frac{1}{x-y}$, $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$, $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$
2. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$
3. $z = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $z = \text{Inxy}$

4. $z = \text{In}\,(x^2 + y^2 - 1),\ z = \arcsin\frac{x^2+y^2}{4}$

5. $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},\ u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$

3. Граница и непрекинатост на функција

Нека е дадена точката $M_0(x_0, y_0)$ во рамнината. Под δ-околина за дадената точка M_0 ќе подразбираме точки во кругот со центар во M_0 и радиус δ. Можеме да пишуваме, на пример

$$B = B(M_0, \delta) = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$$

Понатаму ќе велиме дека точката $M(x, y)$ се стреми кон M_0 или тежи кон M_0, симболично $M \to M_0$, ако растојанието

$$|MM_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \to 0$$

и ќе пишуваме $\lim M = M_0$,

Очигледно е дека, ако $x \to x_0$ и $y \to y_0$ тогаш

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y)^2} \to 0,$$

но и обратно, ако

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \to 0,$$

бидејќи

$$\sqrt{(x - x_0)^2} \le \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y)^2},$$

следи

$$\sqrt{(x - x_0)^2} = |x - x_0| \to 0.$$

т.е. $x \to x_0$. Истото важи и за y.

Граница на функција

Нека функцијата

$$z = f(x, y) \qquad (2)$$

е определена во некоја околина на точката $M_0(x_0, y_0)$ и притоа во точката M_0 функцијата може да е определена, но не мора.

Бројот A се вика граница на функцијата $f(x, y)$ во точката M_0, ако $M \to M_0$, тогаш $f(x, y) \to A$ и во тој случај пишуваме

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A, \text{ за } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

Со помош на околини дефинираме:

Дефиниција 1. Бројот A е граница за функцијата $f(x, y)$ во точката M_0 ако за дадено $\varepsilon > 0$ може да се најде δ –околина, така што

$$\left|\overrightarrow{MM_0}\right| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \text{ за } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

и

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

Ако функцијата $f(x, y)$ е определена во точката $M_0(x_0, y_0)$ и ако важи

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

тогаш велиме дека функцијата $f(x, y)$е непрекината во M_0. Ако $f(x, y)$е непрекината во секоја точка од областа D во рамнината, тогаш велиме дека таа е непрекината на D.

На пример, функцијата $f(x, y) = 2x - 3y + 6$ е непрекината во секоја точка од рамнината и затоа областа на непрекинатост е целата Оху рамнина. И кај функциите од две и повеќе променливи важат истите правила за граници како кај функциите од една променлива, а важат и истите особини на непрекинатост. На пример, збир, разлика, производ и количник од непрекинати функции е исто така непрекината функција, само овде не на делови од правата, туку на делови од рамнината.

Пред да наведеме уште некои карактеристични особини на непрекинатите функции, дефинираме кога дадено множество D од рамнината е отворено и кога е затворено.

Множеството D од рамнината е ограничено, ако постои топка B, така што $D \subset B$ каде

$$B = \{(x, y): x^2 + y^2 < R\} \qquad (3)$$

Множеството D е отворено ако за секоја точка $(x_0, y_0) \in D$ постои $\delta > 0$ така што $B \subset D$ каде

$$B = \{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$

Последново може да се запише кратко $B\big((x_0, y_0), \delta\big) \subset D$

Множеството D од рамнината ќе велиме дека е затворено, ако за секоја точка $M(x, y)$ од комплементот D' на D постои δ –околина која целосно припаѓа во D'.

Можеството кое е ограничено и затворено се вика компактно множество во рамнината.

Понатаму рамнината ќе ја означуваме накратко со R^2, просторот со R^3, а правата со R.

Ако $f(x, y)$ е непрекината функција на компактното множество S, тогаш точни се следниве тврдења:

1. Функцијата $f(x, y)$ е ограничена и постојат точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ од множеството S, така што во M_1 има најмала вредност, а во M_2 има најголема вредност:

$$f(M_1) = f(x_1, y_1) = m$$

$$f(M_2) = f(x_2, y_2) = M$$

m е најмала, а M е најголема вредност на $f(x, y)$ т.е.

$$m \leq f(x, y) \leq M \text{ за } (x, y) \in S$$

2. Функцијата f на компактно множество е рамномерно непрекината, односно за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$, така што за било кои точки (x', y') и (x'', y'') такви што

$$\sqrt{(x'' - x')^2 \ - (y'' - y')^2} < \delta$$

следи дека

$$|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon$$

Понатаму, наместо точки со координати x и y, ќе велиме точка (x, y) од R^2.

Решени примери:

1. Да се покаже дека функцијата $f(x,y)=ax+by+c$ е непрекината секаде.

Решение: Нека е дадено $\varepsilon>0$. Треба да се покаже дека за дадената точка (x_0,y_0) постои $\delta>0$, така што за $(x,y)\in R^2$ важи

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

и

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

Како $f(x,y)=ax+by+c$ и $f(x_0,y_0)=ax_0+by_0+c$, имаме

$$|ax+by+c-ax_0-by_0-c|=|ax+by-ax_0-by_0|\leq$$

$$\leq|a||x-x_0|+|b||y-y_0|$$

Може да земеме

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2(|a|+|b|)}$$

Навистина, ако

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

тогаш очигледно, $|x-x_0|<\delta$ и $|y-y_0|<\delta$ и затоа

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<|a|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|a|+|b|)}+|b|\frac{\varepsilon}{2(|a|+|b|)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Од произволноста на (x_0,y_0), следи дека функцијата е секаде непрекината.

2. Да се покаже дека функцијата

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{за } x^2+y^2>0\\ 0, & \text{за } x^2+y^2=0\end{cases}$$

е непрекината во (0,0)

Решение: Нека е дадено $\varepsilon > 0$. Ја разгледуваме разликата

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Сега треба да најдеме δ —околина за (0,0), така што ќе важи

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} < \varepsilon \text{ ако } \sqrt{x^2+y^2} < \delta, \text{или } x^2+y^2 < \delta^2$$

Како

$$x^2 \leq x^2+y^2 \text{ и } y^2 \leq x^2+y^2$$

со множење добиваме

$$x^2y^2 \leq (x^2+y^2)(x^2+y^2)$$

Следователно

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

Од тука гледаме дека треба $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

3. Да се покаже дека функцијата

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

е прекината во (0,0).

Решение: За $x = 0, y \neq 0$, или обратно,

$$f(0,y) = f(x,0) = \frac{0}{0^2+y^2} = 0 = \frac{0}{x^2+0^2}$$

За $x = y \neq 0$ имаме

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

Во некои точки во околина за (0,0), функцијата има вредност 0, во некои $\frac{1}{2}$ што значи не за сите точки $f(x,y) \to f(0,0) = 0$, кога $x \to 0$ и $y \to 0$

4. Да се покаже дека функцијата

$$f(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2}$$

тежи кон бесконачност кога $(x, y) \to (0,0)$.

Решение: Аналогно на функциите од една променлива, нека земеме $M > 0$. Треба да покажеме дека постои δ −околина за $(0,0)$ така што ако (x, y) е од таа околина тогаш

$$|f(x, y)| > M$$

или

$$\frac{2}{x^2 + y^2} > M$$

од каде

$$x^2 + y^2 < \frac{2}{M},$$

што значи треба $\delta = \sqrt{\frac{2}{M}}$.

Симболично пишуваме

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{2}{x^2 + y^2} = \infty$$

4 Нараснување на функција

Нека е дадена функцијата

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

Нека точката $M_0(x_0, y_0)$ припаѓа на дефиниционата област заедно со некоја околина. Графикот на функцијата (1) се состои од точките $[x, y, f(x, y)]$, каде што (x, y) е од дефиниционата област. Според тоа, графикот на функција од две независни променливи е некој дел од просторот, кој се вика површина на функцијата.

Низ точката $y = y_0$ од y оската повлекуваме рамнина нормална на y −оската. Таа рамнина ќе ја сече површината на функцијата $f(x, y)$ по некоја крива со равенка $f(x, y_0)$. Се вели уште дека функцијата $f(x, y_0)$ е само функција по x во рамнината $y = y_0$ и се пишува:

$$\begin{cases} z = f(x, y_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

Инаку, можеме засебно да ја разгледаме функцијата $f(x, y_0)$ како функција од една променлива и да го цртаме нејзиниот график во xy −рамнината. Но кога, пишуваме

$$\begin{cases} z = f(x, y_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

тогаш имаме и просторна претстава за положбата на кривата на површината. На ист начин можеме да направиме функција по променливата y, а x е фиксно. Нараснувањето

$$\Delta_x z = f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) \qquad (2)$$

се вика парцијално нараснување по x за функцијата.

Аналогно

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \qquad (3)$$

е парцијално нараснување по y.

Нараснувањето

$$\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \qquad (4)$$

се вика тотално (потполно) нараснување на функцијата $z = f(x, y)$.

Ако површината ја пресечеме со рамнината $z = z_0$, добиваме крива со равенка

$$\begin{cases} z_0 = f(x, y) \\ z = z_0 \end{cases}$$

која се вика ниво линија.

5. Парцијални изводи

Нека функцијата

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

е непрекината во некоја околина на точката $M(x, y)$.

За фиксно y, $z = f(x, y)$ е функција само од x и во таков случај изводот на функцијата по x се вика парцијален извод, и се означува:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x, f'_x \text{ или } f'_x(x,y) \text{или само } z_x$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Симболот $\frac{\partial z}{\partial x}$ е неделив и се чита " де z де x ".

Ако го фиксираме x, а y се менува, добиваме функција само по y, а изводот ќе биде

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (3)$$

Според тоа, при парцијалните изводи го имаме истото конструктивно правило како и при обичните изводи.

Да резимираме: за да најдеме парцијален извод по една променлива, едноставно другата (другите) ја сметаме за константа.

Пример 1. За функцијата $z = x^2 + y^2$ парцијален извод по x е $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ бидејќи y^2 е константа,и $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ бидејќи сега x^2 е константа.

На ист начин можеме да бараме парцијални изводи од парцијалните изводи:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

се вика втор парцијален извод по x,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

се вика втор парцијален извод по y,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ и } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

и се викаат мешовити парцијални изводи од втор ред

Важи следнава теорема:

Теорема 1 Ако мешовитите парцијални изводи се непрекинати, тогаш тие се еднакви

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \qquad (1)$$

Доказ: Од непрекинатоста на мешовитите парцијални изводи следи непрекинатост на првите парцијални изводи и од нив непрекинатост на функцијата $f(x,y)$.

Го разгледуваме изразот

$$A = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x,y) \qquad (2)$$

со групирање на членовите од десната страна имаме

$$A = [f(x+h, y+k) - f(x, y+k)] - [f(x+h, y) - f(x,y)]$$

Со примена на теоремата на Лагранж во двете загради добиваме

$$A = f_x'(x+a_1h, y+k)h - f_x'(x+a_2h, y)h = [f_x'(x+a_1h, y+k) - f_x'(x+a_2h, y)]h$$

каде $0 < a_1 < 1$ и $0 < a_2 < 1$.

Од непрекинатоста на парцијалните изводи добиваме

$$f_x'(x+a_1h, y+k) = f_x'(x, y+k) + \varepsilon_1 \text{ и } f_x'(x+a_2h, y) = f_x'(x,y) + \varepsilon_2,$$

каде $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ кога $h \to 0$

Со замена во изразот за A добиваме

$$\mathrm{A} = f_x'(x, y+k)\mathrm{h} - f_x'(x,y)\mathrm{h} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\mathrm{h}$$

каде $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\mathrm{h}$ е занемарливо мала големина (бесконечно мала од повисок ред во однос на првиот собирок)

Аналогно ако A го запишеме во облик

$$A = [f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] - [f(x, y+k) - f(x,y)]$$

на ист начин добиваме

$$\mathrm{A} = f_y'(x+h, y)\mathrm{k} - f_y'(x,y)\mathrm{k} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_4)\mathrm{k}$$

Бидејќи за доволно мали h и k вторите собироци се занемарливи во однос на првите затоа можеме да напишеме

$$[f_x'(x, y+k) - f_x'(x,y)]h = [f_y'(x+h, y) - f_y'(x,y)]\mathrm{k}.$$

Со примена на теоремата на Лагранж на двете страни добиваме

$$f''_{yx}(x, y + \theta_1 k)hk = f''_{xy}(x + \theta_2 h, y)hk,$$

за $0 < \theta_1 < 1$, и $0 < \theta_2 < 1$, од каде следи дека

$$f''_{yx}(x, y + \theta_1 k) = f''_{xy}(x + \theta_2 h, y)$$

Ако $h, k \to 0$ од непрекинатоста на мешовитите парцијални изводи следи дека

$$\lim_{k \to 0} f''_{yx}(x, y + \theta_1 k) = \lim_{h \to 0} f''_{xy}(x + \theta_2 h, y)$$

или

$$f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$$

Од доказот на теоремата може да се заклучи дека доволно е да се претпостави непрекинатост само на едниот мешовит извод.

Оваа теорема ни покажува дека не е важен редот на диференцирањето кај изводите од повисок ред ако тие се непрекинати.

Пример 2. $z = sin\, xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\, cos\, xy\,, \frac{\partial z}{\partial y} = x\, cos\, xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = cos\, xy - yx\, sin\, xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = cos\, xy - yx\, sin\, xy$$

6. Геометриско толкување на парцијалните изводи

Нека е дадена функцијата

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

Точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, каде $z_0 = f(x_0, y_0)$ е од површината π. Низ точката $y = y_0$ повлекуваме рамнина која е нормална на неа и која ја сече површината π по кривата c_1 со равенка

$$c_1 \to \begin{cases} z = f(x, y_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

Од геометриското толкување на изводите на функција од една независна променлива, следи дека агловиот коефициент на тангентата t_1 на кривата c_1 во точката M_0, е еднаков на парцијалниот извод по x во таа точка, т.е.

$$k_{t_1} = tg\alpha = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = p$$

аналогно добиваме дека

$$k_{t_2} = tg\beta = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = g$$

каде t_2 е тангента, повлечена во точката M_0 кон кривата c_2 со равенка

$$c \to \begin{cases} z = f(x_0, y) \\ x = x_0 \end{cases}$$

7. Тотален диференцијал

Нека е дадена функцијата

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

Ако на аргументите x и y им дадеме нараснувања h и k, соодветно тогаш нараснувањето Δz на функцијата е

$$\Delta z = f(\mathrm{x} + h, \mathrm{y} + k) - f(x, y) \qquad (2)$$

кое се вика тотално нараснување.

Дефиниција1. За функцијата $f(x, y)$ велиме дека е диференцијабилна во точката (x, y) ако постојат броеви A и B, така што важи

$$\Delta z = Ah + Bk + \alpha \cdot \sqrt{h^2 + k^2} \qquad (3)$$

каде $\alpha = \alpha(h, k)$, (т.е. зависи од h и k)

и $\alpha \to 0$ кога $h, k \to 0$ или, што е исто, кога $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$.

Ако во (3) ставиме $k = 0$, и поделиме со h добиваме

$$\frac{\Delta z}{h} = A + \alpha$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = A + \lim_{h \to 0} \alpha(h, 0) = \mathrm{A}$$

т.е

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A.$$

Аналогно, ако во (3) ставаме $h = 0$ и поделиме со k, добиваме

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Според тоа, ако постојат такви броеви кои го задоволуваат условот (3), тие мора да бидат еднакви на соодветните парцијални изводи. Со други зборови, функцијата има парцијални изводи.

Линеарниот израз по h и k

$$Ah + Bk = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k$$

се вика тотален диференцијал и се означува со dz или $df(h,k)$.

Теорема1. Ако функцијата $f(x,y)$ е диференцијабилна во точката (x,y), тогаш f е непрекината во таа точка.

Доказ: Од

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = Ah + Bk + \alpha(h,k)\rho$$

следи

$$|f(x+h,y+k) - f(x,y)| = |Ah + Bk + \alpha\rho| \leq$$
$$\leq |A||h| + |B||k| + |\alpha|\rho$$

ако $h, k \rightarrow 0$ и α и $\rho \rightarrow 0$ тогаш десната страна тежи кон нула, од каде следи дека

$$|f(x+h,y+k) - f(x,y)| \rightarrow 0$$

т.е.

$$\lim_{\substack{h\to o\\ k\to 0}} f(x+h,y+k) = f(x,y)$$

Пред да ја дадеме следната теорема, да забележиме дека, функција може да има парцијални изводи, но да не е диференцијабилна. Ќе дадеме таков пример. Следнава теорема ги дава потребните услови за функцијата да е диференцијабилна.

Теорема2. Ака функцијата $f(x,y)$ има непрекинати парцијални изводи f'_x и f'_y, тогаш f е диференцијабилна.

Доказ: Поаѓаме од нараснувањето на функцијата

$$\Delta f(x,y) = f(x+h,y+k) - f(x,y) =$$

$$= [f(x+h,y+k) - f(x,y+k)] + [f(x,y+k) - f(x,y)].$$

Со примена на теоремата на Лагранж во двете загради имаме

$$f(x+h,y+k) - f(x,y+k) = f'_x(x+\Theta_1 h, y+k)h$$

$$f(x,y+k) - f(x,y) = f'_y(x,y+\Theta_2 k)k, \text{ каде } 0 < \Theta_1, \Theta_2 < 1$$

односно

$$\Delta f(x,y) = f'_x(x+\Theta_1 h, y+k)h + f'_y(x,y+\Theta_2 k)k$$

Бидејќи $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ се непрекинати може да запишеме

$$f'_x(x+\Theta_1 h, y+k) = f'_x(x,y) + \varepsilon_1$$

$$f'_y(x,y+\Theta_2 k) = f'_y(x,y) + \varepsilon_2$$

при што кога $h,k \to 0$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$. Со замена за $\Delta f(x,y)$ во последниот израз добиваме

$$\Delta f(x,y) = [f'_x(x,y) + \varepsilon_1]h + [f'_y(x,y) + \varepsilon_2]k =$$

$$f'_x(x,y)h + f'_y(x,y)k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

Имајќи ги во предвид неравенствата

$$|h| \le \sqrt{h^2+k^2} = \rho \text{ и } |k| \le \sqrt{h^2+k^2} = \rho$$

имаме

$$\varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k = \frac{\varepsilon_1 h}{\rho}\rho + \frac{\varepsilon_2 k}{\rho}\rho = \left(\frac{\varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k}{\rho}\right)\rho$$

$$\alpha(h,k) = \frac{\varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k}{\rho} \to 0 \text{ кога } h,k \to 0, \text{ бидејќи } |h|,|k| \le \rho.$$

Така покажавме дека непрекинатоста на парцијалните изводи f'_x и f'_y е доволен услов за диференцијабилност на функцијата. Ако функцијата $f(x,y)$ има непрекинати парцијални изводи во секоја точка од некоја област G, тогаш велиме дека f е диференцијабилна на таа област.

Ако x и y се независни променливи и ако $\Delta x = dx, \Delta y = dy$,тогаш тоталната диференција ќе ја пишуваме во следниов облик

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

и

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \alpha\rho$$

при што кога $\rho \to 0$ и $\alpha \to 0$, така што од десната страна главен дел е диференцијалот $df(x,y)$, т.е

$$\Delta f \approx df$$

или

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + df(x,y)$$

Пример 1. Да се пресмета тоталниот диференцијал за функцијата

$$z = xy^2 + \sin xy$$

Ги определуваме првите парцијални изводи

$$z'_x = y^2 + y\cos xy$$

$$z'_y = 2xy + x\cos xy$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = (y^2 + y\cos xy)dx + (2xy + x\cos xy)dy$$

Тоталниот диференцијал на dz се вика втор тотален диференцијал, или диференцијал од втор ред, и се запишува d^2z, т.е

$$d^2z = d(dz)$$

Имајќи ги во предвид правилата за барање на тотален диференцијал од две функции, $u(x,y)$ и $v(x,y)$, имаме

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(uv) = vdu + udv, \ldots$$

и други што ги имаме кај функциите од еден аргумент,

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{dxdy} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Значи, вториот тотален диференцијал d^2z е даден со формулата

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{dxdy} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Сега ќе дадеме доказ на една теорема која се однесува на парцијалните изводи и диференцијабилноста на сложени функции од повеќе променливи.

Теорема3 Нека $u(x,y)$ и $v(x,y)$ се функции дефинирани на отвореното множество G од R^2, при што функциите u и v имаат непрекинати парцијални изводи од прв ред на G. Нека $f(u,v)$ е функција дефинирана на отвореното множество W во R^2 кое ги содржи точките $(u(x,y), v(x,y))$ за секоја точка $(x,y) \in G$.

Ако $f(u,v)$ има непрекинати парцијални изводи од прв ред во W тогаш сложената функција $g(x,y) = f\,[u(x,y), v(x,y)]$ има непрекинати парцијални изводи во G, и

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (6)$$

Доказ. Нека $(a,b) \in G$ и нека ставиме

$$u(a,b) = \alpha \;,\; v(a,b) = \beta \;, u_x(a,b) = u_x \;, u_y(a,b) = u_y \;, f_x(\alpha,\beta) = f_x \;,\; f_y(\alpha,\beta) = f_y$$

Бидејќи множеството G е отворено постои δ –околина B за (a,b) така што $B \subset G$. Од тука, ако (h,k) го задоволува условот $h^2 + k^2 < \delta^2$, тогаш е јасно дека $(a+h, b+k) \in B \subset G$, така што

$$u(a+h, b+k), v(a+h, b+k)\;, g(a+h, b+k)$$

се добро дефинирани

Од условот во теоремата можеме да напишеме :

$$\vartriangle u = u(a+h, b+k) - u(a,b) = hu_x + ku_y + \eta_1\sqrt{h^2+k^2} \qquad (7)$$

$$\vartriangle v = v(a+h, b+k) - v(a,b) = hv_x + kv_y + \eta_2\sqrt{h^2+k^2} \qquad (8)$$

$$\vartriangle g = f[u(a+h, b+k), v(a+h, b+k)] - f[(u(a,b), v(a,b)] =$$
$$f\,[(\alpha + \Delta u\,, \beta + \Delta v)] - f(\alpha,\beta)$$

бидејќи од (7) и (8) следи дека

$$u(a+h, b+k) = u(a,b) + \Delta u = \alpha + \Delta u$$

и

$$v(a+h, b+k) = v(a,b) + \Delta v = \beta + \Delta v$$

Понатаму, бидејќи функцијата f е диференцијабилна имаме

$$f(\alpha+\Delta u\,,\beta+\Delta v)-f(\alpha,\beta)= f_x(\alpha,\beta)\Delta u+f_y(\alpha,\beta)\Delta v+\eta_3\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}$$

каде $\eta_3(\Delta u,\Delta v)\to 0$ кога $\Delta u,\Delta v\to 0$

Заради диференцијабилноста на u и v во (a,b) следи, исто така, дека $\eta_1(h,k)$ и $\eta_2(h,k)\to 0$ кога $h,k\to 0$.

Од фактот што $\Delta u\to 0$ и $\Delta v\to 0$ ако $(h,k)\to 0$, следи дека $\eta_3\to 0$ ако $(h,k)\to 0$.

Со замена на Δu и на Δv од (7) и (8) добиваме

$$\Delta g = f_x(\alpha,\beta)\left(hu_x+ku_y+\eta_1\sqrt{h^2+k^2}\right)+$$

$$+f_y(\alpha,\beta)\left(hv_x+kv_y+\eta_2\sqrt{h^2+k^2}\right)\eta_3\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}=$$

$$=h\left(f_xu_x+f_yv_x\right)+k(f_xu_y+f_yv_y)+$$

$$+f_x\eta_1\sqrt{h^2+k^2}+f_y\eta_2\sqrt{h^2+k^2}+\eta_3\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}$$

од

$$\Delta u = hu_x(a,b)+ku_y(a,b)+\eta_1\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\Delta v = hv_x(a,b)+kv_y(a,b)+\eta_2\sqrt{h^2+k^2}$$

ако $M>0$ е такво што важи $|u_x|,|v_x|\,,|f_x|\,,|f_y|<M$ за сите,тогаш

$$|\Delta u|\ \le |h|M+|k|M+|\eta_1|\sqrt{h^2+k^2}\le$$

$$\le M\sqrt{h^2+k^2}+\ M\sqrt{h^2+k^2}+|\eta_1|\sqrt{h^2+k^2}=$$

$$=\sqrt{h^2+k^2}(2M+|\eta_1|)\,,|\Delta v|\le\sqrt{h^2+k^2}(2M+|\eta_2|)$$

Аналогно

$$|\Delta v|\le\sqrt{h^2+k^2}(2M+|\eta_2|)$$

од каде добиваме

$$\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\ \le\ \sqrt{(2M+|\eta_1|)^2(h^2+k^2)}+\sqrt{(2M+|\eta_2|)^2(h^2+k^2)}=$$

$$=(4M+|\eta_1|)+|\eta_2|)\sqrt{h^2+k^2}$$

Сега можеме да напишеме:

$$\Delta g = h\left(f_xu_x+f_yv_x\right)+k\left(f_xu_y+f_yv_y\right)+$$

$$+f_x\eta_1\sqrt{h^2+k^2}+f_y\eta_2\sqrt{h^2+k^2}+\eta_3\sqrt{h^2+k^2}P(h,k)$$

каде што

$$|P(h,k)|\leq 4M+|\eta_1|+|\eta_2|.$$

Ако h и $k\to 0$, тогаш η_1 , η_2 и η_3 тежат кон 0.

Следователно го имаме следниот резултат

$$\Delta g=h\left(f_xu_x+f_yv_x\right)+k\left(f_xu_y+f_yv_y\right)+\eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

каде што $\eta(h,k)\to 0$ кога $h,k\to 0$, а тоа е доказ дека сложената функција $g(x,y)=f[u(x,y),\ v(x,y)]$ е диференцијабилна при што

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

и бидејќи десните страни се непрекинати функции по претпоставка, затоа следи дека и левите страни $\frac{\partial g}{\partial x}$ и $\frac{\partial g}{\partial y}$ се непрекинати функции.

На потполно ист начин се докажува и следната теорема:

Теорема4 Нека f е функција од три променливи $f(u_1,u_2,u_3)$ дефинирана на некое отворено множество W од R^3 и нека функциите $u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z,)$ и $u_3(x,y,z)$ се дефинирани на отвореното множество G од R^3. Нека за секоја точка $(x,y,z)\in G$ точката $(u_1(x,y,z)\,,u_2(x,y,z,),u_3(x,y,z))\in W$. Ако функциите u_1,u_2 и u_3 имаат непрекинати парцијални изводи, и ако и функцијата f има непрекинати парцијални изводи, тогаш сложената функција

$$g(x,y,z)=f[u_1(x,y,z)\,,u_2(x,y,z,),u_3\ (x,y,z)]$$

има непрекинати парцијални изводи и притоа:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial y}$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial z}$$

Се разбира теоремата важи и во најопшт случај кога функцијата е од $n-$ независни променливи. Од интерес е да забележиме дека може да имаме случај во функцијата, на пример, од три променливи $f(u_1,u_2,u_3)$ функциите u_1,u_2 и u_3 да бидат од две променливи $u_1=u_1(x,y),u_2=u_2(x,y),u_3=u_3(x,y)$. Се разбира и во тој случај доказот се изведува потполно исто. Специјален случај е ако функциите u_1, u_2 и u_3 се дефинирани на затворен интервал $[a, b]$ и имаат непрекинат извод на отворениот интервал (a, b). Во тој случај имаме $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ за $t \in (a, b)$, па за сложената функција

$$g(t) = f(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

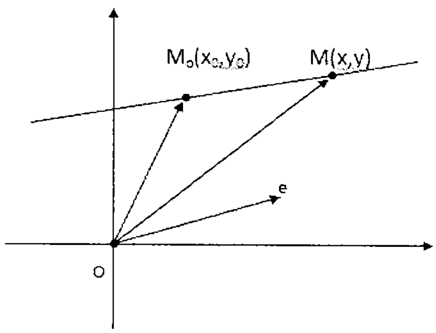
изводот е:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial u_1} u_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial u_2} u_2'(t) + \frac{\partial f}{\partial u_3} u_3'(t)$$

Може да се провери, ако функциите $u_1(t), u_2(t)$ и $u_3(t)$ имаат лев извод во b и десен извод во a, во тој случај сложената функција има исто така лев извод во b и десен извод во a .

Сега, за поедноставно, ќе разгледуваме функција $f(x, y)$ од две променливи определена на некое отворено множество G од R^2 . Нека $M_0(x_0, y_0)$ е фиксна точка од G. Нека $e = (h, k)$ е единичен вектор со координати h и k . (Единичен значи $|e| = \sqrt{h^2 + k^2} = 1$).

Го разгледуваме изразот $(x_0, y_0) + te = (x_0, y_0) + t(h, k)$ каде t е реален број. Точките $(x, y) = (x_0, y_0) + t(h, k)$ лежат на права во рамнината која минува низ точката (x_0, y_0) и е паралелна со векторот e



За $t = 0$ ја имаме точката M_0 , за $t > 0$ точките се на десно од M_0 на правата, а за $t < 0$ се на лево од M_0 на правата. Бидејки точката $M_0(x_0, y_0) \in G$, а G е отворено множество следователно постои δ - околина за (x_0, y_0) која се содржи во G; од тука заклучуваме дека за доволно мало t по апсолутна вредност точките $(x_0, y_0) + t(h, k)$ се од таа δ - околина и затоа има смисол количникот

$$\frac{f[(x_0, y_0) + t(h, k)] - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Овде за да го искористиме погоре изнесеното ги разгледуваме функциите $x(t) = x_0 + th$ и $y(t) = y_0 + th$ за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ е такво што $(x_0 + th\,, y_0 + th) \in G$, бидејќи $x(t)$ и $y(t)$ се диференцијабилни по t

$$\lim_{t \to 0} \frac{f[(x_0, y_0) + t(h,k)] - f(x_0, y_0)}{t}$$

е всушност извод на сложената функција $g(t) = f(x(t), y(t))$ во $t = 0$. Следователно имаме

$$\lim_{t \to 0} \frac{f[(x_0, y_0) + t(h,k)] - f(x_0, y_0)}{t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

Последниот израз претставува извод на функцијата во правецот на векторот e во дадената точка $M_0(x_0, y_0)$ и се бележи со $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0, y_0)$.

Специјално, ако $e = (1,0)$ тогаш имаме

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

т.е. парцијалниот извод по x ; ако $e = (0,1)$ тогаш

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Понатаму ќе видиме дека изводот по правец игра важна улога како во теоријата на функциите така и во нивната примена.

Да се потсетиме исто така, дека секое пресликување $t \to (x(t), y(t))$ каде што $t \in [a, b]$, а $x(t)$ и $y(t)$ се непрекинати функции на интервалот $[a, b]$ се вика рамниска крива, а променливата t се вика параметар за кривата. Ако имаме пресликување $t \to \big(x(t)\,, y(t)\,, z(t)\big)$ за $t \in [a, b]$, тогаш велиме дека тие определуваат просторна крива дефинирана на интервалот $[a, b]$.

Со ова ќе се сретнеме и при дефиницијата на криволинискиот интеграл и таму малку пошироко ќе се позанимаваме со кривите.

Задачи

1. Нека $f(u) = u_1{}^2 + u_2^2$, $u_1 = 1 + t$, $u_2 = 1 + t$, $u = (u_1, u_2)$

Да се пресмета $\frac{d}{dt} f(u(t))$ на два начина :

a) Со помош на теоремата.

b) Ако прво се заменат изразите за u_1 и u_2 во функцијата , а потоа да се бара извод по t.

2. Нека $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Да се пресмета $\frac{d}{dt} f\big(x(t), y(t)\big)$ на два начина како во задача1.

3. Нека $f(x,y)$ има непрекинати први изводи, нека

$x = s\cos\alpha - t\sin\alpha, y = s\sin\alpha + t\cos\alpha$, каде α е константа. Да се пресмета:

$$(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2$$

4. Да се пресмета изводот на функцијата $x^2 + 4xy - z^2 + 2yz$ по однос на кривата

$x = t,\ y = 2t^2$, $z = 1 - t^3$.

5. Да се пресмета изводот на функцијата $xyz + x^2 + y^2 - z^2$ по однос на кривата

$x = 2t + 1$, $y = \sin t$, $z = e^t$ во точката $t = 0$.

6. Ако $z = f(x,y)$, и $y = g(x)$да се определат $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{d^2z}{dx^2}$.

7. Нека $z = f(x,y)$. Покажи дека

$$x\frac{\partial t}{\partial x} - y\frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

8. Нека $h(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$ каде $f(u,v)$ е функција која што има непрекинати изводи од втор ред . Да се пресмета $h_{xx} + h_{yy}$ преку изводите на f.

Задачи за вежби

1. Да се пресметаат парцијалните изводи

a) $z = x - y$

б) $z = x^3y - y^3x;$

в) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x};$

г) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}};$

д) $z = ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}$

ѓ) $z = x^y$

е) $z = e^{-\frac{x}{y}}$

ж) $z = (\frac{1}{3})^{\frac{y}{x}}$

2. $u = In(1 + x + y^2 + z^2)$. Да се најде $u'_x + u'_y + u'_z$ при $x = y = z = 1$.

Решение:

$$u'_x = \frac{1}{1 + x + y^2 + z^2}, u'_y = \frac{2y}{1 + x + y^2 + z^2}; u'_z = \frac{2z}{1 + x + y^2 + z^2}$$

$$u'_x(1,1,1) = \frac{1}{1 + 1 + 1^2 + 1^2} = \frac{1}{4}$$

$$u'_y(1,1,1) = \frac{2}{1 + 1 + 1^2 + 1^2} = \frac{1}{2};$$

$$u'_z(1,1,1) = \frac{2}{1 + 1 + 1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}$$

3. Да се определи тоталниот диференцијал за следниве функции:

а) $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2;$

б) $z = \frac{1}{2}In(x^2 + y^2);$

в) $z = \frac{x + y}{x - y}$

г) $z = arcsin\frac{x}{y};$

д) $z = sin(xy)$

ѓ) $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

4. Да се определи полниот диференцијал за $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ при што

$$x = 3; y = 4, \Delta x = 0.1 \text{ и } \Delta y = 0.2$$

Решение:

$$z'_x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$z'_x(3,4) = 1 - \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$z'_y(3,4) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = \frac{2}{5} \cdot 0.1 + \frac{1}{5} \cdot 0.2 = \frac{2}{25}.$$

5. Да се најде полниот диференцијал за функцијата

$$z = e^x \text{ при } x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$$

6. Да се определи тоталниот диференцијал за

$$z = \frac{xy}{x^2 - y^2}, \text{каде } x = 2, y = 1, \Delta x = 0.01, \Delta y = 0.03$$

7. По формулата

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + df(x, y) \qquad (*)$$

Приближно да се пресмета вредноста на функцијата

$$z = \frac{x + 3y}{y - 3x} \text{ за } x = 2.5 \text{ и } y = 3.5$$

Решение: Земаме $x = 2$, $y = 3, \Delta x = 0.5, \Delta y = 0.5$. Треба да се пресмета тоталниот диференцијал и $z(2,3)$, и на крајот се заменува со горната равенка.

8. Приближно да се пресмета $1{,}04^{2{,}02}$

Решение: Ја земаме функцијата

$$z = x^y, x = 1; \Delta x = 0.04; y = 2, \Delta y = 0.02$$

$$z'_x = yx^{y-1}; \; z'_y = x^y In x$$

$$z'_x(1,2) = 2 \cdot 1^{2-1} = 2 \; z'_y(1,2) = 1^2 \cdot In 1 = 0$$

$$z(1,2) = 1^2 = 1$$

По формулата $(*)$

$$1{,}04^{2{,}02} \approx z(1{,}2) + dz = 1 + z_x\ (1{,}2) \cdot \Delta x + z_y(1{,}2) \cdot \Delta y =$$

$$1 + 2 \cdot 0.04 + 0 \cdot 0.02 = 1.08$$

9. Приближно да се пресмета

$$In\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$$

Да се земе функцијата

$$z = In(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1);\ x = 1, y = 1 \Delta x = 0.03; \Delta y = -0.02.$$

10. Да сè пресметаат парцијалните изводи по x и y, ако

$z = u^2 - v - v^2 u$, каде $u = xcosy, v = xsiny.$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv - v^2, \frac{\partial z}{\partial v} = u^2 - 2uv;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y, \frac{\partial v}{\partial x} = \sin x, \frac{\partial u}{\partial y} = -x \sin y, \frac{\partial v}{\partial y} = x \cos y.$$

Со замена во горните формули:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (2uv - v^2)cosy + (u^2 - 2uv) \sin y =$$

$$=(2x^2 \sin y \cos y - x^2 sin^2 y)cosy + (x^2 cos^2 y - 2x^2 sin^2 y) \sin y$$

На ист начин $\frac{\partial z}{\partial y}$.

11. $f(u, v) = \ln(e^u + e^v),\ u = x,\ v = x^3$. Да се најде $g'(x)$ каде $g(x) = f(x, x^3)$.

Решение:

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{e^u}{e^u + e^v}; \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{e^v}{e^u + e^v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2.$$

од каде добиваме

$$g'(x)=\frac{e^x}{e^x+e^{x^3}}\cdot 1+\frac{e^x}{e^x+e^{x^3}}\cdot 3x^2.$$

12. За $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$ да се најдат z'_x и z'_y.

Решение: ставаме $u=x^2-y^2, v=e^{xy}$.

$$z'_x=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$z'_y=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial v}{\partial x}=ye^{xy},\frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\frac{\partial v}{\partial y}=xe^{xy}$$

$$z'_x=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot ye^{xy}$$

$$z'_y=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-2y)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot xe^{xy}.$$

13. Да се покаже дека функцијата $g(x,y)=arctg\frac{u}{v}$ каде $u=x+y,\ v=x-y$ ја задоволува релацијата

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

14. Да се покаже дека функцијата $z=\varphi(x^2+y^2)$ ја задоволува релацијата

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\cdot 2x,\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\cdot 2y.$$

$$y\cdot\varphi'\cdot 2x-x\cdot\varphi'\cdot 2y=0$$

15. Да се пресметаат парцијалните изводи од втор ред за $z=x^3+xy^2-5xy^3+y^5$.

16. Да се пресметаат парцијалните изводи од втор ред за функциите

а) $z=x^y$

б) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$.

17. $z=In(e^x+e^y)$. Да се покаже дека

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1 \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y}-(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2=0$$

18. За која вредност на a, функцијата $v=x^3+axy^2$ ја задоволува равенката

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y}=0$$

(одговор: $\alpha=-3$)

19. Да се определат диференцијалите од втор ред за функциите:

а) $z=xy^2-x^2y$;

б) $z=In(x-y)$;

в) $z=\frac{1}{(x^2+y^2)}$

г) $z=e^{xy}$.

8 Имплицитни функции

Нека $F(x,y)$ е функција дефинирана на отвореното множеството G од R^2. Тука не интересираат оние точки $(x,y)\in G$ за кој што важи $F(x,y)=0$. Ако тие точки можеме да ги запишеме во вид $y=g(x)$, т.е. тие се од видот $[x,g(x)]$, тогаш велиме дека со равенката $F(x,y)=0$ имплицитно е дефинирана функцијата $g(x)$, и равенката

$$F(x,y)=0$$

ја викаме имплицитна равенка.

Ако $F(x,y)=x^2+y^2-1$, тогаш имаме

$$x^2+y^2-1=0 \qquad (1)$$

од каде

$$y=\pm\sqrt{1-x^2} \text{ за } x\in[-1,1]$$

Во овој случај имаме две функции определени на интервалот $[-1,1]$, кои ја задоволуваат равенката (1) за $-1\le x\le 1$, имено $y=g(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$.

Да забележиме дека ако (x,y) припаѓа на некоја мала околина за точката (x_0, y_0) која е решение на равенката (1) со $|x_0| < 1$, тогаш постои само едно решение $y = g(x)$ кое го задоволува условот $y_0 = g(x_0)$.

Сега ќе дадеме, без доказ, една општа теорема за имплицитните функции. Таа теорема е една од оние теореми кои го носат епитетот фамозни теореми во математиката.

Теорема1 Нека $F(x,y)$ е функција определена на отвореното множество G во R^2 и нека F има непрекинати парцијални изводи.

Ако $(x_0, y_0) \in G$ и ако

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad (1)$$

$$F'_y(x_0, y_0) \neq 0 \qquad (2)$$

тогаш постои правоаголник R во G дефиниран со неравенствата

$$|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \beta \qquad (3)$$

така што точките (x,y) од R за кој што важи (1), се од облик $[x, g(x)]$ каде $g(x)$ е функција дефинирана на интервалот $|x - x_0| < \alpha$, и $g(x)$ има непрекинат извод на тој интервал, и притоа

$$g'(x) = -\frac{\mathrm{F}'_x(x, g(x))}{\mathrm{F}'_y(x, g(x))} \text{ако } |x - x_0| < \alpha \qquad (4)$$

Доказот на оваа теорема е доста суптилен и, поради тоа, теоремата е надвор од рамките на оваа книга, но, од една страна заради важноста на теоремата и од друга страна, веќе повеќе пати имаме работа со имплицитни функции, затоа и ја дадовме формулацијата.

Да забележиме дека условот (2) не може да се испушти како што се гледа од примерот

$$F(x,y) = x^2 + y^2 \text{ за } (x_0, y_0) = (0{,}0)$$

Нешто поопшт случај е ако разгледаме функција $F(x,y,z)$ кој има непрекинати парцијални изводи, при што во точката(x_0, y_0, z_0) важи $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ тогаш постои паралелопипед:

$$|x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \alpha, |z - z_0| < \beta$$

таков што, за секое (x,y) од квадратот $|x - x_0| < \alpha$, $|y - y_0| < \alpha$, постои единствена точка $z = g(x,y)$, при што $|z - z_0| < \beta$. Функцијата $z = g(x,y)$ има непрекинати парцијални изводи и тие се дадени со следните формули:

$$g'_x(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x,y))}$$

$$g'_y(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}$$

и притоа само точките $(x,y,g(x,y))$ ја задоволуваат равенката $F(x,y,z)=0$

Задачи за вежба

1. Да се пресмета $y'(x)$ на функцијата определена со равенката

$$x^3y - xy^3 = a^4$$

Решение: Според теоремата, во точките во кои се задоволени условите имаме

$$F(x,y) = x^3y - xy^3 = a^4$$

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$$

каде $y = g(x)$

$$y'(x) = -\frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3xy^2}$$

На друг начин, изводот го определуваме, ако бараме извод од секој член во дадената равенка по x сметајќи ја y за функција од x,

$$3x^2y + x^3y' - y^3 - 3xy^2y' = 0$$

$$y'(x^3 - 3xy^2) = y^3 - 3x^2y$$

$$y' = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3xy^2} = -\frac{3x^2y - y^3}{3xy^2 - x^3}.$$

2. Да се провери дали равенката $1 + x^2y^2 - x^4 - y^4 = 0$ во точката (1,1) определува функција $y = g(x)$ и да се определи нејзиниот извод.

Решение:

$$F(x,y) = 1 + x^2y^2 - x^4 - y^4$$

$$F(1,1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

$$F'_y(1,1) = 2 - 4 = -2 \neq 0$$

Исполнети се условите на теоремата. Изводот се определува како во претходниот случај.

3. Дали може равенката $x+y+z-sinxyz=0$ да се реши по $z=g(x,y)$ во околина на точката (0,0,0)

Решение

$$F(x,y,z)=x+y+z-sinxyz;\ F(0,0,0)\ =\ 0+0+0-\ sin0=0.$$

$$F_z'=1-xy\cos xyz$$

$$F_z'(0,0,0)=1-0=1\neq 0$$

Бидејќи $F_z'(0,0,0)\neq 0$ постои функција $z=g(x,y)$ во некоја околина на (0,0)

Парцијалните изводи се

$$g_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}$$

$$g_y=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}$$

$$z=g(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1-yz\cos xyz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=1-xzcosxyz$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=1-xy\cos xyz$$

4. Да се определи $y=g(x)$ од равенката $x^2+y^2-x^3=0$ во околина на точката (5,10).

Решение:

$$F(x,y)=x^2+y^2-x^3;F(5,10)=5^2+10^2-5^3=0$$

$$F_y'=2y,\text{и}\ F_y'(5,10)=2\cdot 10=20$$

Според теоремата, постои функцијата $y = g(x)$ при што $10 = g(5)$. Од равенката имаме

$$y = \pm\sqrt{x^3 - x^2} = \pm x\sqrt{x-1}$$

Функцијата е

$$y = x\sqrt{x-1}.$$

9 Инверзни пресликувања

Нека $T: D \to G$ е определено пресликување каде $D, G \subset R^3$.Тоа значи дека на секоја точка $(x, y, z) \in D$ одговара само една точка $(u, v, h) \in G$ така што

$$u = u(x, y, z)\,, v = v(x, y, z)\ ,\ h = h(x, y, z).$$

односно

$$T(x, y, z) = \big(u(x, y, z), v(x, y, z)\,, h(x, y, z)\big)$$

што покажува дека таквото пресликување е определено со три функции u, v и h определени на D. Функциите u, v и h се викаат координатни функции за пресликувањето.

Ако пресликувањето $T: D \to G$ е обратно еднозначно, тогаш, можеме на природен начин да дефинираме пресликување $S: G \to D$ на следниот начин:

$$S(u, v, h) = (x, y, z)$$

каде што $(x, y, z,) \in D$ е онаа точка која што со пресликувањето T оди во точката (u, v, h) т.е.

$$T(x, y, z) = (u, v, h).$$

На овој начин дефинираното пресликување $S: G \to D$ се вика инверзно пресликување за T и важи:

$$S\big(T(x, y, z)\big) = (x, y, z) \text{ и } T\big(S(u, v, h)\big) = (u, v, h)$$

тоа значи $ST = I$ и $TS = I$, каде што I е ознака за идентичното пресликување и тоа во првиот случај од D на D т.е. $I\,(x, y, z) = (x, y, z)$, а во вториот случај имаме $I(u, v, h) = (u, v, h)$. Инверзното пресликување S за T вообичаено се означува со T^{-1}, според тоа $S^{-1} = T$.

Пример. Да се определи инверзното пресликување на пресликувањето $u = 2x - 3y\,, v = -x + 2y$ од R^2 на R^2. Во овој случај $T(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$

бидејки функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ се определени на R^2 затоа велиме дека е пресликување од R^2 во R^2.

Прво треба да провериме дека е обратно еднозначно пресликување.

Нека (u,v) е дадена точка од R^2, сега треба да ја определиме точката (x,y) која што ги задоволува равенките:

$$2x-3y=u$$

$$-x+2y=v$$

Детерминантата на овој систем е

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4-3=1\neq 0$$

според тоа како што знаеме од Крамеровото правило постои единствено решение (x,y) кое го задоволува системот. Со тоа покажавме дека пресликувањето $T(x,y)=(2x-3y\,,-x+2y)$ е обратно еднозначно од R^2 на R^2 , при што за дадената точка (u,v) имаме:

$$x=\frac{\begin{bmatrix} u & -3 \\ v & 2 \end{bmatrix}}{\Delta}=\frac{2u+3v}{1}=2u+3v$$

$$y=\frac{\begin{bmatrix} 2 & u \\ -1 & v \end{bmatrix}}{\Delta}=\frac{2v+u}{1}=2v+u$$

од каде заклучуваме, дека инверзното пресликување е определено со

$T^{-1}(u,v)=(x,y)$ каде што $x=2u+3v$, $y=2v+u$.

Во врска со инверзните пресликувања во R^3 важи следната теорема.

Теорема1 Нека $T(x,y,z)=(u,v,h)$ е пресликување на $D\subset R^3$ каде што u,v и h се функции од (x,y,z) со непрекинати парцијални изводи, нека $(x_0,y_0,z_0)\in D$ и нека $T(x_0,y_0,z_0)=(u_0,v_0,h_0)$

Ако детерминантата:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial u}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial v}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial h}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix}$$

е различна од нула, тогаш постојат отворени кругови $B_1((x_0,y_0,z_0),r_1)$и $B_2((u_0,v_0,h_0),r_2)$ такви што за секое $(u,v,h)\in B_2$ одговара само една точка (x,y,z) од B_1 таква што $T(x,y,z)=(u,v,h)$. Според тоа ние имаме пресликување

$S: B_2 \to B_1$ притоа функциите $x = x(u, v, h), y = y(u, v, h)$ и $z = z(u, v, h)$ имаат непрекинати парцијални изводи на B_2.

Детерминантата определена со парцијалните изводи на u, v и h кратко се обележува со

$$J = \frac{\partial(u, v, h)}{\partial(x, y, z)}$$

и се вика во литературата ***Јакобијан*** за даденото пресликување во дадената точка (x, y, z).

Доказот на ова теорема се базира на теоремата за имплицитни функции и ние тука нема да го дадеме .

Важно е да забележиме, дека теоремата дава решение локално (во некоја околина), а не целосно (глобално) на целото множество D. Затоа овие инверзни пресликувања се викаат локални, за разлика од глобалните пресликувања, ако постојат.

Сега ќе разгледаме еден интересен пример во врска со теоремата.

Пример 1 Нека ја разгледаме трансформацијата

$$x = r\cos\varphi \quad , \qquad y = r\sin\varphi \quad , \qquad 0 \le r < \infty \quad , \qquad -\infty < \varphi < \infty$$

од множеството на сите точки (r, φ) во R^2 . Оваа трансформација е непрекинато-диференцијабилна со Јакобијан,

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Ако $r > 0$ тогаш дадената трансформација локално има инверзна непрекинато диференцијабилна трансформација дефинирана со

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \varphi = \arg(x, y)$$

каде што функцијата $\arg(x, y)$ може соодветно да се определи со помош на $arctg\ \frac{y}{x}$ во зависност од (r_0, φ_0) и (x_0, y_0).

Понатаму оваа важна функција ќе ја разгледаме подетално.

Пример2 Нека $(x, y, z) \in R^3$ е точка различна од $O(0,0,0)$ т.е. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ r > 0$.

Јасно е дека $z^2 \le r^2$ или $\left(\frac{z}{r}\right)^2 \le 1$ или $-1 \le \frac{z}{r} \le 1$, знаеме дека функцијата $cos\theta$ строго монотоно опаѓа на интервалот $[0, \pi]$ со вредности на интервалот $[-1,1]$, според тоа постои единствено $\theta \in [0, \pi]$ такво што $\frac{z}{r} = cos\theta$ т.е. $z = rcos\theta$. Понатаму:

$$x^2 + y^2 + r^2 \cos^2\theta = r^2 \,,\;\; x^2 + y^2 = r^2 - r^2cos^2\theta = r^2sin^2\theta$$

бидејќи за $0 \le \theta \le \pi, \sin\theta \ge 0$ следи дека $r \sin\theta \ge 0$, сега во рамнината постои $0 \le \varphi < 2\pi$ така што $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = rsin\theta \cdot sin\varphi$. На тој начин определивме трансформација дадена со

$$\begin{gathered} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{gathered}$$

каде $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ и $0 \le \theta \le \pi$

Тројката (r, φ, θ) ја определува точката (x, y, z) во R^3 и оваа тројка на броеви се вика поларни координати за точката (x, y, z). Јакобијанот на ова непрекинато диференцијабилна трансформација е

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = r^2 \sin\theta$$

при што ако $0 < \theta < \pi$, $J > 0$, а тоа значи дека, локално постои инверзна непрекинато диференцијабилна трансформација.

Поларните координати во R^2 и R^3 играат важна улога кај смена на променливите во двојните и тројните интеграли .

Напоменуваме дека сосема аналогно може да бидат определени поларни координати и за точки од просторот R^n .

Задача. Нека $u(x, y)$ е функција чиј што парцијални изводи заклучно од втор ред се непрекинати, или уште се вели дека $u(x, y)$ е непрекинато диференцијабилна од втор ред. Ако $x = r\cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$ тогаш $u(r\cos\varphi , r\sin\varphi) = v(r, \varphi)$ е функција од променливите r и φ . Да се покаже релацијата:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

Ако функцијата u е таква што

а)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

на некое отворено множество D , тогаш функцијата $u(x, y)$ се вели дека е хармониска на D , и во тој случај ќе важи

б)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}=0$$

Релацијата под а) се вика ***Лапласова диференцијална равенка***, која што во поларни координати има облик како б).

Во математиката усвоен е симболот

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Овој симбол се вика ***Лапласов оператор*** или накратко ***Лапласијан*** . Ако се запише Δu тоа значи

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Според тоа Лапласовата равенка во операторски облик е $\Delta u=0$.

Пример: Функцијата $v(r,\varphi)=lnr$ е хармониска, бидејќи

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{r},\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=-\frac{1}{r^2} \text{ и } \frac{\partial v}{\partial \varphi}=0$$

значи

$$-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}+0=0$$

според тоа можеме да констатираме дека функцијата

$$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}, \qquad x^2+y^2>0$$

е хармониска на областа $D=R^2\setminus\{(0,0)\}$. Тоа може читателот да го провери и во правоаголни координати (x,y).

10. Теорема за средна вредност и Тајлорова формула

Теоремата за средна вредност, која ја даваме тука за функции од повеќе променливи, е аналогна на теоремата на Лагранж кај функции од една променлива.

Доказот на теоремата го даваме за функции од две променливи, но потполно исто се докажува и за функциите со повеќе променливи.

Теорема 1 Нека функцијата $f(x,y)$ е дефинирана на отвореното множество G и има непрекинати први парцијални изводи. Тогаш за дадена точка (x_0,y_0) важи формулата

$$f(x_0+h,y_0+\mathrm{k})-f(x_0,y_0) \\ = hf_x'(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf_y'(x_0+\theta h,y_0+\theta k) \qquad (1)$$

за некое $0<\theta<1$

Доказ: Ја разгледуваме функцијата

$$\varphi(t)=f(x_0+th,y_0+tk)$$

Според правилото за извод на сложена функција, за $0\le t\le 1$ имаме

$$\varphi'(t)=hf_x'(x_0+th,y_0+tk)+kf_y'(x_0+th,y_0+tk)$$

Со примена на теоремата на Лагранж за функцијата $\varphi(\mathrm{t})$ на интервалот $[0,1]$, добиваме

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta) \text{ за } 0<\theta<1.$$

Како

$$\varphi(0)=\mathrm{f}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0), \qquad \varphi(1)=\mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\mathrm{h},\mathrm{y}_0+\mathrm{k}),$$

имаме

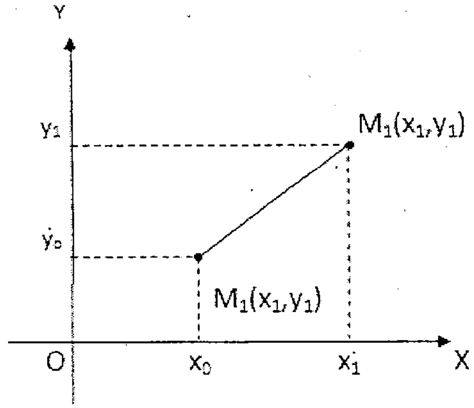
$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\mathrm{h},\mathrm{y}_0+\mathrm{k})-\mathrm{f}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)=\mathrm{hf}_\mathrm{x}'(\mathrm{x}_0+\theta\mathrm{h},\mathrm{y}_0+\theta\mathrm{k})+\mathrm{kf}_\mathrm{y}'(\mathrm{x}_0+\theta\mathrm{h},\mathrm{y}_0+\theta\mathrm{k})$$

Јасно е дека наместо h и k можеме да пишуваме Δx и Δy, соодветно, но за поедноставно, и досега користевме на некои места h и k.

Сега со помош на Теорема1. ја докажуваме следнава теорема.

Теорема 2 Ако функцијата $f(x,y)$ има непрекинати парцијални изводи на множеството D во кое кои било две точки можат да се поврзат со линија составена од отсечки (искршена линија) и, ако $\mathrm{f}_\mathrm{x}(x,y)=0$ и $\mathrm{f}_\mathrm{y}(x,y)=0$ во D, тогаш $f(x,y)$ е константна функција.

Доказ: Нека точките $\mathrm{M}_0(x_0,y_0)$ и $\mathrm{M}_1(x_1,y_1)$ се од множеството D и нека отсечката која ги поврзува е исто така од D,



Слика1

точките (x,y) од R^2 определени на следниот начин: $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ се наоѓаат на отсечката $\mathrm{M_0M_1}$ така на пример, за $t = 0$ ја добиваме точката $\mathrm{M_0}$, за $t = 1$ ја добивме точката $\mathrm{M_1}$.

Сега ја користиме функцијата $\varphi(t)$ од претходната теорема

$$\varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$$

каде $0 \leq t \leq 1, h = x_1 - x_0, k = y_1 - y_0$

Со примена на Теорема1 имаме

$$f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), 0 < \theta < 1$$

Бидејќи парцијалните изводи се еднакви на нула, добиваме

$$f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0)$$

Ако точката (x,y) не можеме да ја поврземе со отсечка што лежи во множеството D, тогаш, според условот во теоремата, ги поврзуваме со искршена линија и на секоја отсечка од искршената линија го применуваме докажаното. Пак добиваме дека $f(x,y) = f(x_0, y_0)$ за било која точка $(x,y) \in D$. Според тоа, функцијата $f(x,y)$ во множеството D има иста вредност $f(x_0, y_0)$ во секоја точка (x,y).

Оваа теорема е, слична на последицата од теоремата на Лагранж, за константна функција на даден интервал, ако има извод на тој интервал еднаков на нула.

Нека сега земеме функцијата $f(x,y)$ да има непрекинати парцијални изводи до ред $n+1$, заклучно на отвореното множество D, на кое е определена функцијата. Нека точките$(x,y), (x_0, y_0) \in D$. Ставаме $h = x - x_0, k = y - y_0$. Бидејќи множеството D е отворено, ние можеме да сметаме дека точката (x,y) е од некоја

δ −околина за точката (x_0, y_0), така што и отсечката која ги поврзува точките (x_0, y_0) и (x, y) е во таа околина, т.е. во D.

Сега ја разгледуваме функцијата

$$\varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk), \text{ за } 0 \leq t \leq 1$$

Ги определуваме изводите на функцијата $\varphi(t)$

$$\varphi'(t) = hf'_x(x_0 + th, y_0 + \mathrm{t}k) + kf'_y(x_0 + \mathrm{t}h, y_0 + \mathrm{t}k),$$

$$\varphi''(t) = h[hf''_{xx}(x_0 + th, y_0 + \mathrm{t}k) + kf''_{xy}(x_0 + th, y_0 + \mathrm{t}k)] +$$

$$+k\left[hf''_{xy}(x_0 + th, y_0 + \mathrm{t}k) + kf''_{yy}(x_0 + \mathrm{t}h, y_0 + \mathrm{t}k)\right] =$$

$$h^2 f''_{xx}(x_0 + th, y_0 + \mathrm{t}k) + 2\mathrm{h}kf''_{xy}(x_0 + \mathrm{t}h, y_0 + \mathrm{t}k)] + \mathrm{k}^2 f''_{yy}(x_0 + th, y_0 + \mathrm{t}k)$$

Продолжувајќи на тој начин, го добиваме следниот израз за n-от извод на функцијата $\varphi(t)$

$$\varphi^{(n)}(t) = h^n \frac{\partial^n f}{\partial x^{\mathrm{n}}}(x_0 + th, y_0 + tk) + \binom{n}{1} h^{n-1} k \; \frac{\partial^{\mathrm{n}} f}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{n}-1}\, \partial \mathrm{y}}(x_0 + th, y_0 + tk) + \cdots$$

(2)

$$+\binom{n}{j} h^{n-j} k^j \, \frac{\partial^{\,\mathrm{n}} f}{\partial^{\mathrm{n-j}}\, \partial \mathrm{y}^{\mathrm{j}}}(x_0 + th, y_0 + tk) + \cdots + k^n \frac{\partial^{\mathrm{n}} f}{\partial y^{\mathrm{n}}}(x_0 + th, y_0 + tk)$$

Формулата (2) може да се добие постапно со математичка индукција или со примена на комбинаторика .

По аналогија на биномната формула, десната страна од (2) кратко ја запишуваме на следниот начин

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{k}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) \qquad (3)$$

во $(x_0 + th, y_0 + tk)$ при што на пример, членот по ред четири ќе биде

$$\binom{n}{3} h^{n-3} k^3 \, \frac{\partial^{\,\mathrm{n}} f}{\partial \mathrm{x}^{\,\mathrm{n}-3}\, \partial \mathrm{y}^3}(x_0 + th, y_0 + tk)$$

Нека сега ја напишеме Тајлоровата формула за функцијата $\varphi(t)$ во $t = 0$,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}1 + \frac{\varphi''(0)}{2!}1^2 + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, 0 < \theta < 1 \qquad (4)$$

Како $\varphi(0) = f(x_0, y_0)$ и $\varphi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x, y)$со замена во (4), користејќи ја ознаката (3), ја добивме следната теорема:

Теорема 3 Нека функцијата $f(x, y)$ има непрекинати парцијални изводи до $n + 1$ —ви ред на отвореното множество D. Тогаш, за дадени точки (x_0, y_0) и (x, y), под услов, отсечката што ги поврзува двете точки да се наоѓа во D, важи следната формула

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x, y) + R_n \qquad (5)$$

во точката (x_0, y_0) каде

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(x, y)$$

во точка $(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$, каде $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ и $0 < \theta < 1$

Теоремата3. се вика Тајлорова теорема за функции од две променливи. Формулата (5) е Тајлорова формула, а $R_n(x, y)$ е остаток во формулата.

Обично се вели формулата (5) е Тајлорова формула во околина на точката (x_0, y_0), или уште функцијата $f(x, y)$ е развиена во Тајлорова формула во точката (x_0, y_0).

Сосема аналогно може да се пишува Тајлорова формула и за функции од три, четири и било колку аргументи.

Пример 1 . Да се напише Тајлоровата формула за функцијата $f(x, y)$ во точката (x_0, y_0) до вторите парцијални изводи, заклучно .

Решение: Според Тајлоровата формула

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\, k^2\right]$$

што значи,

$$R_1(x,y)=\frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+2\,hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+\ k^2\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.\quad .\qquad +(x_0+\theta h,y_0+\theta k\right]$$

Задачи за вежба

1. $f(x,y)=x^3+2y^3-xy;$ да се разложи $f(x_0+h,y_0+k)$ по степените на h и k.

Решение : Ги определуваме изводите :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=6$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=6y^2-x,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=12$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1$$

$$f(x_0+h,y_0+k)=x_0^3+2y_0^3-x_0y_0+\frac{1}{1!}[h(3x_0{}^2-y_0)+k(6y_0{}^2-x_0)]+$$
$$\frac{1}{2!}[h^2 6x_0-2hk+k^2\,12y_0\,]+\frac{1}{3!}[6h^3\ +12k^3]$$

Ако ставиме $x=x_0+h, y=y_0+k,$

$$x^3+2y^3-xy=x_0^3+2y_0^3-x_0y_0+(3x_0^2-y_0)(x-x_0)+$$

$$+(6y_0^2-x_0)(y-y_0)+3x_0(x-x_0)^2-(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+6y_0(y-y_0)^2+(x-x_0)^3+2(y-y_0)^3$$

2. Функцијата $f(x,y)=x^3+y^2-6xy-39x+18y+4$ да се развие по Тајлоровата формула во точката (5,6).
3. Функцијата $f(x,y)=\frac{xy^3}{4}-yx^3+\frac{x^2y^2}{2}-2x+3y-4$, да се развие по Тајлорова формула во (1,2) ограничувајќи се до изводите од втор ред, приближно да се пресмета $f(1{,}02;\,2{,}03)$.

Решение: Ги наоѓаме парцијалните изводи,и со замена добиваме

$$f(1,2) = \frac{1 \cdot 2^3}{4} - 2 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 2^2}{2} = 2$$

$$f(1+h, 2+k) = 1 + \frac{1}{1!}(-2h + 7k) + \frac{1}{2!}(-8h^2 + 4k^2 + 8hk) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(-12\,\mathrm{h}^3 + \frac{3}{2}\mathrm{k}^3 + 3 \cdot (-2)\mathrm{h}^2\mathrm{k} + 3 \cdot 5\mathrm{hk}^2\right) +$$

$$+\frac{1}{4!}\left(0 + \binom{4}{1} \cdot (-6)\mathrm{h}^3\mathrm{k} + \binom{4}{2} \cdot 2\mathrm{h}^2\mathrm{k}^2 + \binom{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\mathrm{hk} + 0^3\right)$$

$$\frac{(1+h)(2+k)^3}{4} - (1+h)^3(2+k) + \frac{(1+h)^2(2+k)^3}{2} - 2(1+h) + 3(2+k) - 4 =$$

$$= 1 + 7k - 2h + 4hk - 4h^2 + 2k^2 + \frac{5}{2}hk^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\,k^3 - 2h^3 - h^2k - h^3k + \frac{h^2k^2}{2} + \frac{1}{4}hk^3$$

Бидејќи $h = 0{,}02$; $k = 0{,}03$ затоа $f(1{,}02; 2{,}03) \approx 2{,}1726$.

4. Да се разложи функцијата $f(x,y) = x^y$ во точката (1,1) или се вели по степените $(x-1), (y-1)$ заклучно до изводите од трет ред . Задржувајќи се до вторите степени (вторите изводи) приближно да се пресмета $1{,}1^{1{,}02}$.

5. Да се најдат неколку први членови од Тајлоровата формула за функцијата $e^x\ln(1+y)$ во околина на точката (0,0).

6. Да се добие приближна формула

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

Доказ: Ја развиваме функцијата $f(x,y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ во (0,0). Ги определуваме изводите:

$$f'_x(x,y) = -\frac{\sin x}{\cos y}, f''_{xx}(x,y) = -\frac{\cos x}{\cos y}$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y}, \qquad f'_y(x,y) = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y}$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\cos x \cos y \cdot \cos^2 y + \cos x \sin y \cdot 2\cos y \sin y}{\cos^4 y}$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\cos x}{\cos^3 y}$$

Понатаму,

$$f(0,0) = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1, \qquad f'_x(0,0) = 0, f''_{xx}(0,0) = -1$$

$$f''_{xy}(0,0) = 0, \qquad f'_y(0,0) = 0, \qquad f''_{yy}(0,0) = 1$$

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 + \frac{1}{1!}(0 \cdot x + 0 \cdot y) + \frac{1}{2!}(-x^2 + 0 + y^2) + R_2(x,y)$$

од каде

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

7. Да се пресметаат неколку први членови во разложувањето по степените $(x-1)$ и $(y-1)$ или што е се исто во разложувањето во точката $(1,1)$ по Тајлоровта формула на функцијата z, зададена со имплицитната равенка:

$$z^3 + xy - xy^2 - x^3 = 0$$

Упатство: Парцијалните изводи се определуваат од равенката по правилото на имплицитните функции. На пример,

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 - 3x^2 = 0$$

од каде

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2 + y^2}{3z^2 + y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{3 \cdot 1^2 + 1^2}{3 \cdot 1^2 + 1} = 1$$

Се разбира, најнапред внимателниот читател ќе ги провери условите за имплицитна функција т.е. ќе ја разгледа функцијата

$$F(x,y,z) = z^3 + yz - xy^2 - x^3$$

$$F(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 4 \neq 0$$

Следователно дадената равенка во некоја околина на $(0,0)$ еднозначно определува функција $z = g(x,y)$ која има непрекинати парцијални изводи од било кој ред.

11. Максимум и минимум на функции од две променливи

Нека функцијата

$$z = f(x,y) \qquad (1)$$

е определена во некоја δ околина на точката $M_0(x_0, y_0)$.

Велиме, дека функцијата (1) има локален максимум во точката $M_0(x_0, y_0)$, ако за секоја точка $M_1(x_0 + h, y_0 + k)$, од таа δ –околина или поедноставно речено за доволно мали h и k важи неравенството

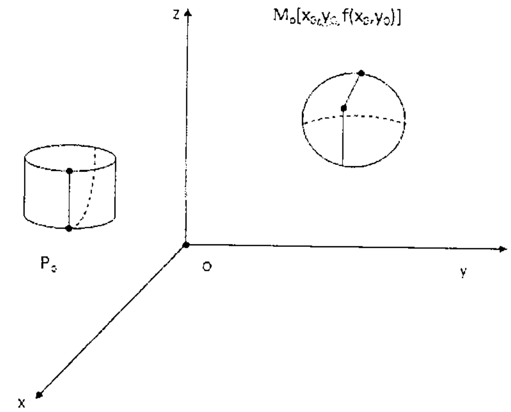
$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < 0 \qquad (2)$$

Ако пак важи неравенството

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0 \qquad (3)$$

тогаш велиме, дека функцијата има локален минимум во точката,

На Слика1. дадени се такви точки.



Слика1

Точката на минимум или максимум се вика точка на екстрем за функцијата .

12 Потребни услови за постоење на екстреми

Нека ја разгледаме функцијата $\varphi(x) = f(x, y_0)$, која е функција од x. Ако функцијата $f(x, y)$ има екстрем во точката (x_0, y_0) тогаш очигледно функцијата $\varphi(x)$ како функција од една променлива исто така има екстрем во x_0, зошто $\varphi(x_0 + h) = f(x_0 + h, y_0)$.

Но знаеме, дека во тој случај, $\varphi'(x_0) = 0$, а како $\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$, го добивме условот

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \qquad (4)$$

Со аналогни расудувања за функцијата $\psi(y) = f(x_0, y)$ го добивме условот

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \qquad (5)$$

од равенствата (4) и (5) следи, ако функцијата $f(x, y)$ има екстрем во точката $M_0(x_0, y_0)$ и ако има парцијални изводи во истата точка, тогаш тие се анулираат:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \qquad (6)$$

Условите дадени со системот (6) се потребни за постоење екстрем.

Аналогни потребни услови може да се напишат и за функција $f(x, y, z)$ од три променливи

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Меѓутоа условите (6) не се доволни ние тоа го знаеме уште од функциите од една променлива .

Доволни услови за екстрем

Да претпоставиме, дека функцијата $f(x, y)$ има непрекинати парцијални изводи до втор ред заклучно во некоја околина на точката $M_0(x_0, y_0)$ во која се исполнети потребните услови (6).

По формулата на Тајлор имаме

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,, y_0)k\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[h^2 \frac{\partial^2 f\,(x_0 + ah\,, y_0 + ak)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f\,(x_0 + ah, y_0 + ak)}{\partial y \partial x} + k^2 \frac{\partial^2 f\,(x_0 + ah, y_0 + ak)}{\partial y^2}\right] \qquad (7)$$

Како вторите парцијални изводи се непрекинати во точката (x_0, y_0), т.е.

$$\frac{\partial^2 f(x_0+ah, y_0+ak)}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = A$$

кога $h, k \to 0$

Исто важи и за другите два парцијални изводи од (7). Можеме да ги напишеме на следниот начин

$$\frac{\partial^2 f(x_0+ah, y_0+ak)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \varepsilon_1 = A + \varepsilon_1$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0+ah, y_0+ak)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} + \varepsilon_2 = B + \varepsilon_2$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0+ah, y_0+ak)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} + \varepsilon_3 = C + \varepsilon_3$$

При што $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$ кога $h, k \to 0$

Имајќи ги во предвид условите (6), тогаш (7) може да се напише во следниов облик

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(\mathrm{A}h^2 + 2Bhk + Ck^2 + \varepsilon)$$

каде $\varepsilon = \varepsilon_1 h^2 + 2hk\varepsilon_2 + k^2\varepsilon_3$ е бескрајно мала големина во однос на h^2, hk и k^2 и затоа за десната страна главен дел е изразот $\frac{1}{2}(\mathrm{A}h^2 + 2Bhk + Ck^2)$ и доволно е него да го анализираме за знакот на десната страна.

Нека земеме A $\neq 0$ тогаш

$$\frac{1}{2}(\mathrm{A}h^2 + 2Bhk + Ck^2) =$$

$$= \frac{1}{2A}(\mathrm{A}^2h^2 + 2ABhk + \mathrm{A}Ck^2) = \frac{1}{2A}[(Ah+Bk)^2 + ACk^2 - B^2k^2]$$

т.е.

$$\frac{1}{2}(\mathrm{A}h^2 + 2Bhk + Ck^2) = \frac{1}{2A}[(Ah+Bk)^2 + (AC - B^2)k^2]$$

Во изразот

$$\frac{1}{2\mathrm{A}}[(\mathrm{A}h+Bk)^2 + (AC - B^2)k^2] \tag{8}$$

главна улога има

$$AC - B^2$$

а) Нека $AC - B^2 > 0$, ако и $A > 0$ тогаш изразот (8) е поголем од нула од што следи, дека

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0$$

или

$$f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$$

т.е. во точката $M_0(x_0, y_0)$ функцијата има минимум.

б) Нека $AC - B^2 > 0$, ако $A < 0$, тогаш изразот (8) е негативен и следователно имаме

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < 0$$

т.е

$$f(x_0 + h, y_0 + k) < f(x_0, y_0)$$

значи функцијата има максимум.

Во случај $AC - B^2 < 0$, можно е при некои односи меѓу h и k изразот во заградата да биде и позитивен и негативен. Така, на пример, ако $h = -\frac{B}{A}k$, тогаш изразот во заградата ќе биде

$$(AC - B^2)k^2 < 0;$$

ако пак $h \neq 0$, а $k = 0$ изразот ќе биде позитивен, а тоа повлекува левата страна

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

за некои точки блиску до точката $M_0(x_0, y_0)$ да биде поголема од нула, а за некои помал од нула, што во суштина значи , дека во точката (x_0, y_0) нема екстрем.

И конечно, ако $AC - B^2 = 0$ во тој случај изразот во заградата може да биде и позитивен и еднаков на нула и затоа во тој случај се потребни дополнителни испитувања.

Да резимираме.

За да ги определиме екстремите на функцијата $f(x, y)$ постапуваме по следниот ред:

1. Ги наоѓаме парцијалните изводи од прв и втор ред.
2. Го решаваме системот (6) со што ги наоѓаме можните точки за екстрем.
3. Го пресметуваме изразот

$$AC - B^2$$

во најдените точки под 2.

4. Ако во дадената точка $AC - B^2 > 0$, и $A < 0$, тогаш функцијата има максимум.

Ако $AC - B^2 > 0$, и $A > 0$функцијата има минимум, се разбира за да го определиме максимумот односно минимумот треба во тие точки да ја определиме вредноста на функцијата.

5. Ако $AC - B^2 < 0$ функцијата нема екстрем.
6. Кога $AC - B^2 = 0$, треба дополнително испитување.

При решавање на некои практични задачи се користат само потребните услови зошто од природата на задачата се знае за што се работи.

Пример. Да се најдат екстремите на функцијата

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$$

Решение. Наоѓаме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -48y \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6$$

Од системот

$$3x^2 - 6y = 0$$

$$24y^2 - 6x = 0$$

ги наоѓаме точките $M_1(0,0)$, $M_2\left(1, \frac{1}{2}\right)$; $A = 6x, B = -6, C = 48y$. За точката

$M_1(0,0), A = 0, B = -6, C = 0$ и $AC - B^2 = 0$

Функцијата нема екстрем. За точката $M_2\left(1, \frac{1}{2}\right), A = 0, B = -6, C = 24$

како и $A = 6 > 0$, значи има минимум.

$$f_{min}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 4$$

што значи функцијата има минимум еднаков на 4 за $x = 1, y = \frac{1}{2}$.

13. Условен екстрем

Многу често се среќаваат задачи, при коишто се бара екстрем на функција

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

при некој услов или врска меѓу x и y

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (2)$$

Со равенката (2) е даден условот што треба да го задоволуваат x и y.

Поставената задача можеме да ја решиме на следниот начин: Од равенката (2) го изразуваме y со x или обратно и заменувме во равенката (1) на тој начин добиваме функција од една променлива и потоа бараме екстрем.

Пример 1. Да се пресмета екстремот на функцијата $z = x^m + y^m (m > 1)$при $x + y = 2$. Од условите имаме $y = 2 - x$ и заменуваме во дадената функција

$$z = x^m + (2 - x)^m$$

$$z' = mx^{m-1} - m(2 - x)^{m-1}$$

$$z' = 0$$

$$mx^{m-1} - m(2 - x)^{m-1} = 0$$

$$x = 2 - x, y = 2 - 1 = 1$$

$$z_{min}(1,1) = 2$$

Наведениот начин бара решавање на условната равенка (2)

Тука даваме друг метод при кој не се бара решавање на (2). Методот е предложен од Лагранж и затоа се вика метод на Лагранж за врзаните екстреми.

Тоталниот диференцијал на функцијата (1) е

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad (3)$$

а на (2)

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \qquad (4)$$

Бидејќи бараме екстрем на функцијата (1), затоа

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

следователно

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \qquad (5)$$

Ја множиме равенката (4) со произволен параметар λ и ја собираме со (5). Така имаме

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dy = 0 \qquad (6)$$

го избираме λ така што

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0 \qquad (7)$$

но тогаш и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0 \qquad (8)$$

Од системот составен од равенките (2), (7) и (8) ги определуваме x, y и λ при кои функцијата (1) под услов (2) има екстрем.

Равенките (7) и (8) можат да се разгледуваат како парцијални изводи, изедначени на нула на функцијата

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) \qquad (9)$$

Според тоа методот се состои во следното:

Го решаваме системот

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad (10) \\ &\varphi(x,y) = 0 \end{aligned}$$

Ги определуваме x, y и λ за кои што функцијата (1) има екстрем под услов (2).

Во случај да бараме екстрем на функцијата

$$u = u(x,y,z) \qquad (1)$$

при услов

$$\varphi_1(x,y,z) = 0 \qquad (2)$$

$$\varphi_2(x,y,z) = 0 \qquad (3)$$

тогаш помошната функција е

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\varphi_1(x,y,z) + u\varphi_2(x,y,z) = 0$$

и добиваме систем

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + u\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + u\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + u\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0$$

$$\varphi_1(x,y,z) = 0$$

$$\varphi_2(x,y,z) = 0$$

од каде ги определуваме x,y и z за кои што функцијата (1) има екстрем при услови (2) и (3).

Пример 2. На параболата $y^2 = 4x$ да се најде точка најблиска до правата $x - y + 4 = 0$.

Ако $P(x,y)$ е бараната точка, тогаш растојанието до правата е

$$d = \frac{x - y + 4}{-\sqrt{2}} = f(x,y)$$

$y^2 - 4x = 0$ е равенката за врска. Помошната функција $F(x,y)$ е

$$F(x,y) = \frac{x - y + 4}{-\sqrt{2}} + \lambda(y^2 - 4x)$$

$$F_x'(x,y) = -4\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad F_y'(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda y$$

Системот (10) е

$$-4\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda y = 0$$

$$y^2 - 4x = 0$$

од каде наоѓаме

$$\lambda = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, x = 1, y = 2$$

Следователно точката $P(1,2)$, која лежи на параболата, е најблиска до правата.

Задачи за вежба

1. Да се најдат екстремите на функциите:

а) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

б) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

в) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

г) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

д) $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{y}$

ѓ) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$

е) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

2. Да се најдат најголемата и најмалата вредност на функцијата $z = x^2 - y^2$ во кругот $x^2 + y^2 \leq 4$.

Решение. Прво, ги определуваме екстремите на функцијата ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

Од

$$2x = 0, -2y = 0, x = 0, y = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$$

добиваме$A = 2, B = 0$ и $C = -2$, како $AC - B^2 = -4 < 0$, во точката $(0,0)$ функцијата нема екстрем.

Второ, го определуваме екстремот по границата $x^2 + y^2 = 4$ од каде $y^2 = 4 - x^2$ и со замена во функцијата добиваме $z = 2x^2 - 4, z' = 4x, z' = 0$ од каде $x = 0$, како $z'' = 4 > 0$. За $x = 0$,

$z(0) = -4$, значи функцијата има минимум. Според тоа при дадениот услов функцијата има најмала вредност за $x = 0$ и $y = \pm 2$. Во точките $(2,0)$и $(-2,0)$од кругот $x^2 + y^2 = 4$, функцијата има максимална вредност.

3. Да се најдат најголемата и најмалата вредност за функцијата $z = 2x^2 + 2xy - 4x + 8y$ во правоаголникот : $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

4. Да се најде најголемата вредност на функцијата $z = x^2 y(4 - x - y)$ во триаголникот ограничен со правите $x = 0, y = 0, x + y = 6$,

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy - 3x^2 y - 2xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - x^3 - 2x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8y - 6xy - 2y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x^2 \; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 8x - 3x^2 - 4xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Имаме

$$8xy - 3x^2 y - 2xy^2 = 0$$

$$4x^2 - x^3 - 2x^2 y = 0$$

$$8y - 6xy - 2y^2 = 0$$

Добиваме $x = 0, y = 0, x = 2, y = 1$. Точката $(0,0)$ е на триаголникот $z(0,0) = 0$, точката $(2,1)$ е во триаголникот $z(2,1) = 4$; понатаму за $y = 0, z = 0$ и за $x = 0, z = 0$, т.е на отсечките од $(0,0)$ до $(6,0)$ и од $(0,0)$ до $(0,6)$ функцијата има вредност 0.

За $x + y = 6$ т.е.$y = 6 - x$ имаме

$$z = -2x^2(6 - x)$$

$$z' = 6x^2 - 24x$$

$$z' = 0 \text{ т.е. } 6x^2 - 24x = 0$$

$$x(x - 4) = 0, x = 0 \text{ и } x = 4$$

$$z'' = 12x - 24, z''(0) = -24 < 0$$

$$z''(4) = 48 - 24 > 0, z(0) = 0, z(4) = -64$$

Конечно, најголемата вредност е и во $(2,1)$, зошто $A = -6, B = 0,\ C = -8$ па $AC - B^2 > 0$, како $A < 0$ има максимум .

3. Да се најдат најголемата и најмалата вредност за функцијата $z = \exp(-x^2 - y^2)\,(2x^2 + 3y^2)$ во кругот $x^2 + y^2 \leq 4$.

4. Да се определи условниот екстрем на следниве функции:

а) $z = xy$ ако $x^2 + y^2 - 2 = a^2$

б) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

в) $u = xyz$ при $x + y + z = 5$ и $xy + xz + yz = 8$

7. Да се разложи позитивниот број a на три позитивни собироци така што нивниот производ е најголем. (одг. сите собироци се еднакви меѓу себе).

8. На елипсата $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ да се најде точка најблиска до правата $3x - y - 9 = 0$

(Одговор : $x = \pm\frac{4}{\sqrt{5}},\ y = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$)

9. На параболата $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ да се најде точка најблиска до правата $3x - 6y + 4 = 0$

(Одговор:$\left(-\frac{5}{9},\ -\frac{1}{9}\right)$).

10. Дадени се n точки: $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$. На рамнината $0xy$ да се најде точка чиј што збир од квадратите на растојанијата до дадените точки биде минимален.

Решение: Нека бараната точка е $A(x, y, 0)$, тогаш

$$\overline{AA_1}^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2,$$

....

$$\overline{AA_n}^2 = (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + z_n^2$$

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{n}(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\sum_{i=1}^{n}(y - y_i)$$

Од

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

имаме

$$nx - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \ \ ny - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

$$x = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n} x_i \, , \ \ y = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Од природата на задачата следи, дека во дадената точка збирот ќе биде минимален.

ГЛАВА 2

МНОГУКРАТНИ ИНТЕГРАЛИ

1 Нулти множества

Веќе знаеме, дека правоаголник е множество P од рамнината R^2 определено со:

$$P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Плоштината на правоаголникот P е $V(P) = (b - a)(d - c)$, овој број се вика уште ***зафатнина*** или ***мера на правоаголникот.***

Аналогно, во просторот множеството P, определено на следниов начин:

$$P = \{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$$

претставува паралелопипед чија што зафатнина (мера) е дадена со

$$V(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$$

На овој начин, сосема природно е да дефинираме дека множеството P од облик

$$P = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ за } i = 1,2,3,4\}$$

претставува ***правоаголно множество*** или *кратко* ***паралелопипед во просторот*** R^4.

И така, нека се договориме множествата од наведениот облик со општо име да ги викаме правоаголник, додавајќи: правоаголникот во R^2 (рамнината) паралелопипед во R^3 (просторот), паралелопипед воR^4 (четиридимензионалниот простор) итн., при што нивната зафатнина (мера) се пресметува како што покажавме претходно.

Нека S е подмножество од R^2. Ако за дадено $\varepsilon > 0$ постојат конечно многу правоаголници: $P_1, P_2, \dots, P_m$ во R^2 кои го покриваат множеството S (S се содржи во нивната унија) при што

$$V(P_1) + V(P_2) + \dots + V(P_m) < \varepsilon$$

тогаш велиме, дека множеството S *има зафатнина* или кратко *мера нула* во однос на рамнината R^2 .

$V(P_i)$ за $i = 1,2,\dots,n$ е плоштина на правоаголникот (или мера). Вака определената нулта мера уште се вика мера нула по Жордан.

Потполно аналогно, ако S е подмножество од R^3 и за дадено $\varepsilon > 0$ постојат конечно многу паралелопипеди во R^3 чиј што збир од мери е помал од ε, исто ќе велиме дека има мера нула во R^3.

Очигледно, ако множествата S_1 и S_2 имаат мера нула, тогаш и нивната унија $S_1 \cup S_2$ ќе има мера нула, зошто при дадено $\varepsilon > 0$, постојат $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_m^{(1)}$ кои го покриваат S_1 и уште

$$V(P_1^{(1)}) + V\left(P_2^{(1)}\right) + \dots + V\left(P_m^{(1)}\right) < \varepsilon$$

Исто така постојат правоаголници $P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, \dots, P_k^{(2)}$ кои го покриваат множеството S_2 , и уште

$$V(P_1^{(2)}) + V\left(P_2^{(2)}\right) + \dots + V\left(P_k^{(2)}\right) < \varepsilon$$

Јасно е дека правоаголниците

$$P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_m^{(1)}, \qquad P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, \dots, P_k^{(2)}$$

ја покриваат унијата $S_1 \cup S_2$ и притоа збирот од нивните мери е помал од 2ε.

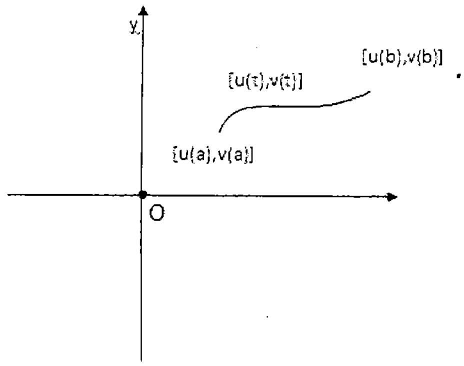
На истиот начин се добива дека и унија од конечно многу можества со мера нула е множество со мера нула.

Сега ќе дадеме примери на множества од R^2 и R^3 кои се со мера нула.

Пример 1. Нека пресликувањето $f: [a,b] \to R^2$ е определено на следниов начин:

$$f(t) = [u(t), v(t)] \text{ за } t \in [a,b]$$

Вака определеното пресликување се вика крива во рамнината R^2 и, во зависност од функциите $u(t)$ и $v(t)$, кривата се вика непрекината, ако $u(t)$ и $v(t)$ се непрекинати на $[a,b]$, или диференцијабилна, ако $u(t)$ и $v(t)$ имаат изводи итн., Слика1



Слика1

Тврдење. Ако кривата има непрекинати први изводи, тогаш множеството од точки кои лежат на кривата има мера 0.

Доказ: Бидејќи по претпоставка функциите $u'(t)$ и $v'(t)$ се непрекинати на интервалот $[a,b]$, постои број $M > 0$, таков што

$$|u'(t)| \leq M \text{ и } |v'(t)| \leq M \qquad (1)$$

Нека $t', t'' \in [a,b]$, тогаш за функциите $u(t)$ и $v(t)$ ја применуваме теоремата на Лагранж и добиваме

$$u(t'') - u(t') = (t'' - t')u'(c_1), \qquad t' < c_1 < t''$$

$$v(t'') - v(t') = (t'' - t')v'(c_2), \qquad t' < c_2 < t''$$

или според (1)

$$|u(t'') - u(t') \leq M|t'' - t'|$$

$$(2)$$

$$|v(t'') - v(t')| \leq M|t'' - t'|$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено и нека n е природен број што ќе го определиме во зависност од ε. Воведуваме делбени точки на интервалот $[a,b]$:

$$a = t_0 < t_1 \ldots . < t_k < t_{k+1} < \cdots . < t_n = b$$

$$a < a + \frac{b-a}{n} < \cdots < a + k\frac{b-a}{n} <\ldots < a + n\frac{b-a}{n} = b$$

$$t_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

Ако $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, тогаш според (2) имаме

$$|u(t)-u(t_k)| \leq M|t-t_k| \leq M\frac{b-a}{n}$$

$$|v(t)-v(t_k)| \leq M|t-t_k| \leq M\frac{b-a}{n}$$

Со P_k го обележуваме правоаголникот определен со

$$u(t_k)-2\frac{M(b-a)}{n} < x < u(t_k)+2\frac{M(b-a)}{n}$$

(3)

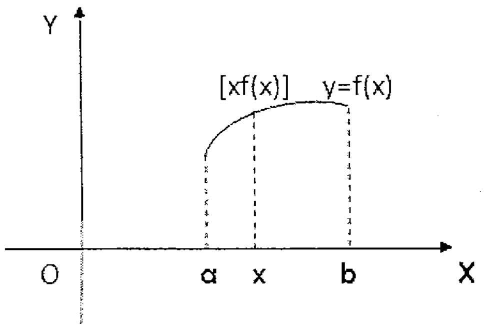
$$v(t_k)-2\frac{M(b-a)}{n} < y < v(t_k)+2\frac{M(b-a)}{n}$$

плоштината (мерата) на правоаголникот P_k е $V(P_k)=4^2\frac{M^2(b-a)^2}{n^2}$. Нека сега разгледаме точка $M[u(t),v(t)]$ од кривата, каде t припаѓа на некој од подинтервалите при дадена поделба. Ако $t \in [t_k,t_{k+1}]$, и $x=u(t), y=v(t)$ тогаш согласно неравенствата (1) и (3), $[u(t),v(t)] \in P_k$, а тоа значи дека правоаголниците $P_0,P_1,\ldots,P_{n-1}$ се покривка за множеството точки од кривата. Но

$$V(P_0)+V(P_1)+.\ldots+V(P_{n-1})=4^2n\frac{M^2(b-a)^2}{n^2}=\frac{4^2M^2(b-a)^2}{n}<\varepsilon$$

ако n е доволно големо. Со тоа доказот е комплетен.

Пример 2. Нека $y=f(x)$ е функција од една променлива која е непрекината на интервалот $[a,b]$. Тогаш нејзиниот график во R^2 има мера нула, Слика2



Слика2

Го делиме интервалот $[a,b]$ на подинтервали на следниот начин

$$a<a+\frac{b-a}{n}<\ldots<a+k\frac{b-a}{n}<\ldots<a+n\frac{b-a}{n}=b$$

$[x_k,x_{k+1}]$ е подинтервалот

$$\left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right]$$

Како функцијата $f(x)$ е непрекината на $[a, b]$, за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што, ако x', x'' се такви што

$$|x'' - x'| < \delta$$

следи дека

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Според даденото ε го избираме бројот n, но доволно голем за должините на подинтервалите $\frac{b-a}{n}$ да биде помало од δ. И во тој случај ако $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon$$

Со P_k го обележуваме правоаголникот

$$x_k \leq x \leq x_{k+1} \text{ и } f(x_k) - \varepsilon < y < f(x_k) + \varepsilon$$

со мера

$$V(P_k) = 2\varepsilon\frac{b-a}{n}$$

Правоаголниците $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ го покриваат графикот на функцијата $f(x)$ и како

$$V(P_0) + V(P_1) + \ldots + V(P_{n-1}) = n\frac{2\varepsilon(b-a)}{n} = 2\varepsilon(b-a)$$

следи дека мерата му е еднаква на 0.

Пример 3. Ако $z = f(x, y)$ е непрекината функција определена на правоаголникот: $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, тогаш графикот на R^3 е некоја површина чија што мера е 0. Ова важи и поопшто, ако некоја функција $f(x, y)$е непрекината на некое компактно множество. Доказот се изведува на база на особините на непрекинатите функции со тоа што тука треба да се дели правоаголникот на помали правоаголници; тоа ќе го правиме при дефиниција на двојниот интеграл.

2 Двоен интеграл

Нека функцијата $f(x, y)$ е дефинирана на затворениот правоаголник G каде

$$G = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Поделба на правоаголникот G се состои од парот поделби

$$x_0 = a < x_1 \ldots . < x_{i-1} < x_i < \cdots . < x_n = b$$

$$\tag{1}$$

$$y_0 = c < y_1 \ldots . < y_{j-1} < y_j < \cdots . < y_m = d$$

на интервалите $[a, b]$ и $[c, d]$ соодветно. Со G_{ij} го означуваме правоаголникот

$$G_{ij} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : x_i \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

и дефинираме

$$M = \max_G f(x, y)\,, m = \min_G f(x, y)$$

$$M_{ij} = \max_{G_{ij}} f(x, y)\,, m_{ij} = \min_{G_{ij}} f(x, y)$$

$$\Delta_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \Delta y_j$$

каде $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$

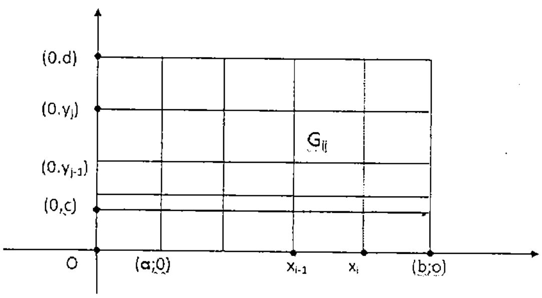
Ги формираме горната и долната сума на Дарбу соодветно:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \Delta_{ij}$$

и

$$s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \Delta_{ij}$$

што одговараат на поделбата (1), Слика1



Слика1

Од неравенствата $m \leq m_{ij} \leq M_{ij} \leq M$ непосредно следи

$$S \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M\Delta_{ij} = M\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Delta_{ij} = M(b-a)(d-c)$$

$$s \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m = m\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Delta_{ij} = m(b-a)(d-c)$$

понатаму во колку поделбите стануваат се пофини, аналогно како кај функциите од една променлива имаме дека соодветните долни суми монотоно растат, а горните суми монотоно опаѓаат и ако со I го обележиме инфимумот на горните суми, а со J супремумот на долните суми имаме

$$J \leq I$$

зошто секогаш $s \leq S$, исто како кај обичните интеграли.

За функцијата f велиме дека е *интеграбилна* на правоаголникот G, ако $I = J$.

Нека сега во секој правоаголник G_{ij} избереме точка (ξ_i,η_j) и формираме сума

$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta_{ij}$$

која се вика *Риманова сума за функцијата* $f(x,y)$ за дадена поделба и даден избор на точките (ξ_i,η_j).

Ако постои број K, таков што за дадено $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, такво што за секоја поделба $\Delta x_i, \Delta y_j < \delta$ за сите i, j важи

$$|T - K| < \varepsilon \qquad (2)$$

за било која Риманова сума на дадената поделба, тогаш бројот Kсе вика *интеграл* или поточно *Риманов интеграл* за функцијата $f(x,y)$ на правоаголникот G и се бележи со

$$\iint_G f(x,y)dxdy$$

Како за секоја поделба $s \leq T \leq S$, следи дека, ако $I = J$, функцијата е интеграбилна и притоа

$$J = \iint_G f(x,y)dxdy$$

Ако постои Риманов интеграл за функцијата f на правоаголникот G тоа симболично се пишува

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta_{ij}$$

И тука, како и за функциите од една променлива, важи основниот критериум за интеграбилност кој гласи:

Функцијата $f(x,y)$ е *интеграбилна* на правоаголникот G, ако за дадено $\varepsilon > 0$ постои поделба таква што важи:

$$S - s < \varepsilon \qquad (3)$$

Интегралот $\iint_G f(x,y)dxdy$, за разлика од интегралот $\int_a^b g(x)dx$ кај функциите од една променлива се вика двоен интеграл.

3 Интеграбилни функции

Критериумот (3) е многу практичен при испитување на интеграбилноста на дадена функција.

Теорема 1 Ако f(x, y) е непрекината функција на затворениот правоаголник G тогаш таа е интеграбилна.

Доказ: f(x, y) е непрекината на G, значи за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ такво што, ако за $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ важи

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta$$

тогаш

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon \qquad (1)$$

заради рамномерната непрекинатост на правоаголникот.

Нека сега поделбата на правоаголникот е таква што дијаметарот на секој делбен правоаголник е помал од δ, тогаш според (1),

$$M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$$

и следователно,

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})\Delta_{ij} < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon\Delta_{ij} =$$

$$= \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Delta_{ij} = \varepsilon(b-a)(d-c)$$

т.е.

$$S - s < \varepsilon(b-a)(d-c)$$

Со тоа покажавме дека е задоволен основниот критериум за интеграбилност.

Следната теорема која ја даваме без доказ е обопштување на Теорема 1.

Теорема 2 Ако $f(x,y)$ е дефинирана на затворен правоаголник и ако множеството од точки на прекин има мера нула тогаш функцијата е интеграбилна.

Сега ќе дефинираме двоен интеграл на произволно множество D. Нека D е ограничено множество во R^2 и нека функцијата $f(x,y)$ е дефинирана на D. Дефинираме функција

$g(x,y) = f(x,y)$, ако $(x,y) \in D$ и нула ако $(x,y) \notin D$

Функцијата $g(x,y)$ претставува продолжување на функцијата $f(x,y)$ со 0.

Нека P е затворен правоаголник во R^2 во кој се содржи D. Ако функцијата $g(x,y)$ е интеграбилна на P, тогаш велиме дека $f(x,y)$ е интеграбилна на D. Интегралот за $f(x,y)$ на D се бележи со

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_P g(x,y)dxdy$$

Ќе покажеме дека интегралот за f не зависи од изборот на правоаголникот P што го содржи D

Доказ: Нека P_1 е друг правоаголник таков што $D \subset P_1$.

Нека $P^* = P \cap P_1$, P^* е затворен правоаголник кој го содржи множеството D. Го делиме правоаголникот P^* со прави паралелни со координатните оски, тие прави ги делат и правоаголниците P и P_1. За дадената поделба формираме Риманови суми за функцијата $g(x,y)$ по однос на сите три правоаголници. Очигледно Римановите суми за P и P_1 се еднакви на Римановата сума по однос на правоаголникот P^*, зошто на делбените правоаголници на P и P_1 кои не припаѓаат на P^* функцијата $g(x,y)$ е еднаква на нула. Според тоа, секоја Риманова сума за правоаголниците P и P_1 се состои од еден дел што е Риманова сума за правоаголникот P^* плус нулти дел т.е. тие се еднакви.

Според теорема2 ако мерата на ∂D е нула тогаш $f(x,y)$ е интеграбилна на D.

Теорема 3 Нека $f(x,y)$ е интеграбилна функција на множеството D. Нека Cе подмножество од D со мера нула. Ако $g(x,y)$ е функција определена на D таква што $f(x,y) = g(x,y)$ освен на множеството C, тогаш $g(x,y)$ е интеграбилна на D и

$$\iint_D g(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Доказ: Нека $f(x,y)$ е дефинирана на ограниченото множество D. Нека Sе множество точки во кои што функцијата е прекината. Со ∂D ја обележуваме границата на D. Тогаш множеството точки на прекин за продолжената функција со 0 се содржи во $S \cup \partial D$. На основа на Теорема2 заклучуваме:

Ако функцијата $f(x,y)$ е непрекината на D и ако множеството точки S во кои е прекината како и на ∂D има мера нула, тогаш функцијата е интеграбилна на D.

4 Особини на интеграбилни функции

Поаѓајќи од дефиницијата на двоен интеграл како гранична вредност од Римановите суми, аналогно на определениот интеграл кај функциите од една променлива, лесно се проверуваат следниве особини:

1. Ако функциите f и g се интеграбилни на дадено множество D од R^2 тогаш интеграбилни се нивниот збир, производот на функцијата со број нивната разлика и притоа

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy$$

$$\iint_D kf(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy$$

2. Ако $f(x,y) \geq 0$ на D тогаш

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$$

и исто така, ако $f(x,y) \leq g(x,y)$, тогаш

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

Навистина, ако $f(x,y) \geq 0$ за $x, y \in D$ тогаш и Римановата сума

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta_{ij} \geq 0$$

од тука и нивната граница, интегралот е позитивен.

Понатаму, ако $g(x,y) - f(x,y) \geq 0$ тогаш

$$\iint\limits_D [g(x,y) - f(x,y)]dxdy \geq \iint\limits_D 0 \cdot dxdy = 0$$

од каде имаме

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy - \iint\limits_D g(x,y)dxdy \geq 0$$

3. $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy$

Ова неравенство се добива од следниве неравенства: од 3 следи:

$$f(x,y) \leq |f(x,y)|$$
$$-f(x,y) \leq |f(x,y)|$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$$

$$-\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$$

и од последните две неравенства следи

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$$

Пред да ги дадеме теоремите за средна вредност, да забележиме дека множеството *D* е сврзливо (област) ако кои било две точки можат да се поврзат со искршена линија (линија составена од отсечки).

5 Оценка на двоен интеграл

1. Ако функцијата $f(x,y) = k$ на правоаголникот $P: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, тогаш

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D kdxdy = k(b-a)(d-c)$$

Доказ. Навистина, за било која Риманова сума

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_{i,}\eta_j)\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k\Delta_{ij} = k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Delta_{ij} = k(b-a)(d-c).$$

Специјално за $k = 1$ имаме

$$\iint_P dxdy = (b-a)(d-c)$$

Од последново равенство заклучуваме дека двојниот интеграл на единицата по правоаголник еднаков е на неговата плоштина, т.е. неговата мера и во тоа се содржи геометриското толкување кое не мотивира, сосема природно, да дефинираме, дека двојниот интеграл од функцијата $f(x,y) = 1$ на дадено множество D од R^2 е еднаков на неговата мера (плоштина)

$$\iint_D dxdy = V(D) \qquad (1)$$

2. Ако функцијата f е интеграбилна на множеството D и ако $m = minf(x,y)$, а $M = maxf(x,y)$ на D, тогаш $m \leq f(x,y) \leq M,$ и од особините 1. и 2. на двојниот интеграл имаме

$$m \cdot V(D) \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot V(D) \qquad (2)$$

Неравенството (2) претставува оценка на двојниот интеграл.

Ако D е компактна област, а функцијата $f(x,y)$ е непрекината, тогаш според (2) делејќи со $V(D)$ имаме:

$$m \leq \frac{1}{V(D)}\iint_D f(x,y)dxdy \leq M$$

Од непрекинатоста на функцијата постои точка (x_0, y_0) од D таква што

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{V(D)} \iint_D f(x,y)dxdy \qquad (3)$$

(3) е првата теорема за средна вредност на двоен интеграл.

3. Нека функцијата $f(x,y)$ е непрекината на компактната област D, а функцијата $g(x,y) \geq 0$ е интеграбилна на D, тогаш постои точка $(x_0, y_0) \in D$ така што важи

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \iint_D g(x,y)dxdy \qquad (4)$$

Со равенството (4) е дадена втората теорема за средна вредност на двојниот интеграл.

Доказот следи од следново:

Ако $m = minf(x,y)$, а $M = maxf(x,y)$ на D, тогаш

$$m \leq f(x,y) \leq M$$

последното неравенство го множиме со функцијата $g(x,y)$

$$mg(x,y) \leq f(x,y)g(x,y) \leq Mg(x,y)$$

со интегрирање по D и од особините на двојниот интеграл имаме

$$m \iint_D g(x,y)dxdy \leq \iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy \leq M \iint_D g(x,y)\, dxdy$$

од каде следи дека

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy = P \iint_D g(x,y)\, dxdy$$

при што мора $m \leq P \leq M,$ па како $f(x,y)$е непрекината функција постои точка (x_0, y_0), таква што $f(x_0, y_0) = P$ и така, конечно, го добиваме равенството (4).

6 Итерирани интеграли

Многу е тешко да се пресмета двоен интеграл директно од дефиницијата. Затоа тука даваме начин на пресметување на двојни интеграли.

Прво разгледуваме интеграли на правоаголник:

$$P = \{(x,y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Теорема 1 Нека функцијата $f(x,y)$ е интеграбилна на правоаголникот P и нека за секое фиксно $x \in [a,b]$ функцијата $f(x,y)$ е интеграбилна по y на интервалот $[c,d]$. Тогаш функцијата

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)dy \tag{1}$$

е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и

$$\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \tag{2}$$

Ако го замениме (1) во (2), добиваме

$$\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\left(\int_c^d f(x,y)dy\right) \tag{3}$$

Десната страна од (3) ја пишуваме исто така во облик

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

Интегралот од десната страна на (3) се вика итериран интеграл од два *обични (еднократни)* интеграли, прво по интервалот $[c,d]$, а потоа по интервалот $[a,b]$. Според тоа пресметувањето на двоен интеграл се сведува на пресметување од два обични (еднократни) интеграли, т.е. интеграли на функции од една променлива. Неминовно оваа теорема заслужува да ја докажеме тука.

Доказ: Нека е разгледаме поделбата П

$$x_0 = a < x_1 <\ldots< x_{i-1} < x_i <\ldots< x_n = b$$

$$\tag{4}$$

$$y_0 = c < y_1 <\ldots< y_{j-1} < y_j <\ldots< y_m = d$$

на правоаголникот P.

Нека $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Ако $m_{ij} = \min f(x,y)$, а $M_{ij} = max f(x,y)$, на правоаголникот

$P_{ij} : x_{i-1} \leq x \leq x_i , y_{j-1} \leq y \leq y_j$, тогаш јасно $m_{ij} \leq f(x,y) \leq M_{ij}$ на P_{ij} и затоа и

$$m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij} \qquad (5)$$

на $\lfloor y_{j-1}, y_j \rfloor$

Со интегрирање на (5) добиваме

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij}\, dy \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\, dy \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} M_{ij}\, dy$$

или

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\, dy \leq M_{ij}\,(y_j - y_{j-1})$$

од каде следи дека постои број μ_{ij} т.ш.

$$m_{ij} \leq \mu_{ij} \leq M_{ij}$$

и

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\, dy = \mu_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

Неравенството $m_{ij} \leq \mu_{ij} \leq M_{ij}$ го множиме со Δ_{ij} и потоа сумираме по i, j и добиваме

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\,\Delta_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu_{ij}\,\Delta_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta_{ij}$$

Бидејќи функцијата $f(x,y)$ е интеграбилна левата и десната страна на последното неравенство тежат кон двојниот интеграл

$$\iint_P f(x,y)\,dxdy$$

но тогаш и сумата

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu_{ij}\, \Delta_{ij} \longrightarrow \iint_P f(x,y)dxdy \tag{6}$$

кога $\Delta_{ij} \longrightarrow 0$.

Од друга страна,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu_{ij}\, \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Delta x_i \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy$$

зашто $\Delta_{ij} = \Delta x_i\, \Delta y_j$, понатаму имаме

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Delta x_i \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy$$

имајќи во предвид дека

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy = \int_c^d f(\xi_i, y)dy = g(\xi_i)$$

можеме да напишеме

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu_{ij}\, \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \longrightarrow \iint_P f(x,y)dxdy$$

кога Δx_i и $\Delta y_j \longrightarrow 0$.

Но како $\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$ е Риманова сума за функцијата $g(x)$ на $[a,b]$ следи дека функцијата $g(x)$ е интеграбилна и притоа

$$\int_a^b g(x)dx = \iint_P f(x,y)dxdy.$$

Конечно, ако наместо $g(x)$ го замениме (1) го добиваме (3).

На истиот начин може да се докаже, дека

$$\int_c^d dy\left(\int_a^b f(x,y)dx\right) = \iint_P f(x,y)dxdy$$

од каде го добиваме равенството

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx\,.$$

Според тоа, редот на интегрирањето во интегралот не е важен.

Пример. Да се пресмета двојниот интеграл $\iint_P \; xydxdy$, каде

$$P = \{(x,y);\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$$

Решение: Според (3) имаме

$$\iint_P xydxdy = \int_0^1 dx\left(\int_0^2 xydy\right) = \int_0^1 xdx\left(\int_0^2 ydy\right) =$$

$$\int_0^1 xdx\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^2\right) = \int_0^1 xdx\,(2-0) = 2\int_0^1 xdx = 1$$

Сега ќе разгледаме поопшта област D на интеграција при двојниот интеграл.

Нека $y = g(x)$ и $y = h(x)$ се две непрекинати функции на интервалот $[a,b]$ така што $g(x) \le h(x)$ за $a < x < b$.

Нека

$$D = \{(x,y)\colon a < x < b, g(x) < h(x)\} \qquad (7)$$

е област

Теорема 2 Ако D е определена со (7) и ако функцијата $f(x,y)$ е непрекината на D и на границата ∂D тогаш

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right) \qquad (8)$$

Доказ: Нека го земеме правоаголникот $P\colon a \le x \le b, c \le y \le d$

каде $c < g(x), h(x) < d$, за $x \in [a,b]$.

Нека функцијата $F(x,y)$ е продолжување со нулата на функцијата $f(x,y)$ т.е.

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{за } (x,y) \in D \cup \partial D \\ 0 & \text{инаку} \end{cases}$$

тогаш

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_P F(x,y)dxdy = \int_a^b dx\left(\int_c^d F(x,y)dy\right) \qquad (9)$$

каде

$$\int_c^d F(x,y)dy = \int_c^{g(x)} F(x,y)dy + \int_{g(x)}^{h(x)} F(x,y)dy + \int_{h(x)}^{d} F(x,y)dy =$$

$$= 0 + \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy + 0$$

зошто на $[c, g(x)]$ и $[h(x), d]$ функцијата $F(x,y) = 0$ по дефиниција. Со замена во (9) ја добивме формулата (8).

Задачи за вежби

1. Ако $f(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$, а $g(y)$ е интеграбилна на $[c,d]$, тогаш $h(x,y) = f(x)\,g(y)$ е интеграбилна на правоаголникот $P = \{(x,y): a \le x \le b\,,\ c \le y \le d\}$

Решение: Тргнуваме од поделбата

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{j-1} < y_i < \cdots < y_m = d$$

ја формираме Римановата сума

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

каде $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\,, y_{j-1} \le \eta_j \le y_j$.

Како $h(\xi_i, \eta_j) = f(\xi_i)g(\eta_j)$ со замена во двојната сума се добива

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i)g(\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \sum_{j=1}^{m} g(\eta_j)\,\Delta y_j$$

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ е Риманова сума за $f(x)$ на $[a,b]$, а $\sum_{j=1}^{m} g(\eta_j)\,\Delta y_j$ е Риманова сума за $g(y)$ на $[c,d]$ и заради нивната интеграбилност важи

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \qquad \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} g(\eta_j)\,\Delta y_j = \int_c^d g(y)dy$$

Јасно, ништо не губиме, ако земеме $n = m$ и тогаш од правилото за граница на производот добиваме

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \sum_{j=1}^{m} g(\eta_j)\,\Delta y_j =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \cdot \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m} g(\eta_j)\,\Delta y_j = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy$$

2. Да се пресметаат интегралите :

а) $\iint_D e^{x+y}\,dxdy\,,\ \ D{:}\,0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

(Одговор: $(e-1\ \ )^2$)

b) $\iint_D \dfrac{x^2}{1+y^2}\,dxdy, D{:}\,0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

(Одговор: $\dfrac{\pi}{12}$)

в) $\iint_D \dfrac{dxdy}{(x+y+1)^2}\,, D{:}\,0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

$\left(\text{Одговор: } \ln\dfrac{3}{4}\right)$

г) $\iint_D x\sin(x+y)dxdy\,, \qquad D{:}\,0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$

(Одговор: $\pi - 2$)

д) $\iint_D x^2ye^{xy}\,dxdy\,,\ \ D{:}\,0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$

(Одговор: 2)

3. Да се пресметаат интегралите:

а) $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x}} dy$,

б) $\int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{x}{y} dy$,

(Одговор: $\frac{1}{2}$)

в) $\int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx$,

(Одговор: $\frac{1}{2}$)

4. $\iint_D x^3 y^2 \, dxdy$, $D: x^2 + y^2 \leq R^2$

Упатство : од $x^2+y^2 = R^2$ се добива $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$

$$\iint_D x^3 y^2 \, dxdy = \int_{-R}^{R} x^3 \, dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \, dy$$

(Одговор: 0)

5. $\iint_D (x^2 + y^2) dxdy, D$: ограничена со параболите $y = x^2$ и $y^2 = x$

(одг. $\frac{88}{140}$)

6. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, D е ограничена со $x = 2, y = x$ и $xy = 1$.

Од системот $\begin{cases} xy = 1 \\ y = x \end{cases}$, добиваме $x = 1$, и затоа

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 x^2dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dy}{y^2}$$

(Одговор: $\frac{9}{4}$)

7. Да се пресмета $\iint_D \sqrt{1-x^2y^2}\,dxdy$ каде D е четвртина од кругот кој лежи во првиот квадрант $x^2+y^2 \le 1$,

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy$$

(Одговор: $\frac{\pi}{6}$)

8. Да се пресмета $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ каде D е триаголник со темиња $(0,0), (1,0), (1,1)$.

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2+y^2)dy = \cdots$$

(Одговор: $\frac{1}{3}$)

9. Нека $f(s,t)$ е непрекината функција на затворениот правоаголник

$$P = \{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

и нека

$$z(x,y) = \int_c^y dt\left[\int_a^x f(s,t)ds\right].$$

Тогаш

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int_a^x f(s,y)ds$$

Со диференцирање по x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right] = f(x,y)$$

т.е

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

10. Нека $K(x,y)$ е непрекината функција на $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

Да се докаже

$$\int_0^1 dx \int_0^x K(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^1 K(x,y)dx.$$

Доказ:

$$\iint_D K(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \left[\int_y^1 K(x,y)dx\right]$$

или

$$\iint_D K(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \left[\int_0^x K(x,y)dy\right]$$

11. Да се промени редот на интеграција во интегралот

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right]$$

12. Да се оцени интегралот

$$\iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)dxdy$$

на областа $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

Функцијата $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 9$ на D има минимум за $x = 0, y = 0$ еднаков на $f(0,0) = 9$, а има максимум за $x = 0$, $y = \pm 2$ еднаков на

$$f(0,2) = 0^2 + 4 \cdot 4 + 9 = 25$$

Така добиваме

$$9 \cdot 4\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)dxdy \leq 100\pi$$

7. Троен интеграл

Нека функцијата $u = f(x, y, z)$ е дефинирана на паралелопипедот (правоаголник во R^3)

$$P = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq l\} \tag{1}$$

Поделбата на P е определена со трите поделби

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 <\ldots< x_{i-1} < x_i <\ldots< x_n = b \\ c = y_0 < y_1 <\ldots< y_{j-1} < y_j <\ldots< y_m = d \\ e = z_0 < z_1 <\ldots< z_{k-1} < z_k <\ldots< z_p = l \end{aligned} \tag{2}$$

P_{ijk} е паралелопипедот:

$$P_{ijk} = \{(x, y, z) : \mathrm{x_{i-1}} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{x_{i,}}\ \mathrm{y_{j-1}} \leq \mathrm{y} \leq \mathrm{y_{j,}}\ \mathrm{z_{k-1}} \leq \mathrm{z} \leq \mathrm{z_k}\}$$

со волумен (мера) еднаков на

$$V(P_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

или кратко Δ_{ijk}.

Во P_{ijk} избираме точка $(\xi_{i,} \eta_{j,} \zeta_k)$ така што

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_{i,} y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_{j,} z_{k-1} \leq \zeta_k \leq \mathrm{z_k}$$

и ја формираме сумата

$$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(\xi_{i,} \eta_{j,} \zeta_k) \Delta_{ijk}$$

која е *Риманова сума* по однос на дадената поделба.

Ако постои број K таков што за $\varepsilon > 0$ постои број $\delta > 0$ таков што важи

$$|T - K| < \varepsilon \tag{3}$$

за $\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2 + \Delta z_k^2 < \delta^2$ по однос на сите индекси, тогаш бројот K се вика троен интеграл за функцијата $f(x,y,z)$ на паралелопипедот P и се бележи со

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dxdydz$$

Симболично пишуваме

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n,m,p\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\Delta_{ijk}$$

Дефиниција на троен интеграл на поопшта област D од R^3 е аналогна на дефиницијата кај двојниот интеграл.

Нека D е ограничено множество во R^3 и нека $f(x,y,z)$ е функција дефинирана на D. Функцијата

$$g(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{за } (x,y,z) \in D \\ 0, & \text{за } (x,y,z) \notin D \end{cases}$$

се вика продолжување за $f(x,y,z)$ со 0.

Нека е P паралелопипед во кој се содржиD. Ако функцијата $g(x,y,z)$ е интеграбилна на P, тогаш велиме дека функцијата $f(x,y,z)$ е интеграбилна на D и во тој случај интегралот

$$\iiint\limits_P g(x,y,z)dxdydz$$

се зема да е еднаков на интегралот на функцијата $f(x,y,z)$ на D и пишуваме

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$$

Аналогно како кај двојниот интеграл може да се дадат соодветните особини и соодветните теореми за тројниот интеграл.

Како на пример, секоја непрекината функција на паралелопипедот е интеграбилна, или поопшто ако е непрекината освен на множество со мера 0 итн.

Пример. Ако $f(x,y,z) = M$ на паралелопипедот P тогаш

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\Delta_{ijk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} M\Delta_{ijk} = \mathrm{M}(b-a)(d-c)(l-e)$$

т.е

$$\iiint_P M dxdydz = M \cdot V(P)$$

за $M = 1$

$$\iiint_P dxdydz = V(P)$$

каде $V(P)$ е волуменот (мерата) на паралелопипедот P. Природно обопштување е да ставиме $\iiint_D dxdydz = V(D)$, каде $V(D)$се вика волумен (мера) за множеството D во R^3,ако 1 е интеграбилна на D. Пресметувањето на тројниот интеграл според дефиницијата е уште потешко од двојниот интеграл, но за среќа постојат начини со кои што пресметувањето се сведува на пресметување на три обични интеграли. Во врска со тоа ги даваме следните теореми без докази.

Теорема 1 Нека $f(x, y, z)$е интеграбилна функција на тродимензионалниот правоаголник т.е. паралелопипед

$$P\{(x, y, z): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq l\}$$

Со P_{yz} го означувамеме правоаголникот: $c \leq y \leq d, \quad e \leq z \leq l$.

Да претпоставиме дека постои интегралот

$$g(x) = \iint_{R_{yz}} f(x, y, z)dydz \qquad (4)$$

тогаш функцијата $g(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a, b]$ и

$$\iiint_P f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b g(x)dx$$

или, ако замениме за $g(x)$ од (4), добиваме

$$\iiint_P f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left[\iint_{R_{yz}} f(x, y, z)dydz\right] dx \qquad (5)$$

Интегралот (5) на десната страна се вика итериран интеграл и ни дава начин за пресметување на тројниот интеграл.

Следната теорема дава друг пат за пресметување на троен интеграл.

Теорема 2 Нека $f(x, y, z)$ е интеграбилна функција на паралелопипедот

$$P: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq l$$

Со P_{yz} го обележуваме правоаголникот $c \le y \le d,\ e \le z \le l$ и нека претпоставиме дека за $(y,z) \in R_{yz}$ интегралот

$$h(y,z) = \int_a^b f(x,y,z)dx \qquad (6)$$

постои. Тогаш $h(y,z)$ е интеграбилна на R_{yz} и

$$\iiint_{\mathrm{P}} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{\mathrm{R_{yz}}} \left[\int_a^b f(x,y,z)dx\right] dydz \qquad (7)$$

Интегралот од десната страна на (7) се вика итериран интеграл и ни дава начин за пресметување на троен интеграл.

Разгледуваме сега случај на област D определена со

$$D = \{(x,y,z) \colon (x,y) \in G, g(x,y) < z < h(x,y)\} \qquad (8)$$

каде G е ограничена област во R^2, $g(x,y)$ и $h(x,y)$ се непрекинати на затворачот за G.

Теорема3. Нека G е како во (8) и нека $f(x,y,z)$ е непрекината функција на $D \cup \partial D$. Тогаш $f(x,y,z)$ е интеграбилна на D и

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_G \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy$$

Задачи за вежби

1. Да се пресмета интегралот

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz$$

2. Да се пресмета интегралот $\iiint_D x^2y^2\, zdxdydz$ каде D е определена со $x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1$.

$$\iiint_D x^2y^2\, zdxdydz = \int_{-1}^1 x^2dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2\, dy \int_0^1 zdz$$

(Одговор:$\pi/48$)

3. Нека D е определена со: $x^2+y^2+z^2<1,\ y>0,\ z>0$

Да се пресметаат интегралите

а) $\iiint\limits_D x^2dxdydz$

б) $\iiint\limits_D x^2yzdxdydz$

в) $\iiint\limits_D x^2yzdxdydz$

а) Нека G е од R^2 таква што за $(x,y)\in G$ постои z такво што $(x,y,z)\in D$. Тогаш G е определена со $x^2+y^2<1$. Како за дадено $(x,y)\in G, 0<z\leq \sqrt{1-x^2-y^2}$ имаме

$$\iiint\limits_D x^2dxdydz=\iint\limits_G x^2\left[\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\right]dxdy=\iint\limits_G x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

Понатаму од $G: x^2+y^2<1$ и $y>0$ имаме за $-1<x<1$ треба $0<y<\sqrt{1-x^2}$, затоа

$$\iint\limits_G x^2\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_{-1}^{1}x^2\,dx\left[\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\right]$$

и.т.н

8 Смена на променливи кај двоен интеграл

Нека го разгледаме интегралот

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

Нека x и y се функции од u и v т.е.

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \text{каде } (u,v) \in D^{\cdot} \qquad (2)$$

при што x и y имаат непрекинати парцијални изводи, пресликувањето $(u,v) \to [x(u,v), y(u,v)]$ е обратно еднозначно од D^0 на D и уште детерминантата

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

во секоја точка $(u,v) \in D^0$. Детерминантата J се вика Јакобијан на пресликувањето.

При направените претпоставки важи формулата

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^0} f[x(u,v), y(u,v)]|J|dudv \qquad (3)$$

Формулата (3) се вика *формула за смена* на променливи кај двоен интеграл.

Пример. Нека (ρ, φ) се поларни координати за (x,y), т.е.

$$x = \rho\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi$$

Функциите $x(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi$, $y(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi$ имаат непрекинати парцијални изводи по ρ и φ и нивниот јакобијан е:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi$$

од каде

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho cos^2\varphi + \rho sin^2\varphi = \rho$$

Следователно

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f[\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi]\rho d\rho d\varphi$$

9 Смена на променливи кај троен интеграл

Нека U е отворено множество во R^3 и нека

$$x = x(u,v,w), y = y(u,v,w) \text{ и } z = z(u,v,w)$$

се функции дефинирани на множеството U чии што точки ги означуваме со (u,v,w).

Ако $(x,y,z) \in V$, каде V е отворено множество во R^3, тогаш пресликувањето

$$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

претставува едно пресликување (трансформација) од U во V. Ако функциите

$$x = x(u,v,w), y = y(u,v,w) \text{ и } z = z(u,v,w)$$

имаат непрекинати парцијални изводи на U тогаш велиме, дека пресликувањето T е непрекинато диференцијабилно.

Теорема 1 Нека T е непрекинато диференцијабилно пресликување од отвореното множество U на отвореното и ограничено множество V. Да претпоставиме исто така дека T е обратно еднозначно пресликување при што инверзното пресликување за T од V на U е непрекинато. Ако $f(x,y,z)$ е интеграбилна на V тогаш важи следната формула

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{U} f(T(u,v,w))\,|JT(u,v,w)|dudvdw$$

каде JT е јакобијанот на T.

Доказот на оваа теорема не го даваме, но ќе презентираме неколку примери.

Пример 1 Поларни координати во R^3.

Нека $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Бројот ρ кој што е еднаков на растојанието од точката до координатниот почеток се вика уште норма или апсолутна вредност за (x,y,z) и во литературата обично се означува со $\|(x,y,z)\| = \rho$ или $|(x,y,z)| = \rho$. Ние во оваа книга ќе ги користиме и двете ознаки. Тоа го напоменавме уште во почетокот на книгата.

Јасно е дека $|z| \leq \rho$ односно $-1 \leq z/\rho \leq 1$. Знаеме дека функцијата $cos\theta$ строго монотоно опаѓа на интервалот $0 \leq \theta \leq \pi$ од 1 до -1. Бидејќи таа функција е непрекината постои единствено θ т.ш. $0 \leq \theta \leq \pi$ и

$$\frac{z}{\rho} = cos\theta \text{ т.е. } z = \rho cos\theta$$

Сега имаме

$$x^2 + y^2 + \rho^2 cos^2\theta = \rho^2 \text{ т.е. } x^2 + y^2 = \rho^2 - \rho^2 cos^2\theta = \rho^2 sin^2\theta$$

Од поларните координати во xy рамнината следи дека постои $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ такво што

$$x = \rho cos\varphi \sin\theta, \; y = \rho sin\varphi \sin\theta.$$

Според тоа имаме

$$x = \rho cos\varphi \sin\theta, y = \rho sin\varphi \sin\theta \text{ и } z = \rho cos\theta,$$

каде $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $0 \leq \theta \leq \pi$

Тројката (ρ, φ, θ) се вика поларни координати во просторот R^3. Нека со H го означиме множеството во R^3 чии што точки (x, y, z) се такви што $x \neq 0, y \neq 0$ и $z \neq 0$ тогаш $\rho > 0, 0 < \varphi < 2\pi$ и $0 < \theta < \pi$

Пресликувањето $T(\rho, \varphi, \theta) = (\rho cos\varphi \sin\theta, \rho sin\varphi \sin\theta, \rho cos\theta)$ е обратно еднозначно од E на H, исто така е непрекинато диференцијабилно, а јакобијанот е

$$J(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 sin\theta$$

каде $E = \{(\rho, \varphi, \theta): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 < \rho < \infty\}$.

Формулата за смена на променливи во троен интеграл е

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{D'} f(T(\rho, \varphi, \theta)\rho^2 sin\theta d\varphi d\theta d\rho$$

Задача1. Да се пресмета волуменот на топката D: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Од геометриската интерпретација на тројниот интеграл имаме

$$m(D) = \iiint_D dxdydz$$

Со помош на поларни координати во R^3 интегралот е

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^R \rho^2 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Се разбира аналогно може да се дефинираат и во R^4 и општо во R^n. Но ние главно ќе работиме во R^3.

Пример2. Цилиндрични координати во R^3.

Нека точката $(x, y, z) \in R^3$ тогаш знаеме $x = \rho cos\varphi, y = \rho sin\varphi$ каде $x^2 + y^2 = \rho^2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, според тоа точката потполно е определена со тројката (ρ, φ, z). Овие три броја се викаат цилиндрични координати во R^3.

Волумен (мера) на тела во R^3

Знаеме дека од интерпретацијата на тројниот интеграл, волуменот (мерата) на некое тело W во просторот или поопшто кажано на некое множество $W \subset R^3$ се пресметува со тројниот интеграл

$$m(W) = \iiint\limits_W dxdydz$$

Ако W е ограничено на пример со две z –проекциони површини $z_1(x, y) < z_2(x, y)$ и $(x, y) \in D$ тогаш имаме

$$m(W) = \iiint\limits_W dxdydz = \iint\limits_D dxdy \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \right) = \iint\limits_D [z_2(x, y) - z_1(x, y)] \, dxdy$$

што значи, ако се познати површините со кои е ограничено множеството (телото) W тогаш неговиот волумен (мера) се пресметува на опишаниот начин со помош на двоен интеграл.

Задача Да се најде волуменот на телото

$\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \geq b^2\}$ каде $b < a$.

Решение. $x^2 + y^2 \leq b^2$ е цилиндар со z –оската која ја сече xy –рамнината во кругот $x^2 + y^2 \leq b^2$. Според тоа множеството (телото) чија мера се бара е меѓу сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и надворешноста на цилиндричната површина $x^2 + y^2 = b^2$. Од тука е јасно, дека полесно е да се пресмета мерата на телото ограничено со сферата и цилиндарот и потоа да се одземе од мерата на топката. Значи имаме

$$2\iint\limits_{x^2+y^2\leq b^2}\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}-0\right)dxdy$$

со премин во поларни координати добиваме

$$2\int_0^b \rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho\cdot 2\pi=\frac{4\pi}{3}\left[a^3-(a^2-b^2)^{3/2}\right]$$

Бараниот волумен се добива кога од $\frac{4\pi a^3}{3}$ се одземе последниот израз, и се добива

$$\frac{4\pi}{3}\left[(a^2-b^2)^{3/2}\right]$$

Задача. Да се напише итерираниот интеграл

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int\limits_0^{g(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

како итериран интеграл во цилиндрични координати.

Решение. $0\leq z\leq g(x,y)$, (x,y) се менува во триаголникот ограничен со x –оската, y –оската и правата $x+y=1$. Од тука имаме

$$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},0\leq\rho\leq\frac{1}{cos\varphi+sin\varphi}$$

зошто $cos\varphi+sin\varphi=1$ по правата. Па можеме да напишеме

$$\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{(cos\varphi+sin\varphi)^{-1}}\rho d\rho\int f(\rho cos\varphi,\rho sin\varphi,z)\,dz$$

Задача. Да се пресмета мерата (волуменот) на $\{(x,y,z)\colon \exp(-2x)>y^2+z^2,x>0\}$. (одг. $\pi/2$).

Задачи за вежби

1. Да се реши со премин на поларни координати

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy$$

Решение: Областа D на интеграција во двојниот интеграл е определена со:

$$0 \le x \le R, 0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$$

т.е.

$$0 \le x \le R, x^2+y^2 \le R^2, y \ge 0$$

$x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi,$ при што $0<\rho\le R,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Со замена во интегралот се добива

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \ln(1+\rho^2)\,\rho d\rho$$

зашто $\rho^2 cos^2\varphi+\rho^2 sin^2\varphi=\rho^2$

Понатаму интегралот

$$\int_0^R \ln(1+\rho^2)\,\rho d\rho$$

го решаваме со парцијална интеграција.

$$u=\ln(1+\rho^2)\,, \qquad u'=\frac{2\rho}{1+\rho^2},\ \ \gamma'=\rho\gamma=\frac{\rho^2}{2}$$

$$\int_0^R \ln(1+\rho^2)\,\rho d\rho=\frac{\rho^2}{2}\ln(1+\rho^2)\Big|_0^R-\int_0^R\frac{\rho^3 d\rho}{1+\rho^2}=\frac{R^2}{2}\ln(1+R^2)-\frac{R^2}{2}$$

Како

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi=\frac{\pi}{2}$$

добиваме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \ln(1+\rho^2)\,\rho d\rho = \frac{\pi}{4}[\ln(1+R^2) - (1+R^2) - R^2]$$

2. Да се реши со поларни координати

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dxdy, \text{каде } D: x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0$$

(Одговор: $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$)

$$\iint_D (h-2x-3y)\,dxdy, \text{каде } D: x^2+y^2 \le R^2$$

(Одговор: $\pi R^2 h$)

ГЛАВА 3

Несвојствени интеграли и интеграли со параметар

1 Несвојствени интеграли

Нека функцијата $f(x,y)$ е дефинирана на целата рамнина R^2 и нека претпоставиме дека f е интеграбилна на секој круг $D_R = \{(x,y): x^2 + y^2 < R^2\}$. Кружната област D_R кратко ќе ја означуваме и на следниот начин $D_R: x^2 + y^2 < R^2$.

Ако постои

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{D_R} f(x,y)dxdy = I$$

тогаш бројот I се вика несвојствен интеграл на R^2 за функцијата f и ќе пишуваме

$$I = \iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$$

Уште се вели дека, интегралот

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$$

е конвергентен или конвергира.

Се разбира интегрирањето може да се прави, на пример, и по квадрати

$$P_R = \{(x,y): -R \le x \le R\,, -R \le y \le R\}$$

и пак се зема лимес т.е.

$$\lim_{R\to\infty} \iint f(x,y)dxdy$$

За да овој важен поим биде појасен несвојствениот интеграл се дефинира на следниот начин:

Дефиниција 1 Нека функцијата $f(x,y)$ е дефинирана на R^2. Ако за дадено $\varepsilon > 0$ постои круг $D_{R_0} = x^2+y^2 < R_0^2$ така што за секоја област $D \supset D_{R_0}$ важи условот:

$$\left| \iint_D f(x,y)dxdy - \iint_{D_{R_0}} f(x,y)dxdy \right| < \varepsilon$$

тогаш велиме дека постои несвојствениот интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$$

При оваа дефиниција се покажува дека интегралот не зависи од тоа по кои ограничени области се интегрира, главно е само нивната унија да биде R^2. Но во праксата најмногу се користат кружните области или правоаголниците.

Да забележиме дека дадена функција може да е дефинирана на неограничена област $D \subset R^2$ различна од целата рамнина R^2. Во тој случај можеме да интегрираме по ограничените области $D \cap D_R$ и ќе имаме:

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \iint_{\mathrm{D}\cap\mathrm{D_R}} f(x,y)dxdy$$

На пример, ако $D = \{(x,y) : -\infty < x < \infty \,,\; a \le y \le b\}$

тогаш би работеле на пример, на следниот начин:

$$\iint_{D_n} f(x,y)dxdy = I_n$$

каде

$$D_n = \{(x,y) \colon -n \le x \le n, a \le y \le b\}$$

и потоа бараме $\lim_{n\to\infty} I_n$ ако постои.

На потполно ист начин се дефинира несвојствениот интеграл на функцијата $f(x,y,z)$ од три променливи, само што тогаш ќе имаме пресметување на тројни интеграли, пример по топки $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ или по кубови $-n < x < n \,, -n < y < n \,, -n < z < n$ и.т.н.

Ако за дадена функција $f(x,y)$ конвергира интегралот од $|f(x,y)|$, тогаш постои (конвергира) и интегралот од $f(x,y)$. Доказот е потполно ист како кај интегралите на функции од една променлива.

Во овој случај се вели дека несвојствениот интеграл

$$\iint f(x,y)dxdy$$

конвергира апсолутно. Се разбира истото се однесува и на тројните интеграли па и понатаму.

Пример. Да се испита конвергенцијата на интегралот

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Во овој случај ќе интегрираме по кругови $x^2+y^2 \leq R^2$ и имаме

$$\iint e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Бидејќи функцијата $e^{-(x^2+y^2)}$ е непрекината на целата рамнина R^2 заклучуваме дека интегралите по кругови постојат и нив ќе ги решаваме во поларни координати

$x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi.$

Знаеме дека јакобијанот е ρ т.е.

$$dxdy=\rho\, d\rho d\varphi, \qquad 0\leq\varphi\leq 2\pi\ , \qquad 0\leq\rho\leq R^2$$

значи:

$$\iint e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^R \rho d\rho\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}d\varphi=$$

$$\int_0^R \rho e^{-\rho^2}d\rho\, 2\pi=2\pi(-\frac{1}{2}\left(e^{-R^2}-1\right))=\pi-\pi e^{-R^2}$$

сега

$$\lim_{R\to\infty}\left(\pi-\pi e^{-R^2}\right)=\pi$$

следи

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\pi$$

бидејќи

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

и како

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = I$$

имаме

$$I^2 = \pi \text{ или } I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Овој еднократен несвојствен интеграл многу често се среќава во математиката и нејзината примена , а особено во теоријата на веројатност.

Сега на кратко ќе разгледаме еден друг вид на несвојствен интеграл.

Нека функцијата $f(x,y)$ е определена на некоја област D од R^2 освен во една точка (x_0, y_0) од D и нека претпоставиме дека постои интегралот на областа

$$D - \{(x,y): (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\} = D - D_\delta$$

ако постои

$$\lim_{\delta \to 0} \iint_{D-D_\delta} f(x,y)dxdy = I$$

тогаш бројот I се вика несвојствен интеграл за функцијата $f(x,y)$ на областа D или со други зборови се вели дека $\iint f(x,y)dxdy$ постои или конвергира.

Пример. Нека D е единичниот круг во $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.Функцијата $f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$ е секаде определена освен во точката $0(0,0)$.

Нека $D_\delta = x^2 + y^2 \leq \delta^2$ и нека

$$D - D_\delta = \{(x,y): \delta^2 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

каде $\delta > 0$ е мал број. Тогаш интегралот е

$$\iint\limits_{D-D_\delta} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} \mathrm{dxdy}.$$

Со поларни координати $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$ добиваме

$$\int_{\delta}^{1} \rho d\rho \int_{0}^{2\pi} \frac{\rho^2 cos^2\varphi}{(\rho^2)^{5/2}} =$$

$$= \int_{\delta}^{1} \rho d\rho \cdot \frac{\rho^2}{\rho^5} \int_0^{2\pi} cos^2\varphi d\varphi = \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 + cos2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \int_{\delta}^{1} \frac{d\rho}{\rho^2} (\pi + 0) = \pi \int_{\delta}^{1} \frac{d\rho}{\rho^2} = \pi \cdot -\frac{1}{\rho} \int_{\delta}^{1} = \pi(-1 + \frac{1}{\delta})$$

ако $\delta \to 0$ тогаш $\frac{1}{\delta} \to \infty$. Значи лимес не постои кога $\delta \to 0$ следователно овој интеграл е дивергентен (не е конвергентен).

Задача

1. Ако D е единичен круг $x^2 + y^2 \leq 1$ да се испита конвергенцијата на интегралот

$$\iint \frac{x^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy$$

2 Интеграли со параметар

Пред да преминеме на дефиницијата и анализата на интегралите со параметар сакаме да го потсетиме читателот на неколку поими што ќе ги користиме понатаму.

Нека A е множество од R^2, а B некое множество од R , тогаш $A \times B$ се состои од елементите $((x, y), t)$ каде$(x, y) \in A$, а $t \in B$, овие подредени двојки всушност се точки од просторот R^3 и можеме да ги пишуваме во форма (x, y, t). Се разбира можеме да зборуваме и во најопшт случај:

Ако $A \subset R^n$, $B \subset R^m$ и ако $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in B$ тогаш директниот производ $A \times B$ чиј што елементи се подредените двојки (x, y) е всушност подмножество од просторот R^{n+m} чии што точки се $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$. Ние тука ќе имаме работа воглавно кога A е од R, од R^2 или R^3, а B е од R.

Нека на множеството $A \times B$ е дефинирана функција $f(x, y, t)$ каде $(x, y) \in A, t \in B$.Ќе велиме, дека функцијата f е непрекината во дадена точка (x_0, y_0, t_0) ако за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што важи

$$|f(x, y, t) - f(x_0, y_0, t_0)| < \varepsilon$$

ако

$$\|(x,y,t) - (x_0,y_0,t_0)\| = \|(x-x_0, y-y_0, t-t_0)\| =$$
$$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (t-t_0)^2} < \delta.$$

Исто така ќе велиме дека дадената функција е рамномерно непрекината на $A \times B$, ако за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што

$$|f(x,y,t) - f(x_1,y_1,t_1)| < \varepsilon$$

ако

$$|(x,y,t) - (x_1,y_1,t_1)| = \|(x,y,t) - (x_1,y_1,t_1)\| < \delta$$

за било кои (x,y,t) и (x_1,y_1,t_1) од $A \times B$ што го задоволуваат наведениот услов.

Нека претпоставиме, дека функцијата $f(x,y,t)$ за секое $t \in B$ е интеграбилна на множеството A тоа значи

$$\iint_A f(x,y,t)\,dxdy \qquad (1)$$

постои кога $t \in B$. На тој начин е дефинирана функција на B со

$$F(t) = \iint_A f(x,y,t)\,dxdy \qquad (2)$$

За функцијата $F(t)$ велиме дека е определена со интеграл кој што зависи од t кое се вика параметар или поточно променлив параметар зошто t се менува низ множеството B. Заради тоа интегралите од видот (1) се викаат интеграли со параметар, а функцијата (2) е дефинирана со интеграл. Функциите дефинирани со помош на интеграл се една важна класа на функции како од теоретска гледна точка така и од нивната примена.

Напоменуваме дека на ист начин се дефинираат и еднократни интеграли со параметар и тројни интеграли со параметар и најопшто $n-$кратни интеграли со параметар. Исто така може и B да биде подмножество не само од R, туку и од R^2, R^3 итн., тогаш параметарот t претставува точка од R^2, од R^3 или најопшто од R^m.

Теорема 1 Нека A е област од R^2, а B е подмножество од R. Ако функцијата $f(x,y,t)$ е рамномерно непрекината на $A \times B$ тогаш функцијата

$$F(t) = \iint_A f(x,y,t)\,dxdy$$

е непрекината на B.

Доказ:

$$F(t_1) = \iint_A f(x,y,t_1)\,dxdy\,, \quad F(t_2) = \iint_A f(x,y,t_2)\,dxdy$$

$$|F(t_2) - F(t_1)| = \left| \iint_A [f(x,y,t_2) - f(x,y,t_1)]\,dxdy \right| \leq$$

$$\iint_A |f(x,y,t_2) - f(x,y,t_1)|\,dxdy$$

Нека $\varepsilon > 0$, тогаш од рамномерната непрекинатост следи дека постои $\delta > 0$ така што важи

$$|f(x,y,t_2) - f(x,y,t_1)| < \varepsilon \text{ за } \|(x,y,t_2) - (x,y,t_1)\| < \delta$$

бидејќи

$$\|(x,y,t_2) - (x,y,t_1)\| = \|(0,0,t_2 - t_1)\| = |t_2 - t_1| < \delta \text{ за } t_1, t_2 \in B$$

$$|F(t_2) - F(t_1)| \leq \iint_A \varepsilon\,dxdy = \varepsilon\, m(A)$$

за $|t_2 - t_1| < \delta$

каде што $m(A)$ е плоштината или мерата на A. Со тоа покажавме дека функцијата $F(t)$ е рамномерно непрекината на B.

Следната теорема се однесува на диференцијабилноста на функцијата $F(t)$.

Теорема 2 Нека A е област во R^2, а B е отворено множество во R. Ако функцијата $f(x,y,t)$ и парцијалниот извод $\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t)$ се рамномерно непрекинати на $A \times B$, тогаш $F'(\mathrm{t})$ постои на B и е рамномерно непрекината функција на B, при што

$$F'(\mathrm{t}) = \iint_{\mathrm{A}} \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}}\,\mathrm{dxdy} \qquad (3)$$

Доказ: Нека $t_0 \in B$, тогаш

$$\frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} = \frac{1}{h}\iint_A [f(x,y,t_0 + h) - f(x,y,t_0)]\,dxdy$$

Користејќи ја Лагранжовата теорема во интегралот добиваме

$$\frac{1}{h}h\iint_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t_0+\theta h)\,dxdy =$$

$$= \iint_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t_0+\theta h)\,dxdy \text{ за } 0<\theta<1.$$

Од рамномерната непрекинатост на $\frac{\partial f}{\partial t}$ на $A\times B$ кога $h\to 0$ последниот интеграл тежи кон

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t_0)\,dxdy.$$

Тоа значи дека

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \iint_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t_0)\,dxdy$$

или

$$F'(\mathrm{t}_0) = \iint_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t_0)\,dxdy$$

Истото може да се направи за секое $t\in B$ што повлекува дека функцијата $F(t)$ има извод на B и тој извод $F'(\mathrm{t})$ е рамномерно непрекината функција на B, како што покажавме во теорема1, само што овде се работи за функцијата $\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t)$ на $A\times B$, на место $f(x,y,t)$.

Пример:

$$F(t)=\int_0^1 \frac{tdx}{\sqrt{1-t^2x^2}}\ ,\quad 0<t<1$$

Да се определи $F'(\mathrm{t})$.

Решение: Бидејќи $0\le x\le 1$ подинтегралната функција $f(x,t)$ е непрекината на множеството $[0,1]\times(0,1)$. Изводот

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{(1-t^2x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

е исто така непрекината. Ако f и f_t ги разгледуваме на $[0,1]\times[0,a]$ каде $0<a<1$, тогаш на овој правоаголник f и f_t се рамномерно непрекинати, затоа според теорема 2 имаме

$$F'(t) = \int_0^1 \frac{1}{(1-t^2x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \text{ за } 0 < t < a$$

Бидејки a може да се земе произволно блиско до 1, заклучуваме дека $F'(t)$ постои на целиот интервал (0,1).

Задачи:

1. Нека $f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ се непрекинати функции за $a \le x \le b$ и $a \le y \le b$. Докажи, дека

$$\frac{d}{dy}\int_a^y f(x,y)dx = f(y,y) + \int_a^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \text{ за } a < y < b$$

Решение:

$$F(y) = \int_a^y f(x,y)dx, \qquad F(y+\Delta y) = \int_a^{y+\Delta y} f(x,y+\Delta y)\,dx, a < y < b$$

$$F(y+\Delta y) - F(y) = \int_a^y f(x,y+\Delta y)dx - \int_a^y f(x,y)dx + \int_y^{y+\Delta y} f(x,y+\Delta y)\,dx =$$

$$= \int_a^y [f(x,y+\Delta y) - f(x,y)]dx + \int_y^{y+\Delta y} [f(x,y+\Delta y) - f(x,y)]dx$$

$$+ \int_y^{y+\Delta y} f(x,y)dx =$$

$$= \int_a^y \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta\Delta y)dx + \int_y^{y+\Delta y} \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta_1\Delta y) + f(u,y)\Delta y$$

каде $y \le u \le y + \Delta y, 0 < \theta < 1,$ и $0 < \theta_1 < 1$

Во првиот и вториот интеграл ја применивме теоремата на Лагранж за средна вредност, а во третиот теоремата за средна вредност кај интегралите. По делење со Δy добиваме

$$\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \int_a^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta\Delta y)dx + \int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta_1\Delta y)dx + f(u,y)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta y} = \int_a^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + 0 + f(y,y)$$

зошто кога $\Delta y \to 0,\ u \to y$

$$F'(y) = \int_a^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(y,y)$$

за секое $a < y < b$.

2. Нека $F(y) = \int_0^y x^n (y-x)^m dx$, каде m и n се природни броеви. Со примена на претходната задача докажи дека

$$\varphi^{(m)}(y) = \frac{m!}{m+1} y^{n+1}, \qquad \varphi^{(j)}(0) = 0 \text{ ако } 0 \le j \le m-1$$

3. Да се определи изводот на функцијата $F(y) = \int_0^y e^{-x^2y^2}\,dx$
4. Нека $\sigma(x,y)$ е непрекината функција на $D: x^2 + y^2 \le R^2$

Дадена е функцијата

$$F(u,v) = \iint_D \sigma(x,y) \log\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}\, dx\, dy \text{ за } (u,v) \notin D$$

Покажи дека $F(u,v)$ има непрекинати парцијални изводи од втор ред, и

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

Каква е функцијата во областа $R^2 \setminus D$?

3 Несвојствени интеграли кои зависат од параметар

На почеток да се потсетиме на низите од функции каде секоја $f_n(x)$ е дефинирана на интервалот $[a,b]$. За секое фиксно $a \le x \le b$ низата $f_n(x)$ е бројна и притоа може да конвергира за тоа x и ако конвергира тогаш пишуваме

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (1)$$

а тоа значи дека за секое $\varepsilon > 0$ постои n_0 такво што:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{за } n \ge n_0$$

Се разбира ако низата конвергира и во друга точка x' тогаш за истото $\varepsilon > 0$, n_0 не мора да биде исто со она за точката x.

Меѓутоа ако $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ важи за секое $\varepsilon > 0$ за секој $n \ge n_0$ и за сите $a \le x \le b$ тогаш велиме дека низата конвергира рамномерно на интервалот

$[a, b]$. Ако низата конвергира но не рамномерно тогаш велиме дека дадената низа конвергира обично или точка по точка.

Кошиев критериум за рамномерна конвергенција

Низата $\{f_n(x)\}$ рамномерно конвергира ако за дадено $\varepsilon > 0$ постои n_0 такво што за било кои $m, n \geq n_0$ и секое $x \in [a, b]$ важи условот

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Доказ: Нека прво претпоставиме дека $\{f_n(x)\}$ конвергира рамномерно кон функцијата $f(x)$; тогаш за $\varepsilon > 0$ постои n_0 такво што важи

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

за $n > n_0$ и за секое $a \leq x \leq b$

Ако $m \geq n_0$ имаме исто така:

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

од тука добиваме:

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

за $m, n \geq n_0$ и $a \leq x \leq b$

Покажавме дека важи Кошиевиот критериум.

Обратно. Да претпоставиме дека важи условот

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Тогаш посебно за секое x од интервалот неравенството е Кошиев критериум за бројна низа и како што е познато постои

$$\lim_{m \to \infty} f_m(x) = f(x)$$

од тука следи дека

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ за } n \geq n_0$$

од дискусијата е дадено дека тоа неравенство важи за секое $a \leq x \leq b$, а тоа значи дека низата конвергира рамномерно кон функцијата $f(x)$.

4 Некои последици од рамномерната конвергенција.

Теорема 1 Ако функциите од низата $\{f_n(x)\}$ се интеграбилни на интервалот $[a,b]$ и ако низата конвергира рамномерно кон функцијата $f(x)$ која е интеграбилна на $[a,b]$ тогаш важи

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Доказ: Нека $\varepsilon > 0$ и нека n_0 такво што

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ за } n \geq n_0$$

тогаш

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \varepsilon\int_a^b dx = \varepsilon\cdot(b-a)$$

за $n \geq n_0$, а тоа значи дека

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

На повеќе места при доказите со ε, δ јазикот работиме не сосема педантно, туку се задоволуваме да покажеме, дека ако $\varepsilon > 0$ е дадено тогаш при соодветен избор на δ доволно е ако се добие големина која тежи кон нула кога ε тежи кон нула; на пример во последниот случај имаме $\varepsilon(b-a)$.

Теорема 2 Ако низата $\{f_n(x)\}$ конвергира рамномерно за $a \leq x \leq b$ и притоа секоја функција $f_n(x)$ е непрекината тогаш и граничната функција $f(x)$ е непрекината.

Доказ: Нека x_0 е фиксна точка од интервалот и нека $\varepsilon > 0$ е дадено, тогаш имаме

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| =$$

$$= \left|f(x_0+h) - f_{n_0}(x_0+h) + f_{n_0}(x_0+h) + f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right|$$

каде што n_0 е такво што

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

за $n \geq n_0$, а тоа значи дека неравенството важи и за n_0.

Сега имаме

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| \le$$
$$\le \left|f(x_0+h)-f_{n_0}(x_0+h)\right| + \left|f_{n_0}(x_0+h)-f_{n_0}(x_0)\right| + \left|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\right|$$

тогаш бидејќи функцијата f_{n_0} е непрекината во x_0 постои $\delta > 0$ такво што ако $|h| < \delta$

$$\left|f_{n_0}(x_0+h)-f_{n_0}(x_0)\right| < \varepsilon$$

следователно можеме да напишеме

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| < \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon$$

за $|h| < \delta$, а тоа е доказ дека f е непрекината во x_0. Бидејќи x_0 е произволно, следи дека граничната функција е непрекината на интервалот $a \le x \le b$.

Нека функцијата $f(t,x)$ е непрекината по (t,x) кога $a \le x \le b$ и $c \le t < \infty$. Го разгледуваме несвојствениот интеграл

$$\Phi(x) = \int_c^\infty f(t,x)dt \qquad (1)$$

Велиме дека несвојствениот интеграл е рамномерно конвергентен на интервалот $[a,b]$, ако за $\varepsilon > 0$ постои број $K > 0$ таков што важи

$$\left|\Phi(x) - \int_c^s f(t,x)dt\right| < \varepsilon$$

ако $s \ge K$ и секој $x \in [a,b]$.

Теорема 3 Ако интегралот за $\Phi(x)$ рамномерно конвергира на $[a,b]$ тогаш $\Phi(x)$ е непрекината на тој интервал.

Доказ: Ги разгледуваме функциите

$$\Phi_m(x) = \int_c^m f(t,x)dt \text{ за } m = 1,2,3,\dots$$

Според теорема1 следи дека функциите $\Phi_m(x)$ се непрекинати на интервалот $a \le x \le b$. Рамномерната конвергенција на интегралот (1) повлекува рамномерна конвергенција на низата $\{\Phi_m(x)\}$ кон $\Phi(x)$. Според теорема1 следи дека $\Phi(x)$ е непрекината на $a \le x \le b$.

Теорема 4 Интегралот (1) е рамномерно конвергентен ако и само ако за $\varepsilon > 0$ постои позитивен број K_0 така што

$$\left|\int_K^M f(t,x)dt\right| < \varepsilon \text{ ако } M > K \geq K_0$$

Тоа всушност е Кошиевиот критериум за рамномерна конвергенција што го докажавме во теорема 1. Важи и критериумот на Ваерштрас за рамномерна конвергенција.

Теорема 5 Ако $|f(t,x)| \leq g(t)$ и ако несвојствениот интеграл $\int_c^\infty g(t)dt$ е конвергентен, тогаш интегралот (1) е рамномерно конвергентен.

Доказот на оваа теорема при дадените услови се сведува на примена на Кошиевиот критериум.

Теорема 6 Ако интегралот (1) е рамномерно конвергентен на $[a,b]$ тогаш

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \int_c^\infty dt \int_a^b f(t,x)dx$$

ако наместо $\Phi(x)$ го замениме нејзиниот интеграл добиваме

$$\int_a^b dx \int_c^\infty f(t,x)dt = \int_c^\infty dt \int_a^b f(t,x)dx$$

Тоа покажува дека редот на интеграција може да се промени.

Доказ: Бидејќи интегралот (1) е рамномерно конвергентен за $\varepsilon > 0$ постои $K > 0$ такво што

$$\left|\Phi(x) - \int_c^s f(t,x)dt\right| < \varepsilon$$

ако $s \geq K$ за секое $a \leq x \leq b$. Од тука имаме

$$\left|\int_a^b \Phi(x)dx - \int_a^b dx \int_c^s f(t,x)dt\right| \leq \int_a^b \left|\Phi(x) - \int_c^s f(t,x)dt\right| dx < (b-a)\varepsilon$$

Од пресметувањето на двојниот интеграл за непрекината функција $f(x,t)$ важи

$$\int_a^b dx \int_c^s f(t,x)dt = \int_c^s dt \int_a^b f(t,x)dx$$

Сега имаме

$$\left| \int_c^s dt \int_a^b f(t,x)dx - \int_a^b \Phi(x)dx \right| < (b-a)\varepsilon$$

за $s > K$. Од тука следи дека конвергира (постои) несвојствениот интеграл

$$\int_c^\infty dt \int_a^b f(t,x)dx = \int_a^b \Phi(x)dx.$$

Теорема 7 Да претпоставиме дека функциите $f(t,x)$ и $f_x(t,x)$ се непрекинати за $c \le t < \infty$, $a \le x \le b$. Нека исто така, интегралот (1) е конвергентен (постои) за $a \le x \le b$ и дека интегралот $\int_c^\infty f_x(t,x)dt$ е рамномерно конвергентен на $[a,b]$. Тогаш $\Phi'(x)$ постои и

$$\Phi'(x) = \int_c^\infty f_x(t,x)dt$$

Доказ: Дефинираме

$$g(x) = \int_c^\infty f_x(t,x)dt$$

од теорема 4 имаме, ако $a < u \le b$,

$$\int_a^u g(x)dx = \int_c^\infty dt \int_a^u f_x(t,x)dx = \int_c^\infty [f(t,u) - f(t,a)]dt = \Phi(u) - \Phi(a)$$

Од теорема1, $g(x)$ е непрекината. Од основната теорема во интегралното сметање имаме

$$\Phi'(u) = g(u)$$

или ако наместо u ставиме x добиваме дека $\Phi'(x) = g(x)$. Теоремата е докажана.

Теоремите од 1-7 може да се применат и на повеќекратни интеграли: двојни, тројни итн. и исто така на несвојствени интеграли на ограничени множества.

Пример 1 Гама функцијата $\Gamma(x)$ е дефинирана со несвојствениот интеграл

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

Интегралот е несвојствен во $t = 0$ поради функцијата t^{x-1} и во $t = \infty$.

Ако $x > 0$ тогаш

$$\int_{\delta}^{1} t^{x-1}\,dt = t^x|_{\delta}^{1} = 1-\delta^x$$

ако $\delta \to 0$ тогаш и $\delta^x \to 0$ од каде следи дека

$$\int_{\delta}^{1} t^{x-1}\,dt \to 1$$

а тоа значи дека несвојствениот интеграл $\int_0^1 t^{x-1}$ за $x > 0$ постои.

Бидејќи $0 < t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$ на $(0,1]$, по критериумот на Ваерштрас за $g(t) = t^{x-1}$, следи дека постои интегралот $\int_0^1 t^{x-1}\,e^{-t}dt$.

Интегралот

$$\int_{1}^{\infty} t^{x-1}\,e^{-t}dt$$

е рамномерно конвергентен на секој интервал $0 \leq x < A$, бидејќи $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{A-1}e^{-t}$ и

$$\int_{1}^{\infty} t^{A-1}\,e^{-t}dt$$

е конвергентен, па според критериумот на Ваерштрас земајќи $g(t) = t^{A-1}e^{-t}$ следи, дека интегралот е рамномерно конвергентен. Од направената анализа заклучуваме дека интегралот за гама функцијата е рамномерно конвергентен на секој интервал $r \leq x \leq A, r > 0$ и $A > 0$ при што r се претпоставува да биде мало, а А големо така што интегралот можеме да го напишеме

$$\int_{r}^{A} = \int_{r}^{1} + \int_{1}^{A}.$$

Следователно $\Gamma(x)$ е непрекината функција на секој интервал $r \leq x \leq A$. Бидејќи $r \to 0$, $A \to \infty$ можеме да кажеме, дека $\Gamma(x)$ е непрекината функција за $0 < x < \infty$.

Слично се покажува дека интегралот

$$\int_{0}^{\infty} t^{x-1}\log t \cdot e^{-t}dt$$

е рамномерно конвергентен на секој интервал $r \leq x \leq A$, тогаш теоремата7 ни покажува дека

$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \log t \cdot e^{-t} dt\,, (0 < x < \infty)$$

постапувајќи чекор по чекор се покажува дека

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \log^{\mathrm{n}}\mathrm{t}\, dt\ , (0 < x < \infty)$$

Гама функцијата ја задоволува следната интересна релација

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ за } (0 < x < \infty)$$

За да го докажеме тоа ја користиме парцијалната интеграција ставајќи $u = t^x, v' = e^{-t}$ и добиваме

$$\int_\delta^R e^{-t} dt = -e^{-t} t^x|_\delta^R + \int_\delta^R x t^{x-1} e^{-t} dt$$

Ако $\delta \to 0, R \to \infty$ добиваме

$$\int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Интегралот од левата страна е $\Gamma(x+1)$, така што

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

На основа на дадената релација имаме

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1) \ldots \Gamma(1) = n!$$

Пример2 Бета функцијата $B(p,q)$ е дефинирана со интегралот

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, (p > 0, q > 0)$$

Од анализата на интегралот за гама функцијата можеме лесно да видиме, дека несвојствениот интеграл во $t = 0$ и $t = 1$ постои и затоа функцијата $B(p,q)$ е добро дефинирана.

Меѓу функциите гама и бета постои интересна релација

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Прво, да забележиме дека $\Gamma(x)>0$ за $x>0$, тоа следи од фактот што функцијата $t^{x-1}e^{-t}$ е непрекината по t и е поголема од 0 затоа нејзиниот интеграл е строго поголем од нула.

Сега ќе ја докажеме релацијата. За таа цел прво правиме смена $t=x^2$ во интегралот

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$$

и добиваме

$$\Gamma(p)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_\varepsilon^R t^{p-1}e^{-t}dt=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{R}} 2x^{2p-1}e^{-x^2}dx=2\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}dx$$

Слично имаме

$$\Gamma(q)=2\int_0^\infty y^{2q-1}e^{-y^2}dy$$

каде сме замениле $t=y^2$

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}dx\cdot 2\int_0^\infty y^{2q-1}e^{-y}\,dy$$

последниот производ од еднократни интеграли е всушност двојниот интеграл

$$4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=4\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_\varepsilon\int_\varepsilon x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

каде $\quad\varepsilon^2<x^2+y^2<R^2,\ x>0,\ y>0$

Со поларни координати

$$x=\rho\cos\varphi\,,y=\rho\sin\varphi,\qquad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\qquad \varphi\le\rho<R$$

и ако го определиме лимесот кога $\varepsilon\to 0$ и $R\to\infty$ добиваме

$$\left(2\int_0^{\infty} \rho^{2p+2q-1}e^{-\rho^2}\,\rho d\rho\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2p-1}\varphi cos^{2q-1}\,\varphi d\varphi\right)$$

Првиот интеграл со смената $\rho^2 = t$ ќе биде

$$\int_0^{\infty} t^{p+q-1}e^{-t}dt = \Gamma(p+q),$$

а вториот интеграл со смената $x = sin^2 a$ е еднаков на $B(p,q)$, така конечно ја добивме релацијата меѓу гама и бета функциите.

Пример3 Во овој пример ќе докажеме дека

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

Го разгледуваме интегралот

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt \text{ за } x \geq 0$$

Овој интеграл е апсолутно конвергентен ако $x > 0$ и е обично конвергентен ако $x = 0$.

Ако $x \geq 0$, тогаш, за $M > N > 0$, со парцијална интеграција добиваме

$$\int_N^M \left(\frac{e^{-xt}}{t}\right)\sin t\,dt = \frac{e^{-xN}}{N}\cos N - \frac{e^{-xM}}{M}\cos M + \int_N^M \left(\frac{e^{-xt}}{t}\right)'\cos t\,dt$$

бидејќи

$$\left|\left(\frac{e^{-tx}}{t}\right)'\right| = \left|-\frac{xte^{-xt}+e^{-xt}}{t^2}\right| = \frac{1+xt}{t^2}e^{-xt} \leq \frac{e^{xt}}{t^2}e^{-xt} = \frac{1}{t^2}$$

$$\left(e^{xt} = 1 + xt + \frac{(xt)^2}{2!} + \cdots\right)$$

од тука $1 + xt \leq e^{xt}$.

$$\left|\int_N^M \left(\frac{e^{-xt}}{t}\right)'\cos t\,dt\right| \leq \int_N^M \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{M} + \frac{1}{N} < \frac{1}{N}$$

Дефинитивно имаме

$$\left|\int_N^M e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt\right| \le \frac{1}{N}+\frac{1}{M}+\frac{1}{N} \le \frac{3}{N}$$

Сега можеме со Кошиевиот критериум за рамномерна конвергенција да заклучиме, дека интегралот за функцијата $f(x)$ конвергира рамномерно по однос на x, за $0 \le x < \infty$. Од теорема1 следи дека $f(x)$ е непрекината функција, специјално за $x = 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x)$$

За $\varepsilon > 0$, $|e^{-xt}\sin t| \le e^{-\varepsilon t}$ ако $x \ge \varepsilon$.

Бидејќи $e^{-\varepsilon t}$ е интеграбилна на интервалот $0 \le t < \infty$, критериумот на Ваерштрас ја покажува рамномерната конвергенција на интегралот

$$\int_0^\infty e^{-xt}\sin t\, dt \text{ за } x \ge \varepsilon$$

Од теорема5 следи

$$f'(x) = -\int_0^\infty e^{-xt}\sin t\, dt,$$

но за било кое $M > 0$

$$-\int_0^M e^{-xt}\sin t\, dt = -\left[\frac{e^{-xt}(-x\sin t - \cos t)}{1+x^2}\right]\Bigg|_0^M$$

(Решението се добива со два пати парцијална интеграција)

Ако $M \to \infty$ добиваме

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} = -(arc\tan x)'$$

следователно

$$f(x) = c - arc\tan x$$

c е константа.

За да ја определиме константата c, за $\varepsilon > 0$,

$$\left|\int_0^\varepsilon e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt\right| \le \int_0^\varepsilon e^{-xt}dt \le \int_0^\varepsilon dt = \varepsilon$$

исто така,

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt\right| \le \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-xt}dt = \frac{e^{-x\varepsilon}}{x} < \varepsilon$$

ако x е доволно големо, да речеме $x \ge K(\varepsilon)$ значи

$$|f(x)| < 2\varepsilon \text{ ако } x \ge K(\varepsilon)$$

Тоа покажува дека $f(x) \to 0$ кога $x \to \infty$ односно $f(x) = c - arc\tan x \to 0$ кога $x \to \infty$ од каде добиваме дека

$0 = c - \frac{\pi}{2}$ или $c = \frac{\pi}{2}$.

Ако во $f(x) = c - arc\tan x$ пуштиме $x \to 0$ добиваме

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

Задачи

1. Покажи, дека $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Упатство.

Во интегралот за $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ стави смена $t = x^2$ искористи го интегралот

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

2. Покажи, дека за n природен број важи

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

Упатство: Прво за $n = 1$, тогаш

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi} \quad \text{и. т. н.}$$

3. Докажи, дека за $\alpha > 0$,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^{\alpha}}dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Упатство: стави $t = x^{\alpha}$.

4. Докажи дека,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} sinxt}{t} dt = arctg \frac{x}{a}$$

Упатство:

Со Кошиевиот критериум лесно се покажува дека интегралот рамномерно конвергира исто така и $\int_0^{\infty} e^{-at} \cos xt dt$, кој се решава со два пати парцијална интеграција.

5. Докажи, дека

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \cos xt \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}.$$

Помош: лесно е да се провери дека интегралот како и интегралот од изводот по x на подинтегралната функција конвергираат рамномерно во однос на x.

Се добива $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\frac{x}{2}$ и со интегрирање добиваме $\log \varphi(x) = -\frac{x^2}{4} + \log c$, каде c е произволна константа.

$$\varphi(x) = ce^{-x^2/4} \text{и } \varphi(0) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

од каде $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. Со индукција по n, покажи дека

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-xt} \, dt = \frac{n!}{x^{n+1}}, \qquad (x > 0)$$

7. Да се докаже, дека

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}, \qquad (x > 0)$$

8. Функцијата $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ се вика Лапласова трансформација за f. Се обележува со $(Lf)(s)$. Докажи, дека ако $f(t)$ и $f'(t)$ се непрекинати и ограничени за $0 \leq t < \infty$, тогаш

$$(Lf')(s) = s(Lf)(s) - f(0), \qquad (0 < s < \infty)$$

Примени парцијална интеграција на интегралот по однос на $f'(t)$.

9. Покажи, дека

$(a)(L1)(s) = \frac{1}{s}(s > 0);$

$(б)(Lsinat)(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad (s > 0)$

$(в)(Lcoshat)(s) = \frac{q}{s^2 - a^2}, \qquad (s > a)$

Лапласовата трансформација има голема примена, на пример, во диференцијалните равенки и тоа е само еден доказ колку се важни функциите дефинирани со интеграли со параметар.

10. Ако $\alpha > -\frac{1}{2}$, тогаш

$$\int_0^1 \frac{x^{2\alpha}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{2\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Решение: ставете $t = x^2$, $dt = 2xdx$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{-1/2} \frac{dt}{t^{-1/2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t^{\alpha+\frac{1}{2}-1} (1-t)^{-1/2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\alpha + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)$$

11. Да се пресмета интегралот

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x^{1+a}} dx \qquad (0 < a < 1)$$

Решение: Со парцијална интеграција при што

$$u = 1 - e^{-x}, v' = x^{-1-a} \quad v = \frac{1}{a} x^{-a}$$

користејќи го притоа и Лопиталовото правило за пресметување на соодветните лимеси се добива

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} x^{-a} e^{-x} dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} x^{1-a-1}\, e^{-x} dx$$

каде $1 - a > 0$ и затоа $\mathrm{I} = \frac{1}{a}\Gamma(1-a)$

12. Докажи дека

$$\varphi(y) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{1 - \cos xy}{x} dx = \frac{1}{2} \log(1 + y^2)$$

Помош: $\varphi'(y) = \int_0^\infty e^{-x} \sin xy \, dx$ (со два пати парцијална интеграција) се добива

$$\varphi'(y) = \frac{y}{1 + y^2}$$

и.т.н.

13. Покажи дека

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt = sgnx, \text{ каде } sgn\, x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

знаеме

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

(i) Ако $x > 0$ во интегралот ставаме $u = xt, du = xdt$ и добиваме

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

(ii) За $x = 0$ интегралот е 0

(iii) Ако $x < 0$, тогаш од $u = xt$ имаме $du = (-x)dt$ (зашто при смената на интегралот се зема апсолутната вредност) така добиваме

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = -1$$

Глава4

Криволиниски интеграл

1 Криви

Ние и порано се сретнавме со овој поим, но овде ќе се задржиме подетално, зашто кривите се основна работа во изучувањето на криволинискиот интеграл.

Дефиниција 1 Секое непрекинато пресликување γ дефинирано на некој затворен интервал $[a,b]$ со вредности во рамнината R^2, или кратко запишано $\gamma: [a,b] \to R^2$ се вика рамнинска крива.

Бидејќи при даденото пресликување $\gamma(t)$ е точка од рамнината затоа може да напишеме $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, каде што $x = x(t)$ и $y = y(t)$ се две функции од една променлива кои што се дефинирани и непрекинати на интервалот $[a,b]$. Променливата t се вика параметар за дадената крива.

Функциите $x(t), y(t)$ се викаат уште координатни функции за кривата γ. Според тоа една рамнинска крива е потполно определена, ако се знаат нејзините координатни функции.

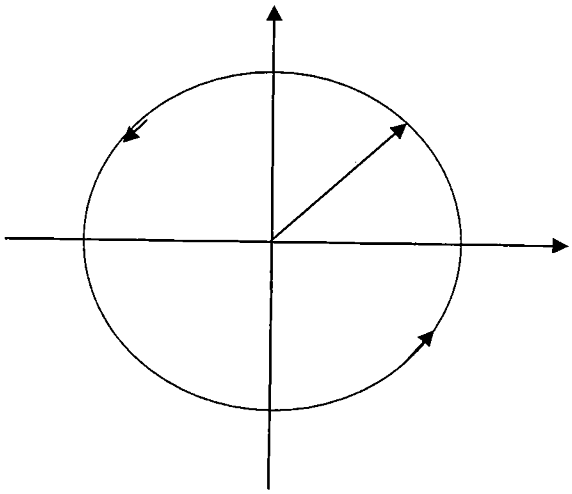
Како прв пример ја разгледуваме кривата $\gamma(t) = (rcost, rsint)$ за $0 \leq t \leq 2\pi$. Бидејќи $r^2cos^2t + r^2sin^2t = r^2$ заклучуваме, дека точките од оваа крива се наоѓаат на кружницата со радиус r, важи и обратно за секоја точка (x,y) од кружницата постои точка $t \in [0,2\pi]$ таква што $x = rcost,\ y = rsint$.

Според тоа $\gamma(t)$ е кружница со радиус r.

Во врска со кружницата $\gamma(t)$ можеме да кажеме нешто повеќе. Кога реалниот број t (параметарот) расте од $t = 0$ до $t = 2\pi$, точката $\gamma(t)$ прави едно обиколување по кружницата во насока спротивна од движењето на стрелките на часовникот.

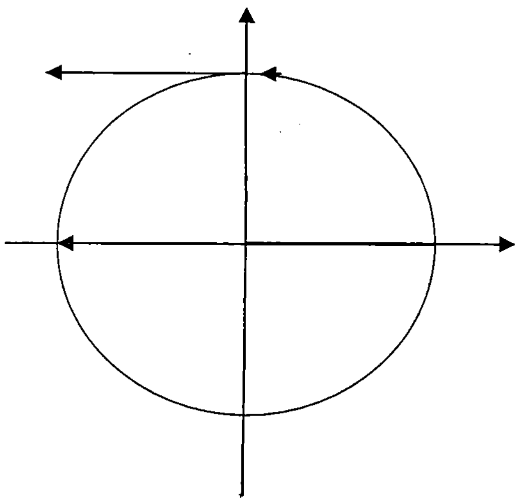
Пример. $\gamma(0) = (r,0)$ понатаму $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,r), \gamma(\pi) = (-r,0), \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0,-r)$ и $\gamma(2\pi) = (r,0)$ т.е. $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Да забележиме, дека бројот t е аголот (во радијани) меѓу радиус векторот $\gamma(t)$ и позитивниот дел на x –оската. Всушност постои обратна еднозначност меѓу точките од интервалот $[0,2\pi]$ и точките од кружницата со тоа што $\gamma(2\pi) = \gamma(0)$.

Од изнесеното може исто така да се заклучи дека даденото пресликување дефинира една насока на движење на точката по кривата имено од почетната точка $(r, 0)$ се движи спротивно на часовникот до крајната точка која во случајов е еднаква со почетната.



Во врска со насоката на движењето по кривата ќе го разгледаме изводот на γ по однос на t. Изводот е $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$. Во овој случај $\gamma'(t) = (-rsint, rcost)$.

Векторот со координати $(x'(t), y'(t))$ нанесен со почеток во точката $(x(t), y(t))$ е тангентен вектор на кружницата и се вика уште „вектор на брзината" на движењето на точката $\gamma(t)$ по кружницата. Види го цртежот.



$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-r, 0)$, тој има насока спротивна од движењето на часовникот што потврдува уште еднаш, дека кривата е ориентирана (насочена) спротивно на часовникот.

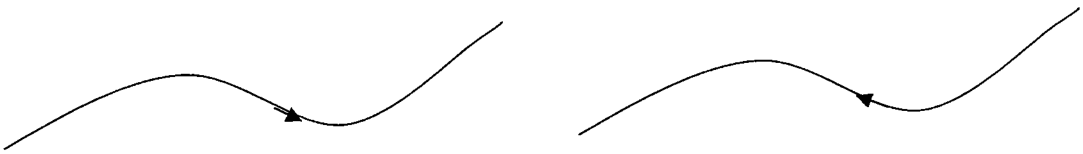
Забелешка: Постојат многу начини да се кружи по дадената кружница. На пример, ако $\delta(t) = (rcos3t, rsin3t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ во овој случај кога t се менува од $t = 0$ до $t = 2\pi$ точката $\delta(t)$ три пати ќе ја обиколи кружницата со радиус r и центар O. Но $\delta(t)$ и $\gamma(t)$ не се исти криви иако се составени од исти точки како множество.

По разгледувањето на кружницата ја даваме следната општа дефиниција за крива.

Дефиниција2. Секое непрекинато пресликување $\gamma\colon [a, b] \to R^3$ се вика просторна крива или крива во R^3.

Се разбира најопшто, на потполно ист начин, се дефинира крива во R^n, но кога $n > 3$ ние немаме никаква реална претстава, освен што по аналогија дефинираме ориентација на криви, тангента на крива, потоа должина на крива итн.

Во општ случај, почетната точка $\gamma(a)$ и крајната точка $\gamma(b)$ не мора да се поклопуваат.

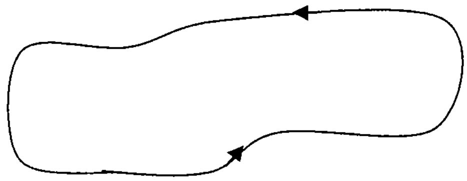


Слика3

Оваа крива е ориентирана според растењето на параметарот t од a до b. Ако со менувањето на t од a до b точката се движи од крајната кон почетната точка, тогаш таа е спротивна ориентација на кривата.

Криви за кои што почетната точка $\gamma(a)$ е еднаква со крајната точка $\gamma(b)$ т.е. $\gamma(a) = \gamma(b)$ се викаат затворени криви.

Затворените криви можат да се ориентираат на два начина: Ако кривата е параметризирана така што кога t се менува на интервалот точката се движи спротивно од часовникот т.е. ограничениот дел A од кривата да е на лева страна од движењето по неа



Слика4

тогаш е позитивно ориентирана по однос на А, ако пак кога точката се движи по кривата, а ограничениот дел од неа е секогаш на десна страна од движењето тогаш велиме, дека таа затворена крива е негативно ориентирана по однос на A.

2 По делови глатки криви

Нека $\gamma(t)$ е непрекината крива дефинирана (параметризирана) на интервалот $[a,b]$. Ако координатните функции $x(t), y(t)$ или ако е просторна $x(t), y(t), z(t)$ имаат непрекинат прв извод $x'(t), y'(t)$, во рамнина или $x'(t), y'(t), z'(t)$ во простор и ако е исполнет условот$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$ односно $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$ за секое $t \in [a,b]$ тогаш таквата крива се вика глатка (мазна). Таа крива има тангента или вектор на брзина во секоја точка $\gamma(t)$ од кривата.

Да забележиме дека во точката a се зема десен извод

$$\lim_{t\to a+} \frac{x(t) - x(a)}{t - a}$$

$a+$ значи t се приближува кон a од десно, а во точката b се зема лев извод

$$\lim_{t\to b-} \frac{x(t) - x(b)}{t - b}$$

$b-$значи t се приближува кон b од лево.

Се разбира истото важи и за функцијата $y(t)$, а во простор и за функцијата $z(t)$.

Во врска со претходното разгледување, напоменуваме дека најинтересни криви се всушност кружниците и отсечките. Кривата да биде глатка во секоја точка од интервалот е доста строго барање и поради тоа сега ќе дадеме поопшта дефиниција.

Кривата Γ е по делови глатка, ако и само ако постојат конечно многу точки на интервалот $[a,b]$ т.е. $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ така што $\Gamma(t)$ на секој од тие подинтервали $[a_0,a_1],\ldots,[a_{n-1},a_n]$ дефинира криви $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n-1}$ кои што се глатки.

Според тоа секоја по делови глатка крива Γ на интервалот $[a,b]$ е составена од конечен број на глатки криви дефинирани на соодветни подинтервали како што е претходно Γ_{k-1} е крива дефинирана на интервалот $[a_{k-1},a_k]$ за $1 \le k \le n$, што значи Γ_k *и* Γ_{k+1} се такви што крајната точка на Γ_k е почетна точка за Γ_{k+1}. Во некои книги се користи ваква ознака $\Gamma = \Gamma_0 + \cdots + \Gamma_{n-1}$.

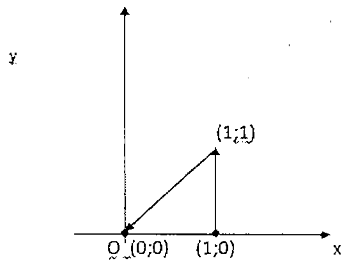
Ние сега можеме да дадеме поопшта дефиниција за составување или „збир" на криви:

Нека Γ_1 е крива дефинирана на интервалот $[a,b]$ и нека Γ_2 е крива определена на интервалот $[b,c]$, ако $\Gamma_1(b) = \Gamma_2(b)$ и ако важи

$$\lim_{t\to b-} \Gamma_1(t) = \lim_{t\to b+} \Gamma_2(t)$$

тогаш на интервалот $[a,c]$ е дефинирана кривата $\Gamma = \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)$ при што $\Gamma = \Gamma_1(t)$ за $a \le t \le b$ и $\Gamma = \Gamma_2(t)$ за $b \le t \le c$. Еве сега еден едноставен карактеристичен пример.

Пример: Нека е даден триаголник Δ со темиња $(0,0),(1,0)$ и $(1,1)$



Слика5

Контурата или границата $\partial\Delta$ од триаголникот ја сочинуваат кривите (отсечките) $\overrightarrow{(0,0);(1,0)}$, $\overrightarrow{(1,0);(1,1)}$ и $\overrightarrow{(1,1);(0,0)}$. Стрелките ја покажуваат позитивната ориентација на кривата $\partial\Delta$ која е составена (збир) од наведените отсечки. Сега имаме:

$$\gamma(t) = \partial\Delta(t) = \begin{cases} (t,0) & \text{за } t \in [0,1] \\ (1,t-1) & \text{за } t \in [1,2] \\ (3-t,3-t) & \text{за } t \in [2,3] \end{cases}$$

Нека, на пример, го разгледаме темето $\partial\Delta(2) = (1,1)$. Со диференцирање од лево во 2 на $(1,t-1)$ добиваме $(0,1)$ т.е. имаме $\partial\Delta'(2-) = (0,1)$, слично со диференцирање на $(3-t,3-t)$ од десно во $t=2$ добиваме $(1,1)$ тоа значи $\partial\Delta'(2+) = (1,1)$.

Во теоријата и примената, но посебно во примената се среќеваат главно по делови глатките криви.

Задачи

1. Напиши ја параметризацијата т.е. определи го пресликувањето γ на интервалот $[0,2\pi]$ така што $\gamma(t)$ да ја обиколува единичната кружница $x^2+y^2=1$ пет пати.

2. Разгледај ја кривата $\Gamma(t)=(coskt, sinkt)$ за $0\le t\le 2\pi$, k е цел број кој може да биде и негативен. Да се определи векторот на брзина (тангентен вектор) $\Gamma'(t)$ и утврди како се менува должината и насоката на векторот.

3. Нека Γ е контурата на единичниот квадрат со темиња $O(0,0), A(1,0), C(1,1)$ и $D(0,1)$. Всушност кривата Γ е граница на квадрат составена од четири отсечки. Да се напише пресликувањето за Γ на интервалот $[0,4]$.

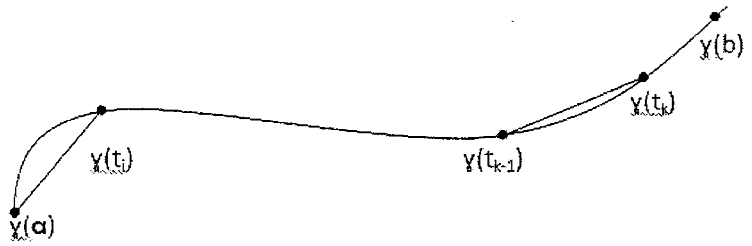
4. Нека функцијата $f(x)$ е непрекинато диференцијабилна на интервалот $[a,b]$. Тогаш графикот на функцијата $f(x)$ е всушност кривата $\Gamma=(x,f(x))$. Во овој случај параметарот е означен со x, а $y(x)=f(x)$. Да се определи векторот $\Gamma'(x)$ и да се определи неговата должина во дадено x.

5. Определи го изводот во примерот со триаголникот $t=1$ од лево и од десно.

Упатство од лево треба за $x(t)=t, y(t)=0$, од десно $x(t)=1, y(t)=t-1$.

3 Должина на крива

Нека γ е крива во R^2 определена на интервалот $[a,b]$ со $\gamma(t)=(x(t),y(t))$. Нека интервалот $[a,b]$ со делбени точки $a=t_0<\dots<t_n=b$ го делиме на подинтервали.



$$\gamma(t_0) = \big(x(t_0), y(t_0)\big), \dots, \gamma(t_k) = \big(x(t_k), y(t_k)\big), \dots, \gamma(t_n) = \big(x(t_n), y(t_n)\big),$$

Ги поврзуваме секои две соседни точки од кривата со отсечки, така ги добиваме отсечките

$$\overline{\gamma(t_0)\,\gamma(t_1)}, \dots, \overline{\gamma(t_{k-1})\gamma(t_k)}, \dots, \overline{\gamma(t_{n-1})\gamma(t_n)}$$

Должината на било која отсечка е

$$\overline{\gamma(t_{k-1})\gamma(t_k)} = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$

а сумата од должините на сите отсечки за дадената поделба е

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma(t_{k-1})\gamma(t_k)}$$

Јасно е, дека на секоја поделба одговара соодветна сума.

Дефиниција 1 Ако постои број $M > 0$ таков што секоја сума е помала или еднаква на M, тогаш велиме, дека кривата има конечна должина или е ректификациона.

Бројот M е всушност една горна граница на множеството од сите суми и затоа постои најмала горна граница (тоа е аксиома) која ние ќе ја обележиме со l и тој број ќе велиме дека е еднаков на должината од кривата. Се разбира има криви кои се со конечна должина и криви кои немаат конечна должина. За нас во оваа книга од интерес ќе бидат само ректификационите криви воглавно.

Се разбира постојат услови кога една крива е ректификациона, но ние нема да навлегуваме во тие детали туку во следната теорема за една специјална класа на криви даваме формула за пресметување на должината на тие криви.

Теорема1 Нека кривата γ е по делови непрекинато диференцијабилна определена со функциите $x(t)$ и $y(t)$ на интервалот $[a, b]$. Тогаш кривата е ректификациона и нејзината должина се пресметува по формулата

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Доказ. Прво ќе претпоставиме, дека, кривата е непрекинато диференцијабилна на интервалот $[a, b]$. За дадена поделба на интервалот $[a, b]$ т.е. $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ ја разгледуваме сумата

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2}$$

Со примена на Лагранжовата теорема за средна вредност имаме

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(c_k)\Delta t_k \text{ и } y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(d_k)\Delta t_k\,,$$

каде $t_{k-1} < c_k < t_k,\ t_{k-1} < d_k < t_k$ и $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, па така добиваме

$$\sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2} = \sqrt{x'^2(c_k)\Delta t_k^2 + y'^2(d_k)\Delta t_k^2} =$$

$$= \sqrt{x'^2(c_k) + y'^2(d_k)}\Delta t_k$$

од непрекинатоста на x' и y' на затворениот интервал $[a,b]$ следи, дека овие две функции се ограничени т.е. постои број $L > 0$ таков што $|x'(t)|, |y'(t)| \leq L$ за секое $t \in [a,b]$ следователно имаме

$$\sqrt{x'(c_k)^2 + y'(d_k)^2} \leq L\sqrt{2}$$

тоа повлекува дека

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma(t_{k-1})\gamma(t_k)} \leq \sum_{k=1}^{n} L\sqrt{2}\,\Delta t_k = L\sqrt{2} \cdot (b-a).$$

Бидејќи оваа оценка важи за секоја поделба на интервалот следи, дека сите суми од должините на отсечките поодделно на секоја поделба се ограничени од горе, а тоа значи по дефиниција дека таквата крива е ректификациона.

Сега ќе ја изведеме формулата за пресметување на должината на таква крива.

Пред да преминеме на доказот од интерес е следната напомена:

Ако $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ е една поделба на интервалот $[a,b]$ и ако од оваа поделба сакаме да добиеме нова поделба тоа го правиме на тој начин што ќе воведеме само уште една делбена точка t' која се наоѓа во некој од подинтервалите, да речеме нека $t_{k-1} < t' < t_k$, тогаш во сумата од должините на отсечките во новата поделба промена имаме само кај $l_k = \overline{\gamma(t_{k-1})\gamma(t_k)}$, зашто во новата поделба сите други остануваат исти, а само на местото од l_k ќе стои збирот $\overline{\gamma(t_{k-1})\gamma(t')} + \overline{\gamma(t')\gamma(t_k)}$ од триаголникот со темиња $\gamma(t_{k-1}), \gamma(t')$ и $\gamma(t_k)$ следи дека

$$\overline{\gamma(t_{k-1})\gamma(t_k)} \leq \overline{\gamma(t_{k-1})\gamma(t')} + \overline{\gamma(t')\gamma(t_k)}$$

или поопшто, ако кон дадената поделба додадеме нови делбени точки тогаш јасно добиваме пофина поделба на интервалот, и според претходно кажаното сумата на пофината поделба е поголема од сумата што одговара на старата поделба.

Сега преоѓаме на доказот од формулата.

Бидејќи кривата γ е ректификациона затоа за дадено $\varepsilon > 0$, постои поделба T' на $[a,b]$, дадена со $t_0' = a < t_1' < \cdots < t_n' = b$ таква што за $l_{T'}$ ќе важи

$$l(\gamma) - \varepsilon < l_{T'} \leq l(\gamma) \qquad (1)$$

каде $l_{T'}$ е сумата на должините на отсечките

Бидејќи $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ е рамномерно непрекината на $[a,b]$ постои $\delta > 0$ така што ако $|s-t| < \delta$ следи

$$\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| =$$

$$= \sqrt{(x'(s) - x'(t))^2 + (y'(s) - y'(t))^2} < \varepsilon \qquad (2)$$

Функцијата $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ е непрекината на $[a,b]$ значи е и интеграбилна, од каде следи дека постои $\delta' > 0$ такво што за секоја поделба T на интервалот чиј што дијаметар е помал од δ' важи

$$\left|\sum_{m=1}^{n} \|\gamma'(\overline{t_m})\|\Delta t_m - \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt\right| < \varepsilon \qquad (3)$$

каде $t_{m-1} < \overline{t_m} < t_m$ за $m = 1,2,\dots,k$. Знаеме дека дијаметар е должина на најголемиот подинтервал.

Нека T е поделба на интервалот $[a,b]$ таква што

(i) T е пофина од T'

(ii) дијаметарот на T е помал од δ

(iii) дијаметарот на T е помал од δ'.

Бидејќи T е пофина од T' погоре видовме дека $l_T \geq l_{T'}$.

Тогаш според (1) имаме

$$l(\gamma) - \varepsilon < l_T \leq l(\gamma) \qquad (4)$$

Со примена на теоремата за средна вредност добиваме

$$\|\gamma(t_m) - \gamma(t_{m-1})\| = \sqrt{\left(x(t_m) - x(t_{m-1})\right)^2 + \left(y(t_m) - y(t_{m-1})\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x'^2(c_m) + y'^2(d_m)}\ \Delta t_m$$

каде $t_{m-1} < c_m < t_m, t_{m-1} < d_m < t_m$ и $\Delta t_m = t_m - t_{m-1}$

Имајќи во предвид, дека дијаметарот на поделбата T е помал од δ, неравенството (2) покажува дека $|x'(c_m) - x'(\overline{t_m})|$ и $|y'(d_m) - y'(\overline{t_m})|$ ће помали од ε од каде го добиваме следното

$$\sqrt{(x'(c_m) - x'(\overline{t_m}))^2 + (y'(d_m) - y'(\overline{t_m}))^2} \leq$$

$$\left|x'(c_m) - x'(\overline{t_m})\right| + \left|y'(d_m) - y'(\overline{t_m})\right| \leq 2\varepsilon$$

Сега, бидејќи

$$\sqrt{(x'(c_m))^2 + (y'(d_m))^2}\Delta t_m = \left\|\left(x'(c_m), y'(d_m)\right)\right\|\Delta t_m \leq$$

$$\leq \|(x'(c_m), y'(d_m)) - (x'(\overline{t_m}), y'(\overline{t_m}))\|\Delta t_m +$$

$$+\|((x'(\overline{t_m}), y'(\overline{t_m}))\|\Delta t_m$$

Можеме да напишеме

$$\|\gamma(t_m) - \gamma(t_{m-1})\| \leq \sqrt{x'^2(\overline{t_m}) + y'^2(\overline{t_m})}\Delta t_m + 2\varepsilon\Delta t_m \tag{5}$$

На ист начин со помош на неравенството на триаголник го добиваме и неравенството

$$\|\gamma(t_m) - \gamma(t_{m-1})\| \geq$$

$$\geq \sqrt{(x'(\overline{t_m}))^2 + (y'(\overline{t_m}))^2}\Delta t_m - 2\varepsilon\Delta t_m.$$

Со сумирање по m во двете неравенства добиваме

$$l_T \leq \sum_{m=1}^{n} \|\gamma'(\overline{t_m})\|\Delta t_m + 2\varepsilon(b-a)$$

и (6)

$$l_T \geq \sum_{m=1}^{n} \|\gamma'(\overline{t_m})\|\Delta t_m - 2\varepsilon(b-a)$$

Имајќи во предвид дека дијаметарот на T е помал од δ' добиваме

$$\left|l_T - \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt\right| = \left|l_T - \sum_{m=1}^{k} \|\gamma'(\overline{t_m})\|\Delta t_m + \sum_{m=1}^{k} \|\gamma'(\overline{t_m})\|\Delta t_m - \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt\right| \leq$$

$$\leq \left|l_T - \sum_{m=1}^{k} \|\gamma'(\overline{t_m})\|\Delta t_m\right| + \left|\sum_{m=1}^{k} \|\gamma'(\overline{t_m})\|\Delta t_m - \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt\right| < 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon$$

И конечно комбинирајќи со (4) добиваме

$$\left|l(\gamma) - \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt\right| \leq |l(\gamma) - l_T| + \left|l_T - \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt\right| \leq \varepsilon + 2\varepsilon(b-a)$$

Од произволноста на ε следи дека

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

Ако кривата γ е од R^3 тогаш $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и формулата е

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.$$

Формулата важи и за криви во R^n.

Ако е кривата по делови непрекинато диференцијабилна тогаш нејзината должината се пресметува на секој подинтервал на кој што е непрекинато диференцијабилна и потоа се собираат добиените интеграли и таа сума е еднаква на интегралот

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$$

зашто интегралот не зависи од вредностите на $\gamma'(t)$ во конечен број на точки.

Нека е γ крива во R^3 дефинирана со $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), t \in [a, b]$, и нека Γ е крива, исто така од R^3 дефинирана на интервалот $[\alpha, \beta]$. Да претпоставиме дека постои функција $\varphi(t)$ која што е непрекината и строго монотоно растечка дефинирана на интервалот $[a, b]$ со вредности на интервалот $[\alpha, \beta]$ т.ш. важи: $\gamma(t) = \Gamma[\varphi(t)]$ и $\tau = \varphi(t)$. Тогаш велиме дека кривата Γ е еквивалентна со кривата γ и дека кривата Γ е добиена од кривата γ со репараметризација. Функцијата $\varphi(t)$ се вика репараметризација за γ. Очигледно γ е во тој случај еквивалентна со Γ со функција на репараметризација φ^{-1} (инверзна за φ).

Јасно е од дефиницијата, дека Γ и γ имаат исто множество од вредности и се со иста ориентација, според тоа кривата Γ само што има друг интервал на параметризација. Еквивалентноста на γ со Γ следи од фактот што инверзната функција $\varphi^{-1}\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ е исто така строго монотоно растечка и непрекината. Ако функцијата $\varphi(t)$ строго монотоно опаѓа и е непрекината во тој случај кривата Γ има спротивна ориентација со γ.

На пример, ако $\varphi(t) = a + b - t$ за $t \in [a, b]$ јасно е дека $\varphi(t)$ е непрекината од $[a, b]$ на $[a, b]$ $\varphi'(t) = -1$ значи строго монотоно опаѓа, следователно кривата $\gamma(a + b - t) = \Gamma(t)$ е истата крива γ само што е спротивно ориентирана со

$$\gamma\colon \Gamma(a) = \gamma(a+b-a) = \gamma(b) \text{ и } \Gamma(b) = \gamma(a+b-b) = \gamma(a)$$

итн. Спротивно ориентираната крива за кривата γ ќе ја обележуваме со $\underline{\gamma}$.

Репараметризацијата $\varphi(t)$ се вика регуларна репараметризација за кривата γ, ако $\varphi(t)$ има непрекинат извод и $\varphi'(t) \neq 0$ за сите $a \leq t \leq b$, при што да се потсетиме дека во a се зема десен извод, а во b се зема лев извод за φ. Ако кривата Γ е добиена со регуларна репараметризација $\varphi(t)$ од кривата γ тогаш во секое tимаме $\gamma'(t) = \Gamma'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$, бидејќи $\varphi'(t) > 0$

Ако $\varphi'(t) < 0$ тогаш кривите се спротивно ориентирани.

На пример за $\gamma(a+b-t)$ имаме $\gamma'(a+b-t)(-1)$.

4 Параметризација со должина на лак

Нека претпоставиме, дека кривата $\gamma(t) = (x(t), y(t))$е по делови глатка на интервалот $[a,b]$, тоа значи $|\gamma'(t)| > 0$ е непрекината функција освен во конечно многу точки $a_1, \dots, a_m$ во кои што изводот $\gamma'(t)$ постои од лево и од десно и изводот е непрекинат на секој подинтервал од поделбата $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$.

Нека

$$s = s(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau$$

јасно $s(a) = 0, s(b) = l$ должината на кривата.

Бидејќи функцијата $|\gamma'(\tau)|$ е интеграбилна, а функцијата $s(t)$ е монотоно растечка и непрекината па според тоа $s(t)$ е монотоно растечка функција од $[a,b]$ на $[0,l]$.

Од тоа што $|\gamma'(\tau)| > 0$ и е непрекината освен во конечен број на точки лесно се проверува (вежба), дека $s(t)$ е строго монотоно растечка, а тоа значи дека постои инверзна функција $\varphi(s)$ за $s(t)$ т.е. $t = \varphi(s)$ за $s \in [0,l]$. $\varphi(s)$ е исто така монотоно растечка и притоа

$$\varphi'(s) = \frac{1}{s'(t)}$$

каде што $t = \varphi(s)$. Сега бидејќи $s'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ следи дека $\varphi'(s) > 0$.

Функцијата $\varphi(s)$ е непрекината освен во точките $s_k \in [0,l]$ за кои $\varphi(s_k) = a_k$ за $k = 1,2, \dots m$. Но во тие точки постои извод од лево и десно и тие се различни од нула, тоа следи од претпоставката за $\gamma'(t)$. Според тоа функцијата $\varphi(s)$ е по делови непрекинато диференцијабилна на интервалот $[0, l]$ и $\varphi'(s) > 0$.

Дефинираме крива на интервалот $[0, l]$ на следниот начин $\sigma(s) = \gamma[\varphi(s)]$ и $t = \varphi(s)$.

Кривата $\sigma(s)$ е еквивалентна со кривата γ и нејзиниот тангентен вектор е

$$\sigma'(s) = \gamma'[\varphi(s)] \cdot \varphi'(s) = \gamma'(t) \cdot \frac{1}{|\gamma'(t)|}$$

тоа значи дека тангентниот вектор на кривата σ е единичен. Бидејќи кривата σ е еквивалентна со γ или со други зборови тоа е кривата γ параметризирана со нејзината должина s, затоа во многу случаи ќе користиме, дека таквата крива е со параметар s кој што уште се вика природен параметар. Или кратко ќе велиме кривата е параметризирана со природниот параметар $0 \le s \le l$. Најголемата предност на оваа параметризација е што нејзиниот тангентен вектор $T(s) = \sigma'(s)$ е единичен и што важи формулата

$$\int_0^l |\sigma'(s)| ds = \int_0^l ds = l$$

зашто $|T(s)| = |\sigma'(s)| = 1$

Пример. Да се определи природната параметризација на кружницата $x^2 + y^2 = r^2$.

Решение. Знаеме оваа кружница е определена со $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ за $0 \le t \le 2\pi$

$$\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t) \text{ и } |\gamma'(t)| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r$$

$$s = \int_0^t r d\tau = rt$$

од тука

$$t = \frac{s}{r} \text{ па } \sigma(s) = \gamma\left(\frac{s}{r}\right) = \left(rcos\frac{s}{r}, \text{rsin}\frac{s}{r}\right) \text{ за } s \in [0, 2\pi r]$$

Провери дека $|\gamma'(s)| = 1$.

Да забележиме дека на потполно ист начин може да се определи природната параметризација и на криви во R^3 и воопшто во R^n.

Го потсетуваме читателот, дека за дадена крива $\gamma(t)$ некаде стои $|\gamma(t)|$ некаде може да стои $\|\gamma(t)\|$ во литературата се користи и едната и другата ознака.

Задачи

1а). Да се параметризира полукружницата $x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0$ со вообичаениот агол спротивно на часовникот (во радијани).

б) Да се репараметризира полукружницата со природниот параметар s.

2. Дадена е параметризација на кривата $\gamma(t)$ на $[a,b]$ таква што $|\gamma'(t)| = k$ за $a \leq t \leq b. \gamma(t) = (x(t), y(t))$

а) Да се пресмета должината l на кривата.

б) Да се напише природната параметризација за γ.

Решение.

$$s = \int_a^t k d\sigma = k\,(t - a)$$

од каде

$$t = \frac{1}{k}(s + ak) = a + \frac{s}{k}, \sigma(s) = \left(x\left(a + \frac{s}{k}\right), y(a + \frac{s}{k})\right) \text{ и } 0 \leq s \leq k(b - a)$$

3. Нека се дадени точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ во R^2.

$$\gamma(t) = \big((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2\big), 0 \leq t \leq 1$$

е параметризација на отсечката M_1M_2.

Да се напише природната параметризација

$$\gamma'(t) = (-x_1 + x_2, -y_1 + y_2)$$

затоа

$$s = \int_0^t \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} d\sigma = t \cdot \left|\overline{M_1M_2}\right|$$

Значи

$$t = \frac{s}{\overline{\overline{M_1M_2}}}$$

4. Нека Г е еквивалентна крива со кривата γ. Покажи дека Г е ректификациона, ако и само ако γ е ректификациона.

Решение. Нека претпоставиме дека $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ за $t \in [a,b]$ и нека

$\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ е една параметризициона функција $t = \varphi(\tau)$. Тогаш $\Gamma(\tau) = \gamma[\varphi(\tau)]$ е еквивалентна со γ.

Од тука имаме

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Gamma'(\tau)| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \left|\gamma'\big(\varphi(\tau)\big)\right| \varphi'(\tau) d\tau$$

Сега бидејќи $t = \varphi(\tau)$ според теоремата за смена на променливи кај интегрли имаме

$$\int_{\alpha}^{\beta} \gamma'\big(\varphi(\tau)\big)\varphi'(\tau) d\tau = \int_{a}^{b} |\gamma'(t)| dt$$

Напоменуваме дека $\varphi'(\tau) > 0$.

5. Ако γ е непрекината крива, тогаш множеството од нејзините вредности е затворено и ограничено во R^2 или R^3 или општо во R^n. Дали е истото, ако е кривата по делови непрекината? (одговор.не).

6. Да се најде должината на кривата (циклоида)

$x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$ од $t = 0$ до $t = 2\pi$.

7. Да се пресмета должината на кривата

$x = acost, y = asint, z = tb$, од $t = 0$ до $t = r$.

8. Најди ја должината на кривата $x = cosht, y = sinht, z = t$ од $t = 0$до $t = e$

9. Ако една непрекината диференцијабилна крива е дадена во поларни координати со $r = f(\varphi)$ за $(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$, тогаш нејзината должина се пресметува со формулата

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi$$

Доказ. Ако во $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$, наместо r ставаме $f(\varphi)$ добиваме $x = f(\varphi)cos\varphi, y = f(\varphi)sin\varphi$,

$$x' = f'cos\varphi - fsin\varphi, \qquad y' = f'sin\varphi + fcos\varphi$$

$$|\gamma'(\varphi)|^2 = x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = f'^2(\varphi) + f^2(\varphi)$$

$r' = f'(\varphi)$ конечно ја добиваме формулата

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi$$

10. Да се пресмета должината на кривата $r = a(1 - cos\varphi),\ 0 \leq l \leq 2\pi$. Искористи ја претходната формула.

11. Пресметај ја должината на кривата во R^4:

$x_1(t) = t + 1, x_2(t) = 2t, x_3(t) = 3t^2 - 1$ и $x_4(t) = t^2 + t + 1$ од $t = 0$ до $t = 1$

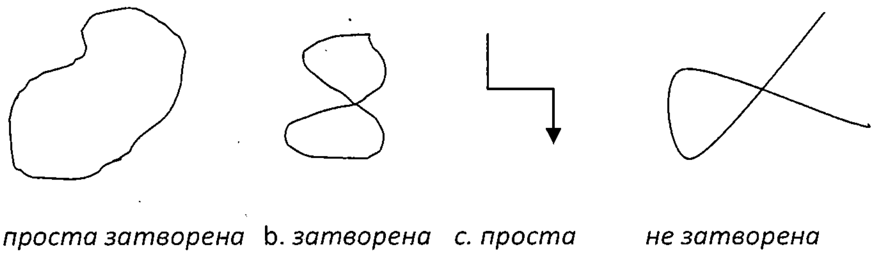
Формулата е:

$$l = \int_0^1 \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4} dt$$

5 Жорданови криви и Жорданови области

Пред да дадеме дефиниција за Жорданова крива и Жорданова област, ќе го објасниме поимот на таканаречените прости криви.

Дефиниција 1 За кривата $\gamma(t)$ дефинирана на интервалот $[a, b]$ (затворена или не) велиме дека е проста, ако на отворениот интервал (a, b) пресликувањето $\gamma(t)$ е ињективно, (тоа значи ако $t_1 \neq t_2$ тогаш $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$). Ако за крајните точки важи $\gamma(a) = \gamma(b)$ тогаш кривата велиме дека е затворена.



a. проста затворена b. *затворена* *c. проста* *не затворена*

не проста *не затворена* *и не проста*

Проста затворена крива која што е по делови глатка се вика Жорданова крива. Примери: кружници, триаголници, правоаголници и други.

Во врска со Жордановите криви важи следното:

Нека γ е Жорданова крива во рамнината, тогаш отвореното множество

$R^2 - \gamma$ се состои од две дисјунктни отворени множества кои што се сврзливи. Такви множества, вообичаено во литературата се викаат области или региони. Кривата γ е заедничка граница за тие две области. Едната од нив е ограничена и за неа велиме дека е внатрешност за кривата γ, а другата е неограничена и за неа велиме дека е надворешност за γ. Ако се движиме по кривата така што внатрешната област да е постојано од нашата лева страна тогаш велиме дека таа насока (ориентација) е позитивна по однос на внатрешноста, меѓутоа е очигледно дека по однос на тоа движење надворешната област се наоѓа од нашата десна страна. Па бидејќи кривата γ е граница и за надворешната област можеме да речеме, дека таа ориентација е негативна на γ по однос на неограничената област. Се разбира важи и обратно.

Оваа теорема геометриски е очигледна, меѓутоа доказот е многу долг и тежок.

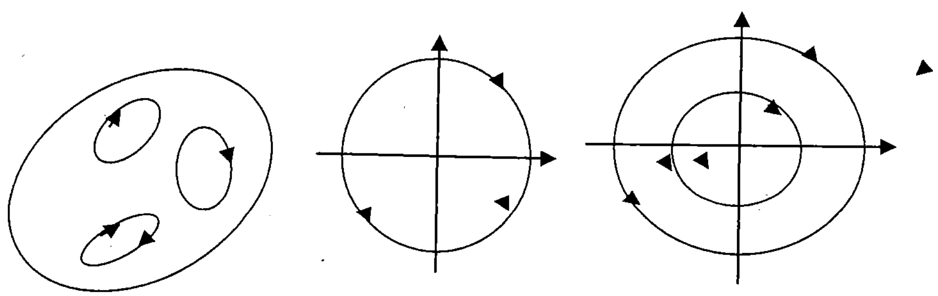
Жордановa област Ω е таква ограничена област во рамнината чија што граница $\partial\Omega$ се состои од унија на конечен број дисјунктни Жорданови криви. Да се потсетиме дека областа Ω е ограничена ако постои круг со радиус R таков што Ω е подмножество од тој круг.

Примери на Жорданови области

1. Отворениот круг $\Omega = D(0,r)$ со стандардната ориентација спротивно од движењето на часовникот. Граница на $D(0,r)$ е кружницата со радиус r.

2. Областа $\Omega = \{(x,y): r_0^2 < x^2 + y^2 < r_1^2,\ r_0 < r_1\}$ е ограничена со двете кружници $x^2 + y^2 = r_0^2$ и $x^2 + y^2 = r_1^2$. Ваква област се вика уште прстен или прстенаста област. Цртеж2.

3. На цртежот3 е дадена Жорданова област чија што граница се состои од 4 криви.



Напомена: Некои автори Жордановата област ја дефинираат како ограничена област чија што граница се состои од една Жорданова крива, позитивно ориентирана по однос на областа. За нив, на пример, прстенот не е Жорданова област.

Жордановата област Ω чија што граница се состои од $k \geq 1$ Жорданови криви се вика к-сврзлива. Според тоа секој круг е едно сврзлив (просто сврзлив) без дупки во него. А додека прстенот е 2-сврзлив и има една дупка тоа е внатрешноста на помалиот круг, а границата му се состои од две кружници.

Задача: Дали е точно или не?

а) Рамнината R^2 е Жорданова област

б) Множеството точки кои се наоѓаат во позитивно ориентираната Жорданова крива е Жорданова област

в) Жорданова област е ограничено множество.

г) Жорданова крива ја дели рамнината на две Жорданови области

д) Прстенот $1 < x^2 + y^2 < 4$, со кружницата $x^2 + y^2 \geq 1$ ориентирана спротивно од часовникот е Жорданова област. $x^2 + y^2 = 4$ во насока на часовникот (4). Областа $x^2 + y^2 = 1$е ориентирана во насока на часовникот.

ѓ) Областа $x^2 + y^2 > 1$ е Жорданова област, ако кружницата $x^2 + y^2 = 1$ е ориентирана во насока на часовникот.

Одговор а) не, (не е ограничена), б) да, в) да, г) не, зашто едната е неограничена е) да, (и) не, не е ограничена.

Сега ќе разгледаме уште некои факти кои се од интерес за криволинискиот интеграл како и неговата врска со двојниот интеграл.

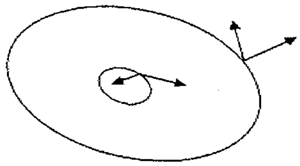
6 Надворешен нормален вектор N

Овој поим е суштински при изучувањето на однесувањето на дадена функција на границата $\partial\Omega$, каде што Ω е обично Жорданова област. Нека Γ е една од Жордановите криви која е дел од $\partial\Omega$. Нека $\sigma: [0, L] \to R^2$ е параметризација на Γсо природниот параметар s. Според тоа ќе сметаме, дека $\sigma(s)$ е природната параметризација на Γ . Единичниот тангентен вектор $\sigma'(s)$ вообичаено го означуваме со $T(s)$. Сега, за секоја точка $\sigma(s)$ од кривата Γ (s го земаме фиксно), ќе дефинираме вектор $N(s)$ со следните особини.

$(i)|N(s)| = 1$ (единичен вектор)

(ii) $N(s) \perp \mathrm{T}(s)$; $N(s)$ е нормален на кривата во дадената точка

(iii) $N(s)$ е насочен кон надвор од областа Ω. $N(s)$ се вика надворешен нормален вектор. Види цртеж4

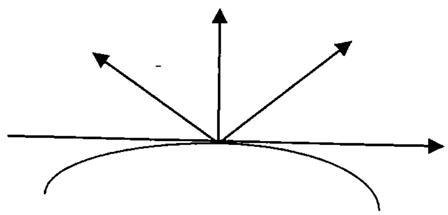


Цртеж4

Да се потсетиме, дека два вектора се нормални, ако нивниот скаларен производ е еднаков на 0.

Во нашиов случај $\mathrm{T}(s)N(s) = 0$. Ако $\mathrm{T}(s) = (x'(s), y'(s))$, тогаш ќе покажеме дека $N(s) = \big(y'(s), -x'(s)\big)$. Навистина: $\mathrm{T}(s)N(s) = x'(s)y'(s) - x'(s)y'(s) = 0$, значи $\mathrm{T}(s)$ и $N(s)$се ортогонални (нормални) тоа се запишува на следниот начин $\mathrm{T}(s) \perp N(s)$, понатаму $|N(s)| = |\mathrm{T}(s)| = 1$.

Останува уште да провериме дека $N(s)$ е надворешен вектор или насочен спрема надвор од областа што е ограничена со Γ. Еден начин за определувањето на векторот $N(s)$ може да биде следниот: Нека замислиме, дека во точката M_0 е пренесен координатниот почеток.



Цртеж5

Од положбата на $\mathrm{T}(s)$ гледаме, дека векторот $\mathrm{T}(s)$ зафаќа со позитивниот дел на x −оската агол φ т.ш. $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Знаеме $x'(s) = \cos\varphi$, $y'(s) = \sin\varphi$, според тоа $y'(s) \geq 0$, а $x'(s) < 0$. Векторот $N(s)$ во овој случај е во првиот квадрант и затоа и двете координати се > 0 следователно $N(s) = \big(y'(s), -x'(s)\big)$ е насочен кон надвор. На истиот начин се покажува за било која положба на тангентниот вектор $\mathrm{T}(s)$ во координатниот систем во точка M_0 од кривата Γ.

Пример: Нека Γ е кружница со центар во координатниот почеток O и радиус r, тогаш видовме порано дека

$$\sigma(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right) \text{за } 0 \leq s \leq 2\pi r\,,$$

а

$$\sigma'(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right) \text{ и } N(s) = \left(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r}\right)$$

Според тоа нормалниот вектор $N(s)$ е еднакво насочен како радиус векторот $\big(x(s), y(s)\big)$.

Пример1. Нека Γ е граница на квадратот со темиња во точките $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$. Нека $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, каде Γ_0е ориентираната отсечка од $(0,0)$ до $(1,0)$, Γ_1 од $(1,0)$ до $(1,1)\Gamma_2$ од $(1,1)$ до $(0,1)$ и Γ_3 од $(0,1)$ до $(0,0)$. Нацртај го квадратот и определи ги нормалните вектори.

Пред да преминеме на дефиницијата и изучувањето на криволинискиот интеграл, ќе изнесеме или едноставно ќе разгледаме уште некои факти кои што се од клучно значење во изучувањето на функциите вдолж кривите линии како и во врска со криволинискиот интеграл и неговата врска со двојниот интеграл.

7 Вектор градиент

Нека е дадена функцијата $u(x, y)$ од две променливи. Како што е вообичаено, нека Ω е домен во рамнината. Нека функцијата има непрекинати први парцијални изводи во точките од Ω. Според тоа $u_x(x, y)$ и $u_y(x, y)$ се дефинирани и се непрекинати функции на Ω. Градиент за функцијата $u(x, y)$ во дадена точка $(x, y) \in \Omega$ е векторот

$$\nabla u(x, y) = \big(u_x(x, y), u_y(x, y)\big)$$

Во некои книги се користи ознаката $gradu$. Ние ќе ја користиме и едната и другата ознака.

Примери на градиент вектори:

1. Нека $\Omega = \mathrm{R}^2$ т.е. целата xy рамнина, $u(x, y) = x^2y$, $M_0(1,1)$. Да се определи $gradu(1,1)$. Имаме $u_x = 2xy$, $u_y = x^2$ значи $u_x(1,1) = 2$, $u_y(1,1) = 1$, следователно $\nabla u(1,1) = gradu(1,1) = (2,1)$.

2. Нека функцијата u е како во 1., но точката е $(-2,3)$ тогаш имаме $\nabla u(-2,3) = (-12,4)$.

3. Нека $u(x, y)$ е како претходно. Во кои точки $(x, y), gradu(x, y) = 0$? Треба да го решиме системот $2xy = 0, x^2 = 0$; од тука $x = 0$, а y може да биде било кое, што значи $gradu = 0$ во точките од вид $(0, y)$.

Уште две работи презентираме во врска со векторот $gradu$. Тоа се однесува во врска со изводот по даден правец и интерпретација за правецот на *grad*.

Градиент и извод во правец

Знаеме дека, ако $l = (k_1, k_2)$ е единичен вектор, тогаш

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x_o, y_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o)k_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o)k_2$$

Од десната страна на изразот имаме скаларен производ на векторите $gradu(x_0, y_0)$ и $l = (k_1, k_2)$, што значи можеме да напишеме

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x_o, y_o) = gradu(x_o, y_o) \cdot l$$

Познато ни е од теоријата на векторите, дека ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се два вектора, тогаш нивниот скаларен производ е $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$, каде φ е аголот што го определуваат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Според тоа ако $\vec{a} = gradu(x_o, y_o)$ и $\vec{b} = l = (k_1, k_2)$ тогаш имаме

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x_o, y_o) = gradu(x_o, y_o) \cdot l =$$

$$|gradu\,(x_o, y_o)| \cdot |l| \cos\varphi = |gradu\,(x_o, y_o)| \cos\varphi$$

зашто $|l| = 1$

Од горното следи дека изводот на функцијата во правец на градиентот е

$$\frac{\partial u}{\partial gradu}(x_o, y_o)$$

и исто така, ако $l = (k_1, k_2)$ е било кој единичен вектор, тогаш

$$-|gradu\,(x_o, y_o)| \leq \frac{\partial u}{\partial l}(x_o, y_o) \leq |gradu\,(x_o, y_o)|$$

Извод во правец по надворешната нормала

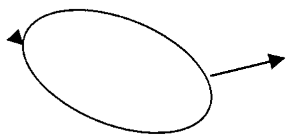
Извод на функција во правец на надворешната нормала ни овозможува да ја посматраме релацијата за однесување на функцијата во точките од областа Ω со однесувањето на функцијата во точките од границата $\partial\Omega$.

Нека Ω е Жорданова област и нека $(x_o, y_o) \in \partial\Omega$. Надворешниот нормален вектор $n(x_o, y_o)$ е насочен спрема надворешноста од Ω. Да претпоставиме, дека функцијата $u(x, y)$ е непрекинато диференцијабилна во една поголема област во која што се содржи Ω и $\partial\Omega$. Од интерес е да се разгледа промената на функцијата кога променливата точка (x,y) од Ω минува низ точката (x_o,y_o) во правец на нормалниот вектор $n(x_o,y_o)$. Од порано знаеме, дека одговорот го дава изводот во правец по n кој што ќе го означиме со $\frac{\partial u}{\partial n}(x_o,y_o)$ или само $\frac{\partial u}{\partial n}$ ако се знае за која точка се работи.

Вредноста на тој извод се вика уште надворешен нормален извод на u во (x_o,y_o) од $\partial\Omega$. Според тоа имаме

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_o,y_o) = gradu\,(x_o,y_o)n(x_o,y_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o,y_o)n_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x_o,y_o)n_2$$

каде што $n = (n_1,n_2)$ и $|n| = 1$



Примери

1. Функцијата $u(x,y) = x^2y$ има непрекинати парцијални изводи на R^2 и нека $\Omega = D(0,1)$ е единичниот круг. Дадена е точката $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ на кружницата $\partial\Omega$. Да се определи $\frac{\partial u}{\partial n}(x_o,y_o)$.

Градиентот е $gradu\,(x_o,y_o) = \left(1,\frac{1}{2}\right)$, нормалниот вектор n се поклопува со радиус векторот $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ следователно имаме

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1,\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Според тоа $u(x,y)$ расте кога (x,y) минува низ точката $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$во насока на радиусот во таа точка.

2. Сега го посматраме изводот $\frac{\partial u}{\partial n}$ како функција на $\partial\Omega$. На пример за функцијата $u(x,y)$ од 1. $\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)$ по точките од кружницата е

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 3sin\theta(1-sin^2\theta) = 3cos^2\theta sin\theta$$

Напоменуваме дека натаму многу често изводот $\frac{\partial u}{\partial n}$ ќе го разгледуваме како функција дефинирана на кривите што ја сочинуваат границата $\partial\Omega$.

Задачи

1. Нека $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ е позитивно ориентираната граница на единичниот квадрат (како претходно). Да се покаже, дека $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y)$ е определена на следниот начин:

а. $-\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y)$, за $(x, y) \in \Gamma_0$

б. $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ за $(x, y) \in \Gamma_1$

в. $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ за $(x, y) \in \Gamma_2$

г. $-\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ за $(x, y) \in \Gamma_3$

2. Нека Ω е Жорданова област со граница $\partial\Omega$ параметризирана со

$\sigma(s) = (x(s), y(s))$ каде s е должина на лак, функцијата $u(x, y)$ има непрекинати парцијални изводи на некоја поголема област $'\Omega^+$ што ја содржи $'\Omega$. Да се одговори кои тврдења се точни, а кои не:

а) За $(x, y) \in \Omega$, $\nabla u(x, y) = \left(u_x(x, y), u_y(x, y)\right)$(погрешно)

б) Во точката $(x(s), y(s))$ од $\partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u(x(s), y(s)) \cdot n(x(s), y(s))$ точно

в) Надворешниот нормален вектор е $(y'(s), -x'(s))$ (точно)

г) Ако Ω е единичниот круг, тогаш $n(s)$ е насочен кон координатниот почеток (не).

д) $\frac{\partial u}{\partial n}(\gamma(s)) = \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(s)) \cdot y'(s) - \frac{\partial u}{\partial y}(\gamma(s)x'(s), \ \gamma(s) = (x(s), y(s))$

(одговор. точно е).

ѓ) ако ја земеме функцијата $u(\gamma(s))$ како функција од s, тогаш

$$\frac{d}{ds}u(\gamma(s)) = \nabla u(\gamma(s)) \cdot T(s) \qquad \text{(точно)}$$

`е) Дали $\frac{\partial u}{\partial u}(\gamma(s))$ е вектор во рамнината. (не)

8 Криволиниски интеграл

Нека е дадена кривата $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ во просторот R^3 која е дефинирана на интервалот $[a, b]$. Множеството од сите точки во R^3 кои што припаѓаат на кривата γ ќе го обележиме со γ^*. Нека $f(x, y, z)$ е функција од три променливи која е дефинирана на некое множество $G \subset R^3$ такво што $\gamma^* \subset G$. Тоа значи, дека функцијата f е определена на точките од кривата т.е. за секое $t \in [a, b]$, функцијата $f(x(t), y(t), z(t))$ е дефинирана. Ако функцијата f ја посматраме само на точките од γ^* тогаш имаме функција $g(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ од една променлива t дефинирана за $a \leq t \leq b$

Интервалот $[a, b]$ го делиме на подинтервали со поделбата

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{j-1} < \cdots < t_k = b \qquad (1)$$

како при дефиницијата на Римановиот интеграл.

Во секој подинтервал $[t_{j-1}, t_j]$ за $j = 1, \ldots, k$ избираме точка τ_j т.ш. $t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$ и со помош на функцијата $x(t)$ на пример ја формираме сумата

$$T = \sum_{j=1}^{k} f(\gamma(\tau_j))[x(t_j) - x(t_{j-1})]$$

или со функцијата $g(t)$имаме

$$T = \sum_{j=1}^{k} g(\tau_j)[x(t_j) - x(t_{j-1})]$$

Гледаме дека сумата T е многу слична на Римановата сума со тоа што разликата е во $x(t_j) - x(t_{j-1})$ на чие место во Римановиот интеграл стои $t_j - t_{j-1}$. На пример, ако $x(t) = t$, тогаш всушност имаме Риманови суми за сложената функција $g(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Оваа аналогија ни сугерира да ја дадеме следната дефиниција:

Дефиниција 1 Ако постои број K таков што за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што за секоја поделба (1) и било кој избор на $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ за $j = 1, \ldots k$ важи

$$|T - K| < \varepsilon$$

ако $max(t_j - t_{j-1}) < \delta$ за $j = 1, \ldots k$ тогаш бројот K се вика криволиниски интеграл за функцијата f по однос на координатната функција $x(t)$ од γ. Во тој случај пишуваме

$$\text{К} = \int_{\gamma} f(x, y, z)dx$$

На потполно ист начин се дефинираат криволиниските интеграли

$$\int_{\gamma} f dy \text{ и } \int_{\gamma} f dz$$

Се разбира овој поим може да се дефинира и за криви $\gamma(t)$ во просторот R^n и тогаш ќе имаме криволиниски интеграли по n –координати. За нас воглавно ќе бидат од интерес криволиниските интеграли во рамнината R^2 и во просторот R^3.

Дефиницијата на криволинискиот интеграл е јасна, но постоењето на интегралот т.е. интеграбилноста на функциите очигледно не зависи само од функцијата f туку и од координатната функција. Во врска со тоа треба подлабока анализа, но ние тука ќе разгледаме еден специјален случај кога кривата $\gamma(t)$ е по делови непрекинато диференцијабилна. Меѓутоа, иако е тој специјален случај сепак пред се за примената се чини дека е сосема доволен. (Зашто може ли некој да замисли поинаква крива?)

Пред да преминеме на некои основни особини на криволинискиот интеграл како и основната теорема за тој интеграл ќе се потсетиме на две три работи во врска со кривите.

За кривата $\gamma(t)$ дефинирана на интервалот $[a,b]$ велиме дека е проста ако γ е затворена $(\gamma(a) = \gamma(b))$ и ако од $t_1 \neq t_2$ следи дека $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$. Понатаму, порано зборувавме за составување на криви (збир на криви), тука тој поим го даваме во поопшта форма. Имено, нека $\gamma_1(t)$ е дефинирана на интервалот $[a,b]$, а кривата $\gamma_2(t)$ е дефинирана на интервалот $[c,d]$. Дефинираме крива $\gamma_1(t) + \gamma_2(t) = \gamma(t)$ на следниот начин:

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) \text{ за } a \leq t \leq b \quad \text{и } \gamma(t) = \gamma_2(t + c - b) \text{ ако } b \leq t \leq b + d - c$$

Во овој случај $\gamma_1(b)$ и $\gamma_2(b)$ не претпоставуваме дека се еднакви, меѓутоа ако $\gamma_1(b) = \gamma(c)$ и ако γ_1 и γ_2 се непрекинати (како што секогаш претпоставувме), тогаш кривата $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$ е исто така непрекината на интервалот $[a, b + d - c]$. Се разбира оваа дефиниција може да се примени и за три и повеќе криви.

Основната теорема во изучувањето и примената на криволинискиот интеграл е следната.

Теорема 1 Нека кривата γ е по делови непрекинато диференцијабилна и нека $x(t), y(t)$и $z(t)$ се нејзините координатни функции. Нека $f(x,y,z)$ е непрекината на некое множество во R^3 во кое се содржи γ^*. Тогаш по однос на координатните функции по кривата γ постојат интегралите.

$$\int_{\gamma} f dx, \quad \int_{\gamma} f dy, \int_{\gamma} f dz$$

и притоа важи

$$\int_{\gamma} f(x,y,z)dx = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt \qquad (2)$$

Истото важи и за другите два интеграла.

Доказ. Прво го разгледуваме случајот кога кривата γ е непрекинато диференцијабилна.

Бидејќи $f\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)$ е непрекината функција на интервалот $[a,b]$ интегралот (2) постои. Следователно, според критериумот за интеграбилност, за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што ако сите интервали на поделбата на интервалот $[a,b]$ се помали од δ, тогаш

$$\left|\sum_{j=1}^{k} f\left[x(\tau_j),y(\tau_j),z(\tau_j)\right]x'(\tau_j)\Delta t_j - \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)dt\right| < \varepsilon \qquad (3)$$

за било кој избор на $\tau_j \in [t_{j-1},t_j]$, $j = 1,2,\dots,n$:

Понатаму ќе го користиме τ_j за кое важи теоремата на Лагранж на интервалот $[t_{j-1},t_j]$, имено $x(t_j) - x(t_{j-1}) = x'(\tau_j)\Delta t_j$ така што (3) може да го запишеме и на следниот начин

$$\sum_{j=1}^{k} f\left[x(\tau_j),y(\tau_j),z(\tau_j)\right]\big(x(t_j) - x(t_{j-1})\big) - \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)dt\Big| < \varepsilon \qquad (3')$$

Да забележиме дека од непрекинатоста на $x'(t)$ постои $M > 0$ така што $|x'(t)| < \mathrm{M}$ за секое $t \in [a,b]$. Исто така од непрекинатоста на $f(x(t),y(t),z(t))$ следи дека постои $\delta > 0$ така што $\Delta t_j < \delta$ за $j = 1,2,\dots,n$ и важи

$$\left|f\left[x(\xi_j),y(\xi_j),z(\xi_j)\right] - f\left[x(\tau_j),y(\tau_j),z(\tau_j)\right]\right| < \varepsilon$$

ако $\xi_j, \tau_j \in [t_{j-1},t_j]$.

Нека е дадена сумата

$$\sum_{j=1}^{k} f\left[x(\xi_j),y(\xi_j),z(\xi_j)\right]\big(x(t_j) - x(t_{j-1})\big) \text{ за } \xi_j \in [t_{j-1},t_j]$$

Сакаме да е оцениме разликата

$$\sum_{j=1}^{k} f\left[x(\xi_j), y(\xi_j), z(\xi_j)\right]\left(x(t_j) - x(t_{j-1})\right) - \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right)x'(t)dt$$

За таа цел во последниот израз ја додаваме и одземаме сумата од (3) како и сумата

$$\sum_{j=1}^{k} f\left[x(\tau_j), y(\tau_j), z(\tau_j)\right]x'(c_j)\Delta t_j.$$

Со групирање добиваме

$$\left|\sum_{j=1}^{k} f\left[x(\xi_j), y(\xi_j), z(\xi_j)\right]x'(c_j)\Delta t_j - \sum_{j=1}^{k} f\left[x(\tau_j), y(\tau_j), z(\tau_j)\right]x'(c_j)\Delta t_j\right| +$$

$$\left|\sum_{j=1}^{k} f\left[x(\tau_j), y(\tau_j), z(\tau_j)\right]x'(c_j)\Delta t_j - \sum_{j=1}^{k} f\left[x(\tau_j), y(\tau_j), z(\tau_j)\right]x'(\tau_j)\Delta t_j\right| +$$

$$\left|\sum_{j=1}^{k} f\left[x(\tau_j), y(\tau_j), z(\tau_j)\right]x'(\tau_j)\Delta t_j - \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right)x'(t)dt\right|$$

Од непрекинатоста на $x'(t)$ го избираме δ така што $\left|x'(c_j) - x'(\tau_j)\right| < \varepsilon$за $c_j, \tau_j \in \left[t_{j-1}, t_j\right]$. Така ја добиваме оценката за последниов израз дека е

$$\leq \sum_{j=1}^{k}\left|f\left[x(\xi_j), y(\xi_j), z(\xi_j)\right] - f\left[x(\tau_j), y(\tau_j), z(\tau_j)\right]\right|\left|x'(c_j)\right|\Delta t_j +$$

$$\sum_{j=1}^{k}\left|f\left[x(\tau_j), y(\tau_j), z(\tau_j)\right]\right|\left|x'(c_j) - x'(\tau_j)\right|\Delta t_j +$$

$$\left|\sum_{j=1}^{k} f\left[x(\tau_j), y(\tau_j), z(\tau_j)\right]x'(\tau_j)\Delta t_j - \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right)x'(t)dt\right|$$

Ако M е избрано така да и $|f(x(t), y(t), z(t))| < M$ за секое t, тогаш имаме

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \varepsilon M\, \Delta t_j + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon M\, \Delta t_j + \varepsilon = 2\varepsilon M(b-a) + \varepsilon$$

Со тоа покажавме дека

$$\sum_{j=1}^{k} f\left[x(\xi_j), y(\xi_j), z(\xi_j)\right]\left(x(t_j) - x(t_{j-1})\right) \to \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt$$

кога $\Delta t_j \to 0$ за $j = 1,2, \dots, n$

На ист начин се покажува дека постојат и интегралите

$$\int_a^b f[\gamma(t)]y'(t)dt \text{ и } \int_a^b f[\gamma(t)]z'(t)dt\,.$$

Се разбира на ист начин се работи и за криви од просторот R^n со тоа што во тој случај ќе имаме n интеграли.

Нека, сега претпоставиме, дека γ е непрекинато диференцијабилна освен во точката $c \in (a, b)$ во тој случај постојат интегралите

$$\int_a^c f[x(t), y(t), z(t)]x'(t)dt \quad \text{и} \int_c^b f[x(t), y(t), z(t)]x'(t)dt$$

Тоа значи за $\varepsilon > 0$ постојат δ_1и δ_2 такви што ако поделбата на $[a, c]$ е таква што сите подинтервали се помали од δ_1, важи дека секоја сума на таква поделба ќе се разликува од

$$\int_a^c fx'$$

за ε (по апсолутна вредност) истото може да се направи и за интервалот $[c, b]$ за некое δ_2. Сега ако $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ и ако поделбата на интервалот $[a, b]$ е таква што секој подинтервал е помал од δ и ако секогаш точката c е делбена точка (зошто ако не е можеме да ја додадеме) и со тоа добиваме пофина поделба на $[a, b]$ и имаме можност целата сума да ја поделиме на сума до точката c и другата од c до b, како првата сума тежи кон $\int_a^c$, а другата кон $\int_c^b$ од тука заклучуваме дека целата сума ќе тежи кон нивниот збир

$$\int_a^c f[x(t), y(t), z(t)]x'(t)dt + \int_c^b f[x(t), y(t), z(t)]x'(t)dt =$$

$$= \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]x'(t)dt$$

Ако γ има прекинат извод во повеќе точки тогаш постапуваме потполно исто само што ќе имаме работа со повеќе подинтервали, потоа збирот на соодветните интеграли е еднаков на интегралот од функцијата по целиот интервал.

Во пракса се пресметува секој интеграл на подинтервалите на кои што $\gamma(t)$ е непрекинато диференцијабилна со помош на формулата на Њутон-Лајбниц и потоа се собираат.

Нека $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$ каде што функциите f_j,за $j = 1,2,3$ се дефинирани на γ^*, тогаш f е всушност пресликување (трансформација) од некое множество $G \subset R^3$ во R^3 . Изразот

$$f_1(x,y,z)dx + f_2(x,y,z)dy + f_3(x,y,z)dz$$

се вика диференцијална форма,а

$$\int_\gamma f_1(x,y,z)dx + f_2(x,y,z)dy + f_3(x,y,z)dz = \int_\gamma f_1 dx + \int_\gamma f_2\, dy + \int_\gamma f_3\, dz$$

се вика криволиниски интеграл од f по однос на γ.

9 Основни особини на криволиниски интеграл

Нека кривата $\gamma(t)$ е дефинирана на интервалот $[a,b]$, а кривата $\beta(\tau)$ е дефинирана на интервалот $[c,d]$. Ако овие криви се еквивалентни тогаш постои функција φ на параметризација при што знаеме $\beta(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$ каде $t = \varphi(\tau)$ или $\tau = \varphi^{-1}(t)$.

Теорема 1 Нека кривите γ и β се еквивалентни и нека f е дадена функција тогаш важи

$$\int_\gamma f = \int_\beta f$$

по било која координатна функција.

Доказ.

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt$$

Ставаме смена $t = \varphi(\tau)$ и добиваме

$$\int_c^d f\left(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau))\right)x'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau$$

Бидејќи $(x(\varphi(\tau)))' = x'\big(\varphi(\tau)\big)\varphi'(\tau)$ добиваме дека последниот интеграл е еднаков на

$$\int_\beta f$$

зашто $\beta(\tau) = \big(x\big(\varphi(\tau)\big), y(\varphi(\tau))\big)$ и $c \leq \tau \leq d$.

Ист е доказот и по однос на y.

Теорема 2 Криволинискиот интеграл по спротивно ориентираната крива $\underline{\gamma}$ на дадена крива γ е даден со

$$\int_{\underline{\gamma}} f(x,y)dx = -\int_\gamma f(x,y)dx$$

Доказ. $\underline{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t) = \big(x(a+b-t), y(a+b-t)\big)$ за $a \leq t \leq b$

$$\int_{\underline{\gamma}} f(x,y)dx = \int_a^b f\big(x(a+b-t), y(a+b-t)\big)(-1)x'(a+b-t)dt$$

со смената $a+b-t = \tau$добиваме

$$\int_a^b f\big(x(\tau), y(\tau)\big)\cdot x'(\tau)(-1)d\tau = -\int_\gamma f(x,y)dx$$

Теорема 3 Нека се дадени кривите $\gamma_1(t), a \leq t \leq b$ и $\gamma_2(t), c \leq t \leq d$, и нека $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Ако f е дадена функција тогаш

$$\int_\gamma f(x,y)dx = \int_{\gamma_1} f(x,y)dx + \int_{\gamma_2} f(x,y)dx.$$

Доказ. Погоре дефиниравме крива $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

Ако $\gamma_1(t) = \big(x_1(t), y_1(t)\big)$и $\gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ тогаш

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{за } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t+c-b) & \text{за } b \leq t \leq b+d-c \end{cases}$$

од каде добиваме

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma} f(x,y)dx = \int_a^{b+d-c} f\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt = \int_a^b f(x_1(t), y_1(t))\, dx_1(t)$$

$$+\int_{b}^{b+d-c} f(x_2(t+c-b), y_2(t+c-b))dx_2(t+c-b)$$

Ако во вториот интеграл направиме смена $t+c-b=\tau$ добиваме

$$=\int_{\gamma_1} f(x,y)dx+\int_{\gamma_2} f(x_2(\tau), y_2(\tau)x_2'(\tau)d\tau=$$

$$=\int_{\gamma_1} f(x,y)dx+\int_{\gamma_2} f(x,y)dx$$

Специјално, ако $\underline{\gamma_2}$ е спротивна на γ_2 тогаш

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(x,y)dx=\int_{\gamma_1} f(x,y)dx-\int_{\gamma_2} f(x,y)dx$$

Пример 1. Да се пресмета интегралот

$$\int_{\gamma} y^2dx$$

γ е отсечката од $O(0,0)$ до $M(2,2)$.

Равенка на ориентирана отсечка со почеток $A(x_1,y_1)$ и крај во $B(x_2,y_2)$ се дефинира со

$$(x,y)=(x_1,y_1)+t[(x_2,y_2)-(x_1,y_1)]=(x_1,y_1)+t(x_2-x_1,y_2-y_1)=$$

$$\big(x_1+t(x_2-x_1), y_1+t(y_2-y_1)\big)=\big((1-t)x_1+tx_2,(1-t)y_1+ty_2\big), 0\le t\le 1$$

Според тоа $x=(1-t)x_1+tx_2$ и $y=(1-t)y_1+ty_2$

Во овој случај имаме $A=O(0,0)$, $B=(2,2)$ и затоа

$x=(1-t)0+2t$, $y=(1-t)0+2t$ или $x=2t$, $y=2t$, $f(x,y)=y^2$, $dx=2dt$ за $0\le t\le 1$.

Дефинитивно имаме

$$\int_{\gamma} y^2dx=\int_0^1 (2t)^2\cdot 2dt=\int_0^1 8t^2dt=\frac{8}{3}$$

Пример 2. Да се пресмета

$$\int_{\gamma} y^2dx+x^2dy;\ \text{каде } \gamma: x=\sqrt{1-y^2} \text{ и } 0\le y\le 1$$

Ако ставиме

$$y = t, \qquad x(t) = \sqrt{1 - t^2}, \qquad dx(t) = -\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}dt, \qquad dy = dt$$

имаме

$$\int_0^1 t^2 \cdot \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}dt + \int_0^1 (1 - t^2)dt$$

првиот интеграл се решава со смена $1 - t^2 = u^2$ и конечно се добива $\frac{4}{3}$

Пример 3. Нека $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, каде што Γ_1 е хоризонтална отсечка од точката (x_0, y_0) до точката (x_1, y_0) и Γ_2, е вертикална отсечка од (x_1, y_0) до точката (x_1, y_1). Тогаш

$$\int_\Gamma [p(x,y)dx + q(x,y)dy] = \int_{x_0}^{x_1} p(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} q(x_1, y)dy$$

$$\Gamma_1: x = t, \qquad y = y_0, \qquad x_0 \le t \le x_1, \qquad \Gamma_2: x = x_1, y = t, y_0 \le t \le y_1$$

$dx = dt, dy = 0, dx = 0, dy = dy$

$$\int_{x_0}^{x_1} p(x, y_0)dx + q(x,y) \cdot 0 +$$

$$+ \int_{y_0}^{y_1} P(x_1, y) \cdot 0 + \int_{y_0}^{y_1} q(x_1, y)dy = \int_{x_0}^{x_1} p(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} q(x_1, y)dy$$

Задачи

1. Да се пресметаат интегралите

а) $\int_\gamma ydx + xdy;\ \gamma: y = x^2,\ 0 \le x \le 2$ Одг. 8

б) $\int_\gamma \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2};\ \gamma: x = cos^3 t,\ \ y = sin^3 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(упатство смена $u = tg^3 t$ (одг. $-\frac{\pi}{2}$)

в) $\int_\gamma y^2 dx - xdy;\ \ \gamma: y^2 = 4x,\ \ 0 \le x \le 1$ (Одговор $\frac{4}{3}$)

г) $\int_\gamma x^2dy;\ \gamma: y = x^3 - 3x^2,\quad 0 \le x \le 2 \qquad$ (Одгоовр $\frac{8}{15}$)

д) $\int_\gamma ysinxdx - xcosydy; \quad y = x \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$

2. Да се пресметаат криволиниските интеграли во R^3 т.е по (x, y, z):

а) $\int_\gamma 3ydx + xdy - 2zdz;\ \ \gamma: y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad z = 1, -1 \le x \le 1$

б) $\int_\gamma (xy + y^2 - xyz)dx; \quad \gamma: y = x^2, z = 0, \quad -1 \le x \le 2$ Одговор $\frac{207}{20}$

в) $\int_\gamma (z + y)dx + (x + z)dy + (y + x)dz;$ γ е полигонална крива со темиња

$(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$ Одговор 3

г) $\int_\gamma ydx + \sqrt{z}\,dy + 2x^2dz\,;\ \ \gamma:\ x = t, y = t^2, \qquad z = t^3 + 1\,;\ \ 0 \le t \le 2$

д) $\int_\gamma ydx - xdy + dz\,;\ \ \gamma:\ x = asint,\ \ y = acost,\ \ z = 0$ за $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(Одг.$\frac{\pi}{2}(a^2 + 1)$)

10 Интеграл по должина на крива

Нека γ е ректификациона крива во R^2 определена со $(x(t), y(t))$ каде $a \le t \le b$, и нека функцијата $f(x, y)$ е определена на множеството γ^*.

За дадена поделба $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ ја формираме сумата

$$T = \sum_{j=1}^{k} f\left(x(\tau_j), y(\tau_j)\right) l(\gamma_j)$$

каде што $l(\gamma_j)$ е должина на лакот од кривата на подинтервалот $[t_{j-1}, t_j]$ и $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$.

Ако постои број K таков што: За дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што за секоја поделба Π на $[a, b]$ на која што секој подинтервал е помал од δ и за било кој избор на $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ е исполнет условот

$$|T - K| < \varepsilon$$

Тогаш бројот К е интеграл за f вдолж кривата γ

Интегралот го пишуваме на следниот начин

$$\int_\gamma f(x, y) ds \qquad (2)$$

Теорема 1 Ако кривите γ и β се еквивалентни и ако интегралот за функцијата f постои вдолж кривата γ, тогаш постои и интегралот по кривата β и двата интеграла се еднакви.

Доказ. Нека кривата β е параметризирана на интервалот $[c, d]$, а $\varphi: [a, b] \to [c, d]$ е функцијата на параметризација при што имаме $\gamma(t) = \beta[\varphi(t)]$, $a \leq t \leq b$, $\tau = \varphi(t)$ за $\tau \in [c, d]$.

Бидејќи по претпоставка, постои интегралот K по γ за f, за $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ такво што, ако поделбата на $[a, b]$ се состои од подинтервали помали од δ тогаш за било кои $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ за $j = 1,2, \dots, k$ важи

$$\left| \sum_{j=1}^{k} f(x(\tau_j), y(\tau_j)) l(\gamma_j) - K \right| < \varepsilon$$

Нека $\varphi(t_j) = s_j$, бидејќи φ е строго монотоно растечка и непрекината функција од $[a, b]$ на $[c, d]$ следи дека s_j за $j = 0,1, \dots k$ се поделба за интервалот $[c, d]$ и $\overline{s_j} \in [s_{j-1}, s_j]$.

Ја разгледуваме сумата

$$U = \sum_{j=1}^{k} f(\beta(\overline{s_j})) \cdot \bar{l}(\beta_j)$$

како $\beta(s_j) = \gamma(t_j)$ и од порано знаеме $\bar{l}(\beta_j) = l(\gamma_j)$ па добиваме, дека

$$|U - K| < \varepsilon$$

Сега ако $c = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{k-1} < s_k = d$ е поделба на $[\alpha, \beta]$ при што

$$\varphi(s_j) - \varphi(s_{j-1}) = t_j - t_{j-1} < \delta \text{ за } j = 0,1,2, \dots k$$

тогаш за секоја поделба на $[c, d]$ таква што $\varphi(s_j) - \varphi(s_{j-1}) < \delta$ важи неравенството

$$|U - K| < \varepsilon$$

каде U е сумата од поделбата.

Од тука следи дека

$$\int_{\beta} f(x,y)ds = \int_{\gamma} f(x,y)ds$$

Сега ќе дадеме една експлицитна формула за пресметување на интеграли вдолж крива со одредени особини.

Теорема 2 Нека кривата γ е по делови непрекинато диференцијабилна во R^2 определена со $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ за $a \leq t \leq b$ и нека $f(x,y)$ е непрекината на γ^*. Тогаш интегралот од f вдолж γ постои и е даден со формулата

$$\int_{\gamma} f(x,y)ds \;=\; \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt \qquad (2)$$

Од порано имаме дека секоја крива што е по делови непрекинато диференцијабилна има природна параметризација и затоа ставаме $\gamma(s)$ за $0 \leq s \leq l(\gamma)$ при што, јасно

$$\gamma(s) = \big(x(s), y(s)\big).$$

Исто така познато ни е дека тангентниот вектор $T(s) = \big(x'(s), y'(s)\big)$ е со должина 1, т.е

$$\|\mathrm{T}(s)\| = \sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)} = 1.$$

Од тука следи дека

$$\int_{\gamma} f(x,y)d\,s = \int_{0}^{l(\gamma)} f\big(\gamma(s)\big)d\,s \qquad (3)$$

Сега преминуваме на доказот на формулата (2)

Доказ: Прво претпоставуваме дека γ е непрекинато диференцијабилна. Тогаш $\|\gamma'(t)\|$ е непрекината функција за $a \leq t \leq b$. Таа е исто така рамномерно непрекината, значи за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ такво што важи

$$\|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)\| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \text{ ако } |t - \tau| < \delta \text{ и } |f(\gamma(t)| \leq M$$

за секое $a \leq t \leq b$, и некое $M > 0$.

Бидејќи производот $f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|$ е непрекината функција следи дека таа е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и затоа според основниот критериум за интеграбилност постои $\delta' > 0$ такво што за секоја поделба на интервалот чиј што подинтервали се помали од δ' важи

$$\left|\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{\kappa}} f\big(\gamma(\tau_j)\big)\big\|\gamma'(\tau_j)\big\|\Delta t_j - \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|dt\right| \leq \varepsilon \qquad (*)$$

Нека сега ја разгледаме сумата

$$T = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{\kappa}} f\left(\gamma(\tau_j)\right) l(\gamma_j)$$

која што одговара на некоја поделба на интервалот $[a, b]$ и $t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$.

Од теормата за должината на лак на крива имаме

$$l(\gamma_j) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\gamma'(\tau_j) + [\gamma'(t) - \gamma'(\tau_j)]\big\| dt$$

Со примена на неравенството на триаголник во интегралот имаме

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\gamma'(\tau_j) + [\gamma'(t) - \gamma'(\tau_j)]\big\| dt \geq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\gamma'(\tau_j)\big\| dt - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\gamma'(t) - \gamma'(\tau_j)\big\| dt$$

и

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\gamma'(\tau_j) + [\gamma'(t) - \gamma'(\tau_j)]\big\| dt \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\gamma'(\tau_j)\big\| dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\gamma'(t) - \gamma'(\tau_j)\big\| dt$$

од каде ги добиваме неравенствата

$$-\int_{t_{j-1}}^{t_i} \big\|\gamma'(t) - \gamma'(\tau_j)\big\| dt \leq l(\gamma_j) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\gamma'(\tau_j)\big\| dt \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\gamma'(t) - \gamma'(\tau_j)\big\| dt$$

Ако подинтервалите на поделбата се помали од δ имаме

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\gamma'(t) - \gamma'(\tau_j)\big\| dt < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}\left(t_j - t_{j-1}\right) \text{ за } t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$$

и бидејќи

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|\gamma'(\tau_j)\big\| dt = \big\|\gamma'(\tau_j)\big\| \left(t_j - t_{j-1}\right)$$

можеме да напишеме

$$\left|l(\gamma_j)-\|\gamma'(\tau_j)\|(t_j-t_{j-1})\right|\le\frac{\varepsilon}{M(b-a)}(t_j-t_{j-1})\qquad(**)$$

Од горното следи

$$\left|T-\sum_{j=1}^{k}f(\gamma(\tau_j)\|\gamma'(\tau_j)\|(t_j-t_{j-1})\right|\qquad(\text{со замена за T})=$$

$$\left|\sum_{j=1}^{k}f\left(\gamma(\tau_j)\right)\left[l(\gamma_j)-\|\gamma'(\tau_j)\|(t_j-t_{j-1})\right]\right|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{k}\left|f(\gamma(\tau_j)\right|\cdot\left|l(\gamma_j)-\|\gamma'(\tau_j)\|\Delta t_j\right|\le$$

Од $(**)$ и од $|f(\gamma(t))|<M$ следи дека

$$M\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\sum_{j=1}^{k}(t_j-t_{j-1})=\varepsilon.$$

Конечно имаме:

$$\left|T-\int_a^b f(\gamma(t)\|\gamma'(t)\|dt\right|=$$

$$\left|\sum_{j=1}^{k}f(\gamma(\tau_j)l(\gamma_j)\right.$$

$$-\sum_{j=1}^{k}f(\gamma(\tau_j)\|\gamma'(\tau_j)\|\Delta t_j$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{k}f(\gamma(\tau_j)\|\gamma'(\tau_j)\|\Delta t_j-\int_a^b f(\gamma(t)\|\gamma'(t)\|dt\right|$$

$$\le\left|\sum_{j=1}^{k}f(\gamma(\tau_j)l(\gamma_j)-\sum_{j=1}^{k}f(\gamma(\tau_j)\|\gamma'(\tau_j)\|\Delta t_j\right|+$$

$$+\left|\sum_{j=1}^{k} f(\gamma(\tau_j))\|\gamma'(\tau_j)\|\Delta t_j - \int_a^b f(\gamma(t)\|\gamma'(t)\|dt\right| < \varepsilon$$

Ако поделбата е таква што секој подинтервал е помал од δ и од δ' и од произволноста на ε следи дека сумите T тежат кон интегралот

$$\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt,$$

а тоа значи дека важи формулата

$$\int_\gamma f(x,y)ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt \qquad (2)$$

Ако $\gamma(t)$ е по делови непрекинато диференцијабилна, тогаш теоремата ја применуваме на сите подинтервали од $[a,b]$ на кои што γ е непрекинато диференцијабилна и потоа ги собираме тие интеграли, а нивниот збир е интегралот по целиот интервал $[a,b]$.

11 Независност на криволинискиот интеграл од кривата

Нека $\Phi(x,y,z)$ е непрекинато диференцијабилна функција на отвореното множество D од R^3. Пресликувањето од D во R^3 определено со: $(x,y,z) \to \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$ се вика уште векторозначна функција бидејќи на секоја точка (x,y,z) одговара точка $(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,z); \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,z); \frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,z))$, а знаеме дека секоја точка во R^2, R^3 или општо во R^n определува вектор кој се вика уште радиус вектор за таа точка. Знаеме, исто така, дека $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$ е градиент за функцијата Φ кој се обележува со $grad\Phi$, или со $\nabla\Phi$.

Нека сега $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$, и $f_3(x,y,z)$, се три функции со кои што, (како и претходно) ја формираме векторозначната функција $(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$, од отвореното множество D во R^3. Ако постои непрекинато диференцијабилна функција Φ на D, таква што

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = f_1, \frac{\partial\Phi}{\partial y} = f_2, \frac{\partial\Phi}{\partial z} = f_3$$

тогаш пишуваме $(f_1, f_2, f_3) = grad\Phi$, и пресликувањето (f_1, f_2, f_3) се вели дека претставува едно градиентно поле, или потенцијално поле, а функцијата $\Phi(x,y,z)$ се вика потенцијал за (f_1, f_2, f_3). Ако Φ е два пати непрекинато диференцијабилна или што е, се исто, ги има сите парцијални изводи од втор ред заклучно и тие се непрекинати функции, во тој случај важат формулите

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

затоа што

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$$

Се разбира исто важи и по однос на f_1 со f_3 на пример е $\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}$ итн. Ако се работи за потенцијално поле во R^n тогаш имаме $f_1(x), \dots, f_n(x)$ каде $x = (x_1, \dots, x_n)$, значи имаме n функции. Еве една примена на интегралот вдолж крива γ во R^3. Нека f_1, f_2 и f_3 се три функции дефинирани на γ^* кои се координати на сила која движи материјална точка по кривата γ. Ако кривата е параметризирана со должина s на лакот тогаш извршената работа по кривата е дадена со формулата

$$\int_0^{l(\gamma)} (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) \cdot \gamma'(s) ds$$

каде што $\gamma'(s) = T(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$ е тангентниот вектор, а под интегралот е скаларен производ на векторите (f_1, f_2, f_3)и T. Според тоа последниот интеграл е еднаков со

$$\int_0^{l(\gamma)} [f_1(x(s), y(s), z(s)) \cdot x'(s) + f_2(x(s), y(s), z(s))y'(s) + f_3(x(s), y(s), z(s))z'(s)]ds$$

Пример. Ако материјална точка се движи по кривата $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ под дејство на сила $f = (f_1, f_2, f_3)$ која е секогаш нормална на кривата т.е. на тангентниот вектор $\gamma'(t)$, тогаш извршената работа е 0.

Задача1. Материјална точка со маса m се движи по кривата $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ во R^3 . Силата $f = (f_1, f_2, f_3)$ е дадена со вториот Њутнов закон.

Да се најде извршената работа.

Решение. Бидејќи материјална точка со маса m се движи по кривата $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ во R^3, а силата $f = (f_1, f_2, f_3)$ е дадена со вториот Њутнов закон:

$$f_1 = mx''(t); \quad f_2 = my''(t); \quad f_3 = mz''(t)$$

а извршената работа е

$$\int_{\gamma} m(x''x' + y''y' + z''z')dt = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{1}{2}m(v^2(b) - v^2(a))$$

Ние ќе работиме само со функции од две и три променливи, иако обопштувањето е сосема аналогно.

Теорема 1 Нека (f_1, f_2, f_3) е градиентно поле во отвореното множество D од R^3, и нека Φ е потенцијалот. Ако γ е по делови непрекинато диференцијабилна крива која лежи во D со почетна точка $\gamma(a) = M_0(x_0, y_0, z_0)$ и крајна точка $\gamma(b) = M_1(x_1, y_1, z_1)$ тогаш важи

$$\int_{\gamma} f_1(x,y,z)dx + f_2(x,y,z)dy + f_3(x,y,z)dz = \phi(M_1) - \phi(M_0)$$

$$= \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_0, y_0, z_0)$$

каде $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in D$

Доказ. Интегралот, како што знаеме е еднаков на

$$\int_a^b \big[f_1\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + f_2\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + f_3\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\big]dt$$

бидејќи $dx = x'(t)dt,\ dy = y'(t)dt,\ dz = z'(t)dt$. Бидејќи $\Phi(x,y,z)$ е потенцијалот имаме

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = f_1, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = f_2, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = f_3$$

со замена во последниот интеграл добиваме

$$\int_a^b \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial\phi}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial\phi}{\partial z}z'(t)\right]dt =$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\phi\big(x(t), y(t), z(t)\big)dt = \phi\big(x(t), y(t), z(t)\big)|_a^b =$$

$$= \phi\big(x(b), y(b), z(b)\big) - \phi\big(x(a), y(a), z(a)\big) =$$

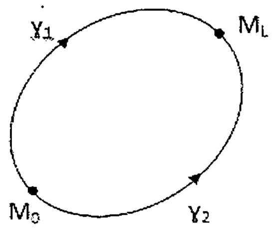
$$= \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_0, y_0, z_0)$$

Оваа особина покажува дека во ваков случај интегралот зависи само од почетната и од крајната точка на кривата γ, тоа значи ако две криви γ_1 и γ_2 имаат иста почетна и иста крајна точка тогаш

$$\int_{\gamma_1} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_{\gamma_2} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

Со други зборови интегралот не зависи од видот на кривата туку зависи само од нејзините крајни точки.

Нека γ е затворена крива, која што е по делови непрекинато диференцијабилна во G. Избираме две точки на кривата (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) како што е на цртежот.



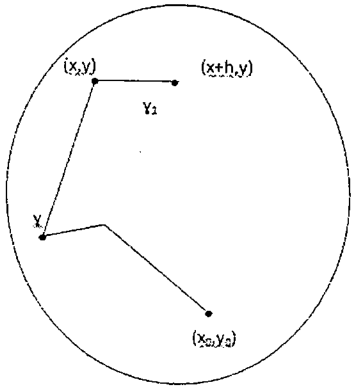
Дадената крива е составена од кривите γ_1 и γ_2 т.е. $\gamma = \gamma_1 + \underline{\gamma_2}$

$$\int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_{\gamma_1} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz - \int_{\gamma_2} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

Обратно, ако γ_1 и γ_2 имаат иста почетна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и иста крајна точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ тогаш $\gamma = \gamma_1 + \underline{\gamma_2}$ е затворена крива. Заклучуваме, дека интегралот $\int f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ не зависи од кривата, ако и само ако $\int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = 0$ по секоја по делови непрекинато диференцијабилна затворена крива γ. Во следната теорема ќе го докажеме спротивното на претходната теорема. За поедноставно теоремата ја докажуваме во R^2.

Теорема 2 Нека $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ е непрекината векторозначна функција дефинирана на отворената област D од R^2. Ако криволинискиот интеграл од $f_1 dx + f_2 dy$ не зависи од кривата тогаш (f_1, f_2) е градиентно поле, т.е. постои функција $\Phi(x, y)$ на Dтаква што

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = f_1 \text{ и } \frac{\partial \phi}{\partial y} = f_2$$



Доказ: Нека $M_0(x_0, y_0)$ е фиксна точка во D. Нека $M(x, y)$ е произволна точка од D која е поврзана со точката M со некоја искршена линија γ која лежи во D.

Ставаме

$$\phi(x, y) = \int_{\gamma} f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$$

Бидејќи интегралот не зависи од кривата што ги поврзува фиксната точка M_0 и подвижната точка M, може да ставиме

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f_1 dx + f_2 dy$$

$$\phi(x + h, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f_1 dx + f_2 dy + \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} f_1 dx + f_2 dy$$

$$\phi(x + h, y) - \phi(x, y) = \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} f_1(u, v)du + f_2(u, v)dv$$

отсечката $[(x, y); (x + h, y)]$ е определена како крива $u = x + t\ , v = y$ за$0 \leq t \leq h, du(t) = dt, dv(t) = 0$

Следователно имаме

$$\phi(x + h, y) - \phi(x, y) = \int_{0}^{h} f_1(x + t, y)dt + 0$$

$$\frac{\phi(x+h,y)-\phi(x,y)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^h f_1(x+t,y)dt=\frac{1}{h}hf_1(c,y)$$

(теорема за средна вредност кај интеграли) каде што $x \leq c \leq x+h$, а за f_1 претпоставуваме дека е непрекината. Ако пуштиме $h \to 0$ тогаш $c \to x$ и затоа имаме

$$\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h,y)-\phi(x,y)}{h}=\lim_{c\to x} f_1(c,y)=f_1(x,y)$$

т.е.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)=f_1(x,y)$$

истото се покажува ако $h<0$

На потполно ист начин само со промена на y наместо x покажуваме дека $\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)=f_2(x,y)$ што значи функцијата $\Phi(x,y)$ е потенцијал за градиентното поле (f_1,f_2)

Се разбира на потполно ист начин се работи во просторот R^3 и општо во просторот R^n.

Напомена: Порано спомнувавме дека изразот од видот $p(x,y)dx+q(x,y)dy$ каде што p и q се функции дефинирани на облст D во рамнината се вика диференцијална форма. Ако постои непрекинато диференцијабилна функција $u=\phi(x,y)$ на D така што

$$du=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy=pdx+qdy,$$

тогаш функцијата Φ се вика примитивна за дадената диференцијална форма. Ако постои и друга примитивна Φ_1 тогаш:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi_1}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\phi_1}{\partial y} \text{ или } \frac{\partial\phi_1}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x}=0,\frac{\partial\phi_1}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$$

од каде следи дека $\phi_1-\phi=\mathrm{c}$ каде c е константа.

Сега ако ја посматраме трансформацијата $\big(p(x,y),q(x,y)\big)$ од D во R^2 и ако (p,q) е градиентно поле тогаш постои потенцијал $\phi(x,y)$ на D таква што

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=p,\qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}=q$$

Според тоа ако диференцијалната форма е таква што (p,q) е градиентно поле, тогаш таквата диференцијална форма има примитивна и обратно, ако векторската трансформација е градиентно поле тогаш соодветната диференцијална форма има примитивна. Според тоа примитивна функција и потенцијал се едно исто и се определени еднозначно до некоја константа или со други зборови разликата на два потенцијала е константа на дадена област D во R^2 , R^3 или општо во R^n.

Задачи

1. Кои од следниве диференцијални форми имаат примитивна и ако има да се напише соодветно градиентно поле и потенцијалот.

а) $ydx + xdy$ (одговор има)

б) dx (одговор има)

в) $ydx - xdy$ (нема)

г) $e^x \cos y dx - e^x \sin y$ (има)

2. Да се провери која од следните векторозначни функции е градиентно (потенцијално) поле, и да се определи потенцијалот.

а) $\left(\frac{1+y^2}{x^3}, -\frac{1+x^2}{x^2}\right)$

Решение: Нека претпоставиме, дека постои функција $\phi(x,y)$ која е потенцијал, тогаш треба

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1+y^2}{x^3} = \frac{1}{x^3} + \frac{y^2}{x^3}$$

од тука

$$\phi(x,y) = \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{y^2}{x^3}\right) dx + h(y)$$

каде h е непозната функција

$$\phi(x,y) = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + h(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{y}{x^2} + h'(y) = -\frac{1}{x^2} - 1$$

или

$$h'(y) = -\frac{1}{x^2} + \frac{y}{x^2}$$

од тука гледаме дека не е градиентно поле.

б)$(\frac{xy+1}{y},\frac{2y-x}{y^2})$

Решение: Нека $\Phi(x,y)$ е потенцијал, тогаш

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{xy+1}{y}=x+\frac{1}{y}$$

$$\Phi(x,y)=\int\left(x+\frac{1}{y}\right)dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}+\ \varphi(y)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\varphi'(y)=\frac{2y-x}{y^2}$$

од тука следи $\varphi'(y)=\frac{2}{y}$ значи $\varphi(y)=2\log y$

со тоа покажавме дека потенцијал е функцијата

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{y}+2\log y$$

в) $(2x+2y,\ 2x-z^2,-2yz)$.

Овде имаме градиентно (потенцијално) поле во R^3 и затоа потенцијалот е од три променливи. Нека $u(x,y,z)$ е потенцијалот, тогаш

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=2x+2y \text{ и } \Phi(x,y,z)=\int(2x+2y)dx+\varphi(y,z)=x^2+2xy+\varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=2x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2x-z^2 \text{ од тука } \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-z^2 \text{ и } \varphi(y,z)=-yz^2+\ h(z)$$

$$\Phi(x,y,z)=x^2+2xy-yz^2+\ h(z),\frac{\partial\Phi}{\partial z}=-2yz+h'(z)=-2yz \text{ или } h'(z)=0,$$

каде $h(z)$ е константа.

Следователно $\Phi(x,y,z)=x^2+2xy-yz^2$ е бараниот потенцијал.

Можеме да кажеме и вака: диференцијалната форма

$$(2x+2y)dx+(2x-z^2)dy-2yzdz$$

има примитивна функција во R^3 и е еднаква на $\Phi(x,y,z)$.

г) $(1+xy,1-xz,3+z^2)$,

д) $(yz^2,xz^2-1,2xyz-2)$

3. Често пати градиентното поле (f_1, f_2, f_3) се пишува на следниот начин

$f(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{\imath} + f_2(x,y,z)\vec{\jmath} + f_3(x,y,z)\vec{k}$ каде што $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ се познатите единични вектори во R^3 по координатните оски. Ако полето е градиентно тогаш векторската функција е нула т.е.

$$\vec{U}(x,y,z) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$$

Изразот од векторската функција $\vec{U}(x,y,z)$ формално се пишува во вид на детерминанта

$$\vec{U}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

и се развива по првиот ред при што, на пример

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial y}$$

и.т.н.

Векторската функција $\vec{U}$ добиена од функциите f_1,f_2 и f_3, кои не мора да формираат градиентно поле се вика ротор и се обележува со $rot\vec{f}$ каде $\vec{f} = f_1\vec{\imath} + f_2\vec{\jmath} + f_3\vec{k}$.

Во некои книги се бележи и со $curl\vec{f}$.

4. Њутновото гравитационо поле за дадена маса M лоцирана во координатниот почеток на R^3 е определена со векторската функција

$$\vec{f} = -\frac{M}{r^3}\vec{r} \text{ каде } \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \text{ и } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

или накратко $r = \|\vec{r}\|$ (некаде ставаат само $|\vec{r}|$.

Полето кое дејствува на материјална точка со маса m и со сила $m\vec{f}$ е градиентно поле со потенцијал $\frac{M}{r}$. Да се докаже дека

а) $\vec{f}$ е градиентно поле со потенцијал $\frac{M}{r}$

б) Работата извршена за движење на точката со маса m од точката $(x_0, y_0, z_0,)$ до точката $(x_1, y_1, z_1,)$ е еднаква на $\frac{Mm}{r_0} - \frac{Mm}{r_1}$, каде што $\vec{r_0}$ и $\vec{r_1}$ се радиус вектори за точките (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) соодветно.

(упатство: под б) имај во предвид дека полето е градиентно).

5. Покажи дека

$$\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$$

е градиентно поле.

10 Теорема на Грин

Гриновата теорема заедно со трите Гринови идентитети е многу важен резултат во кој што се среќаваат поимите: област, должина на лак, градиент, извод во правец, надворешна нормала, криволиниски интеграл, двоен интеграл.

Што е Гриновата теорема? Таа претставува дво-димензионална верзија на познатата основна теорема во интегралното сметање. Да се потсетиме дека, основната теорема во интегралното сметање гласи:

$$F(b) - Fa) = \int_a^b F'(x)\, dx$$

Левата страна на формулата ја дава врската на функцијата F на границата од интервалот $[a,b]$ т.е. во крајните точки a и b, а додека десната страна се однесува на особините на диференцијалот $dF = F'dx$ на целиот интервал (област, домен) за $F(x)$.

Во Гриновата теорема

$$\int_{\partial\Omega} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dxdy$$

Исто така левата страна се однесува на особините на диференцијалната форма $Mdx + Ndy$ на границата $\partial\Omega$ (крива), додека десната страна е во врска со однесувањето $\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}$ во Ω

Историски, англискиот математичар George Green ја презентирал во еден негов резултат (книга) во 1828 година. Меѓутоа на други им била позната пред тоа на пример на Лагранж и Гаус.

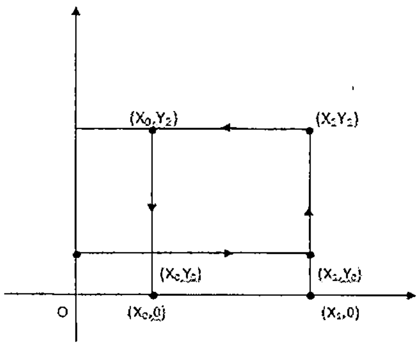
Пред да ја дефинираме теоремата воведуваме ознака Ω^+ во врска со дадената област Ω. Ω^+ е таква област која ја содржи областа Ω и нејзината граница $\partial\Omega$. И секогаш ќе претпоставуваме дека функциите кои ги разгледуваме се со добри особини на поширокота област Ω^+. Ние тука теоремата ќе ја докажеме во два случаи, а потоа ќе ја продискутираме за посложени области во коишто важи теоремата.

Теорема на Грин.(за правоаголна форма)

Нека $\Omega = \{(x,y): x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ е правоаголник и нека Ω^+ е како погоре. Ако функциите $M(x,y)$ и $N(x,y)$ се непрекинато-диференцијабилни на Ω^+ тогаш важи формулата

$$\int_{\partial\Omega} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dxdy \tag{1}$$

Доказ. Нека $\Omega = \{(x,y): x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ е правоаголник со долно теме во точката (x_0, y_0) и горно теме во точката (x_1, y_1) како што е на цртежот. $\partial\Omega$ се состои од ориентираните отсечки Γ_j за $j = 1,2,3,4$ и $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 = \partial\Omega$ ја определува позитивната ориентација на $\partial\Omega$ т.е. Ω е секогаш од нашата лева страна кога се движиме по $\partial\Omega$



Цртеж1

Γ_j се определени на следниот начин:

Γ_1 – е определена со $x = x_0 + t, y = y_0 \quad 0 \le t \le x_1 - x_0$

Γ_2 – е опрделена со $x = x_1, y = y_0 + t \quad 0 \le t \le y_1 - y_0$

Γ_3 –е определена со $x = x_1 - t, y = y_1 \quad 0 \le t \le x_1 - x_0$

Γ_4 –е определена со $x = x_0, y = y_0 - t \quad 0 \le t \le y_1 - y_0$

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]dxdy=\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial N}{\partial x}dxdy-\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial M}{\partial y}dxdy$$

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial N}{\partial x}dxdy=\int\limits_{y_0}^{y_1}dy\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial N}{\partial x}dx=\int\limits_{y_0}^{y_1}N(x,y)\,|_{x_0}^{x_1}=\int\limits_{y_0}^{y_1}[N(x_1,y)-N(x_0,y)]dy=$$

$$=\int\limits_{y_0}^{y_1}N(x_1,y)dy-\int\limits_{y_0}^{y_1}N(x_0,y)dy$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_1}N(x_1,y)dy=\int\limits_{\Gamma_2}N(x,y)dy$$

бидејќи $\Gamma_2\colon x=x_1, y=y_0+t, dy=dt$

$$\int\limits_{\Gamma_2}N(x,y)dy=\int\limits_{0}^{y_1-y_0}N(x_1,y_0+t)dt$$

Со смената $y_0+t=y, dt=dy$ се добива интегралот

$$\int\limits_{y_0}^{y_1}N(x_1,y)dy$$

На ист начин се покажува дека

$$-\int\limits_{y_0}^{y_1}N(x_0,y)dy=\int\limits_{\Gamma_4}N(x,y)dy$$

Бидејќи

$$\int\limits_{\Gamma_1}N(x,y)dy=\int\limits_{\Gamma_3}N(x,y)dy=0$$

зашто $dy=0$ следи дека

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial N}{\partial y}dxdy=\int\limits_{\partial\Omega}Ndy \qquad (2)$$

Аналогно се покажува дека

$$-\iint_{\Omega} \frac{\partial M}{\partial y} dxdy = \int_{\partial\Omega} Mdx \qquad (3)$$

Од (2) и (3) следи дека

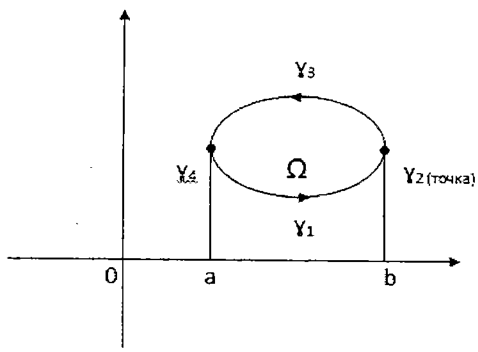
$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dxdy = \int_{\partial\Omega} Mdx + Ndy$$

Го потсетуваме читателот дека претпоставката за парцијалните изводи е потребна за да можеме да ја применуваме основната теорема во интегралното сметање.

Вака едноставно може да се докаже Гриновата формула и по триаголна област. Добро е читателот тоа да го направи.

За следниот доказ ќе разгледаме покомплицирани области во кои што важи Гриновата формула.

Нека Ω е област во R^2. За областа $\Omega = \{(x,y): y_1(x) < y < y_2(x),$ за $a < x < b\}$, велиме дека е x −проекциона ако функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се непрекинати на интервалот $[a,b]$, и $y_1(x) < y_2(x)$ за секое $a < x < b$. (види цртеж).



Слично се дефинира y −проекциона област Ω. Во тој случај

$$\Omega = \{(x,y): x_1(y) < x < x_2(y), \text{за } c < y < d\}$$

при што $x_1(y)$ и $x_2(y)$ се непрекинати за $c \leq y \leq d$ и $x_1(y) < x_2(y)$ за $c < y < d$.

Областа Ω во R^2 се вика проста ако е x −проекциона и y −проекциона.

Сега ќе дадеме доказ на Гриновата формула во проста област.

Теорема 2 Нека Ω е проста област во R^2 и нека $\partial\Omega$ е нејзината граница. Нека $M(x,y)$ и $N(x,y)$ се функции кои што се рамномерно непрекинати на Ω како и нивните парцијални изводи $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$, тогаш важи формулата

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} Mdx + Ndy$$

Доказ. Нека Ω е како на сл.1. Нејзината граница се состои од кривите:

$\gamma_1: x = t, y = y_1(x),\ a \leq x \leq b;\ \ \gamma_2$ е точка;

γ_3 е спротивна на кривата $x = t, y = y_2(x), a \leq x \leq b$ и γ_4 е точка.

Сега

$$-\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial M}{\partial y} dxdy = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy = -\int\limits_a^b M(x,y)|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= -\int\limits_a^b [M(x, y_2(x)) - M(x, y_1(x))]\, dx =$$

$$= -\int\limits_a^b M\big(x, y_2(x)\big)dx + \int_a^b M\big(x, y_1(x)\big)dx = \int\limits_{\gamma_3} Mdx + \int\limits_{\gamma_1} Mdx$$

Бидејќи по γ_2 и γ_4, x нема промена $dx = 0$. Следователно можеме да напишеме

$$-\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial M}{\partial y} dy = \int\limits_{\partial\Omega} M\, dx.$$

Потполно исто имаме за интегралот

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial x} dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx = \int\limits_c^d N(x,y)|_{x_1(y)}^{x_2(y)}\, dy = \int\limits_c^d N(x_2(y), y)dy -$$

$$-\int\limits_c^d N(x_1(y), y)dy = \int\limits_{\gamma_2} Ndy + \int\limits_{\gamma_1} Ndy = \int\limits_{\partial\Omega} Ndy$$

Доказот е комплетен.

Забелешка. Во вториот доказ ќе бара послаб услов за функциите M и N и нејзините изводи. Но рамномерната непрекинатост е доволна за да може да се примени теоремата на интервалот $[y_1(x), y_2(x)]$. Најопшти области на кои што важи Гриновата формула се κ-сврзливите Жорданови области. Специјално важи за секоја област Ω чија што граница е Жорданова крива. Доказот на тој случај е доста комплициран и не го даваме тука.

Поинаква форма на Гриновата формула се добива ако на местото од M стои $-N$, а M е на местото од N. Во тој случај добиваме

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial M}{\partial x}\right)dxdy=\int_{\partial\Omega} Mdy-Ndx$$

Една област Ω во R^2 е просто сврзлива ако за секоја Жорданова крива во Ω, нејзината внатрешност лежи исто така во Ω. Таквите области се викаат уште области без дупки.

Област Ω во R^2 е ѕвездеста ако во неа постои точката (x_0, y_0) таква што за секоја точка $(x, y) \in \Omega$ отсечката што ги поврзува (x_0, y_0) со (x, y) лежи во областа Ω. Точката (x_0, y_0) се вика центар на ѕвездестата област. На пример секоја конвексна област како што се кругот, триаголникот, правоаголникот се исто така ѕвездести области при што секоја нивна точка е центар на областа.

Сега ќе дадеме една примена на Гриновата теорема.

Теорема 3 Нека D е ѕвездеста област во R^2 и нека $M(x,y)$ и $N(x,y)$ се непрекинато диференцијабилни функции на D. Тогаш криволинискиот интеграл

$$\int_{\gamma} Mdx+Ndy$$

не зависи од кривата, ако и само ако,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

Доказ. Нека криволинискиот интеграл

$$\int_{\gamma} Mdx+Ndy$$

не зависи од кривата порано покажавме дека функцијата $\phi(x,y)$ дефинирана на D со интегралот

$$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Mdx+Ndy$$

е добро дефинирана со особината

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M \text{ и } \frac{\partial\phi}{\partial y}=N$$

Тоа го покажавме претходно. Од тука следи

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}\text{ и }\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Бидејќи мешовитите изводи на функцијата ϕ се непрекинати тие се еднакви и затоа имаме

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

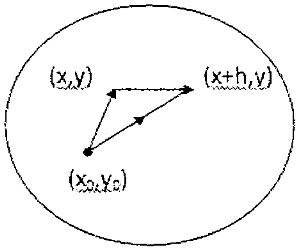
Обратно, нека претпоставиме дека е исполнет условот (2) и нека (x_0, y_0) е центар на ѕвездестата област D. За секоја точка $(x, y) \in D$ со γ ја обележуваме отсечката која ги поврзува точките (x_0, y_0) и (x, y).

Дефинираме функција

$$\phi(x,y)=\int_\gamma Mdx+Ndy \qquad (3)$$

Нека $h > 0$ ($h < 0$) е такво што сегментот меѓу точките (x, y) и $(x + h, y)$ лежи во D.

Такво h секогаш постои бидејќи областа D е отворено множество. Со γ' ја означуваме отсечката што ги поврзува точките (x_0, y_0) и $(x + h, y)$.



Тогаш

$$\phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Mdx+Ndy$$

и

$$\phi(x+h,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+h,y)} Mdx+Ndy$$

Бидејќи кривата $\gamma - \gamma_1 + \gamma'$ е граница на триаголникот Δ со ориентација по стрелките на часовникот, со примена на Гриновата теорема за триаголникот Δ имаме

$$\int_{\gamma-\gamma_1+\gamma'} Mdx + Ndy = -\iint_{\Delta} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

од каде добиваме:

$$\int_{\gamma} + \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma'} = 0 \text{ или } \phi(x,y) + \int_{\gamma_1} Mdx + Ndy - \phi(x+h,y) = 0$$

т.е.

$$\phi(x+h,y) - \phi(x,y) = \int_{\gamma_1} M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

γ_1 е определена со отсечката: $(x+t,y), 0 \le t \le h$ и $d(x+t) = dt$ и $dy = 0$ значи

$$\phi(x+h,y) - \phi(x,y) = \int_0^h M(x+t,y)dt + 0 = hM(x+s,y) \text{ за } 0 \le s \le h$$

Според теоремата за средна вредност кај интегралите.

Понатаму имаме:

$$\frac{\phi(x+h,y) - \phi(x,y)}{h} = M(x+s,y)$$

каде $h \to 0$ и $s \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h,y) - \phi(x,y)}{h} = \lim_{s\to 0} M(x+s,y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M(x,y)$$

Потполно исто добиваме

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x,y)$$

Порано видовме дека во овој случај $\int Mdx + Ndy$ е независен од кривата, а зависи од крајните точки .

Со тоа покажавме, дека диференцијалната форма $Mdx + Ndy$ има примитивна (или што е се исто векторската функција (M,N) да биде градиент во ѕвездестата област D) ако и само ако

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Најопшти области при кои што важи ова тврдење се просто сврзливите области. Но доказот за тој случај овде не го даваме.

Во следната теорема ќе дадеме една интересна варијанта на Гриновата формула.

Теорема 4 Нека D е проста област во R^2 со по делови непрекинато диференцијабилна граница γ. Нека n е надворешната нормала на γ и $\cos(x, n)$ и $\cos(y, n)$ се косинусите од аглите што n ги зафаќа со x —оската и со y —оската респективно. Нека M и N се функции дефинирани на D кои се рамномерно непрекинати во D заедно со нивните први парцијални изводи. Тогаш

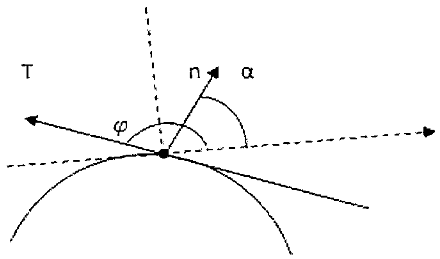
$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right] dxdy = \int_0^{l(\gamma)} [M\cos(x, n) + N\cos(y, n)]ds$$

$l(\gamma)$ е должината на γ, а s е природниот параметар.

Интегралот $\int_0^{l(\gamma)}$ често се пишува во форма на $\int_{\partial D}$.

Доказ. Нека $\big(x(s), y(s)\big)$ се променливи точки од γ, $0 \le s \le l(\gamma)$.

Со φ го означуваме аголот што го зафаќа тангентниот вектор $\mathrm{T}(s) = \big(x'(s), y'(s)\big)$ со x —оската, види цртеж.



$\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Имаме

$$\cos(x, n) = \cos\alpha = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi = y'(s),$$

$$\cos(y, n) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\varphi = -x'(s),$$

од каде следи дека

$$\int_{\gamma} Mdy - Ndx = \int_{0}^{l(\gamma)} [My'(s) - Nx'(s)]\, ds = \int_{0}^{l(\gamma)} [M\cos(x,n) + N\cos(y,n)]ds$$

Според Гриновата формула добиваме

$$\iint_{D} \left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right] dxdy = \int_{0}^{l(\gamma)} [M\cos(x,n) + N\cos(y,n)]ds$$

Напоменуваме дека областите на кои што важи Гриновата формула се викаат уште Гринови области. Исто така криволинискиот интеграл $\int_{\gamma} Mdx + Ndy$ се означува и со $\oint Mdx + Ndy$, кога γ е затворена.

Задачи

1. Ако Ω е Гринова област. Докажи дека

a) $\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}[-ydx + xdy] = m(\Omega), m(\Omega)$ е мера или плоштина на Ω.

Решение: За $M = -y, N = x$ со примена на Гриновата теорема имаме

$$\iint_{\Omega} (1+1)dxdy = \int_{\partial\Omega} -ydx + xdy$$

$$2\iint_{\Omega} dxdy = 2m(\Omega) = \int_{\partial\Omega} -ydx + xdy$$

или

$$m(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} -ydx + xdy$$

b) $\int_{\partial\Omega} xdy = m(\Omega)$

2. Докажи ја следната формула

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} \Delta u dxdy, \qquad \text{каде } \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Доказ. Од

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot y'(s) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot x'(s)$$

добиваме

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \text{ од каде следи } M = -\frac{\partial u}{\partial y}, N = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Со примена на Гриновата формула имаме

$$\int\limits_{\partial\Omega} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] dxdy = \iint\limits_{\Omega} \Delta u dxdy$$

3. Да се докаже дека област ограничена со петтоаголник е Гринова област.
4. Нека $0 < r < R$. Докажи, дека областа дефинирана со

$r < x^2 + y^2 < R$ е Гринова област.

5. Со помош на Гриновата формула да се пресметаат следните криволиниски интеграли

$a)$ $\int\limits_{\partial D} 2xydx - 3xydy; D$ е квадрат определен со$x = 3, x = 5, y = 1, y = 3$

б) $\oint_\gamma \ xy^2dx + 2x^2ydy$ каде γ е ориентирана во правец на стрелките на часовникот по елипсата $4x^2 + 9y^2 = 36$

в) $\oint\limits_{\partial D} e^x sinydx + e^x \cos y\, dy\,; D$ е Гринова област

г) $\int\limits_{\gamma} (x^3 + y)dx - y^3dy;\ \gamma$ е кружницата $x^2 + y^2 = 1$

со ориентација во насока на стрелките на часовникот

д) Нека $M = -\frac{y}{x^2 + y^2}, N = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Тогаш $\int\limits_{c} Mdx + Ndy$

не зависи од кривата во било која просто сврзлива област која не ја содржи точката $(0,0)$. Меѓутоа

$$\int_{x^2+y^2=1} Mdx + Ndy = 2\pi$$

Зошто овој резултат не е контрадикторен со Гриновата формула по однос на кругот $x^2 + y^2 \leq 1$?

е) Векторската функција $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ е градиентно поле во областа G: $x^2 + y^2 > 0$ (оваа област не е просто сврзлива).

13 Гриновите идентитети

Гриновата теорема може да се примени за поедноставно решавање на некои криволиниски интеграли. Но има и многу други примени. Една од нив се трите Гринови идентитети кој што имаат широка примена. Првите два идентитета се директна последица на Гриновата формула. Третиот идентитет е подлабок резултат и треба малку повеќе работа за да се докаже.

Во понатамошната дискусија земаме Ω да е област во која што важи Гриновата теорема и функциите $p(x, y)$ и $q(x, y)$ се непрекинато диференцијабилни заклучно до парцијалните изводи од втор ред. Или со други зборови сите парцијални изводи од прв и втор ред се непрекинати функции на некоја поширока област Ω^+ која го содржи множеството $\Omega \cup \partial\Omega = \bar{\Omega}$. Според тоа нема да имаме проблем со постоењето на изводите на границата $\partial\Omega$. Ќе имаме работа, како и досега со

$$\nabla p(x,y) = gradp(x,y) = (\frac{\partial p}{\partial x}(x,y), \frac{\partial p}{\partial y}(x,y))$$

исто и за $q(x, y)$ се разбира. Ќе користиме исто така и

$$\Delta p(x,y) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(x,y)$$

тоа е Лапласијанот од функцијата p исто и од функцијата q. Од корист е да се употребува ознаката

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

која се вика градиент диференцијален оператор или делта оператор. Исто така и

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

тоа е Лапласовиот диференцијален оператор или Лапласијан. Формалната ознака

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta$$

се среќава исто така.

Да се потсетиме дека операторите имаат определено значење ако до нив стои функцијата или со други зборови ако се применат на некоја функција $u(x,y)$:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Пред да преминеме на доказот на Гриновиот идентитет ќе го разгледаме следниот важен интеграл, кој што го сретнавме и порано во една задача

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial n} ds$$

каде што претпоставуваме дека границата $\partial\Omega$ е параметризирана (определена) со должината s, а n го означува надворешниот единичен вектор по точките од $\partial\Omega$. Според тоа можеме да напишеме дека $\partial\Omega$ која што е Жорданова крива или повеќе такви криви зададени со $(x(s), y(s))$, а нормалниот вектор $n(s) = (y'(s), -x'(s))$.

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{\partial q}{\partial x} \cdot y'(s) - \frac{\partial q}{\partial y} x'(s)$$

според тоа имаме

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial n} ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial x} y'(s) ds - \frac{\partial q}{\partial y} y'(s) ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial x} dy - \frac{\partial q}{\partial y} dx.$$

Гринов идентитет I

Нека Ω е $k-$ сврзлива Жорданова област и нека p и q се функции определени на областа $\bar{\Omega}$ со горенаведените особини, тогаш

$$\iint_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q dxdy = \int_{\partial\Omega} p \frac{\partial q}{\partial n} ds - \iint_{\Omega} p\Delta q dxdy$$

Доказ.

$$\int_{\partial\Omega} p \frac{\partial q}{\partial n} ds = \int_{\partial\Omega} \left[p \frac{\partial q}{\partial x} dy - p \frac{\partial q}{\partial y} dx \right] =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[\left(-p \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx + p \frac{\partial q}{\partial x} dy \right] = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial q}{\partial y} \right) \right] dxdy$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} + p \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right] dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} \right] dxdy + \iint_{\Omega} p \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q dxdy + \iint_{\Omega} p\Delta q dxdy$$

$\nabla p \cdot \nabla q$е скаларен производ. Можеме да запишеме и на следниот начин

$$\iint_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q dxdy = \int_{\partial\Omega} p \frac{\partial q}{\partial n} ds - \iint p\Delta dxdy.$$

Гринов идентитет II

Нека Ω е к —Жорданова област и нека p и q се како погоре тогаш

$$\int_{\partial\Omega} \left(p \frac{\partial q}{\partial n} - q \frac{\partial p}{\partial n} \right) ds = \iint_{\Omega} (p\Delta q - q\Delta p) dxdy$$

Доказ. Првиот Гринов идентитет е

$$\iint \nabla p \nabla q dxdy = \int_{\partial\Omega} p\frac{\partial q}{\partial n} ds - \iint_{\Omega} p\Delta q dxdy$$

Ако си ги заменат улогите (местата) p и q имаме

$$\iint_{\Omega} \nabla \mathrm{p} \nabla q dxdy = \int_{\partial\Omega} q\frac{\partial p}{\partial n} ds - \iint_{\Omega} q\Delta p dxdy$$

Ако од второто равенство го одземеме првото добиваме

$$0 = \iint_{\partial\Omega} \left(p\frac{\partial q}{\partial n} - q\frac{\partial p}{\partial n}\right) ds - \iint_{\Omega} (\mathrm{p}\Delta q - q\Delta p) dxdy$$

тоа е вториот Гринов идентитет.

Ако во првиот Гринов идентитет наместо p ставиме 1 тогаш $\nabla p = 0$, следователно добиваме

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} \Delta q dxdy$$

Последната релација е позната како внатрешно-надворешна теорема.

Образложение за терминот (името) на оваа теорема е:

Изводот $\frac{\partial q}{\partial n}$ го дава степенот (мерката) на промената на функцијата q на границата $\partial\Omega$ во една фиксна точка. Со интегрирање на таа мерка вдолж целата граница $\partial\Omega$ добиваме еден вид на „чиста промена" на q низ $\partial\Omega$. Тоа е „надворешниот дел од теоремата. Двојниот интеграл е по внатрешниот дел $\overline{\Omega}$ и тоа е внатрешен дел од теоремата.

Пред да поминеме на третиот Гринов идентитет ќе дадеме една припрема за доказот.

Нека (x_0, y_0) е фиксна точка од R^2 и нека

$r(x,y) = \|(x,y) - (x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, каде $(x,y) \in R^2$

е подвижна точка. Тогаш функцијата lnr за точките (x,y) од кружницата $C((x_0,y_0),r)$ е константа. Имено $lnr(x,y) = lnr$.

Функцијата lnr е секаде дефинирана освен во фиксната точка (x_0,y_0) и лесно е да се провери дека $\Delta lnr = 0$ во областа $R^2 - \{(x_0,y_0)\}$. Таа проверка ќе ја направи читателот.

Сега преминуваме на третиот Гринов идентитет.

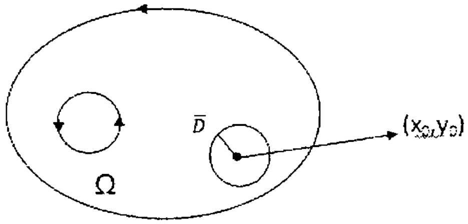
Гринов идентитет III

Нека Ω е k –сврзлива Жорданова област и $(x_0, y_0) \in \Omega$. Нека q е два пати непрекинато диференцијабилна функција на областа $\overline{\Omega} \subset \Omega^+$ и нека точката (x, y) се менува во Ω и $r = \|(x, y) - (x_0, y_0\|$.

Тогаш $q(x_0, y_0)$ е дадено со

$$q(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} lnr\Delta q(x, y)dxdy - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(lnr\frac{\partial q}{\partial n} - q\frac{\partial}{\partial n}lnr\right) ds$$

Доказ. Во доказот на формулата ние ќе го користиме вториот Гринов идентитет за функциите $p = lnr$ и q, при што тие функции ќе ги посматраме не на областа Ω туку на областа $\Omega - \overline{D}(x_0, y_0), \varepsilon)$ и ε е доволно мало за да кругот лежи во Ω.



Сега го применуваме вториот Гринов идентитет за $p = lnr$ и q на $\Omega - \overline{D} = \Omega'$ и добиваме

$$\int_{\partial\Omega} \left[lnr\frac{\partial q}{\partial n} - q\frac{\partial lnr}{\partial n}\right] ds = \iint_{\Omega`} (lnr\Delta q - q\Delta lnr)dxdy$$

имајќи во вид дека $\Delta lnr = 0$ следи

$$\int_{\partial\Omega} \left[lnr\frac{\partial q}{\partial n} - q\frac{\partial lnr}{\partial n}\right] ds - \int_{C((x_0,y_0),\varepsilon)} \left[lnr\frac{\partial q}{\partial n} - q\frac{\partial lnr}{\partial n}\right] ds =$$

$$= \iint_{\Omega`} (lnr\Delta q - 0)dxdy$$

Сега го разгледуваме интегралот

$$\int_C \left[lnr \frac{\partial q}{\partial n} - q \frac{\partial lnr}{\partial n} \right] d\,s$$

бидејќи кружницата $C(x_0, y_0), \varepsilon)$ е ориентирана во насока на стрелките на часовникот

$$\frac{\partial\, lnr}{\partial n} = -\frac{\partial\, lnr}{\partial r} = -\frac{1}{r}$$

по кружницата C: $r = \varepsilon$ имаме

$$\frac{\partial\, lnr}{\partial\, n} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

во секоја точка од кружницата. Така добиваме

$$\int_C \left[ln\varepsilon \frac{\partial\, q}{\partial\, n} + \frac{1}{\varepsilon} q(x,y) \right] ds = \int_C ln\varepsilon \frac{\partial q}{\partial n} d\,s + \frac{1}{\varepsilon} \int_C q(x,y) ds$$

По кружницата

$$C: x = x_0 + \varepsilon cos\frac{s}{\varepsilon}, y = y_0 + \varepsilon sin\frac{s}{\varepsilon} \text{ за } 0 \le s \le 2\pi\varepsilon$$

$$\int_C ln\varepsilon \frac{\partial q}{\partial n} (x_0 + \varepsilon cos\frac{s}{\varepsilon}\,, y_0 + \varepsilon sin\frac{s}{\varepsilon}) ds \;=\; \int_0^{2\pi\varepsilon} ln\varepsilon \frac{\partial\, q}{\partial\, n} \left(x_0 + \varepsilon cos\frac{s}{\varepsilon}, y_0 + \varepsilon sin\frac{s}{\varepsilon} \right) ds$$

Според теоремата за средна вредност кај обичните интеграли добиваме, дека последниот интеграл е еднаков на

$$ln\varepsilon \frac{\partial q}{\partial n} \left(x_0 + \varepsilon cos\frac{s_1}{\varepsilon}, y_0 + \varepsilon sin\frac{s_1}{\varepsilon} \right) 2\pi\varepsilon.$$

Ако $\varepsilon \to 0$ тогаш

$$2\pi\varepsilon \cdot ln\varepsilon \to 0, \text{а} \frac{\partial q}{\partial n} \left(x_0 + \varepsilon cos\frac{s_1}{\varepsilon}, y_0 + \varepsilon sin\frac{s_1}{\varepsilon} \right) \to \frac{\partial q}{\partial n} (x_0, y_0)$$

односно интегралот тежи кон 0 кога $\varepsilon \to 0 (0 \le s_1 \le 2\pi\varepsilon)$

Останува уште да го разгледаме интегралот

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_C q \left(x_0 + \varepsilon cos\frac{s}{\varepsilon}, y_0 + \varepsilon sin\frac{s}{\varepsilon} \right) ds$$

и овде со примена на теоремата за средна вредност кај интегралите добиваме

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{2\pi\varepsilon} q\left(x_0+\varepsilon cos\frac{s}{\varepsilon}, y_0+\varepsilon sin\frac{s}{\varepsilon}\right)ds =$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\cdot 2\pi\varepsilon\cdot q\left(x_0+\varepsilon cos\frac{s_2}{\varepsilon}, y_0+\varepsilon sin\frac{s_2}{\varepsilon}\right) \text{ за } 0\le s_2\le 2\pi\varepsilon$$

Ако $\varepsilon \to 0$ добиваме дека овој интеграл тежи кон $2\pi q(x_0, y_0)$.

$$\iint_{\Omega} lnr\Delta q dxdy = \iint_{\Omega} lnr\Delta q dxdy - \iint_{\bar{D}} lnr\Delta q dxdy$$

$$\iint_{\bar{D}} lnr\Delta q dxdy = ln\bar{r}\cdot\Delta q(\bar{x},\bar{y})\cdot\varepsilon^2\pi \text{ за } 0\le\bar{r}\le\varepsilon,$$

а $\bar{x}\to x_0,\ \bar{y}\to y_0$ кога $\varepsilon\to 0$

Следователно

$$\iint_{\bar{D}} lnr\Delta q dxdy \to 0 \quad \text{кога } \bar{r}\to 0$$

според теоремата за средна вредност на двоен интеграл.

Така конечно имаме

$$\int_{\partial\Omega}(lnr\frac{\partial q}{\partial n} - q\frac{\partial lnr}{\partial n})ds + 2\pi q(x_0, y_0) = \iint_{\Omega} lnr\cdot\Delta q dxdy$$

или

$$q(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} lnr\Delta q dxdy - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\left(lnr\frac{\partial\, q}{\partial\, n} - q\frac{\partial\, lnr}{\partial\, n}\right)ds$$

Третиот Гринов идентитет има пред се теоретска важност.

Задачи

1. Нека $p(x,y)$ и $q(x,y)$ се хармониски $\Delta p = \Delta q = 0$ на Ω^+.

Докажи дека

а) $\int\limits_{\partial\Omega} p\frac{\partial q}{\partial n}ds = \int\limits_{\partial\Omega} q\frac{\partial p}{\partial n}d\,s$

(Примени го Гриновиот идентитет (II)

б) $\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial\, q}{\partial\, n}d\,s = 0$

(во (а) ако $p = 1, \frac{\partial p}{\partial n} = 0$)

2. Докажи дека функцијата $u(x,y) = ln\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ е хармониска на областа $R^2 - \{(x_0, y_0)\}$.

Докажи дека

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u^2}{\partial \theta^2}$$

(Лапласијан во поларни координати).

Провери за $u(r,\theta) = lnr$

2. Ако е $q(x,y)$ хармониска функција тогаш имаме

$$q(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\Omega} (q(x,y)\frac{\partial lnr}{\partial n} - lnr\frac{\partial q}{\partial n}(x,y))ds$$

3. Нека Ω е кругот $D(0,R)$ и нека U е хармониска во Ω^+. Тогаш од 2. имаме

$$U(0{,}0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C(O,R)} U\frac{1}{R}ds - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C(O,R)} lnR\cdot\frac{\partial U}{\partial n}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} U(Rcos\frac{s}{R}, Rsin\frac{s}{R})ds, \qquad \text{со смена } \frac{s}{R} = t\,, s = Rt$$

добиваме

$$U(0{,}0) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} U(Rcost, Rsint)Rdt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(Rcost, Rsint)dt$$

Последната формула се вика теорема за средна вредност на хармониска функција.

Глава5

Површински Интеграли

1 Површини и плоштина

Нека D е ограничена област во R^2 и нека границата ∂D е по делови непрекинато диференцијабилна крива. Нека на D се определени функциите :

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \text{ каде } (u,v) \in D \qquad\qquad (1) \\ z &= z(u,v) \end{aligned}$$

Во тој случај пресликувањето (трансформацијата)

$$(u,v) \to (x(u,v)\,, y(u,v), z(u,v))$$

од D во R^3 се вика површина. Променливите u и v се викаат параметри. Да претпоставиме, дека функциите $x(u,v)$, $y(u,v)$ и $z(u,v)$ се непрекинати на D, во тој случај уште се вели дека функциите во (1) се една параметризација за површината. Ако функциите $x(u,v)$, $y(u,v)$ и $z(u,v)$ се рамномерно непрекинати на D тогаш велиме дека површината S е непрекината. Ако пак функциите $x(u,v), y(u,v)$ и $z(u,v)$ имаат парцијални изводи кои што се по делови непрекинати, тогаш велиме дека S е по делови непрекинато диференцијабилна. Конечно, ако функциите на параметризација и нивните први парцијални изводи се рамномерно непрекинати во внатрешните точки од D, тогаш велиме дека S е непрекинато диференцијабилна.

Терминот по делови овде се мисли пред се на подмножествата од D со Жорданова мера нула, како на пример по делови непрекинато диференцијабилните криви во D . Исто така под внатрешни точки (u,v) од D се подразбираат точки од D кои што не припаѓаат на границата ∂D .

Најчесто областа D е некој правоаголник $a \leq u \leq b,\ c \leq v \leq d$ или круг. Рамномерната непрекинатост на функциите обезбедува постоење на лимес кога точки се стремат кон точка од границата од внатре, се разбира.

На пример, ако се претпостави дека $x(u,v), y(u,v)$ и $z(u,v)$ се непрекинати на $D : a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$ тогаш е јасно дека се тие и рамномерно непрекинати внатре во правоаголникот .

Затоа читателот прво нека претпоставува дека D е некој правоаголник или круг, а потоа за покомплицирани области што во праксата е поредок случај.

Во следното ќе подискутираме за еден многу важен вид на површини.

Имено, ако D е област во R^2 и ако $z = f(x,y)$ е неперкината функција на D, тогаш пресликувањето $(x,y) \to (x,y,f(x,y))$ каде $(x,y) \in D$ претставува z –проекциона површина. Слично се дефинира y –проекциона, таа е определена со $(x, y(x,z), z)$и x –проекциона површина $(x(y,z), y, z)$

Проекционите непрекинати површини имаат Жорданова мера нула во R^3 .

Многу често во понатамошното излагање ќе ја користиме рамнината во R^3.

Како што ни е познато од аналитичката геометрија општа равенка на рамнина во R^3 е:

$$ax + by + cz + d = 0$$

каде што барем еден од коефициентите a, b или c е различен од нула, d е слободен член на рамнината и ако $d = 0$ тогаш рамнината минува низ координатниот почеток.

Нека претпоставиме дека $c \neq 0$ тогаш

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}$$

тоа значи дека во тој случај рамнината како површина е z –проекциона. Ако $b \neq 0$ тогаш е y –проекциона и ако $a \neq 0$ тогаш е x –проекциона. Јасно, ако $a \neq 0, b \neq 0$ и $c \neq 0$ тогаш таа рамнина е x –проекциона, y –проекциона и z –проекциона површина.

Векторот (a, b, c)е нормален вектор, зашто ако точките $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ лежат на рамнината т.е.

$$ax_0 + bx_0 + cz_0 + d = 0 \text{ и } ax_1 + bx_1 + cz_1 + d = 0$$

со одземање на втората равенка од првата добиваме

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0,$$

а тоа значи дека векторот (a, b, c) е нормален на секоја права која минува низ било кои две точки од рамнината.

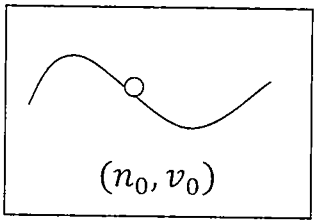
Нека површината определена со (1) е по делови непрекинато диференцијабилна. Нека (u_0, v_0) е внатрешна точка на D. Ставаме

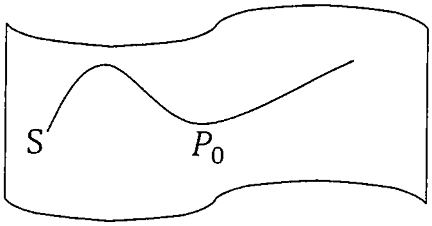
$$x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0), z_0 = z(u_0, v_0) \text{ и } P_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

Нека со $u = u(t),\ v = v(t)$ е дефинирана крива која лежи во D и минува низ точката (u_0, v_0) каде што $u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0)$ и t_0 е точка од интервалот на кој е дефинирана кривата. Бидејќи точките $(u(t), v(t))$ се во D кога t се менува на некој интервал $[a, b]$ затоа функциите

$$\begin{aligned} x(t) &= x(u(t), v(t)) \\ y(t) &= y(u(t), v(t)) \\ z(t) &= z(u(t), v(t)) \end{aligned} \qquad (2)$$

се дефинирани на интервалот $[a, b]$ и следователно определуваат крива која што лежи на површината S и минува низ точката P_0; цртеж1 и цретеж2





Да претпоставиме дека $x(u, v), y(u, v)$ и $z(u, v)$ се непрекинато диференцијабилни во точката (u_0, v_0). Тангентниот вектор на кривата (2) во точката P_0 е

$$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) =$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot u'(t_0) + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot v'(t_0), \frac{\partial y}{\partial u} u'(t_0) + \frac{\partial y}{\partial v} v'(t_0), \frac{\partial z}{\partial u} u'(t_0) + \frac{\partial z}{\partial v} v'(t_0)\right) =$$

$$= \left(x_u u'(t_0) + x_v v'(t_0),\ y_u u'(t_0) + y_v v'(t_0),\ z_u u'(t_0) + z_v v'(t_0)\right) \qquad (3)$$

каде

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}(P_0), \qquad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}(P_0)$$

истото важи и за y_u, y_v, z_u, z_v.

Векторот (3) е еден тангентен вектор на површината S во точката P_0. Сега сакаме да определиме нормален вектор $n = (n_1, n_2, n_3)$ на векторот (3). Според тоа треба

$$n_1(x_u u' + x_v v') + n_2(y_u u' + y_v v') + n_3(z_u u' + z_v v') = 0$$

од тука имаме

$$u'(n_1 x_u + n_2 y_u + n_3 z_u) + v'(n_1 x_v + n_2 y_v + n_3 z_v) = 0$$

формираме систем

$$n_1 x_u + n_2 y_u + n_3 z_u = 0$$

$$n_1 x_v + n_2 y_v + n_3 z_v = 0$$

Да претпоставиме, дека детерминантата е различна од нула т.е.

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v \neq 0$$

Системот

$$n_1 x_u + n_2 y_u = -n_3 z_u$$

$$n_1 x_v + n_2 y_v = -n_3 z_v$$

го решаваме по n_1 и n_2 и добиваме

$$n_1 = \frac{\begin{vmatrix} -n_3 z_u & y_u \\ -n_3 z_v & y_v \end{vmatrix}}{x_u y_v - y_u x_v} = \frac{-n_3 \begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix}}{x_u y_v - y_u x_v} = \frac{-n_3 (z_u y_v - y_u z_v)}{x_u y_v - y_u x_v}$$

$$n_2 = \frac{-n_3 (z_v x_u - z_u x_v)}{x_u y_v - y_u x_v}$$

Ставаме $n_3 = x_u y_v - y_u x_v$ тогаш $n_1 = y_u z_v - z_u y_v$, $n_2 = z_u x_v - z_v x_u$, следователно векторот n има координати

$$n_1 = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = y_u z_v - z_u y_v, n_2 = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = z_u x_v - z_v x_u \text{ и } n_3 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u y_v - x_v y_u.$$

Тој е нормален на тангентниот вектор (3).

Бидејќи координатите на векторот $n = (n_1, n_2, n_3)$ не зависат од кривата низ P_o, тоа значи дека тој е нормален на секој тангентен вектор на S во P_0 и затоа n се вика нормален вектор на површината S во точката $P_o \in S$.

Се разбира секој вектор $\lambda \cdot n$ (λ е скалар) е исто така нормален на S во P_0. Ако $n \neq 0$, тогаш двата вектора $\pm \frac{n}{\|n\|}$ се единични нормални вектори на S во P_0, каде

$$\|n\| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

Ако $n = (n_1, n_2, n_3) \neq 0$ и ако $P_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, а $P(x, y, z)$ е произволна точка од тангентната рамнина во P_0, тогаш векторите $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и

n се мeѓусебе нормални и нивниот скаларен производ е нула т.е.

$$n_1(x-x_o)+n_2(y-y_o)+n_3(z-z_o)=0$$

или

$$n_1x+n_2y+n_3z-(n_1x_0+n_2y_0+n_3z_0)=0.$$

Оваа е равенка на тангента на површината S во P_0.

Ако површината S е z −проекциона тогаш таа е определена со $(x,y,z(x,y))$ и $P_0=(x_0,y_0,z(x_0,y_0))$

$$n_1=\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y}\\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ z_x & z_y\end{vmatrix}=-z_x$$

$$n_2=\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}z_x & z_y\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-z_y$$

$$n_3=\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y}\\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

Значи

$$n=\left(-z_x,-z_y,1\right),\text{а } \|n\|=\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}$$

следи дека единичниот вектор е даден со

$$\left(-\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)$$

Равенката на тангентата во точката $P_0(x_0,y_0,z_0)$ е

$$z-z_0=f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_o)(y-y_o)$$

каде $z_x=f_x$ и $z_y=f_y$ во P_0

Од претходно изнесеното можеме да ја определиме плоштината (ареата) на површината S.

Нека S е $z-$ проекциона површина при што $z=f(x,y)$ и $a\le x\le b, c\le y\le d$ во случајов областа D е правоаголник.

Дадениот правоаголник го делиме со делбени точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots . < x_{k-1} < x_k = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_3 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$$

Низ делбените точки од a до b на x −оската повлекуваме прави паралелни со y оската, низ делбените точки од c до d на y − оската повлекуваме прави паралелни со x − оската. На тој начин правоаголникот $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ го делиме на правоаголници

$$R_{ij} = \{(x,y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i , y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

Нека (ξ_i, η_j) е точка од R_{ij} и нека со $n = n(\xi_i, \eta_j)$ го означиме нормалниот вектор на S во точката $P_{ij}\left(\xi_i, \eta_j, f(\xi_i, \eta_j)\right)$ кој формира кос агол со z −оската.

Со $\widehat{R_{ij}}$ го обележуваме множеството на сите точки од тангентната рамнина на S во P_{ij} чии што ортогонални проекции на xy −рамнината се во R_{ij}. Множеството $\widehat{R_{ij}}$ е всушност четириаголникот на тангентната рамнина кој може да се добие со повлекување на нормали од точките во R_{ij} паралелни со z − оската и нивните пресечни точки со тангентата се точките од тој четириаголник R_{ij}. Со $f(R_{ij})$ ја обележуваме сликата на правоаголникот R_{ij} со пресликувањето $(x,y) \to (x, y, f(x,y))$ на површината S, $(x,y) \in R_{ij}$.

Нека γ_{ij} е остриот агол меѓу z −оската и нормалата на тангентната рамнина во P_{ij}. Тој агол е еднаков со аголот меѓу тангентната рамнина и xy −рамнината. На пример, ако Λ е пресечната линија меѓу тангентната рамнина и xy −рамнината, тогаш од координатниот почеток повлекуваме нормала N на правата Λ во xy −рамнината. Нормалната рамнина на координатната xy −рамнина која минува низ N ја сече тангентната рамнина по правата L. Аголот меѓу правите N и L е еднаков со γ_{ij}. Ако правата Λ е паралелна со x или y оската во xy −рамнината, тогаш страната на R_{ij} која е паралелна со Λ ќе биде еднаква со страната на правоаголникот $\widehat{R_{ij}}$ на тангентната рамнина.

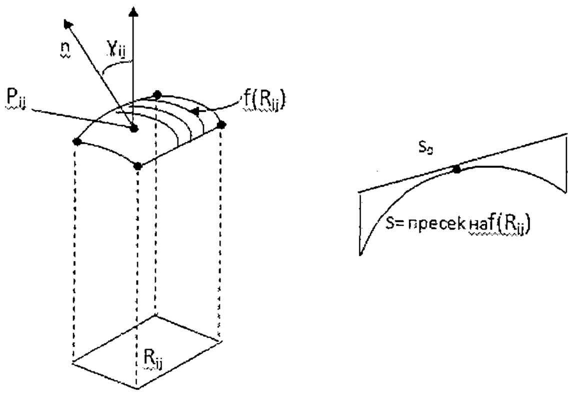
Ако претпоставиме, на пример, дека Λ е паралелна со x −оската, тогаш $[x_{i-1}, x_i]$ е еднаква со страната $\widehat{R_{ij}}$ која што е паралелна со Λ, а додека другата страна на правоаголникот $\widehat{R_{ij}}$ со отсечката $[y_{j-1}, y_j]$ зафаќа агол γ_{ij} и од тука со Питагоровата теорема имаме, дека таа страна од $\widehat{R_{ij}}$ е еднаква на

$$\frac{\Delta \mathrm{y_j}}{\cos \gamma_{ij}} \text{ каде } \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

следователно, плоштината на $\widehat{R_{ij}}$ е

$$\frac{\Delta x_i \cdot \Delta y_j}{\cos \gamma_{ij}} = \sec \gamma_{ij}\, \Delta x_i \Delta y_j$$

а $\Delta x_i \Delta y_j$ е плоштина на R_{ij}.



Цртеж3

Пресекот е направен со рамнина која минува низ точката P_{ij} и е нормална на тангентната рамнина во таа точка. Јасно е дека пресекот s_0 е тангента која минува низ точката P_{ij}, а пресекот s е некоја крива на површината S.

Нека земеме дека пресекот $s(t) = (x(t), y(t), z(t))$ каде функциите $x(t), y(t)$ и $z(t)$ се определени и непрекинато диференцијабилни на некој интервал. За некое t_1 од интервалот $s(t_1) = P_{ij}$ и s_0 е јасно тангента за $s(t)$ во точката P_{ij}. Тангентниот вектор е $T = (x'(t_{1,}), y'(t_1), z'(t_1))$, а неговата должина е

$$\sqrt{x'^2(t_1) + y'^2(t_1) + z'^2(t_1)}.$$

Должината на лакот l од кривата од t_1 до t_2 е определен со

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$

Бидејќи функциите $x'(t), y'(t)$ и $z'(t)$ се непрекинати според теоремата за средна вредност (интегрална) постои точка τ т.ш. $t_1 \leq \tau \leq t_2$ и

$$l = \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau) + z'^2(\tau)}(t_2 - t_1)$$

Од непрекинатоста на $x'(t), y'(t)$ и $z'(t)$ имаме дека

$$\sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau) + z'^2(\tau)} = \sqrt{x'^2(t_1) + y'^2(t_1) + z'^2(t_1)} + \alpha,$$

каде што $\alpha \to 0$ кога $t_2 \to t_1$. Сега имаме

$$l = \left(\sqrt{x'^2(t_1) + y'^2(t_1) + z'^2(t_1)} + \alpha\right)(t_2 - t_1) =$$

$$= \sqrt{x'^2(t_1) + y'^2(t_1) + z'^2(t_1)}(t_2 - t_1) + \alpha(t_2 - t_1)$$

Бидејќи кога $t_2 \to t_1$ ($t_2 - t_1) \to 0$ и $\alpha \to 0$ следи дека α ($t_2 - t_1)$ е занемарлив во однос на првиот собирок. Од тука следи дека должината l можеме да ја замениме со соодветен дел од должината на тангентниот вектор како што е на пресекот.

Според тоа логично е наместо плоштината на $f(R_{ij})$ да ја користиме плоштината на $\widehat{R_{ij}}$. Затоа понатаму ќе работиме со сумата $L = \sum_{ij} A(\hat{R}_{ij})$ во замена за $\sum_{ij} A(f(R_{ij}))$ каде A означува плоштина (ареа). Бидејќи $A(\hat{R}_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j \, sec\gamma_{ij}$ и $cos\, \gamma_{ij} = (0,0,1)n$ (скаларен производ), а

$$n = \left(-\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, -\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\right)$$

добиваме

$$cos\, \gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \text{ и } sec\, \gamma_{ij} = \frac{1}{cos\, \gamma_{ij}} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

Со замена во сумата L добиваме

$$L = \sum_{ij} \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \zeta_j) + f_y^2(\xi_i, \zeta_j)}\, \Delta x_i \Delta y_j$$

L е Риманова сума за функцијата

$$\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}$$

за дадената поделба. Тоа значи ако дијаметрите на правоаголниците R_{ij} тежат кон нула тогаш сумата L тежи кон интегралот

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy\,.$$

Сега можеме да ја дефинираме плоштината $A(S)$:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy \qquad (4)$$

Да забележиме дека, ако пресечната права Λ не е паралелна ниту со x ниту со y оската, тогаш со секој правоаголник R_{ij} постапуваме на следниот начин: повлекуваме прави паралелни со правата Λ и прави нормални на Λ ги имаме во обзир оние правоаголници $R_{ij,k}$, кои се добиваат на тој начин, а имаат непразен пресек со R_{ij}, на нив одговараат правоаголниците $R_{ij,k}$ на тангентната рамнина. Во тој случај збирот од плоштините на $R_{ij,k}$ за $k = 1, \dots, n$ ја апроксимира плоштината (ареата) на R_{ij}, а збирот од плоштините на $\hat{R}_{ij,k}$ ја апроксимира плоштината на $\hat{R}_{ij}$, бидејќи $A(\hat{R}_{ij,k}) = A(R_{ij,k}) \cdot sec\, \gamma_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j sec\, \gamma_{ij}$, работејќи како погоре доаѓаме до напишаната формула за $A(S)$. Заклучокот е, дека плоштината на проекциона површина S по однос на x, y или z оската е дадена со

$$A(S) = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy,$$

$$\mathrm{A}(S) = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_z^2}\, dxdz$$

или

$$A(S) = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}\, dydz$$

соодветно.

Формулата што ја дадовме важи за проекциони површини. Ако D е некоја произволна ограничена област, тогаш D ја апроксимираме со унија на меѓусебе дисјунктни правоаголници D_k. Бидејќи е логично да заклучиме, дека плоштината на $f(\bigcup_k D_k)$ би требало да биде еднаква на сумата од плоштините на $f(D_k)$, и бидејќи

$$\iint\limits_{\bigcup_k D_k} = \sum_k \iint\limits_{D_k}$$

сето тоа не води да ја дефинираме плоштината $A(S)$ со интегралот како

$$A(S) = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$$

D е било каква област.

Нека, сега го разгледаме случајот на површина S' определена на областа Ω како во (1), а графот на S' да се поклопува со графот на површината S каде е определена на областа D и е проекциона.

Забележуваме, дека под граф на површината се подразбира множество составено од точките на површината.

Природно е плоштината на S' да биде иста со плоштината на S чија што плоштина е дадена со интегралот. Останува само да се изврши смена на променливите во интегралот за $A(S)$.

Нека Ω^+ е отворено множество во кое се содржи затворачот $\overline{\Omega}$, а D^+ е отворено множество во кое се содржи $\overline{\mathrm{D}}$.

Да се потсетиме $\overline{\Omega}$ е унија на Ω и нејзината граница $\partial\Omega$.

Нека $(u, v) \in \Omega^+$ и нека со функциите $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ определен е еден дифуоморфизам од Ω^+ на D^+ со трансформацијата $(u, v) \to (x(u, v), y(u, v))$ каде $(u, v) \in \Omega^+$ и $(x, y) \in \mathrm{D}^+$.

Ако ставиме

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

и

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

тогаш интегралот за функцијата $z = f(x, y)$ е

$$J_1 = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$$

и е еднаков со

$$J_2 = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

Пред да преминеме на доказот ќе објасниме кое пресликување (трансформација) е дифуоморфизам. За трансформацијата од Ω^+ на D^+ велиме дека е дифуоморфизам ако пресликувањето $(u, v) \to (x(u, v), y(u, v))$ е обратно еднозначно, ако Јакобијанот е различен од нула во секоја точка (u, v) т.е.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

и ако парцијалните изводи се непрекинати функции.

Сега го даваме доказот за еднаквоста на последните интеграли.

Доказ. Во интегралот J_1 правиме смена на независно променливите со $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ и бидејќи се исполнети условите затоа имаме

$$J_1 = \iint_\Omega \sqrt{1 + f_x^2(x(u, v), y(u, v)) + f_y^2(x(u, v), y(u, v))}\, |J| du\, dv$$

од $z = f(x(u,v), y(u,v))$ имаме

$$z_u = f_x x_u + f_y y_u$$

$$z_v = f_x x_v + f_y y_v$$

Детерминантата на овој систем по однос на f_x и f_y е

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = J \neq 0$$

следователно имаме

$$f_x = \frac{\begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix}}{J}, \qquad f_y = \frac{\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}}{J}$$

или

$$f_x = \frac{z_u y_v - y_u z_v}{J}, f_x = \frac{x_u z_v - x_v z_u}{J}$$

Со замена во J_1 добиваме

$$J_1 = \iint_\Omega \sqrt{1 + \frac{(z_u y_v - y_u z_v)^2}{J^2} + \frac{(x_u z_v - x_v z_u)^2}{J^2}} \cdot |J| du\, dv =$$

$$= \iint_\Omega \sqrt{1 + (x_u y_v - x_v y_u)^2 + (z_u y_v - y_u z_v)^2 + (x_u z_v - x_v z_u)^2}\, du\, dv$$

По квадрирањето и средувањето на сумата во коренот се добива дека последниот интеграл е еднаков на

$$\iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\ du\, dv,$$

што значи $J_1 = J_2$

односно

$$A(S) = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \qquad (5)$$

Задачи

1. Следните површини да се напишат во форма $f(x,y,z) = 0$:

а) $x = au\cos v, y = bu\sin v, z = u$ (одг. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$)

б) $x = a \sin u \cos h\, v, y = b \cos u \cos h\, v, z = c \sin h\, v$ (одг. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$)

в) $x = r \cos a, y = r \sin a, z = \frac{r^2}{2} \sin 2a$(одг. $xy = z$)

2. Да се определат тангентната и нормалната рамнина на следните површини:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ во точката (x_0, y_0, z_0) (одг. $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$)

б) $x = au \cos v, y = bu \sin v, z = u^2 \cos 2v$ во (u_0, v_0)

в) $x^4 + y^4 - z^4 = 1$ во $(1,1,1)$

3. Нека $u = u(t), v = v(t)$ каде $(a \leq t \leq b)$ е по делови непрекинато диференцијабилна крива. Таа дефинира крива γ на површината S дадена со $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Докажи дека должината $l(\gamma)$ е

$$l(\gamma) = \int_b^a \sqrt{E\, u'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt$$

каде E, F, G се како во текстот.

4. Сферата S со центар во координатниот почеток и радиус 1 е определена со $x = \sin\theta \cos\varphi, y = \sin\theta \sin\varphi, z = \cos\theta$ каде $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$. Покажи дека кривата γ на S, дадена со $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ за $a \leq t \leq b$ има должина

$$l(\gamma) = \int_b^a \sqrt{\sin^2\theta \cdot \varphi'^2 + \theta'^2}\, dt$$

5. Да се пресмета плоштината (ареата) A за следните површини

а) $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1$ (одг. $\frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)$

б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1$ (одг.$\sqrt{2}\,\pi$)

в) $z = xy, x^2 + y^2 = 1$

Решение под в): $z_x = y, z_y = x, D\colon\ x^2 + y^2 = 1$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$

интегралот го решаваме во поларни координати $x = \rho\ cos\varphi\ , y = \rho sin\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ , 0 \leq \rho \leq 1$.

$$A(S) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \rho^2}\, \rho d\rho d\varphi = \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2}\, \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2}\, \rho d\rho$$

ако ставиме $1 + \rho^2 = u^2$ тогаш $2\rho d\rho = 2udu,\ 1 \leq u \leq \sqrt{2}$ и следи

$$\int_1^{\sqrt{2}} u \cdot udu = \frac{1}{3}(2^{3/2} - 1).$$

6. Да се најде плоштината на елипсоидот:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

7. Да се најде плоштината на торусот:
$x = (a + bcos\,\varphi)cos\theta, \qquad y = (a + bcos\varphi)sin\theta, \qquad z = b\ sin\varphi$
каде $0 \leq \varphi \leq \pi\ ,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. (одг. $4\,\pi^2 ab$)

8. Да се најде плоштината на делот од конусот кој лежи на цилиндарот $x^2 + y^2 = ax$ (одг. $4\sqrt{2}\pi a^2$)

9. Да се најде плоштината на површината дадена со $x = r\cos a\,, y = r\sin a,$ $z = a$ каде $0 \leq r \leq 1\ ,\ 0 \leq a \leq 2\pi$. (одг. $\pi\ (\sqrt{2} + log(1 + \sqrt{2}))$)

10. Да се најде плоштината на делот од цилиндарот $x^2 + z^2 = a^2$ која што лежи во цилиндарот $x^2 + y^2 = ax$.

11. Да се пресмета плоштината на делот од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ во параболоидот

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\,(z + c)$$

ако $0 < b \leq a \leq c$. (одг. $4\pi c\sqrt{ab}$).

12. Да се најде плоштината на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ во цилиндарот $x^2 + y^2 = ay$.

2 Површински интеграли

Нека S е површина дефинирана со рамномерно непрекинато диференцијабилни функции

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v) \text{ каде } (u,v) \in \Omega \qquad (1)$$

Функцијата $f(x,y,z)$ е дефинирана и непрекината на множество чии што елементи се точките од S (рангот на S) и граничните точки за S. Сакаме да дефинираме површински интеграл за f по S слично на криволиниски интеграл по крива γ

Нека претпоставиме, дека Ω е правоаголник, а S е проста т.е. ако $(u,v) \neq (u',v')$ тогаш точките

$\big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big)$ и $\big(x(u',v'),\ y(u',v'),\ z(u',v')\big)$ се различни.

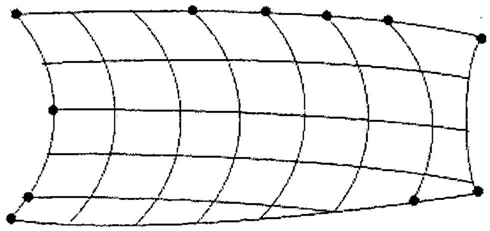
Нека П е поделба на правоаголникот Ω:

$$a = u_0 < u_1 < u_2 <\ldots u_{k-1} < u_k = b$$

(2)

$$c = v_0 < v_1 < v_2 <\ldots v_{m-1} < v_m = d$$

Делбените правоаголници $R_{ij} = \{(u,v): u_{i-1} \leq u \leq u_i, v_{j-1} \leq v \leq v_j\}$ со (1) прават соодветна поделба на S цртеж1



Рестрикцијата на пресликувањето (1) на секој правоаголник R_{ij} определува површина S_{ij} дел од S. Со $A(S_{ij})$ ја обележуваме плоштината на S_{ij}. Тогаш

$$\mathrm{A}(S_{ij}) = \iint_{R_{ij}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \qquad (3)$$

каде

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \qquad (4)$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

Со примена на теоремата за средна вредност за двојните интеграли добиваме

$$A(S_{ij}) = \sqrt{E(\bar{P}_{ij})G(\bar{P}_{ij}) - F^2(\bar{P}_{ij})}\Delta u_i \Delta v_j \qquad (5)$$

каде $\bar{P}_{ij} = (\xi_i, y_j) \in R_{ij}$.

Нека $P_{ij} = \left(x(\zeta_i, \eta_j),\ y(\zeta_i, \eta_j),\ z(\zeta_i, \eta_j)\right)$ тогаш со помош на (5) сумата

$$T = \sum_{ij} f(P_{ij})A(S_{ij}) \qquad (6)$$

можеме да ја напишеме на следниот начин

$$T' = \sum_{i,j} f\left(x(\bar{P}_{ij}), y(\bar{P}_{ij}), z(\bar{P}_{ij})\right) \cdot \sqrt{E(\bar{P}_{ij})G(\bar{P}_{ij}) - F^2(\bar{P}_{ij})}\,\Delta u_i \Delta v_j$$

Последната сума е Риманова сума за функцијата

$$g(u,v)\ \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}$$

на правоаголникот Ω каде

$$g(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big).$$

Според тоа, ако дијагоналите на R_{ij} тежат кон нула тогаш последната сума T тежи кон интегралот

$$\iint_\Omega f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\ \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

Овој интеграл се вика површински интеграл за функцијата f по површината S и ќе го пишуваме на следниот начин

$$\iint_\Omega f(x,y,z)\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \qquad (7)$$

каде што x, y и z се функции од u и v дадени со равенките (1) за површината. Уште пократко површинскиот интеграл (7) се пишува на следниот начин

$$\iint_S F\, d\,S \qquad (8)$$

каде

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\ du\, dv \qquad (9)$$

dS се вика елементарен дел од плоштината (ареата) на S. Ако S е z —проекциона, тогаш

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\ dx\, dy \qquad (10)$$

Забелешка. Замената на сумата T со T' не се губи ништо од општоста, зашто со одземање и додавање на $f\left(\overline{P_{ij}}\right)$ во (6), заради непрекинатоста лесно е да се провери дека $|T - T'|$ може да се направи произволно мала, а тоа повлекува дека T тежи кон интегралот (7).

Да забележиме, дека како и при определувањето на плоштината на површината S и во случајот на површински интеграл при даден дифуоморфизам од одредена област Ω на друга област D се доаѓа до дефиниција на површински интеграл и по површини дефинирани на поопшти области во R^2. Исто така и кај површинските интеграли на природен начин се дефинираат несвојствени површински интеграли.

Пример 1 . Да се реши интегралот

$$\iint_S x^2 z\, dS\ , \text{каде } S\colon x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1$$

Решение: S е обвивката на цилиндарот со основа кругот $x^2 + y^2 \le 1$ и висина 1. Во однос на zx —рамнината $S = S_1 + S_2$, каде што S_1 е одредена со

$$y = \sqrt{1 - x^2}, D\colon -1 \le x \le 1, 0 \le z \le 1\ a\ S_2\colon y = -\sqrt{1 - x^2}$$

на истиот правоаголник.

Јасно

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$$

$$\iint_{S_1} x^2 z\, dS = \iint_D x^2 z \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\, dx\, dz$$

$$y_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ , \qquad y_z = 0$$

од тука

$$\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}+\ 0^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Со замена во интегралот добиваме

$$\iint_D x^2 z\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dz = \int_0^1 dz\int_{-1}^1 x^2 z\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 zdz\cdot\int_{-1}^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

со смена $\mathrm{x} = \sin t$

$$2\int_0^{\frac{\bar{u}}{2}}\frac{\sin^2 t\cos t\ \ dt}{\cos t} = 2\int_0^{\frac{\bar{u}}{2}}\sin^2 t\,dt = 2\int_0^{\frac{\bar{u}}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\bar{u}}{2}\int_0^1 zdz = \frac{1}{2}$$

значи

$$\iint_{S_1} = \frac{\bar{u}}{4}$$

на истиот начин се добива, дека

$$\iint_{S_2} = \frac{\bar{u}}{4}$$

Конечно

$$\iint_S = \frac{\bar{u}}{4}+\frac{\bar{u}}{4} = \frac{\bar{u}}{2}$$

Забелешка: $S = S_1 + S_2$ значи дека S се состои од двете површини S_1 и S_2 слично како кај кривите.

Исто така забележуваме, дека интегралот по однос на x е несвојствен

Задачи

1. Да се пресметаат следниве површински интеграли

$$(a) \iint_S x^2 dS, \qquad S: x^2+y^2=1, \quad 0 \le z \le 1 \ (odg. \bar{u})$$

$$(b) \iint_S (y^2+z^2) dS, \qquad S: x^2+y^2+z^2=1, \quad z \ge 0$$

Помош: Овде $f(x,y,z)$ на S е $y^2+1-x^2-y^2=1-x^2$,

$D: x^2+y^2 \le 1$ (одг. $\frac{4\bar{u}}{3}$)

$$(в) \iint_S (x^2+y^2) dS, \qquad S: x^2+y^2+z^2=4, \quad z \ge 1$$

$$(g) \iint_S \frac{dS}{\sqrt{z-y+1}}, \qquad S: 2z=x^2+2y, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1$$

(одг.$\sqrt{2}$)

2. Њутнов потенцијал во $(0,0,-a)$ за маса во константна густина σ по полусферата $S: x^2+y^2+z^2=a^2, z \ge 0$, е

$$U = \iint_S \frac{\sigma}{[x^2+y^2+(z+a)^2]^{1/2}} dS.$$

Да се пресмета U . (одг.$2p\sigma a(2-\sqrt{2})$)

3 Теорема на Гаус Остроградски

Знаеме дека z –проекционата површина е определена со

$$z = f(x,y) \text{ за } (x,y) \in D$$

D е затворена област. На ист начин се дефинира x – проекциона и y –проекциона површина. Проекционата површина велиме дека е непрекинато диференцијабилна ако f е непрекината на D и ако f_x и f_y се рамномерно непрекинати во внатрешноста на D.

Областа G во R^3 е нормална, ако нејзината граница S може да се претстави во форма $C_1 \cup C_2 \cup \ldots . \cup C_k$, каде C_j за $j=1,\ldots.,k$ е график на проекционата површина S_j и $C_i \cap C_j \ (i \neq j)$ не содржи внатрешни точки од S_i и S_j. Ако сите проекциони површини се непрекинато диференцијабилни, тогаш областа G се вика нормална област со по делови непрекинато диференцијабилна граница. Нека G е таква нормална област и нека $P_o=(x_o,y_o,z_o)$ е една внатрешна точка на некоја површина S_j. Тогаш двата единични нормални вектори на S во P_0 се добро дефинирани. Векторот кој има насока кон внатрешноста на G се вика внатрешна нормала, а другиот вектор со насока спрема надворешноста на G е надворешен вектор.

Нека G е област во R^3 определена со

$$G = \{(x,y,z): \Phi_1(x,y) < z < \Phi_2(x,y), (x,y) \in D\} \qquad (1)$$

каде што D е област во R^2, $\Phi_1(x,y) < \Phi_2(x,y)$ за секое $(x,y) \in D$.

Со $\overline{D}$ како што е вообичаено го обележуваме затворачот на D. Ако површините

$$S_1: z = f(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{D}$$

$$S_2: z = f_2(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{D}$$

се по делови непрекинато диференцијабилни, тогаш G се вика z —проекциона област. Аналогно се дефинира x —проекциона и y —проекциона област. Областа G се вика проста, ако е x — проекциона, y — проекциона и z —проекциона.

Следнава теорема е една од клучните теореми во односот на површинскиот и тројниот интеграл.

Теорема 1 Нека P, Q и R се непрекинати функции на затворачот од простата област G во R^3. Да претпоставиме дека изводите P_x, Q_y и R_z постојат и се рамномерно непрекинати во G.

Ако со S ја означиме границата за G тогаш важи формулата

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_S [P\cos(x,n) + Q\cos(y,n) + R\cos(z,n)]\, dS$$

каде n е надворешната нормала на S, а $\cos(x,n)$, $\cos(y,n)$ и $\cos(z,n)$ се косинусите од аглите меѓу n и x —оската, y —оската и z —оската, респективно.

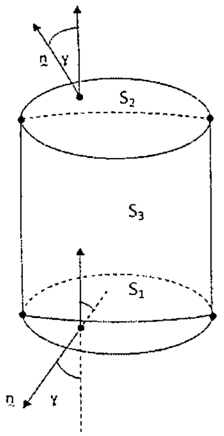
Доказ. Прво ќе покажеме дека

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_S R\cos(z,n)\, dS \qquad (3)$$

G е дадена со (1). Од пресметувањето на троен интеграл знаеме дека

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\, dz = \iint_D dxdy\, R(x,y,z)\Big|_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} =$$

$$= \iint_D R(x,y,\Phi_2(x,y))dxdy - \iint_D R(x,y,\Phi_1(x,y))dxdy \quad (4)$$



Сега го разгледуваме површинскиот интеграл .

$$\iint_S R\cos(z,n)\,dS$$

S е површина која претставува граница за G и таа е составена од површините: S_1, S_2 и S_3 . Површината S_3 е паралелна со $z-$ оската и затоа надворешниот нормален вектор n во нејзините точки е нормален на z —оската, следователно $\cos(z,n) = 0$ од каде следи дека

$$\iint_S R\cos(z,n)\,dS = \iint_{S_2} R\cos(z,n)\,dS + \iint_{S_1} R\cos(z,n)\,dS.$$

Од дефиницијата на плоштина на површини знаеме дека $dS = \sec\gamma\, dxdy$, каде што γ е остриот агол на нормалниот вектор со z —оската, заради тоа во овој случај по однос на S_2 векторот n формира кос агол со z —оската и затоа

$$\sec\gamma = \sec(\mathrm{z},\mathrm{n}) = \frac{1}{\cos(\mathrm{z},\mathrm{n})}$$

со замена добиваме

$$\iint_{S_2} R\cos(z,n)\cdot\frac{1}{\cos(\mathrm{z},\mathrm{n})}\mathrm{dxdy} = \iint_D R(x,y,\Phi_2(x,y))dxdy$$

За интегралот

$$\iint\limits_{S_1} R\cos(z,n)\,dS$$

надворешниот нормален вектор n со z –оската прави тап агол при што

$\measuredangle(z,n) = \pi - \gamma$ каде што γ е остриот агол што го прави n со z –оската, па од дефиницијата за плоштина на површината S_1 имаме

$$dS = \frac{1}{\cos\gamma}\mathrm{dxdy}$$

со замена во вториот интеграл добиваме

$$\iint\limits_{S_1} R\cos(\pi-\gamma)\,dS = \iint\limits_{D} R\cos(\pi-\gamma)\sec\gamma\,dxdy = -\iint\limits_{D} R\big(x,y,\Phi_1(x,y)\big)dxdy$$

Сега можеме да напишеме

$$\iint\limits_{S} R\cos(z,n)\,dS = \iint\limits_{S_3} R\cos(z,n)\,dS + \iint\limits_{S_2} R\cos(z,n)\,dS + \iint\limits_{S_1} R\cos(z,n)\,dS$$

$$= 0 + \iint\limits_{D} R\big(x,y,\Phi_2(x,y)\big)dxdy - \iint\limits_{D} R\big(x,y,\Phi_1(x,y)\big)dxdy.$$

Споредувајќи со (4) заклучуваме дека

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{S} R\cos(z,n)\,dS\,.$$

На ист начин се докажуваат и равенствата

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \iint\limits_{S} P\cos(x,n)\,dS$$

и конечно добиваме

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \iint\limits_{S} Q\cos(y,n)\,dS\,.$$

Со тоа е докажана теоремата.

Забелешка: Теоремата на Гаус Остроградски важи и во секоја нормална област со по делови непрекинато диференцијабилна граница.

Меѓутоа, доказот е многу долг, а од друга страна најчести области поготово во практиката се простите области, и затоа тој доказ не го даваме овде.

Нека сега од функциите P, Q и R го разгледаме векторското поле (P, Q, R) кое што можеме да го запишеме со помош на единичните координатни вектори: $\vec{\imath} = (1,0,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$ и $\vec{k} = (0,0,1)$ по x, y и z оската респективно на следниов начин:

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Ако n е нормалниот вектор на S, тогаш, $divF = P_x + Q_y + R_z$ каде што $div\vec{F}$ се вика дивергенција на векторското поле. Скаларниот производ е

$$F \cdot n = Pcos(x, n) + Qcos(y, n) + Rcos(z, n)$$

бидејќи $n = (\cos(x, n), \cos(y, n), \cos(z, n))$

Го потсетуваме читателот дека од векторската алгебра имаме: ако $n = (n_1, n_2, n_3)$

тогаш правејки скаларен производ посебно со $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ векторите ги добиваме формулите:

$$n_1 = \cos(x, n), n_2 = \cos(y, n) \text{ и } n_3 = \cos(z, n).$$

Сега теоремата можеме да ја напишеме во форма:

$$\iiint_G divF\, dxdydz = \iint_S F \cdot n\, dS \qquad (5)$$

Заради формата (5) оваа теорема се вика уште и теорема за дивергенцијата.

4 Површински интеграл по координати

Пред да ја дадеме дефиницијата за површински интеграл по координати, накратко ќе се задржиме на поимот ориентација на дадена површина S во R^3. Овој поим е сличен со поимот за ориентација на крива во врска со криволинискиот интеграл, разликата е во тоа што определувањето на ориентацијата на површини, споредено со ориентацијата на кривите е многу потешка, посуптилна работа во чиј што детали ние тука нема да се впуштаме.

Ориентацијата на површина се определува со помош на нејзината нормала. Имено површината е ориентирана ако е определена насоката на нормалата во секоја точка од површината под услов тоа насочување на нормалата да биде непрекинато. Грубо кажано за точки од мала околина на дадена точка и промените на насоката на соодветните нормали да бидат мали или со други зборови аглите што ги зафаќаат со координатните оски, се помалку да се разликуваат во колку точките се поблиски една со друга.

Ако P_0 е фиксна точка на површината S која е ориентирана на опишаниот начин и ако точка P се движи по S и дојде во првобитната точка P_0 исто и ориентацијата да му се поклопи со првобитната ориентација во P_0 тогаш таквата површина се вика двострана. Другите површини се викаат еднострани. Ние ќе работиме само со двострани површини какви што се: сферата, елипсоидот, секој паралелопипед, итн.

Изборот на насоката на нормалата во било која точка од двострана површина ја ориентира површината определувајќи една од нејзините страни. Следователно ориентирана двострана површина е површина на која што е избрана една страна.

Ако површината е затворена тогаш нејзината надворешна страна е ориентирана кон надворешноста т.е. нормалата е насочена спрема надворешноста од површината. Надворешната страна на површината обично ја викаат позитивно ориентирана или позитивна страна.

Нека површината S е ориентирана и нека функцијата $f(x, y, z)$ е определена во точките од S, тогаш:

Ако P е подвижна точка од S, следните интеграли:

$$\iint_S f(P)\, dxdy = \iint_S f(P) \cos(z, n) dS$$

$$\iint_S f(P)\, dxdz = \iint_S f(P) \cos(y, n) dS \qquad (6)$$

$$\iint_S f(P)\, dydz = \iint_S f(P) \cos(x, n) dS$$

се викаат површински интеграли по координати или ги викаат уште површински интеграли од втор вид. Решавањето на овие интеграли е многу слично со решавањето на површинските интеграли по површина (од прв вид) кои ги изучивме пред овие интеграли, само што треба да се води сметка за ориентацијата, и знакот пред интегралот.

Се разбира површинскиот интеграл при спротивната ориентација на површината го менува знакот, аналогно како кај криволинискиот интеграл.

Спротивно ориентираната површина на ориентираната површина S ќе ја означуваме со $\overline{S}$ и во тој случај имаме на пример

$$\iint_{S} f dxdy = -\iint_{\overline{S}} f dxdy$$

Пример1. Да се пресмета интегралот

$$I = \iint_{S} xyzdxdy$$

по надворешната страна на делот од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ кој се наоѓа во првиот и осмиот октант.

Решение. Овој дел S од сферата се состои од две површини S_2 во која $z \geq 0$ и S_1 во која $z < 0$, од тука имаме дека

$$z_1 = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ во } S_2 \text{ и } z_2 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ во } S_1$$

Според тоа

$$I = \iint_{S} xyzdxdy = \iint_{S_2} xyzdxdy + \iint_{S_1} xyzdxdy$$

$$I_1 = \iint_{S_2} xyzdxdy = \iint_{S_2} xyzcos(z,n)dS$$

каде

$$dS = \frac{1}{\cos(z,n)} dxdy$$

$$I_1 = \iint_{D} xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

$$I_2 = \iint_{S_1} xyzdxdy = \iint_{S_1} xyzcos(z,n) \frac{-1}{\cos(z,n)} dxdy$$

Бидејќи

$$dS = \frac{1}{-\cos(z,n)} dxdy$$

$$I_2 = -\iint_{D} xy(-\sqrt{1 - x^2 - y^2})dxdy = \iint_{D} xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

Според тоа

$$I = 2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

D е делот од единичниот круг во првиот квадрант од xy —рамнината $(x \geq 0, y \geq 0)$.

Со смена во поларни координати добиваме

$$I = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho cos\varphi \rho sin\varphi\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho = 2\int_0^{\pi/2} \frac{sin2\varphi}{2} d\varphi \int_0^1 \rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho =$$

$$= \frac{cos2\varphi}{2}|_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho$$

Во првиот интеграл ставаме $1-\rho^2 = t^2$, $-\rho d\rho = tdt$, бидејќи при смена се зема апсолутна вредност на tdt имаме

$$-\frac{cos\pi - cos0}{2} \cdot \int_0^1 (1-t^2)t^2 = 2/15$$

Во математичката анализа и во примената се среќава збир од површински интеграли:

$$\iint_S Xdydz + \iint_S Ydxdz + \iint_S Zdxdy$$

Оваа сума се запишува и на следниот начин

$$\iint_S Xdydz + Ydxdz + Zdxdy$$

Во продолжение даваме уште 2-3 интересни примери во врска со површинскиот интеграл:

Пример 2 Нека G е област во R^3 за која што важи теоремата на Гаус-Остроградски, и нека границата на G ја означиме со S. Нека O е координатниот почеток во R^3, а ψ е аголот меѓу надворешната нормала $\vec{n}$ на S во точката $P(x, y, z)$ и векторот $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Скаларниот производ $\vec{r} \cdot \vec{n} = r|\vec{n}|cos\psi\psi = rcos\psi\psi$, зашто $|\vec{n}| = 1$.

Ако $\vec{F} = \vec{r}$, тогаш со примена на теоремата за дивергенција имаме:

$$\iiint_G dV = \iint_S r cos\psi dS \text{ каде } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Навистина во овој случај

$$P(x,y,z) = x, Q(x,y,z) = y \text{ и } R(x,y,z) = z \text{ па } div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3$$

со замена во (5) добиваме:

$$\iiint 3dV = \iint_S r cos\psi dS.$$

Следователно мерата или волуменот V на G е дадена со формулата:

$$V = \frac{1}{3}\iint_S r\, cos\psi\, dS$$

Во еден од следните примери ќе покажеме дека теоремата за дивергенција важи ако G е топка. Специјално ако е топка со центар во O, и радиус R, тогаш секоја точка (x,y,z), од границата за топката т.е. сферата, можеме да ја запишеме на следниот начин: $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{R}$ е нормален вектор на границата од топката, затоа единичниот нормален вектор $\vec{n}$ е

$$\vec{n} = \frac{x}{R}\vec{i} + \frac{y}{R}\vec{j} + \frac{z}{R}\vec{k}, \qquad \vec{n}\cdot\vec{R} = 1\cdot R\cdot cos0 = R$$

и за волуменот на топката имаме

$$V = \frac{1}{3}\iint R\cdot 1dS = \frac{R}{3}A(S)$$

каде $A(S)$ е плоштина на сферата со радиус R.

Пример 3 Нека $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $\nabla \mathrm{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$.

Функцијата $u(x,y,z)$ чии што парцијални изводи од прв и втор ред се непрекинати и $\Delta u = 0$ се вика хармониска функција. Нека u е функција чии што први парцијални изводи се рамномерно непрекинти во областа G и нека $v(x,y,z)$ е функција чии што парцијални изводи од прв и втор ред се исто така рамномерно непрекинати во G. Со примена на теоремата за дивергенција за

$$P = uv_x, Q = uv_y \text{ и } R = uv_z$$

и

$$v_x \cos(x,n) + v_y \cos(y,n) + v_z \cos(z,n) = \frac{\partial v}{\partial n}$$

го добиваме следниот идентитет:

$$\iiint\limits_G u\Delta v dV + \iiint\limits_G \nabla u \nabla v dV = \iint\limits_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS \qquad (7)$$

Ако претпоставиме дека и функцијата $u(x,y,z)$ има рамномерно непрекинати парцијални изводи заклучно до втор ред тогаш по симетрија имаме

$$\iiint\limits_G v\nabla u \, dV + \iiint\limits_G \nabla v \nabla u dV = \iint\limits_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Доказ: Дивергенцијата од полето (P,Q,R)е

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uv_y) + \frac{\partial}{\partial z}(uv_z) = u_x v_x + uv_{xx} + u_y v_y + uv_{yy} + u_z v_z + uv_{zz}$$

скаларниот производ на векторите

$$\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k} \text{ и } \vec{n} = \cos(x,n)\,\vec{\imath} + \cos(y,n)\,\vec{\jmath} + \cos(z,n)\vec{k}$$

е

$$uv_x \cos(x,n) + uv_y \cos(y,n) + uv_z \cos(z,n) = u \, \frac{\partial v}{\partial n}$$

со замена добиваме:

$$\iiint\limits_G (uv_{xx} + uv_{yy} + uv_{zz} + u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) dV = \iint\limits_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS$$

или

$$\iiint\limits_G u\Delta v dV + \iiint\limits_G \Delta u \Delta v dV = \iint\limits_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS$$

Така го покажавме идентитетот (7) кој е познат во литературата како прв Гринов идентитет. На ист начин се добива и следниот идентитет, ако си ги заменат местата функциите u и v.

$$\iiint\limits_G v\Delta u dV + \iiint\limits_G \Delta v \Delta u dV = \iint\limits_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS$$

Со одземање на вториот од првиот се добива:

$$\iiint\limits_G [\mathrm{u}\Delta \mathrm{v} - \mathrm{v}\Delta \mathrm{u}]\mathrm{dV} = \iint\limits_S (\mathrm{u}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})dS \tag{8}$$

Идентитетот (8) е вториот Гринов идентитет.

Пример4: Во овој пример ќе покажеме дека теоремата за дивергенција важи во топка $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$. Нека топката ја означиме со G, а границата со S. За $\varepsilon > 0$ нека G_ε е делот од топката кој се наоѓа над рамнината $z = \varepsilon$. Аналогно се дефинира $G_{-\varepsilon}$. S_ε е делот од сферата над рамнината $z = \varepsilon$, а σ_ε е делот од рамнината $z = \varepsilon$, што се наоѓа во топката. Потполно исто е и за областа $G_{-\varepsilon}$, чија граница е $S_{-\varepsilon}$ и $\sigma_{-\varepsilon}$. Забележуваме дека теоремата на Гаус-Остроградски неможе да се примени на G, зашто S е дадена со $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ и затоа парцијалните изводи z_x и z_y тежат кон бесконечност кога $x^2 + y^2 \to R^2$. Меѓутоа може да се примени на G_ε и $G_{-\varepsilon}$

$$\iiint\limits_{G_\varepsilon} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{S_\varepsilon} R\cos(z,n) + \iint\limits_{\sigma_\varepsilon} R\cos(z,n) \tag{9}$$

Слично

$$\iiint\limits_{G_{-\varepsilon}} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{S_{-\varepsilon}} R\cos(z,n) + \iint\limits_{\sigma_{-\varepsilon}} R\cos(z,n) \tag{10}$$

Бидејќи $\cos(z,n) = 1$, а $\cos(z,n) = -1$ на σ_ε и $\sigma_{-\varepsilon}$ респективно имаме

$$\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Rcos(z,n)dS = \iint\limits_{x^2+y^2<(R-\varepsilon)^2} R(x,y,\varepsilon)dxdy$$

$$\iint\limits_{\sigma_{-\varepsilon}} Rcos(z,n)dS = \iint\limits_{x^2+y^2<(R-\varepsilon)^2} R(x,y,-\varepsilon)dxdy$$

Ако $\varepsilon \to 0$ од рамномерната непрекинатост на $R(x,y,-\varepsilon)$, следи дека двојните интеграли тежат кон

$$\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} R\,(x,y,0)dxdy$$

и

$$-\iint_{x^2+y^2<R^2} R\,(x,y,0)dxdy$$

така што нивниот збир тежи кон 0. На ист начин се покажува дека постои

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S_{\pm\varepsilon}} Rcos(z,n)dS$$

Тоа значи дека тие два несвојствени интеграли постојат.

Уште појасно е дека постои

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\iiint_{G_\varepsilon}\frac{\partial R}{\partial z}dV+\iiint_{G_{-\varepsilon}}\frac{\partial R}{\partial z}dV\}=\iiint_G\frac{\partial R}{\partial z}$$

Аналогно се покажуваат равенствата за P и Q.

Задачи

1. Со теоремата на Гаус-Остроградски да се пресмета интегралот:

$$I=\iint_S[x^2\cos(x,n)+y^2\cos(y,n)+z^2cos(z,n)]dS$$

каде S е дадена со равенката $x^2+y^2+z^2=2az$

Решение: $P=x^2,\ \ Q=y^2,\ \ R=z^2,\ S: x^2+y^2+(z-a)^2=a^2.$

Ако G е област во сферата S тогаш по теоремата имаме:

$$\iiint_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint_G(2x+2y+2z)dxdydz=$$

$$=\iiint_G 2xdxdydz+\iiint_G 2ydxdydz+\iiint_G 2zdxdydz$$

бидејќи $z-a=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ добиваме

$$\iiint_G 2xdxdydz = \iint_D xdxdy \int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz = \iint_D 2x\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

Бидејќи пресек на топката со рамнина паралелна со xy –рамнината и која минува низ точката $(0,0,a)$ е круг со радиус a, затоа $D: x^2+y^2 \leq a^2$. Со поларни координати $x=\rho cos\varphi, y=\rho sin\varphi$ добиваме дека првиот интеграл е 0

На ист начин се добива дека и вториот интеграл е 0.

$$\iiint_G 2zdxdydz = \iint_D dxdy \int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} 2zdz = \iint_D 4\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

Со смена во поларни координати, па со уште една смена $a^2-\rho^2=t^2$ конечно добиваме $I=\frac{8}{3}a^4\pi$

2. Со теоремата за дивергенција да се пресмета интегралот

$$\iint_S \vec{V}\,\vec{n}dS,$$

каде $\vec{V}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$, $\vec{n}$ е надворешна нормала, а S е граница на коцката $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1, 0\leq z\leq 1$. (одг. 3)

3. Со теоремата за дивергенција да се пресмета

$$\iiint_G div\ \vec{\mathrm{F}}dxdydz, \text{ако } \vec{\mathrm{F}} = \mathrm{x}\vec{i}-y\vec{j}+2z\vec{k}, \text{ а } G: x^2+y^2+(z-1)^2<1. \text{(одг.} \frac{8\pi}{3}\text{)}$$

4. Нека B_2 и B_1 се отворени топки во R^3, така што затворачот на B_1 се содржи во B_2. Докажи дека важи теоремата на Гаус-Остроградски за областа $B_2\backslash B_1$.

Упатство: Проблемот се сведува на прости области. Може прво да се разгледа случајот кога топките имаат ист центар.

5. Ако G е проста област со граница S, и нека $\vec{\mathrm{F}}=\mathrm{P}\vec{\mathrm{i}}+\mathrm{Q}\vec{\mathrm{j}}+\mathrm{R}\vec{\mathrm{k}}$ е двапати непрекинато диференцијабилна, т.е. P, Q и R имаат непрекинати парцијални изводи заклучно до втор ред во областа $G\cup S$. Докажи дека

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{n}\mathrm{dS}=0.$$

6. Ако $u(x,y,z)$ е хармониска функција во проста област, со граница S, и ако нејзините парцијални изводи до втор ред се непрекинато диференцијабилни во G, тогаш:

$$\iiint_G (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dV = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Ако $u = 0$ на S тогаш $u = 0$ во G.

Решение: Во првиот идентитет на Грин ставаме $u = v$:

$$\iiint_G u\Delta u dV + \iiint_G \nabla u \nabla u dV = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

од $\Delta u = 0$ следи:

$$\iiint_G (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dxdydz = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Ако $u(x, y, z) = 0$, за $(x, y, z) \in S$ тогаш десната страна е 0, следователно и левата страна е 0;

$$\iiint_G (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dxdydz = 0$$

Сега од фактот што подинтегралната функција е ненегативна и непрекината, за да биде интегралот 0, треба

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 0$$

но за тоа треба $u_x = u_y = u_z = 0$, а тоа повлекува дека функцијата $u(x, y, z)$ е константа во G. Бидејќи u е непрекината и бидејќи на S по претпоставка е 0 мора $u(x, y, z) = 0$.

7. Нека G е топка со граница S. Нека $Q = (\xi, \eta, \zeta)$ е точка во G, и со C_ε ја обележуваме топката со центар во Q и радиус ε.

Нека $G_\varepsilon = G - C_\varepsilon$. Според задача 4 можеме да ја примениме теоремата на Гаус Остроградски за G_ε за доволно мало $\varepsilon > 0$. Гриновиот втор идентитет исто така важи. Ја користиме функцијата $v = \frac{1}{r}$, $r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}$ ако $\varepsilon \to 0$ се добива следната формула

$$U(Q) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_G \frac{\Delta U}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial U}{\partial n} \frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \iint_S U \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS$$

Оваа формула се вика трет Гринов идентитет. Тој важи во секоја област во која важи теоремата за дивергенција.

Решение: За дадената функција u и v се еднакви на $\frac{1}{r}$,

$$r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}$$

Го пишуваме вториот Гринов идентитет во областа G_ε, чијашто граница се состои од сферата S и од сферата S_ε со тоа што сферата S е позитивно ориентирана, а сферата S_ε на G_ε е негативно ориентирана.

$$\iiint\limits_{G\varepsilon} (\mathrm{u}\Delta\mathrm{v} - \mathrm{v}\Delta\mathrm{u})\mathrm{dV} = \iint\limits_{S} (\mathrm{u}\frac{\partial V}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})dS + \iint\limits_{S_\varepsilon} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS$$

каде $G_\varepsilon = G - D(Q,\varepsilon)$, $G = G_\varepsilon \cup D(Q,\varepsilon)$,

Лапласовиот оператор Δ во поларни координати во R^3 е

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{3-1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{r} + \mathrm{L},$$

каде што во L фигурираат изводи по ф. Според тоа

$$\Delta_3\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{r}^2}\frac{1}{\mathrm{r}} + \frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\frac{1}{\mathrm{r}} + 0$$

(зошто v не зависи од φ)

$$\Delta_3\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right) = \frac{2}{\mathrm{r}^3} - \frac{2}{\mathrm{r}}\frac{1}{\mathrm{r}^2} + 0 = 0$$

тоа покажува дека функцијата $\frac{1}{\mathrm{r}}$ е хармониска функција во R^3 освен во една точка, следователно, идентитетот е:

$$-\iiint\limits_{G} \frac{1}{\mathrm{r}}\Delta\mathrm{u}\,\mathrm{dV} = \iint\limits_{S} (\mathrm{u}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})dS - \iint\limits_{S_\varepsilon} \left(n\frac{\partial V}{\partial n} - v\frac{\partial V}{\partial n}\right) dS \qquad (*)$$

Бидејќи надворешен нормален вектор за двете сфери е во насока на радиус векторот $\vec{\mathrm{r}}$ со почеток во центарот на соодветната сфера, и крај во точките од соодветната сфера.

Затоа

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\mathrm{r}^2}$$

исто така и

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r}$$

Овде напоменуваме дека се работи за вектор $\vec{\mathrm{r}}$ иако пишуваме r во изводот.

Сега го разгледуваме интегралот

$$\iint\limits_{S\varepsilon} (\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial u}{\partial r})\, dS$$

По горниот дел од сферата S_ε

$$\iint\limits_{S} (\mathrm{u} - \frac{1}{\mathrm{r}^2})\mathrm{dS} - \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial u}{\partial r} dS$$

и затоа имаме

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S} \mathrm{u\, dS} - \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial r} dS$$

Од

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \varepsilon^2$$

следи

$$z = \zeta \pm [\varepsilon^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2]^{1/2}$$

За горната сфера знакот е $+$ пред коренот, и по определувањето на парцијалните изводи z_x и z_y и заменување во $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2 dxdy}$ добиваме

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{C_\varepsilon} \mathrm{u}\, \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} dxdy,$$

каде C_ε: $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < \varepsilon^2$

воведуваме смена $x-\xi = \rho cos\varphi, y-\eta = \rho sin\varphi$ каде $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le \varepsilon$ $dxdy = \rho d\rho$ и добиваме

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{2\pi} \mathrm{d\varphi} \int_0^{\varepsilon} \mathrm{u}\,(\xi + \rho cos\varphi\,, \eta + \rho sin\varphi, \zeta + \sqrt{\varepsilon^2+\zeta^2})\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\varepsilon^2-\rho^2}}$$

Во внатрешниот интеграл ставаме смена $\rho = \varepsilon sint, 0 \le t \le \pi/2$.

Со пресметување го добиваме интегралот

$$-\int_0^{2\pi} \mathrm{d\varphi} \int_0^{\varepsilon} \mathrm{u}\,(\xi + \varepsilon sintcos\varphi, \eta + \varepsilon sintsin\varphi, \zeta + \varepsilon cost)sintdt$$

Во овој двоен интеграл ако $\varepsilon \to 0$ добиваме дека лимесот е

$$-\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{u}\,(\xi,\varphi,\eta,\zeta) sint dt = -2\pi u(\xi,\eta,\zeta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} sint dt = -2\pi u(\xi,\eta,\zeta)$$

на потполно ист начин се добива дека интегралот

$$-\frac{1}{\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} dS$$

тежи кон нула кога $\varepsilon \to 0$.

Истиот резултат се добива кога се работи по долниот дел од сферата S_ε. Според тоа ако во идентитетот (*) пуштиме $\varepsilon \to 0$ тогаш интегралот од левата страна ќе тежи кон

$$-\iiint_G \frac{\Delta u}{r} dV$$

и на основа на претходната дискусија лимесот од двете страни кога $\varepsilon \to 0$ е

$$-\iiint_G \frac{\Delta u}{r} dxdydz = \iint_S (\mathrm{u}\frac{\partial v}{\partial r} - \mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial r})\, dS + 4\pi u(\xi,\eta)$$

или

$$(III) \qquad u(\xi,\eta,\zeta) = u(Q) = -\frac{1}{4\pi}\iint_G \frac{\Delta u}{r} dxdydz + \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial u}{\partial r} dS - \frac{1}{4\pi}\iint_S \mathrm{u}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} dS$$

Ако функцијата u е хармониска тогаш $\Delta u = 0$ и

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial u}{\partial r} dS - \frac{1}{4\pi}\iint_S \mathrm{u}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} dS$$

8. Ако функцијата $u(x,y,z)$ е хармониска во дадена област G тогаш таа има непрекинати парцијални изводи од било кој ред. Нека $(x_0,y_0,z_0) \in G$ и нека B е топка во G таква што дадената точка припаѓа и на B. Тогаш од третиот Гринов идентитет имаме:

$$u(x_0,y_0,z_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_s \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial v}{\partial n}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\mathrm{dS} - \frac{1}{4\pi}\iint_S \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\mathrm{r}}\mathrm{dS}$$

Бидејќи

$$r = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2},$$

а $(x, y, z) \in S$ следи дека може да бараме извод под интегралот од кој било ред од $\frac{1}{r}$ во (x_0, y_0, z_0).

9. Нека u е хармониска функција во областа G и нека B е топка со центар во точката Q и граница S, така што $B \cup S \subset G$, тогаш важи формулата:

$$u(Q) = \frac{1}{A(S)} \iint_S \mathrm{udS}$$

(A(S) е плоштина на S).

Решение: Прво во вториот Гринов идентитет наместо v ставиме 1 и добиваме:

$$\iiint\limits_G (\mathrm{u\Delta v - v\Delta u)dV} = \iint\limits_S (\mathrm{u} \cdot 0 - 1 \cdot \frac{\partial V}{\partial n})dS$$

како $\Delta u = \Delta v = 0$ добиваме:

$$0 = \iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Сега, од третиот Гринов идентитет имеме:

$$U(Q) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{1}{\mathrm{R}} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{1}{\mathrm{R}^2} u dS$$

каде R е радиусот на B.

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi\mathrm{R}} \iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi\mathrm{R}^2} \iint\limits_S \mathrm{udS}$$

или

$$u(Q) = \frac{1}{A(S)} \iint\limits_S \mathrm{uds} \text{ бидејќи } A(S) = 4\pi R^2$$

и

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

Добиената формула се вика теорема на Гаус или теорема за средна вредност за хармониски функции.

10. Да се решат следните интеграли од втор вид:

$$(i) \iint\limits_S (\, xdydz + ydzdx + zdxdy \,)$$

каде што S е надворешната страна на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (одг. $4\pi a^3$)

$$(ii) \iint\limits_S f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy$$

каде $f(x), g(y)$ и $h(z)$ се непрекинати функции и S е надворешна страна на паралелопипедот $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$.

$$(iii) \iint\limits_S (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy,$$

каде S е надворешната страна на конусната површина $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$

$$(iv) \iint\limits_S (\frac{dydt}{x} + \frac{dtdx}{y} + \frac{dxdy}{t})$$

каде S е надворешната страна на елипсоидот $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

5 Штоксова формула

Штоксовата формула претставува обопштување на Гриновата формула, затоа што Штоксовата формула дава врска меѓу површински и криволиниски интеграл по крива во R^3.

Ние тука ќе земеме површината S да биде определена со функцијата $z = z(x, y)$ дефинирана на областа D во $xy-$ рамнината. Исто така ќе претпоставиме дека секоја права што е паралелна со z –оската ја сече S не повеќе од во една точка. Со Γ ја обележуваме просторната крива која што е граница за површината S.

Нека го разгледаме површинскиот интеграл:

$$I = \iint_S \frac{\partial X}{\partial y} dxdy - \frac{\partial X}{\partial z} dxdz$$

каде функцијата $X = X(x, y, z)$ е непрекината заедно со нејзините парцијални изводи во некоја област во која лежи S. Да се потсетиме дека за елементарниот дел dS што го имавме уште кај пресметувањето на плоштина на површина по однос на xy –рамнината важи формулата

$$dxdy = cos\gamma dS$$

каде што γ е аголот што го гради надворешната нормала на S со z –оската.

Аналогно се добиваат формулите:

$$dxdz = cos\beta dS \text{ и } dydz = cos\alpha dS$$

каде што α и β се аглите на нормалата со y и со x оската соодветно. Знаеме дека единичниот нормален вектор $\vec{n}$ во овој случај е определен со

$$\left(-\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, -\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\right)$$

а единичните вектори по x, y и z оските се $\vec{i} = (1,0,0)$; $\vec{j} = (0,1,0)$ и $\vec{k} = (0,0,1)$ респективно. Од тука следи дека

$$cos\alpha = \vec{i} \cdot \vec{n}, cos\beta = \vec{j} \cdot \vec{n} \text{ и } cos\gamma = \vec{k} \cdot \vec{n}$$

каде соодветните производи се скаларни. Од горните формули добиваме:

$$dxdz = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} dxdy$$

бидејќи

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -z_y$$

имаме:

$$dxdz = -z_y dxdy$$

Сега интегралот I можеме да го напишеме во следниот вид:

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} z_y\right) dxdy$$

Ако во функцијата $X(x, y, z)$ наместо z ставиме $z(x, y)$ тогаш имаме:

$$\frac{\partial}{\partial y}X\big(x,y,z(x,y)\big)=\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial z}\mathrm{z_y}$$

Нека ставиме $X_1(x,y)=X\big(x,y,z(x,y)\big)$, јасно е дека

$$\frac{\partial X_1}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial y}$$

и имаме:

$$I=\iint\limits_{\mathrm{D}}\frac{\partial X_1}{\partial y}\,\mathrm{dxdy}$$

Нека кривата Г е дадена со равенката

$$\Gamma=(x(t),y(t),z(x(t),y(t)),a\le t\le b$$

Нејзината проекција на xy рамнината е кривата $\gamma_1=(x(t),y(t))$ и таа претставува граница за областа D.

Ако во Гриновата формула ставиме $\mathrm{M}=X_1$ и $N=0$, тогаш формулата гласи:

$$\iint\limits_{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{\gamma_1}\mathrm{Mdx+Ndy},$$

зашто во овој случај имаме:

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial X_1}{\partial y}dxdy=\int\limits_{\Gamma}X_1\,dx=-\int\limits_{a}^{b}X(x(t),y(t),z\,(x(t),y(t))dx=-\int\limits_{\gamma}Xdx$$

така добиваме:

$$(i)\qquad I=\iint\limits_{\mathrm{S}}\frac{\partial X}{\partial y}dxdy-\frac{\partial X}{\partial z}dxdz=-\int\limits_{\Gamma}Xdx$$

Потполно исто се добиваат и следните две релации:

$$(ii)\qquad \iint\limits_{\mathrm{S}}\frac{\partial Y}{\partial z}\mathrm{dydz}-\frac{\partial Y}{\partial x}dxdy=-\int\limits_{\Gamma}Ydy$$

$$(\mathrm{iii})\qquad \iint\limits_{\mathrm{S}}\frac{\partial Z}{\partial x}\mathrm{dxdz}-\frac{\partial Z}{\partial y}dydz=-\int\limits_{\Gamma}Zdz$$

каде функциите: $Y = Y(x,y,z)$ и $Z = Z(x,y,z)$ се непрекинати заедно со нивните парцијални изводи во некоја област која ја содржи S.

Со собирање на трите равенства ја добиваме Штоксовата формула:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right) dxdy = \int_\gamma Xdx + Ydy + Zdz$$

Ако S е рамнинска крива пример $z = const.$ тогаш $dz = 0$ и ја добиваме Гриновата формула.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy = \int_\gamma Xdx + Ydy$$

Сега ќе дадеме една важна примена на Штоксовата формула:
Прво да се потсетиме дека векторското поле $\vec{\mathrm{F}} = (P,Q,R) = P\vec{\mathrm{i}} + Q\vec{\mathrm{j}} + R\vec{\mathrm{k}}$ каде што P,Q и R се функции на некоја област G во R^3 е потенцијално поле ако постои функција $\Phi(x,y,z)$ така што:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = R$$

Да претпоставиме дека P, Q и R се непрекинато диференцијабилни функции во G, тогаш користејќи ја функцијата Φ (потенцијалот) лесно се добиваат следните релации:

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

Тоа значи дека:

$$rot\vec{\mathrm{F}} = 0$$

каде

$$rot\vec{\mathrm{F}} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\mathrm{i}} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\mathrm{j}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{\mathrm{k}}$$

Сега сакаме да покажеме обратно, под услов G да е ѕвездеста област во R^3.

За областа G велиме дека е ѕвездеста ако отсечката која ги поврзува точките $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x,y,z)$ од G лежи во G.

Теорема 1 Нека G е ѕвездеста област и P, Q и R се непрекинато диференцијабилни функции во G кои ги задоволуваат релациите (1). Тогаш постои функција Φ чии што парцијални изводи се : $\Phi_x = P, \Phi_y = Q, \Phi_z = R$.

Доказ: Во било која точка $M \in G$, со γ_M ја обележуваме отсечката која ја поврзува точката M_0 со точката M. Дефинираме функција

$$\Phi(M) = \int_{\gamma_M} Pdx + Qdy + Rdz$$

Функцијата Φ е добро дефинирана во секоја точка M од G.

Нека $M_1 = (\xi + h, \eta, \zeta)$, каде $M = (\xi, \eta, \zeta)$, со γ' ја обележуваме отсечката која ги поврзува точките M и M_1.

Со S ја обележуваме рамнинската површина ограничена со триаголникот $\Delta M_0 M M_1$. Граница γ за S е $\gamma = \gamma' + \gamma_M + \underline{\gamma}_{M_1}$. Со примена на Штоксовата формула имајќи ги во предвид релациите (1) добиваме:

$$\int_{\gamma} \mathrm{Pdx} + \mathrm{Qdy} + \mathrm{Rdz} = 0$$

или

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) + \int_{\gamma'} \mathrm{Pdx} + \mathrm{Qdy} + \mathrm{Rdz} - \Phi(\xi + \mathrm{h}, \eta, \zeta) = 0$$

γ' е определена со: $x(t) = \xi + t, y(t) = \eta, z(t) = \zeta$

од каде следи дека $dx = dt, dy = 0, dz = 0$ и $0 \le t \le h$

и добиваме

$$F(\xi + h, \eta, \zeta) - F(\xi, \eta, \zeta) = \int_0^h P(\xi + t, \eta, \zeta)dt$$

Со примена на теоремата за средна вредност кај интегралите имаме:

$$F(\xi + h, \eta, \zeta) - F(\xi, \eta, \zeta) = P(\xi + \theta h, \eta, \zeta)h$$

или

$$\frac{F(\xi + h, \eta, \zeta) - F(\xi, \eta, \zeta)}{h} = P(\xi + \theta h, \eta, \zeta)$$

Ако $h \to 0$ тогаш и $\theta h \to 0$ и заради непрекинатоста на P имаме:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(\xi + \mathrm{h}, \eta, \zeta) - \mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta)}{h} = \lim_{h\to 0} P(\xi + \theta \mathrm{t}, \eta, \zeta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta, \zeta) = \mathrm{P}(\xi, \eta, \zeta)$$

На истиот начин добиваме:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q \text{ и } \frac{\partial F}{\partial z} = R$$

Поопшти области од ѕвездестите во кои што важи теоремата, се таканаречените прости сврзливи области во R^3.

Дадена област G во R^3 е просто сврзлива ако $\gamma = \gamma(t), a \leq t \leq b$ има ранг во G и ако постои непрекината функција $H(s,t)$ дефинирана за $0 \leq s \leq 1, a \leq t \leq b$, таква што:

(i) $F(0,t) = \gamma(t)$; (ii) $F(1,t) = M_0$, каде $a \leq t \leq b$, M_0 е фиксна точка во G , и

(ii) $F(s,t)$ лежи во G за сите (s,t),$0 \leq s \leq 1, a \leq t \leq b$

Со дефинирање фамилија криви $\gamma_s(t) = F(s,t)$ каде $0 \leq s \leq 1$ и s е фиксно, а t се менува на интервалот $a \leq t \leq b$, тогаш велиме дека фамилијата криви $\{\gamma_s\}$ претставува непрекината деформација на γ во точката M_0.

Пример 1: Со Штоксовата формула да се реши криволинискиот интеграл:

$$I = \int_{\gamma} -3y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$$

γ е кружницата $x^2 + y^2 = 1, z = 2$, γ е позитивно ориентирана.

Решение : $P = -3y, Q = 3x, R = 1$, Штоксовата формула е:

$$I = \iint_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz$$

S може да биде граница на цилиндарот со основа во xy –рамнината $x^2 + y^2 \leq 1$ и висина $H = 2$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 + 3 = 6; \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 - 0 = 0; \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - 0 = 0$$

$$I = \iint 6dxdy + 0 + 0 = 6 \iint_{x^2+y^2=1} dxdy = 6\pi$$

Задача1. Со Штоксова формула да се решат следните криволиниски интеграли:

$\int_\gamma$ ydx + zdy + xdz, γ е пресекот на $x+y=\alpha$; $x^2+y^2+z^2=\alpha(x+y)$, $\alpha>0$.

Ориентацијата на γ е спротивна од движењето на часовникот.

Забелешка: Од укажаната ориентација интегралот $I = -$ интегралот по површината.

Задача2. Нека е γ крива по која цилиндарот $x^2+y^2=a^2$ се сече со рамнината $\alpha x+\beta y=1$. Со Штоксовата теорема да се покаже дека:

(i) $\int_\gamma z(x^2-1)dy + y(x+1)dz = 0$

(ii) $\int_\gamma y(z-1)dx + x(z+1)dy = 2a^2$

Задача3. Провери ја Штоксовата формула за векторот: $(P,Q,R)=(z,x,y)$ каде S е полусферата $x^2+y^2+z^2=a^2$;

Задача4. Да се определи потенцијалот за следните градиентни (потенцијални) полиња

$(i)\ \frac{2x}{z}\vec{\imath}+\frac{2y}{z}\vec{\jmath}+\left(1-\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)\vec{k}$ земи $M_0(1,1,1)$ одг. $\frac{x^2+y^2+z^2}{z}-3$

$(ii)\ e^{-xy}(y-xy^2+yz)\vec{\imath}+e^{-xy}(x-x^2y+xz)\vec{\jmath}-e^{-xy}\vec{k}$ земи $M_0(0,0,0)$

(одг. $e^{-xy}(xy-z)$

$(iii)\quad 2y\vec{\imath}+(x^2+\log z)\vec{\jmath}+\frac{y}{z}\vec{k}$ земи $M_0(0,0,1)$ одг. $x^2y+y\log z$

Глава 6

1 Бројни редови-основни особини

Теоријата на бесконечните редови е многу широка и претставува база во математичката анализа. Постојат многу учебници и монографии специјално за изучување на редовите, па според тоа ние тука нема да одиме така длабоко и широко во изучувањето на редовите бидејќи наша цел е да ги презентираме најосновните теореми кои што се неопходни во понатамошното изучување на редовите. Меѓутоа иако нашето излагање не е така долго и исцрпно, сепак сметаме дека ги даваме резултатите кои што се од најголем интерес во реалната анализа.

Прво ќе ги разгледуваме бројните редови, а потоа ќе преједеме во изучување на редовите од функции.

Броен ред се обележува (пишува) на следниот начин:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

или пократко со помош на операторот $\sum$ (сигма) во форма:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (2)$$

Да забележиме дека ознаките (1) и (2) треба да се сфатат како еден симбол кој што не асоцира број затоа што бесконечно броеви не е можно да се собираат. Како што кажува и самиот наслов елементите $a_1, a_2, \ldots$ се броеви и затоа се викаат бројни редови и што е многу важно тие елементи или членови на редот се нумерирани (индексирани), така на пример a_1 е прв член, a_2 е втор член и т.н., a_n е n −ти или општ член на редот и.т.н. Од тука заклучуваме дека секој член на даден ред има свое место, така што ако направиме некое разместување (пермутирање) на членовите во редот тогаш добиваме нов ред.

Се разбира, ако редот е само една ознака, еден симбол, прашање е која е корист или која е основната цел за воведувањето на овој поим. Следната дефиниција ни дава јасен одговор на тоа прашање и ја отвора ширум вратата во изучувањето на редовите.

Нека е даден бројниот ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Ја формираме низата

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \tag{3}$$

каде

$$s_1 = a_1\ ,\ s_2 = a_1 + a_2, \ldots,\ \ s_n = a_1 + \ \ldots + \ a_n, \ldots$$

членовите на низата (3) се викаат парцијални суми на дадениот ред s_1 е прва парцијална сума, s_2 е втора парцијална сума и.т.н s_n е n –та парцијална сума и.т.н.

Дефиниција 1 Ако низата (3) од парцијалните суми конвергира кон бројот s тогаш велиме дека дадениот ред е конвергентен и неговата сума (граница) е s. Во тој случај пишуваме

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Ако низата од парцијалните суми не е конвергентна тогаш велиме дека редот не конвергира или велиме дека е дивергентен.

Во понатамошната работа главна задача ќе ни биде изучувањето на конвергентните редови, но внимание ќе им посветиме и на дивергентните редови.

Нека, сега уште малку ќе се задржиме околу дефиницијата за конвергенција на ред со цел да го потсетиме читателот уште еднаш на тој основен поим во вишата математика.

За низата $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ велиме дека конвергира кон бројот s, ако за дадено $\varepsilon > 0$ постои индекс n_0 така што важи:

$$|s_n - s| < \varepsilon \text{ ако } n \geq n_0$$

или, ако на место s_n ја замениме сумата имаме:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - s\right| < \varepsilon\, , ako\, n \geq n_0$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Нека на ова место се потсетиме на основниот Кошиев критериум за конвергенција на низи. Тој критериум е: низата (s_n) е конвергентна ако и само ако за дадено $\varepsilon > 0$ постои индекс n_0 таков што

$$|s_m - s_n| < \varepsilon\,, ako\, n, m \geq n_0$$

Сега можеме само да го пренесеме основниот Кошиев критериум за конвергенција на бројни редови.

Кошиев критериум за редови. Редот конвергира, ако и само ако за дадено $\varepsilon > 0$, постои n_0, така што важи

$$|s_m - s_n| < \varepsilon\,, ako\ \ n, m \geq n_0 \tag{4}$$

Ако на пример $m > n$, тогаш

$$s_m - s_n = s_n + \sum_{n+1}^{m} a_k - s_n$$

Со замена во (4) добиваме

$$|a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon\,, \text{за } n \geq n_0.$$

Специјално за $m = n$, и ако $n - 1 \geq n_0$ тогаш $s_m - s_{n-1} = s_n - s_{n-1} = a_n$. Со замена во претходното неравенство имаме $|a_n| < \varepsilon$, ако $n \geq n_0$, а тоа значи дека

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

или $a_n \to 0$, кога $n \to \infty$. Според тоа може да заклучиме дека ако редот е конвергентен тогаш неопходно е $a_n \to 0$, кога $n \to \infty$ и тоа е основниот или неопходниот (потребниот) услов за даден ред да е конвергентен. Но за жал тој услов не е доволен во општ случај за конвергенција на ред. Во понатамошното излагање ќе дадеме пример на ред кој што е дивергентен иако $a_n \to 0$, кога $n \to \infty$.

Сега кога ја воспоставивме интимната врска на редовите со соодветните низи од нивните парцијални суми можеме да ги дадеме основните алгебарски операции со редовите.

Нека се дадени два реда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

тогаш:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$

- претставува збир на двата реда.

$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$,

- е разлика меѓу двата реда.

- и ако λ е број тогаш редот

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$$

велиме дека е производ на редот со бројот λ.

Читателот лесно ќе забележи дека кај собирање на редови важи комутативниот закон, зашто

$$a_k + b_k = b_k + a_k \ , \ k = 1,2, \dots ,$$

кај одземање на редови не важи комутативниот закон зашто $a_k - b_k \neq b_k - a_k$ во општ случај.

Ако се дадени три реда $\sum a_k$,$\sum b_k$ и $\sum c_k$ тогаш важи асоцијативниот закон и затоа нивниот збир го пишуваме

$$\left(\sum a_k + \sum b_k\right) + \sum c_k = \sum a_k + \left(\sum b_k + \sum c_k\right) = \sum (a_k + b_k + c_k)$$

Теорема 1 а) Ако редовите

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

се конвергентни со суми s' и $s"$ респективно, тогаш е конвергентен и редот

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$

и сумата на збирот на двата реда е:

$$\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k = s' + s"$$

б) Ако е конвергентен редот $\sum a_k = s$, тогаш е конвергентен и редот $\sum \lambda a_k$, и неговата сума е λs , т.е.

$$\lambda s = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$$

Доказ. Иако доказот директно следи од дефиницијата ние го даваме тука на кратко.

a) Парцијалната сума s_n за редот

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$$

е

$$s_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)=$$
$$(a_1+\ldots+a_n)+(b_1+\ldots+b_n)=s'_n+s''_n$$

каде што s'_n е парцијална сума за првиот ред, а s''_n е парцијална сума за вториот ред, тогаш од низите знаеме дека

$$s'_n+s''_n\to s'+s'' \text{ каде } s'=\sum a_k,\ s''=\sum b_k$$

следователно $s_n\to s=s'+s''$ кога $n\to\infty$.

b) Доказот оди на потполно ист начин и читателот лесно ќе го направи потсетувајќи се на низите.

2 Апсолутна конвергенција на редови

Следниот резултат иако важи само за една класа на редови е од голем интерес.

Теорема 1 Нека членовите на редот

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

се ненегативни броеви. Тогаш редот конвергира ако и само ако парцијалните суми s_n за $n=1,2,\ldots$ се ограничени од горе.

Доказ. Бидејќи по услов $a_k\geq 0$ за $k=1,2,\ldots$ следи дека низата $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ е монотоно растечка : $s_1\leq s_2\leq s_3\leq\ldots\leq s_n\leq\ldots$

Од теоријата на низите знаеме дека секоја монотоно растечка низа која е ограничена од горе е конвергентна.

Пример. Нека го разгледаме хармонискиот ред

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots$$

членовите на овој ред се позитивни броеви. Ги посматраме следните парцијални суми:

$$s_1 = 1, s_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = s_1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$s_{2^3} = s_{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_2 + 4 \cdot \frac{1}{8} = s_{2^2} + \frac{1}{2} > s_1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = s_1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

Постапувајќи така за s_{2^n}, добиваме $s_{2^n} > s_1 + n \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$ итн.

Бидејќи $1 + \frac{n}{2} \to \infty$ кога $n \to \infty$, од тука следи дека парцијалните суми s_{2^n}, исто така тежат кон бесконечност т.е. не се ограничени од горе, според теоремата имаме дека хармонискиот ред е дивергентен зашто треба сите парцијални суми да бидат ограничени од горе. Од овој пример гледаме дека иако општиот (n −от) член $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, кога $n \to \infty$, сепак редот не е конвергентен. Според тоа условот $a_n \to 0$, кога $n \to \infty$ е потребен за да редот биде конвергентен, но не е и доволен.

Сега даваме една дефиниција која што е од голема важност во изучувањето на редовите.

Дефиниција 1 Нека е даден редот

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Велиме дека дадениот ред конвергира апсолутно, ако конвергира редот

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

т.е. редот од апсолутните вредности на членовите од дадениот ред.

Теорема1. Ако конвергира редот $\sum |a_k|$, тогаш конвергира и редот $\sum a_k$. Се вели уште: ако даден ред $\sum a_k$ е апсолутно конвергентен, тогаш тој е и обично конвергентен или условно конвергентен.

Доказ. Бидејќи редот $\sum |a_k|$ е конвергентен, за дадено $\varepsilon > 0$, според општиот Кошиев критериум постои n_0, така што важи:

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

за $n \geq n_0$ и p ненегативен цел број.

Сега имаме

$$|a_n + a_{n+1} \ldots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

од каде следи дека важи Кошиевиот критериум за редот $\sum a_k$ и затоа тој е конвергентен.

Пример. Нека го разгледаме редот

$$a + a^2 + \ldots + a^k + \cdots$$

каде a е даден број

$$s_n = a + a^2 + \ldots + a^n$$

$$as_n = a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1}$$

$$s_n - as_n = a + a^2 + \ldots + a^n - a^2 - a^3 - \ldots - a^n - a^{n+1} = a - a^{n+1},$$

од тука

$$s_n = \frac{a - a^{n+1}}{1-a} \text{ и } s_m = \frac{a - a^{m+1}}{1-a} \text{ ако } m > n$$

имаме

$$s_m - s_n = \frac{a - a^{m+1}}{1-a} - \frac{a - a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1} - a^{m+1}}{1-a}$$

$$|s_m - s_n| \leq \frac{|a|^{n+1} + |a|^{m+1}}{|1-a|}$$

Ако $|a| < 1$, тогаш $|a|^{n+1}$ и $|a|^{m+1} \to 0$, кога $n, m \to \infty$, од каде следи дека за доволно големо n_0, ако $m, n \geq n_0$, разликата $|s_m - s_n|$, може да биде помала од дадено ε, а тоа значи дека дадениот ред кој се вика геометриски е конвергентен и тоа апсолутно за $|a| < 1$.

Ако $a = 1$, тогаш општиот член е $1^n = 1$, не тежи кон 0 тоа значи не е исполнет потребниот услов за конвергенција на ред. Исто така важи и за $(-1)^n$. Очигледно е ако $|a| > 1$, тогаш a^n тежи кон $+\infty$ или $-\infty$ значи редот дивергира.

3 Кошиев производ на редови

Нека се дадени редовите

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Да забележиме дека овие два реда почнуваат со индексот $k = 0$. Се разбира тоа ништо не менува во испитувањето на конвергенцијата како претходно. Формираме ред

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

каде

$$c_0 = a_0 b_0 \ , \ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, \ c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0, \dots$$

Да забележиме дека збирот на индексите кај секој собирок во c_k, треба да биде еднаков на k . Вака добиениот ред

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

се вика Кошиев производ на дадените два реда.

Во врска со овој многу важен производ во теоријата на редови важи следната теорема.

Теорема 1 Нека се дадени два конвергентни реда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$$

и да претпоставиме дека барем еден од нив е апсолутно конвергентен,

тогаш нивниот Кошиев производ

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

е конвергентен ред и сумата е еднаква на AB.

Доказ. Во доказот ние ќе земеме дека $\sum |a_k|$ е конвергентен. Нека

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = A_n \ , \qquad \sum_{k=0}^{n} b_k = B_n \ \text{и} \ \sum_{k=0}^{n} c_k = C_n$$

и нека $B - B_n = d_n$ тогаш

$$C_n = \sum \{a_k b_l : k + l \leq n\} = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0.$$

Бидејќи $B_n = B - d_n$ со замена во C_n добиваме:

$$C_n = a_0(B - d_n) + a_1(B - d_{n-1}) + \dots + a_n(B - d_0) = A_n B - R_n,$$

каде $R_n = a_0 d_n + a_1 d_{n-1} + \dots + a_n d_0$.

Нека

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_k|$$

Бидејќи $B_n \to B$ кога $n \to \infty$ имаме дека $d_n \to 0$ кога $n \to \infty$, следователно низата $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ е ограничена. Нека $\beta = sup(|d_n|)$. За дадено $\varepsilon > 0$, постои N такво што

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon \text{ за } |d_n| \leq \varepsilon \text{ и } n \geq N .$$

Ако $n \geq N$,

$$|R_n| \leq (|a_0||d_n| + \ldots + |a_{n-N} d_N|) + (|a_{n-N+1}||d_{N-1}| + \ldots + |a_n||d_0|)$$

$$\leq (|a_0|\varepsilon + \cdots + |a_{n-N}|\varepsilon) + (|a_{n-N+1}|\beta + \cdots + |a_n|\beta) =$$

$$\varepsilon \sum_{0}^{n-N} |a_k| + \beta \sum_{k=n-N+1}^{n} |a_k| \leq \varepsilon\alpha + \beta\varepsilon = \varepsilon(\alpha + \beta)$$

Така добивме, дека $R_n \to 0$ кога $n \to \infty$, и бидејќи $A_n B \to AB$ кога $n \to \infty$ конечно имаме $C_n \to AB - 0 = AB$ кога $n \to \infty$.

Оваа теорема е позната во литературата како теорема на Мертенс, и ние во ова книга доста често ќе се повикуваме на неа.

Задачи.

1. Покажи дека конвергенцијата на еден ред не се менува, ако се променат конечно многу членови во редот.(се разбира сумата нема да биде иста). Упатство: Примени го општиот Кошиев критериум.
2. Покажи дека ако еден конвергентен ред има конечно многу негативни членови тогаш тој е апсолутно конвергентен.
3. Покажи дека ако еден условно конвергентен ред (не е апсолутно конвергентен) тогаш редот само од неговите позитивни членови и редот само од неговите негативни членови се и двата дивергентни
4. Со разложување на дропките во редот да се покаже дека

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + n)(\alpha + n + 1)} = \frac{1}{\alpha} \text{ за } \alpha > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$$

5. Ако $\sum a_n$ е конвергентен ред дали $\sum a_n^2$ е секогаш конвергентен? Ако $a_n \geq 0$ тогаш дали е редот $\sum \sqrt{a_n}$ конвергентен?

4 Критериуми за конвергенција

Ќе ги презентираме најупотребуваните критериуми за апсолутна и за условна конвергенција на редови.

Првиот критериум што го даваме се однесува на редови со ненегативни членови или нешто поопшто на редови во кои што фигурираат само конечно многу негативни членови. Доказот е ист.

Критериуми на споредување. Нека $\sum a_k$ и $\sum b_k$ се редови со ненегативни членови. Да претпоставиме дека од некој природен број K важи $a_k \leq b_k$ за $k \geq K$. Тогаш ако е конвергентен редот $\sum b_k$ следи дека е конвергентен и редот $\sum a_k$.

Доказ. Бидејќи $\sum b_k$ е конвергентен и неговите членови се ненегативни знаеме од порано дека постои број $M > 0$ таков што секоја парцијална сума

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \leq M$$

Нека

$$s_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_{K-1} + a_K + \ldots + a_n \leq \sum_{k=1}^{K-1} a_k + a_K + \cdots + a_n \leq$$

$$\sum_{k=1}^{K-1} a_k + a_K + \cdots + a_n = L + a_K + \ldots + a_n \leq L + b_K + \cdots + b_n \leq$$

$$L + s_n \leq L + M$$

каде што

$$L = \sum_{k=1}^{K-1} a_k \text{ и } s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

C

од тука следи дека парцијалните суми s_n' се ограничени, а тоа значи дека редот $\sum a_k$ е конвергентен.

Граничен критериум за конвергенција. Да претпоставиме дека $\sum a_k$ и $\sum b_k$ се два реда со ненегативни членови.

a) Ако постои

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=c\neq 0$$

тогаш редот $\sum a_k$ е конвергентен, ако $\sum b_k$ е конвергентен важи и обратно.

C

b) Ако $c=0$, и ако конвергира $\sum b_k$ тогаш конвергира и $\sum a_k$.

Доказ. Од дефиницијата за лимес следи дека од некој индекс K важи

$$\frac{a_k}{b_k}\leq c+1 \text{ за } k\geq K$$

или

$$a_k\leq (c+1)b_k \text{ за } k\geq K$$

Знаеме, ако конвергира редот $\sum b_k$, тогаш конвергира и $\sum(c+1)\,b_k$, па од претходниот критериум следи дека конвергира и редот $\sum a_k$.

Сега неказемеме дека конвергира редот $\sum a_k$, тогаш од некој природен број K, важи:

$$\frac{a_k}{b_k}\geq\frac{c}{2}, \qquad \text{за } k\geq K$$

или

$$b_k\leq\frac{2}{c}a_k \text{ за } k\geq K$$

Понатаму од конвергенцијата на $\sum a_k$ следи дека конвергира и редот

$$\sum\frac{2}{c}a_k$$

тогаш од претходното следи дека конвергира и редот $\sum b_k$.

в) Ако $c=0$ и редот $\sum b_k$ конвергира имаме од некој природен број K

$$\frac{a_k}{b_k}\leq 1, \text{за } k\geq K$$

т.е.

$$a_k \leq b_k \text{ за } k \geq K$$

од каде следи конвергенцијата на редот $\sum a_k$.

Сега даваме еден важен критериум за апсолутна конвергенција на редови даден од Коши.

Критериум корен

а) Нека е даден редот $\sum a_k$. Ако постои ненегативен број $r < 1$ и природен број K така што важи

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} \leq r \text{ за } k \geq K$$

тогаш редот $\sum a_k$ е апсолутно конвергентен.

б) Ако постои број $r > 1$ и природен број K такви што

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq r, \text{за } k \geq K$$

тогаш редот $\sum a_k$ е дивергентен.

Доказ. а) Од условот следи

$$|a_k| \leq r^k \text{ за } k \geq K$$

Бидејќи геометрискиот ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k$$

е конвергентен за $r < 1$ од критериумот за споредување следи дека редот $\sum |a_k|$ е конвергентен, што значи редот $\sum |a_k|$ е апсолутно конвергентен.

в) Ако $|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq r$ за $k \geq K$, тогаш $|a_k| \geq r^k$ и $r > 1$ од каде $r^k \to \infty$ кога $k \to \infty$, т.е. a_k не тежи кон нула што покажува дека не е исполнет потребниот услов за конвергенција.

Во последицата што следи ќе го искористиме дадениот критериум за да ја оцениме брзината на конвергенција. Таа оценка се користи во нумеричките пресметки и за некои теориски оценки.

Последица 1 Ако $0 < r < 1$ и ако за редот $\sum a_k$ важи Кошиевиот (корен) критериум тогаш парцијалните суми s_n (за $n \geq K$) ја апроксимираат (приближуваат) сумата $s = \sum a_k$ според оценката:

$$|s - s_n| \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r}, \text{за } n \geq K$$

Доказ. Ако $m \geq n \geq K$ имаме

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| \leq r^{n+1} + \cdots + r^m \leq$$

$$\leq r^{n+1} + \cdots + r^m + \cdots = \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Ако $m \to \infty$, тогаш $s_m \to s$ и добиваме

$$|s - s_n| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Често пати користена е примената на следната варијанта од критериумот корен.

Последица 2 Нека $\sum a_k$ е даден ред и нека постои

$$r = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

тогаш редот $\sum a_k$ е апсолутно конвергентен за $r < 1$ и е дивергентен за $r > 1$, за $r = 1$ нема одговор и во тој случај посебно се испитува редот.

Доказ. Бидејќи $r < 1$ можеме да избереме број $r < r_1 < 1$ (на пример $\frac{r+1}{2}$), понатаму од фактот што $|a_k|^{\frac{1}{k}}$ тежи кон r кога $k \to \infty$ следи дека постои природен број K таков што за $k \geq K$; $|a_k|^{\frac{1}{k}} \leq r_1$ или $|a_k| \leq r_1^k$, сега од конвергенцијата на редот

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_1^k$$

според критериумот за споредба следи дека редот $\sum |a_k|$ конвергира.

Ако $r > 1$ тогаш бираме број r_2 т.ш. $1 < r_2 < r$ и од дефиницијата на лимесот следи дека постои природен број K таков што

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq r_2, \text{за } k \geq K \text{ или } |a_k| \geq r_2^k,$$

бидејќи за $r_2 > 1$, $r_2^k \to \infty$, кога $k \to \infty$, а тоа повлекува дека и $|a_k| \to \infty$, што значи не е исполнет основниот услов за конвергенција на ред. (a_k не тежи кон 0).

Да забележиме дека ако $r = 1$ тогаш не можеме да кажеме ништо за конвергенцијата на редот. Во тој случај се испитува на некој друг начин во зависност од редот.

Следниот критериум е поедноставен за примена од критериумот корен, но затоа пак е послаб: во смисол што Кошиевиот критериум дава одговор на поширока класа од редови од колку што дава следниот критериум.

Критериум на Даламбер.

1. Ако редот

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

се состои од ненулти елементи и ако постои позитивен број $r < 1$ и природен број K така што важи

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq r, \text{за } k \geq K$$

тогаш редот

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

е конвергентен.

2. Ако постои број $r > 1$ и природен број K, така што

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq r \text{ за } k \geq K$$

тогаш редот $\sum a_k$ е дивергентен.

Доказ.

1. Од условот ги имаме следниве релации

$$|a_{k+1}| \leq r|a_k|$$
$$|a_{k+2}| \leq r|a_{k+1}| \leq r^2|a_k|$$
$$|a_{k+m}| \leq r^m|a_k|$$

Бидејќи редот

$$\sum_m |a_k| r^m$$

е конвергентен од критериумот за споредување следи дека е конвергентен редот $\sum|a_k|$. Во доказот земаме a_k фиксно за некое $k \geq K$

2. На ист начин како во (1) индуктивно добиваме

$|a_{k+m}| \geq r^m|a_k| \to \infty$, кога $m \to \infty$ (зашто $r > 1$)

следователно во овој случај не е исполнет потребниот услов за конвергенција.

Последица 1 Нека е даден редот $\sum a_k$ и нека претпоставиме дека постои

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

тогаш редот е апсолутно конвергентен ако $r < 1$ и е дивергентен ако $r > 1$. Ако $r = 1$ не дава одговор.

Доказ. Ако $r < 1$ избираме број r_1 таков што $r < r_1 < 1$, бидејќи количниците $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ се стремат кон r кога $k \to \infty$ затоа постои природен број K таков што

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq r_1, \text{за } k \geq K$$

Од критериумот под (1) следи дека редот е апсолутно конвергентен.

Ако $r > 1$ тогаш земаме број $1 < r_2 < r$, па од критериумот под (2) следи дека редот е дивергентен.

Сега следи еден моќен критериум за редови со позитивни членови.

Интегрален критериум. Нека f е позитивна монотоно опаѓачка непрекината функција на интервалот $1 \leq x < \infty$. Тогаш редот

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

конвергира ако и само ако конвергира интегралот

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_1^{k} f(x)\,dx$$

Ако редот конвергира, парцијалните суми

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

и сумата

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

ја задоволуваат релацијата

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq s - s_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

Доказ. Бидејќи f е позитивна непрекината и монотоно опаѓачка на интервалот $[k-1,k]$ имаме $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$

$$\int_{k-1}^{k} f(k)dx \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)dx$$

или

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1) \text{ за } k = 2,3,\dots,n,\dots$$

$$f(2) \leq \int_{1}^{2} f(x)\,dx \leq f(1)$$

$$f(3) \leq \int_{2}^{3} f(x)\,dx \leq f(2)$$

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(n-1)$$

од каде добиваме

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) \leq \int_{1}^{2} f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(1) + \dots + f(n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) \leq \int_{1}^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Ако во последната релација пуштиме $n \to \infty$, тогаш имаме:

- Ако редот конвергира тогаш

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \text{ и } s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

конвергираат кон сумата s и при тоа важи $s_n, s_{n-1} \leq s$, а тоа повлекува дека

$$\int_{1}^{n} f(x)dx \leq s$$

за секое n следователно интегралот

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$$

конвергира.

- Ако претпоставиме дека интегралот

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$$

постои тогаш

$$s_n - f(1) \leq \int_{1}^{\infty} f(x) dx$$

за секое n, или

$$s_n \leq f(1) + \int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$$

Последната релација кажува, дека парцијалните суми на редот се ограничени и бидејќи е тој со ненегативни членови следи дека е конвергентен.

Ако се имаат во предвид особините на функцијата $f(x)$ следните неравенства лесно е да се проверат.

$$s_m - s_n \leq \int_{n}^{m} f(x)\, dx$$

$$\int_{n+1}^{m+1} f(x)\, dx \leq s_m - s_n$$

Ако во претходниве две неравенства пуштиме $n \to \infty$, тогаш ги добиваме неравенствата

$$s - s_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx$$

и

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \leq s - s_n$$

од тука следи

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq s - s_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

Пример. Нека е даден редот·

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

со интегралниот критериум да се испита за кои вредности на p редот е конвергентен ?

Решение. Ја земаме функцијата $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Очигледно оваа функција е позитивна на интервалот $[1,\infty)$ и монотоно опаѓа. Според тоа можеме да го искористиме интегралниот критериум, а тоа значи да испитаме за кои вредности на p интегралот

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

е конвергентен.

$$\int_{1}^{n} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} x^{1-p} = \frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

Јасно конвергенцијата зависи од n^{1-p}: ако $p < 1$, тогаш $n^{1-p} \to \infty$, кога $n \to \infty$, а тоа значи дека лимесот од десната страна не постои кога $n \to \infty$, т.е. интегралот е дивергентен, па според интегралниот критериум е дивергентен и редот. Ако $p > 1$, тогаш $n^{1-p} \to 0$, кога $n \to \infty$ и во тој случај конвергираат и интегралот и редот (се разбира границата не мора да им биде иста) и трето ако $p = 1$ тогаш го добиваме хармонискиот ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

кој што е дивергентен.

Можеме да заклучиме: Редот

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

е конвергентен за $p > 1$, а е дивергентен за $p \leq 1$.

Задача. Со интегралниот критериум испитај ја конвергенцијата на следниве два реда:

$$a) \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}, \qquad \alpha > 0$$

$$b) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^{\alpha}}, \alpha > 0$$

5 Условно конвергентни редови

До сега презентираните критериуми се однесуваат за апсолутната конвергенција на редовите се разбира освен општиот Кошиев критериум. Меѓутоа постојат редови кои се конвергентни, но не апсолутно како на пример што е $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Затоа потребно е да дадеме некои критериуми за обичната или условната конвергенција. Пред да изнесеме, некои од тие критериуми даваме една лема, која ќе ја користиме понатаму.

Лема на Абел. Нека се дадени редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ако $m \geq n$, тогаш:

$$\sum_{n}^{m} a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} (a_j - a_{j+1}) s_j + a_m s_m - a_n s_{n-1} \qquad (1)$$

каде s_j се парцијални суми на редот $\sum b_n$

Доказ. $s_j - s_{j-1} = b_j$, со замена во $\sum_n^m a_j b_j$ наместо b_j добиваме

$$\sum_{n}^{m} a_j (s_j - s_{j-1}) = \sum_{n}^{m} a_j s_j - \sum_{n}^{m} a_j s_{j-1} = \sum_{n}^{m-1} a_j s_j + a_m s_m - \sum_{n}^{m-1} a_{j+1} s_j -$$

$$-a_n s_{n-1} = a_m s_m + \sum_{n}^{m-1} a_j s_j - a_n s_{n-1} - \sum_{n}^{m-1} a_{j+1} s_j =$$

$$= \sum_{n}^{m-1} s_j (a_j - a_{j+1}) + a_m s_m - a_n s_{n-1}$$

Релацијата (1) се вика уште формула за парцијално сумирање.

Критериум на Дирихле (а) Да претпоставиме, дека парцијалните суми на редот $\sum b_n$ се ограничени.

(б) Ако низата $\{a_n\}$ конвергира кон 0, и ако редот $\sum|a_n - a_{n+1}|$ конвергира, тогаш редот $\sum a_n b_n$ е конвергентен.

Специјално, ако $\{a_n\}$ е монотоно опаѓачка низа од позитивни реални броеви која конвергира кон нула, тогаш редот $\sum a_n b_n$ конвергира.

Доказ. (а) Нека $|s_j| < B$ за секое j . Според Абеловата лема имаме

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j b_j\right| \leq |a_m|B + |a_n|B + \sum_{n}^{m-1} |a_j - a_{j+1}|B$$

Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ првите два члена од сумата тежат кон 0 ако $m, n \to \infty$, а додека

$$\sum_{n}^{m-1} |a_j - a_{j+1}|B$$

тежи кон 0, бидејќи

$$\sum_{n}^{m-1} |a_j - a_{j+1}|$$

е всушност општиот Кошиев критериум за конвергентниот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_j - a_{j+1}|$$

Според тоа $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j b_j\right|$ може да се направи произволно мала кога m и n се доволно големи, тоа значи дека редот $\sum a_n b_n$ го задоволува општиот Кошиев критериум за конвергенција, следователно редот е конвергентен.

(б)

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j - a_{j+1}| = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots + a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}$$

тоа значи дека редот $\sum|a_n - a_{n+1}|$ е конвергентен и од условот имаме дека a_n и $a_{n+1} \to 0$ кога m и $n \to \infty$.

Од условот за низата $\{a_n\}$ имаме $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ и $a_n \to 0$ кога $n \to 0$ од тука следи дека

$$\sum_{j=n}^{\infty} |a_j - a_{j+1}| = \sum_{j=n}^{m-1} (a_j - a_{j+1}) =$$

$$= (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{m-1} - a_m) = (a_n - a_m)$$

Ако n и $m \to \infty$ тогаш $a_n \to 0$ и $a_m \to 0$.

Со тоа пак покажавме, дека редот $\sum a_n b_n$ го задоволува општиот Кошиев критериум за конвергенција. (се разбира и под (б), $|s_j| \leq B$

Критериум Абел. Да претпоставиме, дека редот $\sum b_n$ е конвергентен, а низата $\{a_n\}$ е конвергентна и монотона, тогаш редот $\sum a_n b_n$ е конвергентен.

Доказ. Заради определеност ќе земеме низата $\{a_n\}$ да е монотоно растечка, која конвергира кон бројот a. Бидејќи парцијалните суми s_k на редот $\sum b_n$ конвергираат кон сумата s, за дадено $\varepsilon > 0$ постои индекс $N(\varepsilon)$ таков што, ако $m \geq n \geq N(\varepsilon)$, тогаш

$$|a_m s_m - a_n s_{m-1}| \leq |a_m s_m - as| + |a_n s_{n-1} - as| < 2\varepsilon$$

Од конвергентноста на низата $\{s_k\}$ следи дека таа е ограничена, па постои број М таков што $|s_k| \leq M$ за секој природен број к. Тогаш

$$\left|\sum_{j=n}^{m-1} s_j(a_j - a_{j+1})\right| \leq M|a_n - a_m| (\text{ заради монотоноста}).$$

Јасно од конвергенцијата на $\{a_n\}$ следи дека $M|a_n - a_m|$ може да се направи произволно мало ако m и n се доволно големи (општиот Кошиев критериум).

Од Абеловата лема, како и од доказот на критериумот на Дирихле следи дека редот $\sum a_n b_n$ го задоволува критериумот на Коши, значи е конвергентен .

Постои една важна класа на условно конвергентни редови: тоа се таканаречените алтернативни редови:

Дефиниција 1 Ред од видот

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

каде што сите a_n се ненегативни броеви се вика алтернативен ред. Ознака $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Конвергенцијата на алтернативен ред е лесно да се испита, ако може да се примени следниот критериум на Лајбниц.

Критериум за конвергенција на алтернативни редови

Нека $\{a_n\}$ е монотоно не растечка низа од позитивни броеви така што $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Тогаш алтернативниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ е конвергентен. Освен тоа, ако s е сумата на редот и s_n е n –та парцијална сума, тогаш важи оценката

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

Доказ. Ако ставиме $b_n = (-1)^n$, тогаш секоја парцијална сума s_j од редот $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j$ е еднаква или на -1 или на 0 или на 1, што значи парцијалните суми на овој ред се ограничени, а како низата $\{a_n\}$ монотоно опаѓа и конвергира кон 0 со примена на критериумот на Дирихле под (б) добиваме дека таков алтернативен ред е конвергентен.

Меѓутоа ќе дадеме директен доказ од кој што ќе следи оценката. Нека s_n и s_m каде $n < m$ се две парцијални суми на редот тогаш

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{m-n-1}a_m| \qquad (*)$$

Ваквиот запис е лесно да се воочи, но може да се провери со индукција. Од десната страна можни се два случаи

$$|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \cdots + (-1)^m a_m| =$$

$$= |(-1)^{n+1}[a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{m-n-1}a_m]| =$$

$$= |a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{m-n-1}a_m|$$

(i) Бројот на собирците е парен
(ii) Бројот на собирците е непарен

Ако е парен, тогаш пред a_m е знакот минус и бидејќи низата $\{a_n\}$ е монотоно опаѓачка и нејзините членови се ненегативни очигледно е дека збирот

$$(a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots + (a_{m-1} - a_m) \geq 0.$$

Сега постапуваме на следниот начин:

$$a_{n+1} - [(a_{n+2} - a_{n+3}) + \ldots + (a_{m-2} - a_{m-1})] - a_m$$

од тука се гледа дека збирот е помал од a_{n+1} значи важи

$$|s_m - s_n| \leq a_{n+1}$$

Ако бројот е непарен тогаш слично имаме

$$a_{n+1} - [(a_{n+2} - a_{n+3}) + \ldots + (a_{m-2} - a_{m-1})] \leq a_{n+1}$$

Значи и во овој случај го добиваме истото неравенство

$$|s_m - s_n| \leq a_{n+1}$$

Од добиеното неравенство бидејќи низата конвергира кон нула, следи дека важи општиот Кошиев критериум од што следи неговата конвергенција.

Исто така, ако во неравенството пуштиме $m \to \infty$ тогаш $s_m \to s$ и можеме да напишеме

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

Со тоа директниот доказ е завршен.

Пример1. Редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

е алтернативниот хармониски ред, кој што на база Лајбницовиот критериум е конвергентен, но како што знаеме не е апсолутно конвергентен.

Истото важи и за редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Пример 2. Нека x е реален број различен од $2\pi k$, каде што k е цел број. Тогаш со помош на идентитетот

$$2coskxsin\frac{x}{2} = \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \sin(k + \frac{1}{2})x$$

се добива

$$2sin\frac{x}{2}[cosx + \cdots + cosnx] = sin\frac{x}{2} - \sin(n + \frac{1}{2})x$$

од тука

$$cosx + \cdots + cosnx = \frac{sin\frac{x}{2} - \sin(n + \frac{1}{2})x}{sin\frac{x}{2}}$$

Сега непосредно следи неравенството

$$|cosx + \cdots + cosnx| \leq \frac{1}{\left|sin\frac{x}{2}\right|}$$

Го разгледуваме редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosnx}{n}$$

Тогаш со критериумот на Дирихле под (б) следи дека дадениот ред е конвергентен за секое $x \neq 2k\pi$.

Пример3. Нека $x \neq 2k\pi$. Со примена на идентитетот од тригонометријата

$$2sinkxsin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} - \cos(k + \frac{1}{2})x$$

добиваме

$$sinx + \cdots + sinnx = \frac{cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}}$$

од тука следи неравенството

$$|sinx + \cdots + sinnx| \leq \frac{1}{|sin\frac{x}{2}|}$$

Сега го разгледуваме редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{n}$$

Критериумот на Дирихле ни кажува, дека редот конвергира за секое $x \neq 2k\pi$, за k цел број.

Со овие два реда ќе се сретнеме и кај тригонометриските редови.

Задачи

1. Нека $\sum a_n$ е конвергентен ред. Тогаш испитај дали редот $\sum b_n$ е конвергентен или најди контра пример ако b_n е:

$(1)\ \frac{a_n}{n}$ $(2)\ a_n sinn$ $(3)\ n^{1/n}a_n$ $(4)\ \frac{\sqrt{a_n}}{n}\ (a_n \geq 0)$

$(5)\ \sqrt{\frac{a_n}{n}}(a_n \geq 0)$ $(6)\ \frac{a_n}{1 + |a_n|}$

2. Испитај ја конвергенцијата или дивергенцијата на редовите со општ член:

$(i)\quad \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$(ii)\quad \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

$(iii)\quad 2^{-\frac{1}{n}}$

(iv) $\frac{n}{2^n}$

(v) $[n(n+1)]^{-\frac{1}{2}}$

(vi) $[n^2(n+1)]^{-1/2}$

(vii) $\frac{n!}{n^n}$

(viii) $(-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

3. Дискутирај ја конвергенција или дивергенцијата на редовите чиј што n –ти член е :

$(i) 2^n e^{-n}$

$(ii)\ n^n e^{-n}$

$(iii) e^{-logn}$

$(iv)\ logne^{-\sqrt{n}}$

$(v)\ n!\, e^{-n}$

(Одговор : $(i)\left(\dfrac{2}{e}\right)^n$, (ii) Со Кошиев критериум дивер., $(iii)\exp(-logn) = \frac{1}{n}$ (дивер.)

(4) Конвер.(Кошиев критериум)

(5) (Даламбер дивергира)

(6) (Даламбер конвергира).

4. Покажи со споредување со редот

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

дека редот

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3}$$

конвергира, но не дава одговор ниту критериум на Коши ниту на Даламбер.

6. Ако a и b се позитивни броеви, тогаш

$$\sum \frac{1}{(an+b)^p}$$

конвергира за $p > 1$ и дивергира за $p \leq 1$

упатство

$$\int_{n}^{m} \frac{dx}{(ax+b)^p}$$

со смената $ax + b = t$ се добива дека интегралот тежи кон нула кога $n, m \to \infty$ ако $p > 1$.

Според тоа интегралниот критериум дава одговор.

(7) Да се испита конвергенцијата на следните редови чии што n —ти член е :

$$(i)\ (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\ (ii)\ \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\ (iii)\ (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^n} \quad \text{(iv)}\ \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

Кон (i): $\dfrac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n (n+1)} = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n (n+1)}$.

Познато е дека низата $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n (n+1)$ монотоно расте (да го спомнеме бројот е). Според тоа можеме да заклучиме, дека $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ монотоно опаѓа кон 0.

Со примена на Лајбницовиот критериум заклучуваме дека редот конвергира.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{e}.$$

Од граничниот критериум на споредување, во случајов со хармонскиот ред, следи дека редот е дивергентен.

8. Со критериумот на Даламбер покажи дека редот со општ член

$$\frac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$$

е конвергентен.

Обопштување на граничниот дел од критериумот на Коши и од критериумот на Даламбер.

Нека е даден редот $\sum a_n$. Ја разгледуваме низата $\{|a_n|^{1/n}\}$; Од оваа низа формираме нова низа $\{\alpha_n\}$ на следниот начин:

$$\alpha_1 = sup|a_k|^{1/k} \text{ за } k \geq 1, \alpha_2 = sup|a_k|^{1/k}, \text{ за } k \geq 2, \ldots,$$

$$\alpha_n = sup|a_k|^{1/k}, \text{ за } k \geq n, \ldots,$$

Очигледно е дека низата $\{\alpha_n\}$ монотоно опаѓа и е ограничена од долу, на пример, со нулата. Според тоа постои $r = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_n sup\, |a_n|^{1/n}$

(i)Ако $r < 1$, тогаш редот конвергира апсолутно

(ii)Ако $r > 1$ тогаш редот е дивергентен .

Доказ за (i): нека $r < r_1 < 1$. Бидејќи r е граница за (α_n) постои индекс K таков што за $n \geq K$, $\alpha_n < r_1$ т.е $|a_n|^{1/n} < r_1$ или $|a_n| < r_1^n$ тогаш на база на критериумот на Коши заклучуваме, дека дадениот ред конвергира апсолутно.

Доказ за (ii): Ако $r > 1$ тогаш земаме $1 < r_2 < r$ како и под (i) за $n \geq K$

$|a_n| > r_2^n \to \infty$ кога $n \to \infty$, а тоа покажува деке не е задоволен потребниот услов за конвергенција на ред.

По однос на Критериумот на Даламбер ја формираме низата (β_n) на следниот начин:

$$\beta_1 = sup\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ за } n \geq 1, \beta_2 = sup\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ за } n \geq 2, \ldots,$$

Нека $r = lim\beta_n = limsup\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

(i)Ако $r < 1$ редот конвергира апсолутно.

(ii)Ако $r > 1$ редот е дивергентен.

Доказ за (i): Нека $r < r_1 < 1$ тогаш постои природен број К таков што $\beta_n < r_1$ за $n \geq K$ или $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r_1$ за $n \geq K$. Понатаму доказот оди потполно исто како при доказот за критериумот на Даламбер кој го дадовме порано.

Со овие два резултата ќе се сретнеме исто така, и кога ќе ги изучуваме степенските редови кои се дел од функционалните редови.

На крај од овој дел ќе ја дадеме Ојлеровата константа: Нека ја посматраме низата со општ член

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \log \frac{\exp(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})}{n}$$

$$c_{n+1} = \frac{\exp \sum_{1}^{n+1} \frac{1}{k}}{n+1} = \log \frac{\exp \sum_{1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \exp \frac{1}{n+1}}{n+1} < \log \frac{\exp \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}}{n} \cdot \frac{\exp \frac{1}{n+1}}{n+1} < c_n$$

Според тоа низата (c_n) монотоно опаѓа и затоа постои

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k+1}^{m} \frac{1}{k} - \log n \right) = C .$$

Константата C е Ојлеровата константа и приближно е еднаква на 0,577.

6 Бесконечни производи

Иако бесконечните производи не се среќаваат толку често како бесконечните редови, тие се од интерес во многу теоретски испитувања и примени. Посебно имаат свое место во теоријата на комплексните функции. Тука презентираме еден краток приказ за нив.

Дефиниција 1 Ако се дадени броевите $a_1, \dots, a_n$ тогаш нивниот производ $a_1 \dots a_n$ вообичаено се означува со

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

Ако е дадена бесконечна низа (a_k), тогаш аналогно на броен ред пишуваме бесконечен производ со помош на операторот Π на следниот начин

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (1)$$

Ова претставува само ознака, симбол тоа значи не асоцира никаков број, значи потполно аналогно како бесконечна сума–редот. Со истата аналогија продолжуваме и овде: Ја разгледуваме низата (p_n) каде $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$

Членовите на оваа низа се викаат парцијални производи за бесконечниот производ. Се разбира, ако некој член $a_k = 0$ тогаш велиме дека производот е еднаков на нула. Затоа интересно е да се анализира низата од парцијалните производи, ако нејзините членови p_n се различни од нула.

Дефиниција 2 Ако низата (p_n) е конвергентна при што $lim p_n = p$ и $p \neq 0$,

тогаш велиме дека бесконечниот производ постои или е конвергентен и пишуваме $p = \prod_{k=1}^{\infty} a_k$

Ако $p = 0$ тогаш се вели, дека производот дивергира кон нула.

Во примената на бесконечниот производ треба да се има во предвид следниот факт: Ако конечен број од членовите во производот се еднакви на нула, а бесконечниот производ од ненултите членови конвергира кон некој број различен од нула, тогаш се вели дека таквиот производ конвергира кон 0. Ако $p_n \neq 0$, а $lim p_n = 0$ тогаш велиме дека производот дивергира.

Примери: (i) $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)$,

$$p_n = (1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\ldots\frac{n+1}{n} = n+1$$

Бидејќи $p_n \to \infty$ кога $n \to \infty$ заклучуваме дека овој производ не е конвергентен.

(ii) $\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)$,

$$p_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\ldots\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Според тоа $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim\frac{1}{n} = 0$ па од дефиницијата овој производ конвергира кон 0.

(iii) $\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, $p_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$

Од (i) и (ii) добиваме дека $p_n = \frac{n+1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$ што значи производот е конвергентен со граница 1 и можеме да напишеме $\prod_{2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = 1$

$$\prod_{\kappa=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\kappa^2}\right)=\left(1-\frac{1}{1^2}\right)\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

За овој производ, како што кажавме погоре, заклучуваме дека конвергира кон 0.

Ако $\prod_1^\infty a_k$ е конвергентен, тогаш $p_n \neq 0$ и $p_n \to p \neq 0$, но и $p_{n-1} \to p$ ако $n \to \infty$.

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} p_n}{\lim\limits_{n\to\infty} p_{n-1}} = 1$$

Заради овој факт најчесто бесконечните производи се запишуваат во форма

$\prod_1^\infty (1+u_n)$, каде што $u_n \to 0$ кога $n \to \infty$ на основа на претходното.

Сега ќе дадеме една лема.

Лема. Ако $u_1, \dots, u_n$ се броеви и ако

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\ p^*{}_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|) \tag{1}$$

тогаш

$$p_n^* \leq \exp(|u_1|+\dots+|u_n|) \tag{2}$$

и

$$|p_n - 1| \leq p_n^* - 1. \tag{3}$$

Доказ. Редот $1+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$ лесно се покажува, на пример, со Даламбер дека конвергира. Од друга страна Тајлоровата формула во 0 за функцијата $\exp(x)$ како што знаеме од функциите од една променлива е:

$$\exp x = 1+\frac{x}{1!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$0 < c < x$, ако $x > 0$ или $x < c < 0$, за $x < 0$

За секој x од некој интервал на нулата да речеме $(-a, a)$ имаме

$$\frac{e^{c}}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \quad \frac{e^{a}}{(n+1)} \cdot a^{n+1}$$

Последниот израз тежи кон 0 и од тука имаме

$$\lim_{n\to\infty}(e^{x} - \frac{e^{c}}{(n+1)!}x^{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{n}\frac{x^{k}}{k!}$$

од каде

$$e^{x} - \lim_{n\to\infty}\frac{e^{c}}{(n+1)!}x^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k}}{k!}$$

$$e^{x} - 0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}$$

$$x \in (-a, a)$$

За $x = 1$ добиваме $e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ $(0! = 1)$

Ако $x \geq 0$ од редот за $exp(x)$ имаме $1 + x \leq e^{x}$. Ако наместо x ставаме $|u_1|, \dots, |u_n|$ $1 + |u_1| \leq \exp(|u_1|)$

....

....

$$1 + |u_n| \leq \exp(|u_n|)$$

со множење на левите и десните страни добиваме

$$\prod_{k}^{n}(1 + |u_k|) \leq \exp(|u_1| + \dots + |u_n|)$$

или

$$p_n^{*} \leq \exp(|u_1| + \dots + |u_n|)$$

со тоа го докажавме (2).

За $n = 1$,

$$|p_1 - 1| = |1 + u_1 - 1| = |u_1| = p_1^{*} - 1$$

Нека претпоставиме дека неравенството (3) важи за n тогаш

$$p_{n+1}-1=p_n(1+u_n)-1=(p_n-1)(1+u_{n+1})+u_{n+1}$$

$$|p_{n+1}-1|\le|p_n-1|(1+|u_{n+1}|)+|u_{n+1}|\le(p_n^*-1)(1+|u_{n+1}|)+|u_{n+1}|=p_{n+1}^*-1.$$

Со тоа го докажавме и (3).

Следнава теорема е една од најважните теореми во бесконечните производи.

Теорема1. Нека е дадена низата (u_n) таква што $\sum|u_n|$ конвергира. Тогаш производот

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=p$ конвергира, тој е нула, ако и само ако некое $u_n=-1$. Понатаму, ако $\{n_1,n_2,...\}$ е некоја пермутација во $\{1,2,3,...\}$ тогаш

(2) $p=\prod_{1}^{\infty}(1+u_{n_k})$

Доказ. Од претпоставката, дека конвергира $\sum|u_n|$, од лемата имаме

$$|p_n|=|p_n-1+1|\le|p_n-1|+1\le p_n^*-1+1\le\exp(|u_1|+...+|u_n|)\le\exp a \qquad (*)$$

каде $a=\sum|u_n|$

Нека земеме $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. Постои индекс n_0 таков што

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}|u_n|<\varepsilon \qquad (3)$$

Нека $\{n_1,n_2,...\}$ е пермутација (преуредување) во $\{1,2,3,...\}$. Ако $n\ge n_0$ и m е доволно голем за да

(4) $\{1,2,3,...,n\}\subset\{n_1,...,n_m\}$ и ако q_m е $m-$от парцијален производ на (2), тогаш за q_m-p_n имајќи во предвид (3) и

$$\left|\prod(1+u_{n_k})-1\right|\le\prod(a+|u_{n_k}|)-1$$

бидејќи во производот $n_k\ge n_0$ и заради (2)

$$|p_n|\left|\prod(1+u_{n_k})-1\right|\le|p_n|(e^{\varepsilon}-1)$$

$$|q_m - p_n| \leq |p_n| \left|\prod(1+u_{n_k}) - 1\right| \leq |p_n|(e^{\varepsilon} - 1) =$$

$$= |p_n|\left(\frac{\varepsilon}{1} + \frac{\varepsilon}{2} + \cdots +\right) < |p_n|\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = 2|p_n|\varepsilon \leq 2e^{a}\varepsilon \qquad (5)$$

следи од (*).

Ако пермутација нема, тогаш е јасно дека $|p_n - p_m| \leq 2e^{a}\varepsilon$, а ова е општиот Кошиев критериум. Следователно производот конвергира. Исто така од (5)имаме дека

$$|p_n - p_{n_0}| \leq 2|p_{n_0}|\varepsilon, \qquad \text{за } n \geq n_0 \qquad (6)$$

$$|p_n| = |p_n - p_{n_0} + p_{n_0}| \geq |p_{n_0}| - |p_n - p_{n_0}| \geq |p_{n_0}| - 2|p_{n_0}|\varepsilon =$$

$$|p_{n_0}|(1 - 2\varepsilon)$$

каде $d = 1 - 2\varepsilon > 0$, зашто $0 < \varepsilon < 1/2$

Ако $n \to \infty$ тогаш имаме

$$\left|\prod_{1}^{\infty}(1+u_n)\right| \geq |p_{n_0}|(1-2\varepsilon)$$

и тој е нула само ако $p_{n_0} = 0$ т. е. ако некои $u_k = -1, k \leq n_0$,

Конечно, (5) покажува дека низата (q_n) конвергира кон истиот лимес како и $\{p_n\}$.

Оваа теорема, за чиј што доказ треба повеќе труд има широка примена во случај u_n да се функции реални или комплексни дефинирани на некое множество. Овој дел го завршуваме со уште една теорема .

Теорема. Да претпоставиме $0 \leq u_n < 1$.

Тогаш $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0$ ако и само ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$.

Доказ. Ако $p_n = (1-u_1)\ldots(1-u_n)$, тогаш од условот следи $p_1 \geq p_2 \geq \ldots, p_n > 0$, од тука $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$ постои. Ако $\sum u_n < \infty$, претходната теорема покажува, дека производот конвергира и границата е $p > 0$. Од друга страна,

$$p \leq p_n = \prod_1^n (1-u_k) \leq \exp(-u_1 - u_2 - \ldots - u_n),$$

последниот израз тежи кон 0 кога $n \to \infty$, ако $\sum u_n = \infty$

Забелешка. Бидејќи $0 \leq u_1 < 1$ низата $\{u_1^n\}$ монотоно опаѓа и затоа секоја сума од $\frac{u_1^2}{2!}$ натаму е позитивна, а тоа значи дека $1 - u_1 < \exp(-u_1)$ и.т.н.

Задачи

1. Покажи, дека $\prod\limits_{k=2}^{\infty}\left[1 + \frac{(-1)^k}{k}\right]$ конвергира.
2. Покажи дека ако $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ конвергира и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|^2$ конвергира, тогаш и $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ конвергира.

Глава 7

Редови од функции

Видовме кај бројните редови, дека во голема мера особините на низи од броеви се пренесуваат на редовите, затоа што редовите се дискутираат преку низите од парцијалните суми на редовите. Најкарактеристичен е во таа смисла основниот Кошиев критериум.

Потполно иста е ситуацијата меѓу низите од функции $\{f_n(x)\}$ и редовите од функции. Затоа на почеток од овој дел ќе разгледаме некои особини на низите од функции.

1 Низи од функции

Нека е дадена низата функции $\{f_n(x)\}$ и нека секоја $f_n(x)$ за $n = 1,2, \dots$ е дефинирана на множеството E од реални броеви.

Ако за секое $x \in E$ постои

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (1)$$

тогаш функцијата $f(x)$ се вика гранична функција за низата или само функција граница. Се разбира основен проблем е изучувањето на особините на $f(x)$ врз база на особините на функциите од низата. На пример, ако $f_n(x)$ за $n = 1, 2 \dots$ се дефинирани на некој интервал и ако функциите од низата се непрекинати на тој интервал, дали истото важи и за нивната граница $f(x)$ или ако се тие интеграбилни, дали ќе биде интеграбилна и $f(x)$ и.т.н.

Лимесот во (1) се подразбира како лимес посебно во секоја точка и во тој случај конвергенцијата се вика точкаста или обична конвергенција. Тоа значи за дадено $x \in E$ се разгледува бројната низа $\{f_n(x)\}$ и ако за дадено $\varepsilon > 0$ постои $n_0(x)$ такво што важи

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ за } n \geq n_0$$

тогаш пишуваме

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

За друго x постапуваме на истиот начин, но при тоа да речеме за исто $\varepsilon > 0$ индексот n_0 не е ист за различни $x \in E$.

Да забележиме дека во општ случај n зависи од x и ε.

Меѓутоа ако низата е таква што за $\varepsilon > 0$ постои n_0 такво што важи

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{за } n \geq n_0 \text{ и секое } x$$

тогаш велиме, дека низата конвергира рамномерно кон $f(x)$. Фундаментален критериум за рамномерна (униформна) конвергенција на низа $\{f_n(x)\}$ е критериумот на Коши.

Кошиев критериум за рамномерна конвергенција

Нека е дадена низата $\{f_n(x)\}$ и нека $f_n(x)$, за $n = 1,2,\ldots$ се дефинирани на множеството E од R. За низата велиме, дека конвергира рамномерно, ако за дадено $\varepsilon > 0$ постои индекс n_0 така што за $m, n \geq n_0$ важи

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ за секое } x \in E \qquad (2)$$

Неравенството (2) за секое фиксно $x \in E$ е Кошиевиот критериум за бројна низа и следователно ако $m \to \infty$ имаме $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ за $n \geq n_0$. Но како тоа важи за секое x следи рамномерната конвергенција. Граничната функција $f(x)$ на рамномерна конвергентна низа задржува многу важни особини од функциите на низата: на пример ако $|f_n(x)| \leq M$ за секое n и секое x тогаш и $|f(x)| \leq M$, ако $f_n(x)$ се непрекинати тогаш и $f(x)$ е непрекината и.т.н. Тука ќе докажеме една многу корисна теорема која се однесува на диференцирањето на низата од функции.

Теорема1. Нека $\{f_n(x)\}$ е низа од функции дефинирани на интервалот $J \subset R$. Да претпоставиме, дека постои точка $x_0 \in J$ така што низата $\{f_n(x)\}$ конвергира. Ако изводите f_n' постојат на J и ако низата $\{f'_n(x)\}$ конвергира рамномерно на J кон функцијата $g(x)$, тогаш низата $\{f_n(x)\}$ конвергира рамномерно на J кон функција $f(x)$ која што има извод во секоја точка од интервалот и притоа $f'(x) = g(x)$.

Доказ. Нека $J = (a,b)$ и нека $x \in (a,b)$. Нека m и n се природни броеви, ја применуваме теоремата за средна вредност на разликата $f_m - f_n$ на интервалот $[x_0, x]$ и добиваме

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)[f_m'(y) - f_n'(y)],$$

каде $x_0 < y < x$.

Од тука имаме

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b-a)|f_m'(y) - f_n'(y)|$$

Бидејќи десната страна од неравенството конвергира рамномерно на J следи дека и левата страна конвергира рамномерно. Нека:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Бидејќи функциите $f_n(x)$ се непрекинати (секоја диференцијабилна функција е непрекината) од рамномерната конвергенција следи дека $f(x)$ е непрекината на интервалот J. За да покажеме, дека $f(x)$ има извод во точката $c \in J$, ја применуваме теоремата за средна вредност на разликата $f_m - f_n$ на интервалот $[c, x]$ и добиваме

$$[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(c) - f_n(c)] = (x-c)[f_m'(v) - f_n'(v)]$$

каде $c < v < x$.

Ако $c \neq x$, имаме

$$\left|\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| = |f_m'(v) - f_n'(v)|$$

Бидејќи

$$|f_m'(v) - f_n'(v)| = |f_m'(v) - g(v) - f_n'(v) + g(v)| \le$$

$$\le |f_m'(v) - g(v)| + |f_n'(v) - g(v)| < 2\varepsilon$$

за дадено $\varepsilon > 0$ и m и n доволно големи.

Ако $m \to \infty$ тогаш $f_m(x) \to f(x)$ и $f_n(c) \to f(c)$ затоа

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| \le 2\varepsilon, \text{ за } n \ge n_0$$

Понатаму

$$\frac{f(x) - f(c)}{x-c} - g(c) = \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c} - g(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}$$

од каде следи дека

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x-c} - g(c)\right| \le$$

$$\left|\frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c} - g(c)\right| + \left|\frac{f(x) - f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right|$$

$$\leq \left| \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - g(c) \right| + 2\varepsilon$$

Ако $|x - c| < \delta$ тогаш од условот следи

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - g(c) \right| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$$

што значи

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) = 0$$

Од произволноста на c следи дека $f'(x) = g(x)$

2 Редови од функции

Сега преминуваме на дефинирањето и проучувањето на редовите чии што членови се функции најчесто дефинирани на некој интервал од R, ако пак функциите се од две или повеќе променливи, тогаш тие се определени на некоја област од соодветниот простор.

Ред од функции симболично се запишува на следниот начин

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \qquad (1)$$

или накратко со операторот $\sum$ на следниот начин

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (2)$$

или само

$$\sum f_n(x)$$

И во овој случај исто како кај бројните редови, ја формираме низата од парцијалните суми:

$$s_1(x) = f_1(x)$$

$$s_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

Ако функциите $f_n(x)$ се дефинирани на некој интервал $a \leq x \leq b$, тогаш низата $\{s_n(x)\}$ од парцијалните суми може во некои точки да конвергира во некои не. Ако низата $\{s_n(x)\}$ конвергира тогаш велиме дека редот од функции во точката x е конвергентен и пишуваме

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Ако редот конвергира во секоја точка x од интервалот тогаш имаме функција $f(x)$ дефинирана на интервалот со помош на дадениот ред од функции. Се разбира особините на функцијата сума $f(x)$ пред се зависат од особините на функциите $f_n(x)$, а и од интервалот на кој што се дефинирани.

Ако редот $\sum |f_n(x)|$ конвергира за секое x од интервалот тогаш велиме дека редот од функции $\sum f_n$ апсолутно конвергира. Ако низата $\{s_n(x)\}$ конвергира рамномерно кон f на интервалот, тогаш велиме дека редот конвергира рамномерно кон функцијата $f(x)$.

Презентираме неколку теореми во врска со конвергенцијата на ред од функции.

Теорема 1 Ако $f_n(x)$ *за* $n = 1, 2, \ldots$ се непрекинати функции на некој интервал и ако редот $\sum f_n(x)$ конвергира рамномерно кон $f(x)$ тогаш и граничната функција $f(x)$ е непрекината.

Доказот е потполно ист како кај низите од функции.

Теорема 2 Нека $f_n(x)$ се интеграбилни функции на интервалот $a \leq x \leq b$. Ако редот $\sum f_n(x)$ конвергира рамномерно кон $f(x)$, тогаш $f(x)$ е исто така интеграбилна и важи релацијата

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Доказот се изведува како кај низите: било со интегралите на Дарбу или со Римановите суми користејќи го основниот критериум за конвергенција.

Теорема 3 Ако $f_n(x)$ се ненегативни интеграбилни функции на интервалот $a \leq x \leq b$ и ако нивната сума $f(x) = \sum f_n(x)$ е интеграбилна, тогаш

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Теорема 4 Нека $f_n(x)$ *за* $n = 1, 2, \ldots$ имаат извод на некој интервал J. Нека претпоставиме, дека редот $\sum f_n(x)$ конвергира барем во една точка од интервалот и нека редот $\sum f_n'(x)$ е рамномерно конвергентен. Тогаш редот $\sum f_n(x)$ конвергира рамномерно кон функцијата $f(x)$ која што е диференцијабилна на интервалот и важи

$$f'(x) = \sum f_n'(x)$$

Доказот на оваа теорема е истиот како при низите од функции.

3 Критериуми за рамномерна конвергенција

Општиот Кошиев критериум веќе го дискутиравме. Сега даваме еден едноставен и многу практичен критериум.

Критериум на Ваерштрас. Нека $\{M_n\}$ е низа од ненегативни броеви и нека $|f_n(x)| \leq M_n$ за $n = 1, 2, \ldots$ за секое x од некое множество E од R. Ако конвергира редот $\sum M_n$, тогаш редот од функции конвергира рамномерно на E.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$, од конвергенцијата на редот $\sum M_n$ следи, дека постои индекс N таков што за $m > n$ и $m, n \geq N$ важи неравенството $M_n + \ldots + M_m < \varepsilon$. Од

$$|f_n(x) + \ldots + f_m(x)| \leq |f_n(x)| + \ldots + |f_m(x)| \leq M_n + \ldots + M_m < \varepsilon$$

за секое $x \in E$ следи дека важи Кошиевиот критериум за рамномерна конвергенција на дадениот ред.

Критериум на Дирихле. Нека $\{f_n\}$ е низа од функции на некој интервал J од R, така што парцијалните суми

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$$

за $n = 1, 2, \ldots$ се ограничени на J. Нека $\{\varphi_n\}$ е монотоно опаѓачка низа од функции на J која конвергира рамномерно кон 0 на E, тогаш редот $\sum \varphi_n f_n$ конвергира рамномерно на E.

Доказ. Според лемата на Абел за парцијално сумирање имаме

$$\sum_{n}^{m} f_j(x)\varphi_j(x) = s_m(x)\varphi_m(x) - s_{n-1}(x)\varphi_n(x) + \sum_{n}^{m-1} s_j(x)\left(\varphi_j(x) - \varphi_{j+1}(x)\right)$$

нека $|s_j(x)| \leq M$ за секое $x \in J$ и секое j.

Тогаш

$$\left|\sum_{n}^{m} f_j(x)\varphi_j(x)\right|$$

$$\leq |s_m(x)\varphi_m(x)| + |s_{n-1}(x)\varphi_n(x)| + \left|\sum_{n}^{m-1} s_j(x)\left(\varphi_j(x) - \varphi_{j+1}(x)\right)\right|$$

$$\leq M(|\varphi_m(x)| + |\varphi_n(x)|) + M|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|.$$

Бидејќи низата $\{\varphi_n\}$ рамномерно конвергира кон 0 на J, следи дека последната сума може да се направи помала од дадено $\varepsilon > 0$ за секое $x \in J$, ако m и $n \geq N$, т.е.

$$\left|\sum_{n}^{m} f_j(x)\varphi_j(x)\right| < \varepsilon \text{ за } m \text{ и } n \geq N$$

Со тоа покажавме дека за редот $\sum f_j\varphi_j$ е задоволен критериумот на Коши за рамномерна конвергенција.

Пример1. Нека го разгледаме редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m}{n^2}$$

Ако $|x| \leq 1$, тогаш $\left|\frac{x^2}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ бидејќи бројниот ред $\sum \frac{1}{n^2}$ е конвергентен, според критериумот на Ваерштрас следи дека редот $\sum \frac{x^2}{n^2}$ е рамномерно конвергентен на интервалот $[-1, 1]$.

Пример2. Редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

е добиен со диференцирање на член по член од примерот 1. Критериумот на Ваерштрас во овој случај не можеме да го примениме. За $x = 1$ се добива хармонискиот ред кој што е дивергентен. Меѓутоа на секој подинтервал $[-r, r]$

$$\left|\frac{x^{n-1}}{n}\right| \leq \frac{r^{n-1}}{n},$$

а тоа значи дека на секој таков подинтервал редот е рамномерно конвергентен и според теоремата за диференцирање на редови следи дека редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} = f(x)$$

може член по член да се диференцира на секој подинтервал $(-r, r)$ каде $r < 1$. Бидејќи r можеме да го земеме произволно блиску до 1 заклучуваме дека $f(x)$ има извод на отворениот интервал $(-1, 1)$ при што

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

истото важи и за вториот извод на интервалот $(-1, 1)$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n}$$

и.т.н.

Пример3. Со директна примена на критериумот на Ваерштрас $(со\ M_n = \frac{1}{n^2})$

се покажува дека редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{n^2}$$

е рамномерно конвергентен за секое $x \in R$.

Од друга страна за редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{n}$$

не можеме да го примениме критериумот на Ваерштрас. Ако е даден интервал $J = [a, b]$ при што $0 < a < b < 2\pi$, тогаш редот на интервалот J конвергира рамномерно.

Доказ. На интервалот J парцијалните суми $s_n = \sum_{k=1}^{n} sinkx$ се ограничени со $min\left\{\frac{1}{sina/2}, \frac{1}{sinb/2}\right\}$ бидејќи низата $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотоно тежи кон 0 критериумот на Дирихле ни кажува дека редот рамномерно конвергира на J.

Пример4. Го разгледуваме редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$$

на интервалот $0 \leq x \leq 1$. Низата

$$\left\{\frac{e^{-nx}}{n}\right\}$$

е монотоно опаѓачка и рамномерно конвергира кон 0. Парцијалните суми на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

се

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

кои очигледно се ограничени. Според тоа може да се примени критериумот на Дирихле значи редот рамномерно конвергира.

4 Степенски редови

Степенските редови се една важна класа на редови од функции кои имаат особини какви што ги немаат општите редови на функции.

Дефиниција 1 Редот од функции $\sum f_n$ велиме, дека е степенски ред околу точката c, ако функциите f_n може да се претстават во облик $f_n(x) = a_n(x-c)^n$, каде што a_n *и* c се дадени броеви за $n = 0, 1, 2$ ... Според тоа степенскиот ред почнува од $n = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

Заради поедноставно пишување ние ќе ги разгледуваме степенските редови околу $0, т. е$ *за* $c = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

Со тоа не се губи ништо од општоста, зашто ако ставиме $u = x - c$ тогаш го разгледуваме редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$$

и ако на пример новиот ред конвергира за некое u_0, тоа ќе значи дека редот околу c конвергира во точката $x - c = u_0$ и обратно.

Иако функциите кои фигурираат во степенскиот ред се дефинирани секаде на R, сепак не можеме да очекуваме дека редот е конвергентен за секое x *од* R. На пример, со критериумот на Даламбер, лесно е да се провери за редовите:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n, \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

дека конвергираат за x од множествата: $\{0\}$ за првиот, ако $|x| < 1$ за вториот и R за третиот ред.

Очигледно множеството од сите x за кои што редот конвергира зависи од коефициентите a_n *за* $n = 0, 1, 2, \ldots$ на редот. Клучна улога во определувањето на множеството од R на кое конвергира степенскиот ред игра низата $\left\{|a_n|^{\frac{1}{n}}\right\}$.

Дефиниција 2 Нека $\sum a_n x^n$ е степенски ред. Ако низата $\left\{|a_n|^{\frac{1}{n}}\right\}$ е ограничена тогаш ставаме $\rho = \lim sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$, ако низата не е ограничена тогаш ставаме $\rho = \infty$. Дефинираме радиус R на конвергенција за редот $\sum a_n x^n$ со:

$R = 0$, *ако* $\rho = \infty$

$R = \frac{1}{\rho}$, *ако* $0 < \rho < \infty$

$R = \infty$, *ако* $\rho = 0$

Интервалот на конвергенција за редот е $(-R, R)$.

Сега ќе го образложиме поимот „радиус на конвергенција".

Теорема на Коши-Адамар. Ако R е радиус на конвергенција за редот $\sum a_n x^n$, тогаш редот е апсолутно конвергентен за $|x| < R$, и е дивергентен за $|x| > R$.

Доказ. Го разгледуваме случајот $0 < R < \infty$. Нека $|x| < R$ и x е фиксно. Се разбира постои r такво што $|x| < r < R$. Бидејќи $\rho = \frac{1}{R} < \frac{1}{r}$ од дефиницијата за ρ постои индекс n_0 така што важи

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{r}, за\, n \geq n_0,$$

$$|x| \cdot |a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{|x|}{r} = c < 1, (|x| < r)$$

од каде $|a_n|\,|x|^n < c^n$ $за\, n \geq n_0$ и бидејќи редот

$$\sum_{n_0}^{\infty} c^n$$

е конвергентен, според критериумот на споредување следи, дека конвергира редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|x|^n$$

т.е дадениот ред конвергира апсолутно, а како што знаеме тогаш конвергира и редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Нека сега земеме $|x| > R$, постои p такво што, $R < p < |x|$ $или\, \rho = \frac{1}{R} > \frac{1}{p}$, од некое n_0 имаме

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{p}\; за\, n \geq n_0$$

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}|x| > \frac{|x|}{p} = c > 1\; или\; |a_n||x|^n > c^n\; за\, n \geq n_0$$

а тоа значи, дека n –от член на редот $\sum a_n x^n$ тежи кон бесконечност, што значи, не е задоволен потребниот услов за конвергенција. Според покажаното можеме да заклучиме, дека степенскиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

е апсолутно конвергентен за $-R < x < R$ и е дивергентен за секое $|x| > R$.

Теоремата на Коши-Адамар не дава никаква информација за крајните точки $(-R, R)$ на интервалот кој уште се вика интервал на конвергенција за дадениот ред. Навистина, нека ги разгледаме следниве три реда:

$$\sum x^n \quad (\textit{каде } a_n = 1 \textit{ и } n = 0, 1, \dots),$$

$$\sum \frac{1}{n} x^n \quad \left(\textit{каде } a_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots\right)$$

и

$$\sum \frac{1}{n^2} x^n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

следи од теоремата, дека трите редови имаат ист интервал на конвергенција $(-1, 1)$. Меѓутоа: првиот е дивергентен и во -1 и во 1, вториот е дивергентен во 1 зашто $\sum \frac{1}{n}$ е дивергентен, но е конвергентен во -1, зашто $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ е конвергентен според критериумот на Лајбниц, а додека третиот ред е конвергентен и тоа апсолутно и во -1 и во 1, на пример според интегралниот критериум.

Во врска со овие три примери, го потсетуваме читателот, дека ако една низа има лимес (е конвергентна), тогаш лимесот е еднаков со лимес супериор и со лимес инфериор. Таков е случајот со коефициентите на дадените три случаи.

Нека, сега претпоставиме дека $\rho = 0$ тогаш ставаме $R = \infty$. Во овој случај редот конвергира за секое $-\infty < x < \infty$. Навистина прво за $x = 0$ е јасно дека конвергира секој степенски ред, затоа нека $x \neq 0$, тогаш $\frac{1}{|x|} > 0$ и бидејќи $\rho = 0$ постои индекс n_0 таков што

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{|x|} \text{ или } |a_n|^{\frac{1}{n}} |x| \leq c < 1$$

од тука

$$|a_n| |x|^n \leq c^n$$

каде $0 < c < 1$. Критериумот на споредување кажува, дека редот $\sum |a_n| |x|^n$ е конвергентен. Бидејќи x го избравме произволно заклучуваме, дека редот конвергира за секое $-\infty < x < \infty$.

Го разгледуваме и случајот кога $\rho = \infty$ $(R = 0)$. Нека $x \neq 0$ *и* $\frac{1}{x} < \rho$ (*зошто* $\rho = \infty$), постои индкс n_0 таков што $|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{|x|}$ *за* $n \geq n_0$, од тука $|a_n||x|^n > 1$, што покажува дека општиот член $a_n x^n$ не тежи кон 0, според тоа редот $\sum a_n x^n$ е дивергентен за секое x, зошто x го зедовме произволно. Ваквите редови конвергираат само во 0.

Ако постои

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$$

тогаш R е радиус на конвергенција. Навистина критериумот на Даламбер вели, ако

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x||a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}} = c < 1,$$

од каде следи, ако $|x| \cdot \frac{1}{R} < 1$ т.е. $|x| < R$ тогаш редот е апсолутно конвергентен, ако $c > 1$, тогаш според критериум на Даламбер редот дивергира. Според тоа за $|x| > R$ редот е дивергентен.

Од тука заклучуваме, дека R е радиус на конвергенција.

Теорема 1 Нека R е радиус на конвергенција на $\sum a_n x^n$ и нека $0 < r < R$. Тогаш редот конвергира апсолутно и рамномерно на интервалот $[-r, r]$.

Доказ. Бидејќи $0 < r < R$ според теоремата на Коши-Адамар редот $\sum |a_n| r^n$ е конвергентен. За $|x| \leq r$ имаме

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n \text{ за } n = 1, 2, \ldots$$

со примена на критериумот на Ваерштрас следи дека $\sum a_n x^n$ конвергира рамномерно за $-r \leq x \leq r$. Од фактот што сите функции $a_n x^n$ се непрекинати произлегува дека функцијата $f(x)$ дефинирана со редот $\sum a_n x^n$ односно

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

е непрекината за $-R < x < R$, затоа што r можеме да го земеме произволно блиску до R, а тоа значи за било кое x од интервалот $(-R, R)$ постои $r < R$такво што $|x| \leq r$.

Ние сега ќе покажеме дека степенскиот ред може да се диференцира член по член во интервалот на конвергенција.

Теорема за диференцирање. Степенскиот ред, може да се диференцира член по член во интервалот на конвергенција и притоа, ако

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

тогаш

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Двата реда имаат ист радиус на конвергенција.

Доказ. Бидејќи низата $\left\{n^{\frac{1}{n}}\right\}$ е конвергентна со

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

следи, дека е ограничена. Ако претпоставиме, дека е ограничена и низата $\left\{|a_n|^{\frac{1}{n}}\right\}$ во тој случај и нивниот производ $\left\{n^{\frac{1}{n}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\right\}$ е ограничена низа,

$$limsup(n^{\frac{1}{n}}|a_n|^{\frac{1}{n}}) = limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = R.$$

Според тоа двата реда имаат ист радиус на конвергенција. Од тука следи дека, редот $\sum n a_n x^{n-1}$ е рамномерно конвергентен на секој интервал $(-r, r)$ *за* $r < R$ и бидејќи $\sum a_n x^n$ конвергира, од теоремата за диференцирање на низи од функции следи, дека

$$f'(x) = \sum n a_n x^{n-1} \quad за \quad -R < x < R$$

Треба да забележиме дека од теоремата не можеме да заклучиме ништо за крајните точки на интервалот. Ако даден ред $\sum a_n x^n$ е конвергентен во некоја од крајните точки на интервалот, тоа не мора да значи дека и редот од изводите ќе биде конвергентен.

Пример. Редот $\sum \frac{x^n}{n^2}$ чиј што радиус на конвергенција е $R = 1$, е конвергентен и во -1 и во 1 но редот од изводите

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m+1}$$

е конвергентен во -1 но не е конвергентен во 1. Ако даден степенски ред $\sum a_n x^n$ го диференцираме k –пати тогаш добиваме

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \ldots,$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k}$$

$$f^{(k)}(x) = a_k k(k-1)\ldots(k-k+1) + a_{k+1} k(k+1)\ldots(k+1-k+1)x + \ \ldots$$

$$f^{(k)}(0) = a_k \cdot k! + 0 + 0 \ldots$$

или

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \ за\ k = 0,1,2,\ldots$$

Теорема за единственост. Ако $\sum a_n x^n$ и $\sum b_n x^n$ конвергираат на некој интервал $(-r, r)$ за $r > 0$ кон иста функција $f(x)$, тогаш $a_n = b_n$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$

Претходната формула покажува дека

$$n!\, a_n = f^{(n)}(0) = n!\ b_n$$

за секое n од каде добиваме дека $a_n = b_n$ за $n = 0,1,\ldots$

5 Множење на степенски редови

Теорема 1 Нека

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ и\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

се определени на интервалот $(-r, r)$.

Тогаш нивниот Кошиев производ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

постои каде

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

и притоа

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Доказ. За дадено $-r < x < r$ и двата реда конвергираат апсолутно, според теоремата за конвергенција на производ од редови имаме дека на Кошиевиот производ членовите му се

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot b_{n-k} x^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

според тоа

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ \text{каде}\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Погоре видовме, дека ако некоја функција $f(x)$ може да се развие во степенски ред на некој интервал $(-r, r)$, тогаш функцијата има извод од било кој ред на тој интервал. Може да се помисли, дека ако некоја функција е диференцијабилна од било кој ред, тогаш може да се развие во степенски ред. Меѓутоа работите не се така едноставни.

На пример функцијата

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \text{за}\ x \neq 0 \quad \text{и}\ f(0) = 0$$

има изводи од било кој ред во нулата $f^{(n)}(0) = 0$ *за* $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ако претпоставиме, дека оваа функција има степенски ред $\sum a_n x^n$ на некој интервал $(-r, r)$ *за* $r > 0$, тогаш од формулата

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

следи, дека сите коефициенти $a_n = 0$ *и* $f(x) = 0$ за секое x што не е точно за $x \neq 0$, $e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$.

Меѓутоа, постојат применливи доволни услови кои што гарантираат постоење на степенски редови на соодветни интервали како еден едноставен пример, на основа Тајлоровата формула, можеме да го наведеме условот:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq B \text{ за } |x| < r \; u \; n = 0, 1, 2, \dots ,$$

тогаш степенскиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \, x^n$$

конвергира кон $f(x)$ за $|x| < r$. Овој резултат следи од остатокот R_n во Тајлоровата формула

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \, x^{n+1} \, за \, |x| < r$$

од каде следи

$$|R_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} \, r^{n+1} \; \leq \; \frac{\beta \, r^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \;\; кога \, n \to \infty$$

Следователно, од

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| = |R_n(x)| \to 0$$

кога $n \to \infty$ за $-r < x < r$, а тоа е доказ дека

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Како пример ќе презентираме еден елегантен и многу корисен резултат кој што се однесува на развој на функција во степенски ред.

Теорема на Бернштајн. Нека $f(x)$ е дефинирана на интервалот $[0, r]$ и има изводи од било кој ред на тој интервал. Нека претпоставиме, дека f и сите нејзини изводи се ненегативни на интервалот $[0, r]$. Ако $0 \leq x < r$, тогаш $f(x)$ може да се претстави со редот

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Доказ. Да забележиме дека изводите во 0 се од десно, но и во овој случај важи Тајлоровата формула.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n$$

Остатокот R_n го пишуваме во интегрална форма

$$R_n = \frac{x^n}{n!} \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(sr) ds$$

бидејќи сите собироци во Тајлоровата формула се ненегативни, од условот следи дека

$$f(r) \geq \frac{r^n}{n!} \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(sr) ds \qquad (*)$$

бидејќи $f^{(n+1)}(x) \geq 0$ следи дека функцијата монотоно расте и затоа

$$f^{(n+1)}(sx) \leq f^{(n+1)}(sr)$$

имајќи го во предвид последното неравенство следи

$$R_n \leq \frac{x^n}{n!} \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(sr) ds$$

од $(*)$ имаме

$$\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(sr) ds \leq \frac{n! f(r)}{r^n},$$

со замена во горното неравенство добиваме

$$R_n(x) \leq \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{n!}{r^n} f(r) = \left(\frac{x}{r}\right)^n f(r), \text{ за } 0 \leq x < r \text{ т.е. } R_n(x) \to 0$$

следователно

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ за } 0 \leq x < r$$

Многу важен резултат во врска со конвергенцијата на степенскиот ред во крајните точки од интервалот на конвергенција дал Норвешкиот математичар Абел.

Теорема на Абел. Да претпоставиме, дека степенскиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

конвергира кон $f(x)$ за $|x| < 1$ и редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

конвергира кон бројот A. Тогаш степенскиот ред конвергира рамномерно на интервалот $[0,1]$ и

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = A$$

Доказ Функцијата $g(x) = (1-x)^{-1}$ за $|x| < 1$е претставена со геометрискиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Кошиевиот производ на функциите $f(x)$ и $g(x)$ за $|x| < 1$ е даден со

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

каде коефициентите c_n се

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Од условот $A = \lim_{n\to\infty} c_n$, јасно е дека ако $0 \leq x < 1$, тогаш

$$f(x) - A = (1-x)[f(x)g(x) - A\, g(x)]$$

од каде следи

$$f(x) - A = (1-x)\left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} A x^n\right\} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(c_n - A)x^n$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено и нека N е такво што ако $n \geq N$, тогаш $|c_n - A| < \varepsilon$. Понатаму, го избираме x толку блиску до 1 така што

$$(1-x)|\sum_{n=0}^{N}(c_n - A)x^n| < \varepsilon$$

па добиваме

$$|f(x) - A| \leq (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N}(c_n - A)x^n\right| + (1-x)\sum_{N+1}^{\infty}|c_n - A|x^n <$$

$$\varepsilon + (1-x)\cdot\frac{\varepsilon x^{N+1}}{1-x} < \varepsilon + \varepsilon x^{N+1} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

од каде следи дека

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = A$$

Ако ставиме

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

тогаш функцијата е непрекината на $[0,1]$ и редот конвергира рамномерно. Една од најинтересните работи во врска со оваа теорема на Абел е тоа што теоремата сугерира припишување на граница на редови кои може да се дивергентни. На пример нека е даден редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

со него формираме степенски ред

$$\sum b_n x^n$$

Ако коефициентите b_n *за* $n = 1,2,\ldots$ се такви што степенскиот ред конвергира кон функција $f(x)$ *за* $|x| < 1$ и ако $f(x) \to b$ *кога* $x \to 1-$, тогаш велиме, дека редот $\sum b_n$ е Абел сумабилен кон b. Овој метод на сумирање на редови е еден моќен метод кој што дава многу интересни и длабоки последици. Лесно е да се покаже, дека ако дадениот ред е конвергентен тогаш тој е Абел сумабилен и неговата сума се поклопува со границата која му се препишува во смисол на Абеловото сумирање. Обратно не мора да важи.

На пример редот

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

не е конвергентен. Степенскиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad за \ -1 < x < 1$$

Бидејќи

$$\frac{1}{1+x} \to \frac{1}{2} \quad кога \ x \to 1-$$

заклучувме дека, дадениот броен ред е Абел сумабилен кон $\frac{1}{2}$.

Често се случува, ако даден ред е сумабилен во смисол на Абел, и ако некои други услови се исполнети во врска со редот, тогаш може да се докаже дека тој ред е конвергентен. Теоремите од тој вид се познати во литературата како Тауберови теореми и во многу случаи се длабоки теореми и многу тешки за доказ.

Задачи

Да се дискутира конвергенцијата и рамномерната конвергенција на редовите $\sum f_n(x)$, каде $f_n(x)$ е

(i) $(x^2+n^2)^{-1}$ (со крит. на Ваерштрас)

(ii) $(nx)^{-2}$, $x \neq$
0 $(кон. на\ R\backslash\{0\},$ $(рамномерно\ на\ секој\ подинтервал)$

(iii) $sin\frac{x}{n^2}$ $(конв. рамномерно)$

(iV) $(x^n+1)^{-1}$, $\quad x \geq 0 \quad$ (*конвер.за* $x > 1$ *и рамн.за* $x \geq a \quad a > 1$)

(V) $\quad x^n(x^n+1)^{-1}$, $\quad x \geq 0 \quad$ (*кон.за* $0 \leq x < 1$)

(VI) $(-1)^n(n+x)^{-1}$, $\quad x \geq 0 \quad$ (*конв.за секое* x. *Редот е алтернативен*).

2. Ако редот $\sum a_n$ конвергира апсолутно, тогаш редот $\sum a_n \sin nx$ конвергира апсолутно и рамномерно.

3. Определи го радиусот на конвергенција на степенскиот ред, ако општиот коефициент a_n е:

$$(i)\ \ \frac{1}{n^n}\ (одг.\infty),\ \ (ii)\ \ \frac{n^\alpha}{n!}\ (одг.0),\ \ (iii)\frac{n^n}{n!}\ \left(одг.\frac{1}{e}\right),$$

$$(IV)\ (\log n)^{-1}\ за\ n \geq 2\ (одг.1)\quad (V)\frac{(n!)^2}{(2n)!}(одг.4),\quad (VI)\ n^{-\sqrt{n}}\ (одг.1)$$

4. Докажи дека

$$\lim sup\, n^{\frac{1}{n}}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim sup\, |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Доказ. $\sqrt[n]{n} \geq 1$ за секое n од тука следи

$$sup\, n^{\frac{1}{n}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} > sup|a_n|^{\frac{1}{n}}\, за\ n \geq k$$

Од друга страна бидејќи $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ што значи за $\varepsilon > 0$ постои n_0 така што за $n \geq \mathrm{n}_0$ имаме

$$n^{\frac{1}{n}}|a_n|^{\frac{1}{n}} < (1+\varepsilon)|a_n|^{\frac{1}{n}}$$

од каде следи дека

$$limsup\, n^{\frac{1}{n}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq (1+\varepsilon) limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}$$

ако $\varepsilon \to 0$ добиваме

$$limsup\, n^{\frac{1}{n}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Од добиените две неравенства следи доказот.

5. Ако $0 < p \leq |a_n| \leq q$ за сите n, да се определи радиусот на конвергенција на редот $\sum a_n x^n$ (*одг.* 1)

6. Нека $f(x) = \sum a_n x^n$ за $|x| < R$. Ако $f(x) = f(-x)$ за сите $|x| < R$, тогаш $a_n = 0$ ако n е непарен број.

Доказ. $f^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$ за $x = 0$ имаме $f^{(n)}(0) = (-1)^n f^{(n)}(0)$

од каде ако n е непарен тогаш $(-1)^n = -1$ и

$$f^{(n)}(0) = -f^{(n)}(0)$$

т.е.

$$2f^{(n)}(0) = 0 \text{ односно } f^{(n)}(0) = 0.$$

Бидејќи

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

следи тврдењето.

7. Нека

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ за } |x| < R,$$

тогаш

$$\int_0^R f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$$

при претпоставка дека, редот од десната страна конвергира, дури и дадениот ред да не конвергира во R.

Решение: Функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $0 \leq x < R$ и затоа ако $0 < x < R$ имаме

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Последниот ред е со ист радиус на конвергенција. Тоа значи

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

е непрекината на интервалот $[0, R)$. Бидејќи по претпоставка редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{R^{n+1}}{n+1}$$

е конвергентен според теоремата на Абел за сумабилност

$$\lim_{x \to R-} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{R^{n+1}}{n+1} = P$$

тоа значи дека $F(x)$ *со* $F(R) = P,$ е непрекината функција, а интегралот е еднаков на P т.е.

$$\int_0^R f(t)dt = P.$$

Пример1. Нека ја разгледаме функцијата $\frac{1}{1+x}$. Оваа функција на интервалот $(-1,1)$ е претставена на следниот начин

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Редот

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \ldots.$$

е конвергентен според Лајбниц. Според дискусијата имаме

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \quad \text{или}$$

$$\ln(1+x)|_0^1 = \text{сумата на редот}$$

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$$

Пример 2. Нека ја разгледаме функцијата $arctgx: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to R$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$$

Радиусот на конвергенција на редот е $R = 1$.

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ \ldots$$

има исто така радиус $R = 1$ но

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ \ldots$$

е конвергентен и затоа како погоре имаме

$$\int_0^1 (arctgx)'dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ \ldots$$

од каде имаме

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ \ldots$$

8. Нека редовите $\sum a_n$ и $\sum b_n$ се конвергентни и нека $a = \sum a_n$ u $b = \sum b_n$ се конвергентни и нека нивниот Кошиев производ $\sum c_n$ е конвергентен тогаш:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab \ \ каде\ a = \sum a_n \ \ u \ \ b = \sum b_n$$

Доказ. Ги разгледуваме степенските редови $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ u $\sum c_n x^n$. Овие три степенски редови сигурно конвергираат за $|x| < 1$, бидејќи постои $M > 0$ таков што $|a_n|, |b_n|$ u $|c_n|$ се помали од M за секое n, тоа следи од нивната конвергенција. Нека

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ u\ h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

за $|x| < 1$. Бидејќи $h(x) = f(x)g(x)$ за $|x| < 1$ и бидејќи

$$\lim_{x\to 1-} h(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) \lim_{x\to 1-} g(x)$$

според теоремата на Абел

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

9. Нека претпоставиме дека $a_n \geq 0$ и нека

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

има радиус на конвергенција $R = 1$. Ако $\sum a_n$ дивергира тогаш $f(x) \to \infty$ кога $x \to 1-$. Со помош на овој резултат, докажи дека: Ако $a_n \geq 0$ и ако

$$A = \lim_{x\to 1-} \sum a_n x^n,$$

тогаш $\sum a_n$ конвергира кон А.

Нека претпоставиме, дека редот $\sum a_n$ е дивергентен, тоа значи дека парцијалните суми

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

не се ограничени т.е. не постои $M > 0$ такво што $s_n \leq M$ за секое n. Ја рзгледуваме фамилијата од сумите $\sum a_n x^n$

За да постои

$$\lim_{x\to 1-} \sum a_n x^n,$$

треба да постои број M таков што

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq M$$

за секое $0 \leq x < 1$, затоа што ако $x_1 < x_2$ тогаш

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_1}^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_2}^n$$

Бидејќи

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = M$$

имаме

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq M$$

за $x < 1$. Ако $x \to 1-$ тогаш

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = M$$

и тоа важи за секое N што е спротивно со претпоставката за дивергенција на редот. Редот $\sum a_n$ е конвергентен и притоа

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$$

Од

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

следи дека

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leq \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \mathrm{A},$$

а тоа значи дека

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq A,$$

но од друга страна е јасно дека

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

за $0 \leq x < 1$ и затоа

$$A \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Од двете неравенства следи дека $\sum a_n = A$

10. Да се определи радиусот на конвергенција на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (0 < a < b)$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = b, \text{значи } R = b\right)$$

11. Покажи дека степенскиот ред во теоремата на Абел рамномерно конвергира на интервалот $[0,1]$. (да се има во предвид дека лимесот од лево во 1 е дадениот ред).

6 Тајлорови редови

Тајлоровите редови се една многу важна класа на степенски редови. Тие заслужуваат посебен третман, бидејќи се тргнува од дадена функција определена на некој интервал и потоа се поставува прашањето при кои услови дадената функција може да се претстави со степенски ред во некоја околина на дадена точка. Поради тоа тука ќе стане збор за редови од видот $\sum a_n(x-a)^n$. Се разбира потоа сите особини кои ги дадовме за степенските редови ќе важат и за Тајлоровите редови.

Нека $f(x)$ е бесконечно диференцијабилна функција на некој интервал $(a-R, a+R)$ за $R > 0$. Како што ни е познато Тајлоровата формула за x од тој интервал е

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1} \qquad (1)$$

за $|x-a| < R$, а R_{n+1} се вика остаток во Тајлоровата формула и може да се напише во следниве форми:

1. $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad |c-a| < |x-a|$

2. $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^{n}(x-a)$

3. $R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

1. Се вика Лагранжов вид на остаток
2. Се вика Кошиев вид на остаток
3. Се вика Интегрален вид на остаток

Теорема 1 Ако $f(x)$ е бесконечно диференцијабилна на интервалот $-R < x-a < R$ и ако $R_{n+1}(x) \to 0$ кога $n \to \infty$ за секое $x \in (a-R, a+R)$, тогаш

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{за } |x-a| < R, \qquad (2)$$

Степенскиот ред во (2) се вика Тајлоров ред (околу a или во a) за функцијата $f(x)$. Кога $a = 0$ тој ред понекогаш се вика Маклоренов ред.

Формулата (2) претставува развој во Тајлоров ред (околу a).

Доказ. Нека $x \in (a-R, a+R)$ е дадено и нека $\varepsilon > 0$ тогаш од условот следи, дека постои n_0 такво што $|R_{n+1}(x)| < \varepsilon$ за $n \geq n_0$.

Според тоа

$$|f(x) - s_n(x)| = |R_{n+1}(x)| < \varepsilon$$

за $n \geq n_0$, каде

$$s_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

се парцијални суми на редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$R_{n+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Пример. Да се развие $f(x) = \mathrm{e}^x$ околу $x = 0$.

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$$

следователно

$$f^{(n)}(0) = 1$$

За било кое x,

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \text{ каде } |c| < |x|$$

Ако x се менува на ограничен интервал $(-R, R)$ тогаш

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^R}{(n+1)!}R^{n+1} \to 0$$

кога $n \to \infty$. Од тука

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \text{ за секое } x \tag{3}$$

Да забележиме дека степенскиот ред конвергира рамномерно кон e^x на секој ограничен интервал, од каде следи, дека редот може да се интегрира член по член и да се диференцира член по член според теоремата за диференцирање на функционалните редови. Слично се наоѓа дека

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ за секое } x \tag{4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ за секое } x \tag{5}$$

Задачи

1. a) Да се изведат следниве Тајлорови редови

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ .... \qquad |x| < 1$$

Погоре покажавме со Абеловата теорема за сумабилност (збирливост), дека

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ ....$$

b)

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ .... \quad |x| < 1$$

2. Покажи дека за било кое α и за $|x| < 1$ важи

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ .... + \frac{\alpha(\alpha-1)\ ...\ (\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ ...$$

овој ред се вика биномен ред.

3. Определи ги Тајлоровите редови за секоја од следниве функции во $x = 0$, и определи го радиусот на конвергенција.

(i) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$

Решение: Од Тајлоровиот развој на $\sin t$ во интегралот добиваме

$$1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} \cdots$$

со интегрирање член по член следи

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3!\,3} + \frac{x^5}{5!\,5} - \ ... \qquad R = \infty$$

(ii) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt,$ $\qquad (iii)$ a^x за $a > 0$ $\quad (IV)$ $\displaystyle\int_0^x \cos t^2 dt$

4. Определи ги Тајлоровите редови за

(i) e^x во $x = 1$

(ii) $\cos x$ во $x = \dfrac{\pi}{2}$

(iii) $\sqrt{x}$ во $x = 1$

5. Определи го степенскиот ред $\sum a_n x^n$ за $\frac{d}{dx}\frac{e^x - 1}{x}$ и заклучи дека

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

6. Со Кошиев производ за e^x и e^y покажи дека $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

7. Со помош на Кошиевиот производ на редовите за $\sin x$ и $\cos x$ покажи ги следните релации

8. $a)$ $sin^2 x + cos^2 x = 1$, $b)$ $\sin(x + y) = sinxcosy + cosxsiny$.

Со примена на соодветните операциии со степенските редови, да се определат редовите на следните функции

(i) $f(x) = (1 + x)e^{-x}$, (ii) $f(x) = e^x sinx$, (iii) $f(x) = (1 + x^2)arctgx$

$(IV) f(x) = (arctgx)^2$, (V) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{1 - x}$

9. Со диференцирање на член по член да се пресметаат сумите

(i) $\quad x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots$

(ii) $\quad 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$

(iii) $\quad x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} - \ldots$

(IV) $\quad \dfrac{x}{1 \cdot 2} + \dfrac{x^2}{2 \cdot 3} + \dfrac{x^3}{3 \cdot 4} + \ldots$

10. Со интегрирање на член по член, да се определат сумите.

$(i)\;\; x+2x^2+3x^3+\;\ldots$

$(ii)\;\; x-4x^2+9x^3-16x^{\,4}-\cdots$

$(iii)\;\; 1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\;\ldots$

Глава 8

Фуриеви редови

1. *Тригонометриски редови*

Функционалниот ред од облик

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx) \qquad (1)$$

се вика тригонометриски ред. Парцијалните суми на редот се

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k coskx+b_k sinkx)$$

за $n=0,1,\ldots$

$s_n(x)$ се викаат тригонометриски полиноми и очигледно тие се периодични функции со периода 2π.

Тригонометриските редови имаат суштинска улога во испитувањето на периодичните феномени кои се среќаваат во сите природни науки. Тие исто така имаат централно место во математичката анализа. Основен проблем е валидноста на формулата

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx) \qquad (2)$$

за $x\in[-\pi,\pi]$.

Коефициентите a_nи b_n се реални, исто така и функцијата f е реална.

Збирот на редот од десната страна на (2), ако конвергира има периода 2π, затоа е логично да претпоставиме дека и $f(x)$ е периодична со период 2π т.е.

$f(x)=f(x+2\pi)$.

Ние секогаш ќе претпоставуваме, дека f е Риман интеграбилна на $[-\pi,\pi]$.

Со помош на формулите

$$2cos\alpha sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

$$2sin\alpha sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)$$

$$2cos\alpha cos\beta = \cos(\alpha+\beta) - cos(\alpha-\beta)$$

добиваме дека за ненегативни цели броеви m и n

$$\int_0^{2\pi} sinmx \cdot cosnxdx = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} sinmx \cdot sinnxdx = \begin{cases} 0 & \text{ако } m \neq n \\ 1, & \text{ако } m = n \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} cosmx \cdot cosnxdx = \begin{cases} 0, & \text{ако } \quad m \neq n \\ 1, & \text{ако } m = n \geq 1 \\ 2, & \text{ако } m = n = 0 \end{cases}$$

Да се потсетиме на уште една формула за понатаму, имено ако $f(x)$ е периодична функција со период 2π, тогаш важи

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Имено $\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_a^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx$, во вториот интеграл ставаме смена $t = x - 2\pi$ од каде се добива дека $\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_0^a f(t + 2\pi)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$

во последниот интегррал се користи периодичноста на f.

Пример ако $a = -\pi$ тогаш

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Да се потсетиме дека, ако тригонометрискиот ред (1) конвергира рамномерно, тогаш граничната функција

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 cosx + b_1 sinx) + \cdots + (a_n cosnx + b_n sinnx) + \cdots \qquad (3)$$

е непрекината и периодична со период 2π.

Го множиме (3) со $cosnx$

$$f(x)cosnx = \frac{a_0}{2}cosnx + \cdots + a_n cos^2 nx + b_n cosnxsinnx + \cdots$$

Редот од десната страна исто така конвергира рамномерно кон функцијата $f(x)cosnx$ затоа што $cosnx$ е ограничена функција. Според тоа, ако редот го интегрираме на кој било ограничен интервал $[a,b]$ заради рамномерната конвергенција можеме да интегрираме член по член. Бидејќи периодата е 2π најинтересен е случајот, ако интегрираме на интервал со должина 2π, на пример на $[-\pi,\pi]$ и добиваме

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx$$
$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cosnx\,dx + \cdots + a_n\int_{-\pi}^{\pi} cos^2nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} cosnxsinnx\,dx$$
$$+ \cdots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnx\,dx = 0 + 0 + \cdots + a_n\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+cos2nx}{2}dx + b_n\cdot 0 + \cdots$$

од каде се добива дека

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx$$

за $n = 1,2,\ldots$

Ако (3) се помножи со $sinnx$ аналогно се добива дека

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx$$

за $n = 1,2,\ldots$

ако се интегрира (3) се добива

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + 0 + \cdots$$

од каде следи дека

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Да забележиме дека слободниот член во тригонометрискиот ред (1) се пишува во форма $\frac{a_0}{2}$ само заради интегралот за a_o да биде симетричен со интегралите на коефициентите a_n и b_n. Некои автори пишуваат a_o наместо $\frac{a_0}{2}$. Заради важноста на овие формули ги пишуваме уште еднаш

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx \text{ за } n = 1,2,\ldots$$

(4)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx \text{ за } n = 1,2,\ldots$$

Потенцираме уште еднаш, ако тригонометрискиот ред (1) конвергира рамномерно во тој случај коефициентите a_n и b_n се определуваат со помош на граничната функција $f(x)$ со формулите (4) кои што се викаат формули на Фурие, а коефициентите a_n и b_n определени на тој начин се викаат Фуриеви коефициенти за функцијата $f(x)$.

Овој резултат ги мотивирал математичарите да разгледуваат интеграбилна функција на интервалот $[-\pi, \pi]$ без оглед на тоа дали е периодична или не.

Коефициентите a_0 , a_n и b_n за дадената функција се определуваат со формулите

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx \text{ за } n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx \text{ за } n = 1,2,\ldots$$

и се формира редот

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx) \qquad (5)$$

Вака добиениот ред се вика Фуриев ред за функцијата $f(x)$. Да забележиме дека не секој тригонометриски ред е и Фуриев ред. Понатаму ќе дадеме пример на тригонометриски ред чии што коефициенти неможе да се определат со формулите (3) за некоја интеграбилна функција.

Ознаката (5) е прифатена за да се означи дека редот е добиен од $f(x)$.

Пример1. Нека $f(x) = x$ за $0 < x < 2\pi$. Бидејќи Фуриевиот ред се состои од периодични функции природно е дадената функција да ја продолжиме периодично на R. Тоа се прави со формулата $f(x - 2k\pi)$ каде $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Во конкретниов случај можеме да дефинираме $f(0) = f(2\pi) = 0$ и воопшто $f(2k\pi) = 0$, k е цел број. Во тој случај добиената функција определена со $f(x - 2k\pi)$ ќе биде прекината во точките $2k\pi$. На пример на интервалот $[-\pi, \pi]$ функцијата $f(x) = x$ за $0 < x \leq \pi$, $f(x) = x + 2\pi$ за $-\pi \leq x < 0$, и $f(x) = 0$ за

$x = 0$. Се разбира Фуриевите коефициенти може да ги определиме со интегрирање на $(0,2\pi)$ или на $(-\pi,\pi)$.

Забелешка. Во врска со овој пример даваме едно кратко објаснување за примената на $f(x - 2k\pi)$ при периодичното продолжување. Ако $-\pi \leq x < 0$, тогаш за да е периодична функцијата го избираме k така што $x - 2k\pi \in [-\pi,\pi]$. Ако $k = -1$ тогаш $-\pi \leq x - 2k\pi < \pi$ кога $-\pi \leq x < 0$, затоа $f(x) = x + 2\pi$. Или на пример ако $5\pi \leq x < 6\pi$, јасно е дека $k = 4$ и во тој случај имаме $\pi \leq x - 4\pi < 2\pi$ па за тоа x имаме дека $f(x) = f(x - 4\pi)$.

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = 2\pi$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x cosnx dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x sinnx dx = -\frac{2}{n}$$

па според тоа

$$x \sim \frac{1}{2}\cdot 2\pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sinnx}{n}$$

Пример2. Да се покаже дека Фуриевиот ред за функцијата $f(x) = x^2$ на $[-\pi,\pi]$ е

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\frac{cosx}{1^2} + \frac{cos2x}{2^2} + \cdots + (-1)^n\frac{cosnx}{n^2} + \cdots\right)$$

Решение.

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 cosnx dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 sinnx dx = 0$$

Од каде добиваме дека

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\frac{cosx}{1^2} + \frac{cos2x}{2^2} + \cdots + (-1)^n\frac{cosnx}{n^2} + \cdots\right)$$

Ќе покажеме понатаму дека во овој случај важи знакот за равенство.

Пример за $x = \pi$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

односно со средување се добива

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Секогаш треба да се има во предвид дека Фуриевиот ред за дадена функција, во општ случај може во некои точки да конвергира, а за некои точки да не конвергира. Дури може да се случи во некои точки да конвергира, но сумата да не биде еднаква на вредноста на функцијата во тие точки. И всушност тоа е клучниот проблем за конвергенцијата на Фуриевите редови. Во врска со тоа има многу богата литература и на таа проблематика работеле многу познати имиња од математиката во текот на времињата.

Пример3. Во овој пример ќе ја разгледаме функцијата $f(x) = x^2$ на интервалот $(0,2\pi)$. Ја продолжуваме периодично со формулата $f(x - 2k\pi)$ и нека ставиме $f(2k\pi) = 0$, меѓутоа и било која вредност да дефинираме во точките $2k\pi$ добиената функција е прекината во тие точки. Оваа периодична функција иако е формирана од x^2 како во претходниот пример тие не се исти. Фуриевиот ред е

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2} cosnx - \frac{4\pi}{n} sinnx\right)$$

Очигледно овој ред конвергира за $x = 0$ и неговата сума е

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Овој ред не е ист со вредноста на функцијата во $x = 0$ бидејќи вредноста е нула. Понатаму ќе покажеме дека збирот на редот е еднаков на

$$\frac{f(0-) + f(0+)}{2}$$

каде $f(0-)$ е лимес од лево во 0, а $f(0+)$ е лимес од десно во 0. Бидејќи ако $x \to 0-$ тогаш $x \in (-2\pi, 0)$

$$f(0-) = \lim_{x\to 0-} x^2 = 4\pi^2, \qquad f(0+) = \lim_{x\to 0+} x^2 = 0$$

следи

$$\frac{4\pi^2 + 0}{2} = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{6} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

односно

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

2 Фуриеви синус и косинус редови

Видовме во примерот 2. дека Фуриевиот ред се состои само од $cosnx$. Има Фуриеви редови во кои што фигурира само $sinnx$. Важи следниот резултат:

Ако функцијата е парна тогаш нејзиниот Фуриев ред е составен само од косинусите, ако таа е непарна тогаш нејзиниот Фуриев ред е составен само од синусите.

Доказ. (а) Нека $f(x)$ е парна, тогаш имаме

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)sinnxdx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)sinnxdx$$

Во вториот интеграл ставаме смена $x = -t$ и добиваме

$\int_{-\pi}^{0} f(x)sinnxdx = \int_{0}^{\pi} f(-t)sinn(-t)dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)sinntdt,$

$(f(-t) = f(t))$

Со замена во b_n добиваме дека $b_n = 0$.

(б) Аналогно ако $f(x)$ е непарна тогаш $a_n = 0$.

Од изнесеното следат следните формули: Ако функцијата $f(x)$ е парна тогаш

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)cosnxdx$$

(бидејќи подинтегралната функција е парна)

Ако функцијата $f(x)$ е непарна тогаш

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)sinnxdx$$

(зашто производ на две непарни функции е парна функција). Од изнесеното следи дека:

Фуриевиот ред за парна функција има облик

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Фуриевиот ред за непарна функција има облик

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Во пракса често се среќаваат проблеми од видот:

Дадена функција на интервалот $(0, \pi)$ да се развие во ред само по синусите. Во тој случај функцијата ја продолжуваме на интервалот $(-\pi, \pi)$ да биде парна ставајќи $f(x) = f(-x)$ за $-\pi < x < 0$ и така добиената функција ја развиваме во Фуриев ред по косинусите.

Ако се бара дадена функција да се развие по синусите, тогаш ја продолжуваме на $(-\pi, \pi)$ да биде непарна ставајќи $f(x) = -f(-x)$ за $-\pi < x < 0$.

Во врска со важното прашање за единственост на Фуриевиот ред за функциите се поставува следното прашање:

Ако две функции се интеграбилни дали нивните Фуриеви редови може да се исти? Прво е очигледно, ако f и g се разликуваат на множество со мера нула (Жорданова мера), тогаш нивните Фуриеви коефициенти се исти.

Ние тука ќе покажеме дека, ако g_1 и g_2 се две непрекинати функции во некоја точка c и ако $g_1(c) \neq g_2(c)$, тогаш нивните Фуриеви редови се различни. Тоа со други зборови значи ако функцијата $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$ е непрекината во точката c, тогаш нејзиниот Фуриев ред е различен од нултиот ред на кој што сите коефициенти му се нула.

Доказ. Нека земеме $f(x) > 0$. Ако t_m е тригонометриски полином т.е.

$$t_m(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

ако би биле сите Фуриеви коефициенти за f нула, тогаш

$$\int_0^{2\pi} f(x) t_m(x) dx = 0 \qquad (*)$$

Нека $0 < c < 2\pi$. Од непрекинатоста на функцијата $f(x)$ во c следи дека постои $h > 0$ така што $f(x) \geq k > 0$ за $c - h \leq x \leq c + h$, каде h го бираме така што $(c - h, c + h) \subset (0,2\pi)$.

Го користиме полиномот

$$t_m(x) = [1 + \cos(x - c) - cosh]^m$$

Имајќи ја во предвид полиномната формула јасно е дека $t_m(x)$ е тригонометриски полином. Полиномот $t_m(x)$ ги има следните особини

(i) $t_m(x) \geq 1$за $c - h \leq x \leq c + h$

(ii) $t_m(x) \to \infty$ рамномерно на интервалот $c - \frac{h}{2} \leq x \leq c + \frac{h}{2}$ кога $m \to \infty$

(iii) $|t_m(x)| \leq 1$ за $c + h \leq x \leq c - h + 2\pi$

(i): $-h \leq x - c \leq h$, ако $0 < h < \frac{\pi}{2}$ тогаш $\cos(x - c) \geq cosh$ и затоа $1 + \cos(x - c) - cosh \geq 1$ следователно и m −от степен ≥ 1.

(ii): Ако $-\frac{h}{2} \leq x - c \leq \frac{h}{2}$ во тој случај за секое такво x, $\cos(x - c) \geq cos\frac{h}{2} > cosh$ или $cos\frac{h}{2} - cosh = l > 0$, од каде следи дека $1 + \cos(x - c) - cosh = 1 + l$ за секое $x \in \left(c - \frac{h}{2}, c + \frac{h}{2}\right)$. Според тоа $t_m(x) = [1 + l]^m \to \infty$ кога $m \to \infty$.

(iii): Ако $c + h \leq x \leq c - h + 2\pi$, тогаш имаме $h \leq x - c \leq -h + 2\pi$.

Очигледно за такво $x - c$ имаме $\cos(x - c) \leq cosh$ и затоа $|t_m| \leq 1$

Од горните оценки имаме

$$I_1 = \int_{c-h}^{c+h} f t_m \, dx \geq \int_{c-h/2}^{c+h/2} f t_m \, dx \geq h \cdot k \cdot inf t_m(x) \to \infty$$

ако $m \to \infty$.

Од оценката во (ii) следи

$$\left| \int_{c+h}^{c-h+2\pi} f(x) t_m(x) \, dx \right| \leq \int_{c+h}^{c-h+2\pi} |f(x)||t_m(x)| \, dx \leq M \text{ каде } M > 0,$$

според тоа интегралот

$$\int_{c-h}^{c-h+2\pi} f(x) t_m(x) \, dx = \int_{c-h}^{c+h} + \int_{c+h}^{c-h+2\pi} \to \infty$$

ако $m \to \infty$.

Значи за доволно големо m тој интеграл кој што е еднаков на интегралот

$$\int_0^{2\pi} f(x)t_m(x)\,dx$$

е различен од нула што е спротивно на (∗). Тоа покажува дека некои интеграли

$$\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx \text{ или } \int_0^{2\pi} f(x)sinnxdx$$

се различни од нула што значи на функциите g_1 и g_2 не им се исти сите Фуриеви коефициенти. Иако овој доказ е нешто потежок, сепак е добро читателот да му посвети внимание. Сега ќе дадеме една примена на претходниот резултат за една класа на периодични функции кои што во примената често се среќаваат.

Теорема 1 Нека$f(x)$ е периодична и непрекината функција. Ако f има непрекинат прв и втор извод тогаш Фуриевиот ред за функцијата f конвергира апсолутно и рамномерно кон функцијата $f(x)$.

Доказ. Ги определуваме Фуриевите коефициенти

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx \text{ и } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx$$

Бидејќи $f'(x)$ и $f''(x)$ се непрекинати два пати може да примениме парцијална интеграција и добиваме

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{f(x)\frac{sinnx}{n}|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)sinnxdx\right\}$$

од непрекинатоста на $f(x)$ следи дека $f(\pi) = f(-\pi)$ и затоа имаме

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\left\{-f'(x)\frac{cosnx}{n}|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)cosnxdx\right\}$$

И овде непрекинатоста на $f'(x)$ повлекува дека $f'(\pi) = f'(-\pi)$, па добиваме

$$a_n = -\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)cosnxdx$$

Аналогно се добива дека

$$b_n = -\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)sinnxdx$$

Бидејќи $f''(x)$ е непрекината функција на интервалот постои $M > 0$ така што $|f''(x)| \leq M$ и тогаш имаме

$$|a_n| \leq \frac{2M\pi}{n^2\pi} = \frac{2M}{n^2} \text{ и } |b_n| \leq \frac{2M\pi}{n^2\pi} = \frac{2M}{n^2}$$

$$|a_n cosnx + b_n sinnx| \leq \frac{4M}{n^2}$$

Редот

$$\frac{a_0}{2} + \frac{4M}{1^2} + \cdots + \frac{4M}{n^2} + \cdots$$

е конвергентен и од критериумот на Ваерштрас следи дека Фуриевиот ред за функцијата $f(x)$ конвергира апсолутно и рамномерно кон граничната функција $s(x)$ која што јасно е непрекината и периодична

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx).$$

Знаеме дека за $s(x)$ Фуриеви коефициенти се a_n и b_n, а тоа значи дека двете непрекинати функции $f(x)$ и $s(x)$ имаат исти Фуриеви коефициенти, но тоа е можно само ако $s(x) = f(x)$ за секое x. Од каде следи дека

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx)$$

Понатаму ќе дадеме една многу построга теорема за конвергенција на Фуриевите редови.

Пред таа теорема ја даваме познатата лема на Риман-Лебег.

Лема на Риман-Лебег. Ако $f(x)$ е Риман интеграбилна функција на интервалот $[a, b]$, тогаш

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)cos\lambda xdx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)sin\lambda xdx = 0$$

Доказ. Доволно е да се докаже за едниот интеграл. Ние ќе покажеме за косинусот. Бидејќи $f(x)$ е Риман интеграбилна таа е ограничена. За дадено $\varepsilon > 0$ формираме поделба на интервалот $[a, b]$ т.е. $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ таква што

$$\sum_{r=1}^{n}(M_r - m_r)(x_r - x_{r-1}) < \varepsilon$$

каде M_r и m_r се супремум и инфимум за функцијата $f(x)$ соодветно на подинтервалот $[x_{r-1}, x_r]$, за $r = 1,2,\dots,n$.

Всушност левата страна на неравенството е разлика на горната и долната сума на Дарбу за дадена поделба.

Дефинираме функција $g(x) = m_r$ за $x_{r-1} < x \leq x_r$, тогаш

$$\int_a^b f(x)cos\lambda xdx = \int_a^b [f(x) - g(x)]cos\lambda xdx + \int_a^b g(x)cos\lambda xdx \qquad (*)$$

Првиот интеграл од десно е

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]cos\lambda xdx = \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} [f(x) - g(x)]\, cos\lambda x\, dx$$

и

$$\left|\int_a^b [f(x) - g(x)]cos\lambda xdx\right| \leq \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} |f(x) - g(x)|\, dx \leq$$

$$\sum_{r=1}^{n} (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1}) < \varepsilon$$

вториот интеграл

$$\int_a^b g(x)cos\lambda xdx = \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} m_r cos\lambda x\, dx =$$

$$\sum_{r=1}^{n} m_r \frac{sin\lambda x}{\lambda}\Big|_{x_{r-1}}^{x_r} = \sum_{r=1}^{n} \frac{m_r}{\lambda}(sin\lambda x_r - sin\lambda x_{r-1})$$

од каде следи дека

$$\left|\int_a^b g(x)cos\lambda xdx\right| \leq \frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{n} 2|m_r|$$

Ако го избереме λ доволно големо последниот израз е помал од ε, а тоа значи дека интегралот $(*)$ е нула. Аналогно се покажува и за другиот интеграл. Ако $[a, b] = [-\pi, \pi]$ тогаш за Фуриевите коефициенти $\lambda = n$, и затоа според лемата имаме a_n и $b_n \to 0$ кога $n \to \infty$.

Да претпоставиме дека $f(x)$ има непрекинат прв извод, тогаш со парцијална интеграција се добива дека

$$|a_n| = \frac{1}{n\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) sinnx dx\right|$$

но знаеме дека

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) sinnx dx\right| \leq \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)| dx = d/n$$

од каде следи дека $a_n \leq d/n$. Истото важи и за b_n.

Последново значи дека a_n и b_n се големини од редот $1/n$. Ознака $a_n, b_n = O(\frac{1}{n})$

Теорема2. Нека $f(x)$ е периодична функција со период 2π и нека f и f' се непрекинати по делови на $(0,2\pi)$. Ако s_n е парцијална сума на Фуриевиот ред за функцијата f тогаш за произволно x важи

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Пред да преминеме на доказот да се потсетиме дека непрекината по делови функција на интервал значи дека постојат конечен број точки $x_1, \dots, x_n$ така што $0 < x_1 < \cdots < x_n < 2\pi$ и на секој подинтервал функцијата е непрекината и постои лимес од лево и десно во крајните точки на секој подинтервал, (на пример на (x_1, x_2))

$$\lim_{x\to x_1+} f(x) = f(x_1+0) \text{ и } \lim_{x\to x_2-} f(x) = f(x_2-0)$$

постојат.

Како е дефинирана функцијата во тие точки, (конкретно во x_1) не е важно. Се разбира истото се однесува и за крајните точки 0 и 2π. Имајќи ја во предвид периодичноста точно е следново:

$$f(0-) = \lim_{x\to 2\pi-} f(x) = f(2\pi -) \text{ и } f(0+) = \lim_{x\to 2\pi+} f(x) = f(2\pi+)$$

Исто така во доказот клучна улога има следната формула

$$2sin\theta/2 \cdot D_n(\theta) = \left(\frac{1}{2} + cos\theta + \cdots + cosn\theta\right) \cdot 2sin\theta/2$$

$$2sin\theta/2 \cdot D_n(\theta) = sin\theta/2 + cos\theta sin\theta/2 + \cdots + 2cosn\theta sin\theta/2 =$$

$$= sin\frac{\theta}{2} + sin\frac{3\theta}{2} - sin\frac{\theta}{2} + \cdots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta$$

по кратењето се добива

$$2sin\theta/2 \cdot D_n(\theta) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta$$

или

$$D_n(\theta) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2sin\frac{\theta}{2}}$$

$D_n(\theta)$ е непрекината функција бидејќи е збир од непрекинати функции при што

$$D_n(0) = n + \frac{1}{2}$$

(Лопиталово правило)

Доказ на Теоремата. Парцијалната сума $S_n(x)$ ја пишуваме во друга форма со помош на формулите за a_nи b_n:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[coskx\int_0^{2\pi} f(t)cosktdt + sinkx\int_0^{2\pi} f(t)sinkt\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}[coskxcoskt + sinkxsinkt]\right]dt$$

Бидејќи $coskxcoskt + sinkxsinkt = \cos(t - x)\,k$, добиваме

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(t - x)\,k\right]dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{D_n}(t - x)dt$$

Со смената $t - x = u$ последниот интеграл е еднаков на

$$\int_{-x}^{-x+2\pi} f(x + u)\mathrm{D_n}(u)du$$

Бидејќи $f(x + u)$ и $\mathrm{D_n}(u)$ се периодични функции по однос на u со периода 2π, последниот интеграл е еднаков со

$$\int_0^{2\pi} f(x + u)\mathrm{D_n}(u)du$$

Така покажавме дека

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x + u)\mathrm{D_n}(u)du$$

$$\int_0^{2\pi} f(x + u)\mathrm{D_n}(u)du = \int_0^{\pi} f(x + u)\mathrm{D_n}(u)du + \int_{\pi}^{2\pi} f(x + u)\mathrm{D_n}(u)du$$

Во вториот интеграл од десната страна ставаме смена $u = 2\pi - v$ и ја користиме релацијата

$$f(x + 2\pi - v) = f(x - v) \text{ и } \mathrm{D_n}(2\pi - v) = \mathrm{D_n}(v)$$

Функциите f и $\mathrm{D_n}$ се периодични, а $\mathrm{D_n}$ е уште и парна функција, и сега имаме

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)\mathrm{D_n}(u)du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x-u)\mathrm{D_n}(u)du$$

Конечно може да напишеме

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\mathrm{D_n}(u)du$$

Ако ја интегрираме равенката за $\mathrm{D_n}(\theta)$ добиваме

$$\int_0^{\pi} D_n(u)du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} du + \int_0^{\pi} cosudu + \cdots + \int_0^{\pi} cosnudu = \frac{\pi}{2}$$

од тука следи дека

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)du = 1.$$

Од последната формула имаме

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)du = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Со помош на таа формула може да напишеме

$$S_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x,u)D_n(u)du$$

каде

$$g(x,u) = \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Од теоремата на Лагранж за средна вредност имаме

$$|f(x+u) - f(x+0)| = |f'(x+\theta u)||u| \le M|u| \text{ за } 0 < \theta < 1$$

каде M е константа независна од x и u. Слично имаме дека

$$|f(x-u) - f(x-0)| \le M|u|$$

Од тука следи дека за u од некој мал интервал $(0,\gamma)$ важи $|g(x,u)| \le Mu$.

Напомена. γ се бира така што интервалите $(x-\gamma, x)$ и $(x, x+\gamma)$ да се во интервалите каде функциите f и f' се непрекинати, за да можеме да ја примениме теоремата на Лагранж. Според претпоставките на теоремата јасно е дека постои $M>0$ така што $|f(x)|$ и $|f'(x)|$ се помали или еднакви на M. Сега интегралот

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x,u)D_n(u)du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} g(x,u)D_n(u)du + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} g(x,u)D_n(u)du = I_1 + I_2$$

за $0<\delta<\gamma$.

$$|I_1| \le \int_0^{\delta} \frac{|g(x,u)|}{u}\frac{u}{2sin\frac{u}{2}}\left|sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right| du$$

Лесно се проверува дека функцијата

$$\frac{u}{2sin\frac{u}{2}}$$

монотоно расте на интервалот $[0,\pi]$ при што во нулата има вредност 1, а во π има вредност $\pi/2$, бидејќи $\left|sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right| \le 1$ и имајќи го во предвид неравенството $|g(x,u)| \le Mu$ добиваме дека

$$|I_1| \le \int_0^{\delta} M\frac{\pi}{2}du = \frac{M\pi}{2}\delta$$

Нека $\varepsilon>0$, го избираме δ така што $M\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ тогаш

$$|I_1| \le \frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{2}$$

Во интервалот $[\delta,\pi]$ функцијата

$$h(u) = \frac{|g(x,u)|}{2sinu/2}$$

е интеграбилна по u и може да ја примениме лемата на Риман-Лебег, од каде заклучуваме дека

$$I_2 = \int_{\delta}^{\pi} \frac{g(x,u)}{2sinu/2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu \to 0, \text{кога } n\to\infty$$

Значи за дадено $\varepsilon>0$ постои N такво што

$$|I_2| \le \frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{2}$$

ако $n \ge N$

Со комбинирање на направените оценки добиваме дека

$$\left|S_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| < \varepsilon$$

за $n \geq N$

односно

$$S_n(x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

или

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cosnx + b_n sinnx$$

Ако $f(x)$ е непрекината во x тогаш $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ и затоа во тие точки имаме

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx)$$

Пример. Да се развие во Фуриев ред функцијата $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ако $0 < x < 2\pi$, и да се провери дали ги задоволува условите на теоремата.

Функцијата $f(x)$ на интервалот $(0,2\pi)$ е непрекината и $f'(x) = -\frac{1}{2}$. Периодично продолжена со формулата $f(x - 2k\pi)$ има прекин во точките $2k\pi$ за $k = 0, \pm 1, \dots$

Фуриевиот ред за $\frac{\pi - x}{2}$ е

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{n}$$

Според теоремата

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{2} \text{ за } 0 < x < 2\pi$$

Бидејќи

$$\lim_{x \to 2\pi -} f(x) = \frac{\pi - 2\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \text{ и } \lim_{x \to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

имаме

$$\frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin2n\pi}{n}$$

$$0 = 0.$$

Задача1. Да се определи Фуриевиот ред за функцијата

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Решение. На интервалот $(-\pi, 0)$ функцијата е еднаква со $f(x + 2\pi)$, бидејќи ако $-\pi < x < 0$ тогаш $\pi < x + 2\pi < 2\pi$ од каде следи дека за $-\pi < x < 0$ продолжената периодична функција има вредност -1. $f(0+) = 1, f(0-) = -1$, што значи на интервалот $(-\pi, \pi)$ функцијата има прекин во $x = 0$, а нејзиниот извод е 0 по делови.

Во точката $x = \pi$ имаме $f(\pi -) = 1, f(\pi +) = -1$ што значи на интервалот $(0,2\pi)$ функцијата има прекин во $x = \pi$, а нејзиниот извод освен во $x = \pi$ е еднаков на нула на тој интервал. Тоа покажува дека оваа функција ги задоволува условите од теоремата за конвергенција. Сега ќе го определиме Фуриевиот ред користејќи го интервалот $(-\pi, \pi)$, бидејќи функцијата е непарна следи дека

$$a_n = 0 \text{ и } b_n = -\frac{2}{\pi}(cosn\pi - 1)$$

Ако n е парен тогаш

$$cosn\pi = 1 \text{ и } b_n = 0$$

ако n е непарен тогаш

$$\cos(2n+1)\pi = -1 \text{ и } b_{2n+1} = \frac{4}{n\pi}$$

Според тоа Фуриевиот ред е

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

Имајќи ги во предвид условите од теоремата може да напишеме дека

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & \pi < x < 2\pi \\ 0, & x = 0, x = \pi \end{cases}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} \pi/4, & 0 < x < \pi \\ -\pi/4, & \pi < x < 2\pi \\ 0, & x = 0, x = \pi \end{cases}$$

За $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{3}, x = \pi/6$ се добива соодветно

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \pi/4$$

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \cdots = \pi/2\sqrt{3}$$

$$1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \cdots = \pi/3$$

Да се провери.

2. Да се определи Фуриевиот ред за функцијата

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ x - 2\pi, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Упатство. Треба да се искористи теоремата па се добива

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{sinnx}{n} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = \pi \\ \frac{x}{2} - \pi, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

3. Да се определи Фуриевиот ред за функцијата

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

и да се покаже дека

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\, x}{(2n+2)^2} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi x}{4}, & 0 \le x \le \pi \\ \frac{\pi x}{4} - \frac{3\pi^2}{8}, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

За $x = 0$ се добива

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

4. Нека $f(x) = x^2/4$ за $-\pi < x < \pi$, продолжи ја со формулата $f(x - 2k\pi)$ на интервалот $(\pi, 2\pi)$. (Продолжувањето е $\frac{(2\pi - x)^2}{4}$ на тој интервал).

Докажи дека

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \left(\frac{cosx}{1^2} - \frac{cos2x}{2^2} + \cdots\right)$$

Најди ги сумите за $x = 0$ и $x = \pi$.

(Одг. $x = \pi$ е $\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \cdots\right)$

или

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$$

За $x = 0$ се добива

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots$$

5. Нека $f(x) = |x|$ за $-\pi < x < \pi$. Дефинирај ја периодично на $(\pi, 2\pi)$. Најди го Фуриевиот ред и изведи ја формулата

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\,x}{n^4}$$

за 0$< x < \pi$.

6. Нека $f(x) = (\pi^2 - x^2)^2$ ако $-\pi < x < \pi$.

Покажи дека

$$f(x) \sim \frac{8\pi^4}{15} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} cosnx$$

и дека

$$\frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \cdots = \frac{7\pi^4}{720}$$

7. Нека $f(t)$ е периодична функција со периода 2π и нека претпоставиме дека сите изводи до ред $\leq m$ се непрекинати функции. Докажи дека Фуриевите коефициенти a_n и b_n ги задоволуваат неравенствата $|a_n| \leq \frac{M}{n^m}$ и $|b_n| \leq \frac{M}{n^m}$ каде М е константа. Заклучи дека Фуриевиот ред за $f(x)$ може да се диференцира член по член $m-2$ пати. (Упатство. Ваков проблем имавме во првата теорема за конвергенција)

3 Интегрирање на Фуриеви редови

Овде ќе покажеме дека, дури и да не е конвергентен даден Фуриев ред, тој може да се интегрира член по член. Во врска со тоа ја даваме следната теорема.

Теорема 1 Ако a_n и b_n се Фуриеви коефициенти за функцијата $f(x)$ тогаш

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n sinnx + b_n(1 - cosnx)}{n} \qquad (1)$$

Доказ. Дефинираме

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0}{2}x$$

Функцијата F е непрекината и периодична со период 2π. Навистина

$$F(x + 2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)dt - a_0\pi = \int_0^{2\pi} f(t)dt - a_0\pi = a_0\pi - a_0\pi = 0$$

Очигледно ако коефициентот $a_0 = 0$ функцијата $\int_0^x f(t)dt$ е периодична.

Пред да го разгледаме Фуриевиот ред за функцијата $F(x)$ даваме без доказ една важна теорема за конвергенција на Фуриев ред на функција која е разлика на две монотоно растечки функции. Таквите функции велиме дека се функции со ограничена варијација.

Теорема 2 (Жордан) Ако f е функција со ограничена варијација во околина на точката x, тогаш нејзиниот Фуриев ред конвергира во x кон функцијата

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Познато е дека функциите кои се дефинирани како функцијата $F(x)$ се со ограничена варијација и затоа според теоремата на Жордан, Фуриевиот ред на $F(x)$ конвергира кон $F(x)$ во секое x.

Фуриевите коефициенти A_n и B_n за F се

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)cosnxdx = \frac{1}{\pi}\left[F(x)\frac{sinnx}{n}\right]\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left\{f(x) - \frac{a_0}{2}\right\}sinnxdx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sinnxdx - \frac{a_0}{2n\pi}\int_0^{2\pi} sinnxdx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sinnxdx - 0 = -\frac{b_n}{n}$$

и

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)sinnxdx = \frac{1}{\pi}\left[-F(x)\frac{cosnx}{n}\right]\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left\{f(x) - \frac{a_0}{2}\right\}cosnxdx$$

Бидејќи $F(0) = F(2\pi)$, добиваме

$$B_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx = \frac{a_n}{n}$$

според тоа имаме

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n sinnx - b_n cosnx}{n} \qquad (2)$$

Ако ставиме $x = 0$ во равенството добиваме

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

(зашто $F(0) = 0$)

Последица 1 Постои тригонометриски ред кој што е конвергентен во секоја точка, но не е Фуриев ред.

Доказ. Го разгледуваме тригонометрискиот ред

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{sinnx}{logn}$$

Конвергенцијата на редот може да се покаже со помош на критериумот на Дирихле. Порано покажавме дека

$$\left|\sum_{r=1}^{n} sinrx\right| = \left|\frac{cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2sinx/2}\right| \leq \frac{1}{|sinx/2|}$$

За секое $0 < x < 2\pi$ сумите се ограничени со $\frac{1}{|sinx/2|}$ и бидејќи $\frac{1}{lnn}$ монотоно тежи кон нула, според критериумот на Дирихле редот конвергира. Јасно за $x = 0$ и $x = 2\pi$ конвергира кон нула. Ако x се менува на некој подинтервал $0 < a \leq x \leq b < \pi$, тогаш од критериумот на Дирихле следи дека е задоволен критериумот на Коши за рамномерна конвергенција, што значи дека тригонометрискиот ред е непрекината функција на интервалот $(0,2\pi)$.

Ако редот е Фуриев тогаш според условот треба редот

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nlogn}$$

да конвергира што е контрадикција зашто редот е дивергентен: провери на пример, со интегралниот критериум на интервалот $[2, \infty)$, со функцијата

$$\frac{1}{xlogx}$$

Нека го разгледаме редот

$$1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

Ако s_n е парцијална сума на првите n членови на редот тогаш $s_n=1$, ако n е непарен број и $s_n=0$, ако n е парен број. Тогаш аритметичката сума на парцијалните суми $s_1,\dots,s_n$ е

$$\sigma_n=\frac{s_1+\cdots+s_n}{n}$$

Ако n е непарен број тогаш во збирот $s_1+\cdots+s_{n-1}$ има колку парни толку и непарни. Бидејќи парните се нула, а секоја непарна е еден имаме

$$\sigma_n=\frac{\frac{n-1}{2}+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$$

Ако n е парен број, тогаш во збирот $s_1+\cdots+s_n$ има колку парни толку непарни, затоа нивниот збир е $\frac{n}{2}$ т.е. $\sigma_n=\frac{1}{2}$. Ако $n\to\infty$ тогаш $\sigma_n\to\frac{1}{2}$.

Гледаме дека, иако дадениот ред е дивергентен сепак аритметичките суми $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n,..$ конвергираат кон $\frac{1}{2}$.

Дефиниција 1 а) Нека е дадена бројната низа $a_1,\dots,a_n,\dots$

Ако аритметичките средини

$$\frac{a_1}{1},\frac{a_1+a_2}{2},\dots,\frac{a_1+\cdots+a_n}{n},\dots$$

кои ќе ги означуваме со σ_n за $n=1,2,\dots$ конвергираат кон некој број l тогаш ќе велиме дека дадената низа е конвергентна во смисла на Чезаро (Cezaro).

б) Нека е даден бројниот ред

$$a_1+\cdots+a_n+\cdots$$

ја формираме низата (σ_n) каде што

$$\sigma_n=\frac{s_1+\cdots+s_n}{n}$$

а $s_1,\dots,s_n$ се парцијални суми на редот.

Ако $\sigma_n\to l$ кога $n\to\infty$ тогаш велиме, дека редот е Чезаро сумабилен или конвергира во смисла на Чезаро кон l.

Теорема 1 Нека е дадена низата (a_n) или редот $\sum u_n$. Ако тие се конвергентни т.е. $a_n \to a$ ($\sum u_n = u$), тогаш тие конвергираат и во смисла на Чезаро кон a односно u.

Доказ: Ќе докажеме само за низи, бидејќи и редовите се низи од нивните парцијални суми.

Нека $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ тогаш за дадено $\varepsilon > 0$ постои индекс n_0 таков што $|a_n - a| < \varepsilon$ или $a_n - \varepsilon < a < a_n + \varepsilon$ за $n \geq n_0$. Од тука следи дека $a_n = a + p_n$ каде $-\varepsilon < p_n < \varepsilon$ за $n \geq n_0$.

$$\sigma_n = \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0-1} + a_{n_0} + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0-1}}{n} + \frac{a + p_{n_0} + \cdots + a + p_n}{n}$$

$$= \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0-1}}{n} + \frac{(n+1-n_0)a}{n} + \frac{p_{n_0} + \cdots + p_n}{n}$$

$$\sigma_n - a = \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0-1}}{n} + \frac{(1-n_0)a}{n} + \frac{p_{n_0} + \cdots + p_n}{n}$$

$$|\sigma_n - a| \leq \frac{|a_1 + \cdots + a_{n_0-1}|}{n} + \frac{|1-n_0||a|}{n} + \frac{(n-n_0+1)\varepsilon}{n}$$

За дадено $\varepsilon > 0$ може да го избереме n доволно големо така што да важи:

$$\frac{|a_1 + \cdots + a_{n_0-1}|}{n} < \varepsilon, \frac{(n_0-1)|a|}{n} < \varepsilon \text{ и } \frac{(n+1-n_0)\varepsilon}{n} < \varepsilon$$

следователно за такви n имаме $|\sigma_n - a| < 3\varepsilon$, што значи дека $\sigma_n \to a$ кога $n \to \infty$.

Да забележиме, дека ако една низа или ред конвергираат во смисла на Чезаро, тој факт во литературата се пишува со $(C,1)$ конвергентна низа или $(C,1)$ конвергентен ред.

Теорема 2 Нека редот $\sum a_n$ е $(C,1)$ сумабилен кон l, тогаш $s_n = 0(1/n)$ и $a_n = 0(1/n)$; каде овие ознаки означуваат дека $\frac{s_n}{n}$ и $\frac{a_n}{n} \to 0$ кога $n \to \infty$.

Доказ. $s_n = n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}$ од тука имаме дека

$$\frac{s_n}{n} = \sigma_n - \sigma_{n-1} + \frac{\sigma_{n-1}}{n}, \text{ кога } n \to \infty$$

$$\sigma_n \to l, \text{и } \sigma_{n-1} \to l \text{ т.е. } \frac{\sigma_{n-1}}{n} \to 0$$

следователно $\frac{s_n}{n} \to 0$ кога $n \to \infty$.

$$a_n = s_n - s_{n-1} \text{ и } \frac{a_n}{n} = \frac{s_n}{n} - \frac{s_{n-1}}{n} \to 0 - 0 = 0,$$

на основа докажаното за s_n.

Постојат многу методи за сумирање на редови различни од аритметичките суми. Да се потсетиме дека еден метод за сумабилност е теоремата на Абел што ја докажавме кај степенските редови. Да се потсетиме на дефиницијата за сумабилност во смисла на Абел или накратко (А) сумабилност.

Дефиниција. Ако

$$\lim_{r\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = l$$

тогаш велиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е (А) сумабилен кон l. Кај степенските редови т.е. во теоремата на Абел покажано е дека, ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е конвергентен со сума l тогаш тој е и (А) сумабилен кон l

$$\lim_{r\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum a_n = l$$

Кај Абеловата сумабилност подобро е да се почнува од $n = 0$ т.е. со членот a_0. Во тој случај

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

и

$$\sigma_n = \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n} \quad (n \geq 1)$$

Теорема 3 Ако бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е (C,1) сумабилен кон l тогаш тој е и (А) сумабилен кон l.

Доказ. Во доказот ќе го користиме геометрискиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{за } |x| < 1$$

тогаш имаме

$$\frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right\}$$

Во заградата го формираме Кошиевиот производ при што n —от член ќе биде

$$a_0x^n + \cdots + a_nx^n = (a_0 + \cdots + a_n)x^n = s_nx^n$$

Со замена во десната сума добиваме

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

Формираме повторно Кошиев производ за $n-1$ и добиваме

$$s_0x^{n-1} + \cdots + s_{n-1}x^{n-1} = (s_0 + \cdots + s_{n-1})x^{n-1} = n\sigma_n x^{n-1}$$

што значи имаме

$$\frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\sigma_n\, x^{n-1}$$

(зашто $a_0 \cdot 1 = \sigma_1$)

од тука (при претпоставка понатаму дека $0 \le x < 1$) добиваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n\, x^{n-1}$$

Од

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

со диференцирање на двете страни добиваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (*)$$

или

$$(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1$$

Последната равенка ја множиме со l и ја одземаме од претходната, па добиваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - l = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(\sigma_n - l)\, x^{n-1}$$

Бидејќи редот $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ е (C,1) сумабилен кон l, т.е. $\sigma_n \to l$ кога $n \to \infty$, за $\varepsilon > 0$ постои N такво што $|\sigma_n - l| < \varepsilon$ ако $n \geq N$. Сега

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - l\right| | \leq (1-x)^2 \left|\sum_{n=1}^{N-1} n(\sigma_n - l)\, x^{n-1}\right| + (1-x)^2 \left|\sum_{n=N}^{\infty} n(\sigma_n - l)\, x^{n-1}\right|$$

$$(1-x)^2 \left|\sum_{n=N}^{\infty} n(\sigma_n - l)\, x^{n-1}\right| \leq (1-x)^2 \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} n\, x^{n-1} < \varepsilon \frac{1}{(1-x)^2} (1-x)^2 = \varepsilon$$

Кога $x \to 1-$ членот

$$\left|(1-x)^2 \sum_{n=1}^{N-1} n(\sigma_n - l)\, x^{n-1}\right|$$

може да се направи помал од ε, па имаме

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - l\right| < \varepsilon + \varepsilon(1-x)^2 \frac{1}{(1-x)^2} = 2\varepsilon$$

од каде следи дека

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to l$$

кога $x \to 1-$

5 Сумабилност на Фуриеви редови

Од сумабилноста на Фуриевите редови се добиваат многу важни резултати како во теоријата на Фуриевите редови, така и за нивната примена пред се во физиката.

Дефинираме

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n}$$

и

$$K_n(u)=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}}{n}=\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})\,u$$

Со помош на тригонометриската формула

$$2\sin\frac{u}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u=cosku-\cos(k+1)\,u$$

за $k=0,1,\dots,n-1$ добиваме

$$2\sin\frac{u}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u=1-cosu+cosu-cos2u+\cdots+\cos(n-1)\,u-cosnu$$

$$2\sin\frac{u}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u=1-cosnu=2sin^2\frac{nu}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u=\frac{sin^2\frac{nu}{2}}{\sin(u/2)}$$

од каде за $K_n(u)$ имаме

$$K_n(u)=\frac{sin^2\frac{nu}{2}}{2n\sin^2(u/2)}$$

Парцијалните суми кај Фуриев ред се

$$s_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x+u)+f(x-u)\big)D_n(u)du \text{ каде } D_n(u)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2sinu/2}$$

од каде следи дека

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+u)+f(x-u))K_n\,(u)du$$

Последица1.

$$\int_0^{\pi}K_n\,(u)du=\frac{\pi}{2}$$

Доказ. Бидејќи

$$K_n(u)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k$$

а знаеме дека

$$\int_0^{\pi} D_k(u)du = \frac{\pi}{2}$$

според тоа

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} K_n(u)du = 1$$

Нека $f(x)$ е периодична функција со период 2π. Нека претпоставиме дека f и f' се по делови непрекинати за $0 < x < 2\pi$, или според Жордан нека $f(x)$ во некој интервал околу x е со ограничена варијација. Ако последното равенство го помножиме со

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

и го одземеме од равенството за σ_n добиваме

$$\sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} K_n(u)\left[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right]du$$

како при конвергенцијата на Фуриев ред може да заклучиме дека

$$\sigma_n(x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

кога $n \to \infty$.

Сега ќе ја дадеме фамозната теорема на Фејер.

Теорема 1 (Фејер, 1904) Фуриевиот ред на функцијата $f(x)$ е $(C,1)$ сумабилен кон

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

секогаш кога левиот и десниот лимес постојат или е $(C,1)$ сумабилен кон $f(x)$ во секоја точка x во која функцијата е непрекината.

Доказ. Ако

$$s(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

постои, тоа значи дека

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}$$

тежи кон s кога $u \to 0$, според тоа за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\eta > 0$ така што за $0 < u \leq \eta$

$$|\Phi(u)| = \frac{1}{2}|\{f(x+u) + f(x-u) - f(x+0) - f(x-0)\}| \leq \varepsilon$$

Со делење на интервалот од 0 до η и од η до π добиваме

$$\left|\sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| \leq \frac{2}{n\pi}\int_0^{\eta} \frac{sin^2(\frac{nu}{2})}{sin^2(\frac{u}{2})}\varepsilon du + \frac{2}{n\pi}\int_{\eta}^{\pi} \frac{|\Phi(u)|}{sin^2(\frac{u}{2})} du$$

Првиот интеграл од десна страна е помал од

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi} K_n(u)\, du = \varepsilon,$$

а вториот интеграл од десна страна тежи кон нула кога $n \to \infty$ бидејќи постои интегралот

$$\int_{\eta}^{\pi} \frac{|\Phi(u)|}{sin^2(\frac{u}{2})} du.$$

Според тоа

$$\sigma_n(x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

кога $n \to \infty$.

Последица 1 Ако $f(x)$ е непрекината на интервалот (a,b) и ако $a < c < d < b$, тогаш $\sigma_n(x) \to f(x)$ рамномерно на подинтервалот $[c,d]$.

Доказ. За дадено $\varepsilon > 0$ постои $\eta > 0$ независно од x такво што ако $|u| < \eta$ тогаш

$$|f(x+u) - f(x)| < \varepsilon/2$$

за $|u| < \eta$ и сите $x \in [c,d]$ каде $(\eta < \min(c-a, b-d))$

Тоа значи $|\Phi(u)| < \varepsilon$ ако $|u| < \eta$ што претставува оценка на првиот член од десната страна. Исто така $|\Phi(u)| <$ A каде A е константа која не зависи од x и u и затоа вториот член тежи кон нула кога $n \to \infty$.

Последица 2 Ако $f(x)$ е непрекината функција со периода 2π тогаш за дадено $\varepsilon > 0$ постои тригонометриски полином $T(x)$ за кој што $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ за сите x.

6 Сумабилност во смисла на Абел за Фуриеви редови

Лема. Ако $0 \leq r < 1$, тогаш

$$(i) \qquad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n cosn\theta = \frac{1-r^2}{2(1-2rcos\theta + r^2)}$$

(ii) За фиксно r, редот конвергира рамномерно по θ.

Доказ. (i) Нека z е комплексен број. Знаеме дека тој може да се претстави во облик $z = re^{i\theta}$, $|z| = r$. Ако $0 \leq r < 1$, тогаш

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 - rcos\theta - irsin\theta} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1 - rcos\theta + irsin\theta}{(1 - rcos\theta)^2 + r^2 sin^2\theta} - \frac{1}{2}$$

Реалниот дел е

$$\frac{1 - rcos\theta}{1 - 2rcos\theta + r^2} - \frac{1}{2} = \frac{2 - 2rcos\theta - 1 + 2rcos\theta - r^2}{2(1 - 2rcos\theta + r^2)} = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2rcos\theta + r^2)}$$

од тука имаме

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n cosn\theta = \frac{1-r^2}{2(1-2rcos\theta + r^2)}$$

(ii) Од $|r^n cosn\theta| \leq r^n$ за $0 \leq r < 1$ добиваме дека редот $\sum r^n$ конвергира.

Според критериум на Ваерштрас редот рамномерно конвергира за секое фиксно r по θ.

Теорема 1 Ако Фуриевиот ред за функцијата $f(x)$ е

$$\frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx)$$

тогаш за $0 \leq r < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2rcos(t-x) + r^2} f(t)dt = \frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx)\, r^n$$

Доказ. Од лемата имаме

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n cos(t-x)n = \frac{1-r^2}{2(1-2rcos(t-x) + r^2)}$$

Може да помножиме со ограничена функција $f(t)$ и да интегрираме член по член на интервалот $[-\pi, \pi]$.

Бидејќи

$$\cos(t-x)n = cosntcosnx + sinntsinnx$$

по интегрирањето се добива

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2rcos(t-x)+r^2}f(t)dt =$$

$$\frac{a_0}{2}+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} r^n(cosnx\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)cosntdt + sinnx\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)cosntdt).$$

Левата страна претставува Пуасонов интеграл за функцијата $f(t)$. Функцијата

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{2(1-2rcos\theta+r^2)}$$

за $0 \leq r < 1$ е Пуасоново јадро кое што многу често се среќава во математиката и во примената на математиката во различни области.

Теорема 2 Важи следниов резултат

$$\lim_{r\to 1-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2rcos(t-x)+r^2}f(t)dt = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

во точките во кои постои десната страна. Специјално ако $f(x)$ е непрекината во x тогаш на десната страна ќе стои $f(x)$.

Доказ. Според теоремата на Фејер Фуриевиот ред

$$\frac{a_0}{2}+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx)r^n$$

е (C,1) сумабилен и е (А) сумабилен, како што покажавме погоре следи дека точен е резултатот.

7 Фуриеви редови за функции со периода различна од 2π

Ако за функцијата $f(x)$ постои $l>0$ така што важи $f(x+2l)=f(x)$ за секое x, тогаш за функцијата велиме дека е периодична со период $2l$. Се разбира за $l=\pi$ периодата е 2π.

Во развивањето на периодичните функции со периода $2l$ се користат функциите

$cos\frac{n\pi x}{l}$ и $sin\frac{n\pi x}{l}$, бидејќи ако $-l<x<l$, тогаш $\frac{n\pi x}{l}$ се менува на интервалот $(-\pi,\pi)$.

Фуриевиот ред за дадена функција $f(x)$, лесно се проверува дека има облик

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{l}+b_n sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (1)$$

каде

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,cos\frac{n\pi x}{l}dx \text{ и } b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (2)$$

за $n=0,1,\dots$

Специјално

а) Ако функцијата $f(x)$ е парна, тогаш имаме

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos\frac{n\pi x}{l} \text{ и } a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\,cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

б) Ако функцијата $f(x)$ е непарна, тогаш имаме

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n sin\frac{n\pi x}{l} \text{ и } b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\,sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

за $n=0,1,\dots$

Функцијата определена на $(0,l)$, ако се продолжи да биде парна на $(-l,l)$ тогаш на $(0,l)$ е претставена само со косинусите. Ако ја продолжиме непарно тогаш нејзиниот развој ќе биде само по синусите, значи потполно исто како во случајот со периода 2π.

Се разбира и во овој случај важи теоремата за конвергенција на Фуриев ред.

Пример. Ако $f(x)$ и $f'(x)$ се по делови непрекинати при што во точките на прекин постои

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

тогаш

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{l} + b_n sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ако функцијата $f(x)$ е непрекината во точката x тогаш

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{l} + b_n sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

и во овој општ случај исто така важи теоремата за интегрирање на Фуриевиот ред.

Пример. Да се развие во Фуриев ред функцијата $f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l \\ 0, & l < x < 2l \end{cases}$

Решение. Може директно да ги користиме формулите за пресметување на Фуриевите коефициенти, имено

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\, cosnxdx = \frac{1}{l}\int_0^l A\, cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l A\, dx = A$$

и

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^l A\, sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{A}{n\pi}[cosn\pi - 1]$$

односно

$$b_n = -\frac{A}{n\pi}[(-1)^n - 1]$$

За n парно $b_n = 0$, а за n непарно

$$b_{2n+1} = \frac{2A}{(n+1)\pi}$$

и

$$f(x) \sim \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1} sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right)$$

б) $f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l \\ f(x+2l), & -l < x < 0 \end{cases} = \begin{cases} A, & 0 < x < l \\ 0, & -l < x < 0 \end{cases}$

во овој случај интегралите се определуваат на $(-l, l)$.

За $0 < x < l$ имаме

$$\mathrm{A} = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi x}{l}}{2n+1}\right)$$

За $x = 0$ имаме

$$\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{A}{2}$$

За $x = l$ имаме

$$\frac{A}{2} = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi x}{l}}{2n+1}\right)$$

Задачи

1. Да се развие во Фуриев ред функцијата $f(x) = \exp(ax)$ на интервалот $(-h, h)$.

$$(\text{одг.}\, 2sh\frac{ah}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ahcosnx - n\pi sinnx}{(ah)^2 + (n\pi)^2}$$

2. Да се развие во Фуриев ред функцијата $f(x) = x$ на интервалот $(a, a+2l)$.

$$(\text{одг.}\, a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(sin\frac{n\pi a}{l}cos\frac{n\pi x}{l} - cos\frac{n\pi a}{l}sin\frac{n\pi x}{l})\frac{1}{n}$$

3. Да се развие во Фуриев ред функцијата $f(x) = xcosx$ на интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$(\text{одг.}\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)^2}sin2nx)$$

4. Да се развие во Фуриев ред периодичната функција $f(x) = |sinx|$.

(одг. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos2nx}{4n^2-1}$)

5. Да се развие во Фуриев ред периодичната функција $f(x)=|cosx|$.

(одг. $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}cos2nx}{4n^2-1}$)

6. Да се определи Фуриевиот ред за функцијата $f(x)=ax$ ако $0\le x\le\pi$, и $f(x)=bx$ ако $-\pi\le x\le 0$, a и b се константи.

Решение.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bxcosnxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}axcosnxdx=\frac{b-a}{\pi n^2}[1-(-1)^n],$$

од каде може да видиме дека за n парно $a_n=0$,а за n непарно $a_n=\frac{2(b-a)}{\pi(2n+1)}$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}axdx=\frac{a-b}{2}\pi$$

Аналогно како за a_n добиваме дека

$$b_n=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1},\qquad n=0,12,\dots$$

На интервалот $(-\pi,\pi)$ функцијата е непрекината и затоа според теоремата за конвергенција

$$f(x)=\frac{a-b}{4}\pi+\frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\,x}{(2n+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{sinnx}{n}$$

Во точката $x=\pi$ имаме

$$f(\pi+0)=\lim_{x\to-\pi+}b\pi \text{ и } f(\pi-0)=\lim_{x\to\pi-}ax=a\pi$$

Според тоа

$$\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{a-b}{2}\pi$$

се разбира истото е и во $x=-\pi$. Така што ако ставиме во редот $x=\pi$ добиваме

$$\frac{a-b}{4}\pi=\frac{a-b}{4}\pi+\frac{2(b-a)}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)+0=\frac{a-b}{4}\pi+\frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

од тука следи

$$\frac{a-b}{4}\pi = \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

или

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

Нека разгледаме некои специјални случаи на добиениот развој

(i) Нека $b = -a$, $a = 1$. Тогаш $f(x) = |x|$. Функцијата е парна и Фуриевиот развој е

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{cosx}{1^2} + \frac{cos3x}{3^2} + \cdots\right)$$

според критериумот на Ваерштрас редот конвергира рамномерно на $[-\pi, \pi]$.

(ii) Нека $b = a = 1$. Тогаш $f(x) = x$ и редот е

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}sinnx}{n}$$

Според теоремата за конвергенција

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}sinnx}{n}$$

за $-\pi < x < \pi$

Во $x = \pm\pi$ имаме дека

$$\frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$$

и таа е сумата на редот во $\pm\pi$.

За $x = \pi/2$ го добиваме познатиот ред за бројот π (кој се добива Маклореновиот ред за $arctgx$):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

(iii) Нека $a = 0$ и $b = 1$. Тогаш $f(x) = 0$ за $0 \le x \le \pi$, $f(x) = x$ за $-\pi \le x \le 0$.

Фуриевиот ред е

$$-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\,x}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}sinnx}{n}$$

Во $\pm\pi$ збирот на редот е $-\pi/2$.

7. Да се развие во Фуриев ред функцијата $f(x)=1$ на интервалот $[0,1]$. Можеме функцијата да е продолжиме на интервалот $[-\pi,0]$ како парна функција и во тој случај $f(x)=1$ на $[-\pi,\pi]$, или да ја продолжиме да биде непарна тогаш $f(x)=-1$ за $-\pi\le x\le 0$. Лесно е да се провери дека при парното продолжување Фуриевиот ред е константа еднаква на 1 и имаме 1=1 на $[-\pi,\pi]$.

Во непарниот случај на продолжување

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}sinnxdx=-\frac{2}{n\pi}((-1)^n-1)$$

од тука, ако n е парно $b_n=0$, ако n е непарно тогаш

$$b_{2n+1}=\frac{4}{(2n+1)\pi}\text{ за } n=0,1,2,\dots$$

и редот е

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\,x}{2n+1}$$

па според теоремата за конвергенција

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\,x}{2n+1}\text{ ако } 0<x<\pi$$

или

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\,x}{2n+1}$$

Бидејќи $f(0+)=1, f(0-)=-1$ т.е. $\frac{1+(-1)}{2}=0$ истото е и за π.

8. Да се определи Фуриевиот ред за функцијата $f(x)=|sinx|$. Оваа функција е периодична со периода π, но овде функцијата $f(x)$ ја земаме како функција $f(x)=sinx$ на $[0,\pi]$ продолжена парно на $[-\pi,0]$ и во овој случај Фуриевиот ред е

$$|sinx|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos2nx}{4n^2-1}$$

За $x = 0$ добиваме

$$\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos2nx}{4n^2 - 1}$$

или

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots$$

8 Квадратна апроксимација во средно

Главната работа што ќе ја покажеме во овој дел е:

Ако го разгледаме интегралот

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - t_n(x))^2\,dx$$

каде што $t_n(x)$ е тригонометриски полином од степен не поголем од n; тоа значи полином во кој фигурираат $coskx$ и $sinkx$ но притоа $k \leq n$.

Јасно е дека интегралот е поголем или еднаков на нула и неговата вредност зависи од тригонометрискиот полином $t_n(x)$. Проблемот е за кој полином $t_n(x)$ интегралот

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - t_n(x))^2\,dx$$

има најмала вредност.

Инаку за кој било полином $t_n(x)$ за интегралот

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - t_n(x))^2\,dx$$

велиме дека е квадратна апроксимација во средно за функцијата $f(x)$.

Од тука можеме проблемот да го искажеме на следниот начин: Кој полином $t_n(x)$ дава најдобра средно квадратна апроксимација за функцијата $f(x)$.

9 Ортогонална и ортонормирана фамилија функции

Дефиниција 1 За функциите Φ_n за $n = 1,2,\ldots$ кои се Риман интеграбилни на интервалот $[a,b]$ велиме дека се ортогонални ако важи

$$\int_a^b \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx = 0 \text{ за } m \neq n$$

Ако е исполнет и условот

$$\int_a^b \Phi_n^2(x)\, dx = 1 \text{ за } n = 0,1,..$$

тогаш фамилијата функции (Φ_n) велиме дека е ортонормирана на интервалот $[a,b]$.

Овој поим игра многу важна улога не само во математиката туку и во нејзината примена во физиката, техниката и.т.н.

Дефиниција 2 Бројот

$$c_n = \int_a^b f(x)\Phi_n(x)\, dx$$

е n –ти Фуриев коефициент за функцијата $f(x)$ по однос на дадената ортонормирана фамилија (Φ_n), а редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\Phi_n$$

е Фуриев ред за функцијата $f(x)$ по однос на дадената ортонормирана фамилија.

Пишуваме

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\Phi_k$$

Тригонометриските функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cosnx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sinnx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

се една ортонормирана фамилија на интервалот $[-\pi,\pi]$. Тоа лесно се проверува.

Теорема 1 Ако

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} d_k \,\Phi_k$$

тогаш за фиксно n и било кои коефициенти d_k, интегралот

$$\int_a^b (f(x) - t_n(x))^2 \, dx$$

има најмала вредност кога

$$d_k = c_k = \int_a^b f(x)\Phi_k(x)\, dx \text{ за } k = 1,2,\ldots$$

Доказ. Ја разгледуваме разликата

$$\int_a^b (f(x) - t_n(x))^2 \, dx - \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2 \, dx =$$

$$= \int_a^b [f^2(x) - 2f(x)\, t_n(x) + t_n^2(x)]dx -$$

$$- \int_a^b [f^2(x) - 2f(x)\, s_n(x) + s_n^2(x)]dx = -2\int_a^b f(x)t_n(x)\, dx +$$

$$+ \int_a^b \sum_{k=1}^{n} (d_k\Phi_k(x))^2 \, dx + 2\int_a^b f(x)s_n(x)\, dx - \int_a^b \sum_{k=1}^{n} (c_k\Phi_k(x))^2 \, dx$$

бидејќи функциите Φ_n се ортонормирани имаме

$$\int_a^b (d_1\Phi_1 + \cdots + d_n\Phi_n)^2 \, dx = d_1^2 \int_a^b \Phi_1^2 + \cdots + d_n^2 \int_a^b \Phi_n^2 dx = d_1^2 + \cdots + d_n^2$$

исто така

$$\int_a^b (c_1\Phi_1 + \cdots + c_n\Phi_n)^2 \, dx = c_1^2 + \cdots + c_n^2$$

Понатаму

$$\int_a^b f(x)\,(d_1\Phi_1 + \cdots + d_n\Phi_n)dx = d_1c_1 + \cdots + d_nc_n$$

$$\int_a^b f(x)\,(c_1\Phi_1 + \cdots + c_n\Phi_n)dx = c_1^2 + \cdots + c_n^2$$

и конечно

$$\int_a^b (c_1\Phi_1 + \cdots + c_n\Phi_n)^2\, dx = c_1^2 + \cdots + c_n^2$$

Според тоа може да напишеме

$$\int_a^b (f(x) - t_n(x))^2\, dx - \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2\, dx = d_1^2 + \cdots + d_n^2 -$$

$$-2(d_1c_1 + \cdots + d_nc_n) + 2(c_1^2 + \cdots + c_n^2) - (c_1^2 + \cdots + c_n^2) =$$

$$= d_1^2 + \cdots + d_n^2 - 2(d_1c_1 + \cdots + d_nc_n) + c_1^2 + \cdots + c_n^2 =$$

$$(d_1 - c_1)^2 + \cdots + (d_n - c_n)^2 \geq 0,$$

затоа и левата страна е ненегативна. Сега бидејќи десната страна е нула само кога $d_1 = c_1, \ldots, d_n = c_n$, следи дека

$$\int_a^b (f(x) - t_n(x))^2\, dx \geq \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2\, dx,$$

а тоа значи дека е најмал интегралот $\int_a^b (f(x) - t_n(x))\, dx$ кога наместо $t_n(x)$ стои $s_n(x)$.

Теорема 2 (Беселово неравенство) Точно е следното неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx$$

Доказ.

$$\int_a^b (f(x) - s_n(x))^2\, dx = \int_a^b f^2(x)\, dx - 2\sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

Од тоа што

$$\int_a^b (f(x) - s_n(x))^2\, dx \geq 0$$

следи дека

$$\int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \geq 0$$

односно

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Последното неравенство важи за секој n, па ако $n \to \infty$, од редовите знаеме дека

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (1)$$

Ова е едно од најважните неравенства во математиката и е познато како Беселово неравенство.

Последица 1 Во тригонометрискиот случај на интервалот $[-\pi, \pi]$, ортонормираната система е

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cosx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sinx}{\sqrt{\pi}}, \frac{cosnx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sinnx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}a_0$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnx\,dx = \sqrt{\pi}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnx\,dx = \sqrt{\pi}a_n$$

По однос на $sinx$

$$c_n' = \sqrt{\pi}b_n$$

Беселовото неравенство гласи

$$c_0^2 + c_1'^2 + \cdots + c_n^2 + c_n'^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

$$\frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi a_1^2 + \pi b_1^2 + \cdots + \pi a_n^2 + \pi b_n^2 + \cdots \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

или

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

Последица 2 Од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ следи дека $c_n^2 \to 0$ кога $n \to \infty$ од тука исто така следи дека $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$, кое ни е познато од порано.

За некои ортонормирани фамилии (не секоја) неравенството на Бесел станува равенство и така добиеното равенство се вика Парсевалово равенство.

Теорема 3 (Равенство на Парсевал) Ако во претходната теорема важи равенство и ако a_n и b_n се Фуриеви коефициенти на функцијата $f(x)$, тогаш важи

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx$$

Ова равенство се вика Парсевалово равенство.

Доказ. Во претходната теорема го добивме равенството

$$\int_a^b (f(x) - s_n(x))^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Бидејќи во тригонометрискиот случај покажавме дека

$$c_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}a_0, \qquad c_n = \sqrt{\pi}a_n, \qquad c_n' = \sqrt{\pi}b_n \text{ за } n = 1,2,\dots$$

со замена во претходното равенство добиваме

$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left\{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{j=1}^{k}\left(a_j^2 + b_j^2\right)\right\} = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - s_k(x))^2\,dx$$

Забележуваме дека во ортонормираната фамилија од тригонометриските функции член е и $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и по однос на неа

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Ако $t_n(x)$ е тригонометриски полином од ред n при што $k \ge n$ тогаш важи

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - s_k(x))^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - t_n(x))^2\,dx$$

бидејќи во првата теорема покажавме дека

$$\int_a^b (f(x) - t_n(x))^2\,dx - \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2\,dx = (d_1 - c_1)^2 + \dots + (d_n - c_n)^2$$

Сега ако земеме $n < k$, тогаш во полиномот $s_k(x)$ можеме коефициентите од $k+1$ до n да ги земеме да се нула, и во тој случај

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - t_n(x))^2 \, dx$$

$$= (d_1 - c_1)^2 + \cdots + (d_k - c_k)^2 + (d_{k+1} - 0)^2 + \cdots + (d_n - 0)^2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - t_n(x))^2 \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_k(x))^2 \, dx =$$

$$= (d_1 - c_1)^2 + \cdots + (d_k - c_k)^2 + (d_{k+1} - 0)^2 + \cdots + (d_n - 0)^2 \geq 0$$

од тука

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_k(x))^2 \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - t_n(x))^2 \, dx$$

За да ја покажеме теоремата потребно е да покажеме дека за дадено $\varepsilon > 0$ постои $t_n(x)$ така што важи

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - t_n(x)) dx < K\varepsilon$$

каде K е константа која може да зависи од функцијата f.

Сега ќе го докажеме последното неравенство.

(i) Ако функцијата f е непрекината и периодична на $[-\pi, \pi]$ тогаш според теоремата на Фејер (последица2) постои тригонометриски полином $\sigma_n(x)$ таков што $|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$ за секое x од тука

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \sigma_k(x))^2 \, dx < \varepsilon^2 2\pi$$

(ii) Ако претпоставиме само дека функцијата f е интеграбилна, тогаш постапуваме на следниот начин: постои поделба на интервалот $[-\pi, \pi]$ за која важи

$$\sum_{j=1}^{N} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon$$

каде

$M_j = sup\{f(x): x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$, $m_j = inf\{f(x): x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$ и $j = 1, \dots, N$.

Дефинираме непрекината функција Φ на следниот начин $\Phi(x_j) = f(x_j)$ за $j = 0,1, \dots, N$ и Φ е линеарна на интервалот $[x_{j-1}, x_j]$

Тогаш сите интеграли на $[-\pi,\pi]$ се

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\Phi(x)|dx \leq \sum_{j=1}^{N}|(M_j-m_j)|(x_j-x_{j-1}) < \varepsilon$$

каде $M=\sup|f(x)| > \sup|\Phi(x)|$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\Phi(x))^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\Phi(x)|\,|f(x)-\Phi(x)|dx \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi}(|f(x)|+|\Phi(x)|)|f(x)-\Phi(x)|dx \leq 2M\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\Phi(x)|\,dx < 2M\varepsilon$$

Бидејќи $\Phi(x)$ е непрекината според (i) постои тригонометриски полином $t(x)$ за кој што важи

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-t(x))^2\,dx < \varepsilon$$

Од неравенството $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ имаме

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-t(x))^2\,dx \leq 2\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\Phi(x))^2\,dx < (4M+2)\varepsilon$$

од каде добиваме дека

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi}f^2\,(x)dx-\pi\left\{\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{j=1}^{k}(a_j^2+b_j^2)\right\}-\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_k(x))^2\,dx \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-t(x))^2\,dx < (4M+2)\varepsilon$$

Ако $k \to \infty$ тогаш имаме

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi}f^2\,(x)dx-\pi\left\{\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{j=1}^{k}(a_j^2+b_j^2)\right\} \leq (4M+2)\varepsilon$$

Од произволноста на ε следи дека

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{j=1}^{k}(a_j^2+b_j^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2\,(x)dx$$

Пример. Нека $t_n(x)$ е тригонометриски полином од ред n

$$t_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k coskx+b_k sinkx)$$

Ги определуваме Фуриевите коефициенти

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k coskx + b_k sinkx)] = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}2\pi a_0 + 0\right\} = a_0$$

Ако $m > n$ тогаш сите интеграли

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_k coskxcosmx\,dx \text{ и } \int_{-\pi}^{\pi} b_k sinkxcosmx\,dx$$

се нула, што значи дека Фуриевите коефициенти за $m > n$ се нула.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t_n(x)cosjx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cosjxdx + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} coskxcosjxdx + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-\pi}^{\pi} sinkxcosjxdx\right\}$$

за $1 \leq j \leq n$, јасно е дека само

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosjxcosjxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+cos2jx}{2}dx = \pi$$

,а сите други интеграли се нула, според тоа j –от Фуриев коефициент е еднаков на a_j по однос на косинусот, слично се добива и за b_j. Затоа можеме да заклучиме дека секој тригонометриски полином е ист со неговиот Фуриев ред.

Сега ќе го провериме Парсеваловото равенство

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t_n^2(x)dx.$$

Кога ќе се помножи $t_n(x)$ сам со себе и притоа производот се интегрира член по член , тогаш се добива дека не се нула само интегралите

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\frac{a_0}{2}dx, \int_{-\pi}^{\pi} a_k coskx \cdot a_k coskxdx \text{ и } \int_{-\pi}^{\pi} b_k sinkx \cdot b_k sinkxdx \text{ за } k = 1,2,\dots,n$$

Бидејќи

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos^2kxdx = \pi \text{ и } \int_{-\pi}^{\pi} sin^2kxdx = \pi$$

имаме

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t_n^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{a_0^2}{2}\pi + a_1^2\pi + \cdots + a_n^2\pi + b_n^2\pi\right\} = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

Со тоа во овој специјален случај го проверивме Парсеваловото равенство.

Фуриевите редови и Фуриевите трансформации кои не ги споменавме во оваа книга се централна дисциплина во математичката анализа и во нејзината примена пред се во физиката и техниката.

Изучувањето на Фуриевите редови го завршуваме со еден пример кој што е доказ за широката примена на Фуриевите редови. Примерот ја покажува примената во теоријата на парцијалните-диференцијални равенки.

Проблемот е да се најде функција $u(x,t)$ која ги задоволува условите:

$u_{xx} - u_t = 0$ ако $0 < x < \pi, 0 < t < T$

$u(x,0) = f(x)$ ако $0 < x < \pi,$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ ако $0 < t < T.$

Таквата функција $u(x,t)$ е непрекината на правоаголникот $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq t \leq T$. Функцијата $f(x)$ е дадена. За да го решиме овој проблем претпоставуваме дека $f(0) = f(\pi) = 0$ и функцијата $f(x)$ е продолжуваме на интервалот $(-\pi, 0)$ да биде непарна. Заради тоа нејзиниот ред е Фуриев на синусите. Да претпоставиме дека функцијата ги задоволува условите од теоремата за конвергенција и земаме исто така $f(x)$ да е непрекината. Тогаш може да ја претставиме со редот

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sinnx$$

Сега формалното решение на $u(x,t)$ го бараме во форма

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} sinnx$$

да претпоставиме дека $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ конвергира. Тогаш на правоаголникот $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T$ важи

$$|b_n e^{-n^2 t} sinnx| \leq |b_n|$$

Според критериумот на Ваерштрас за рамномерна конвергенција следи дека функцијата $u(x,t)$ е непрекината на правоаголникот.

Парцијалните изводи u_x, u_{xx} и u_t постојат за $t > 0$ и ја задоволуваат диференцијалната равенка за $0 < x < \pi, 0 < t < T.$

Се разбира во овој случај можеме диференцирањето да го правиме член по член

$$u_x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n e^{-n^2 t} cosnx$$

$$u_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n e^{-n^2 t} sinnx$$

$$u_t = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n sinnx$$

Што значи навистина имаме дека $u_{xx} - u_t = 0$.

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sinnx = f(x)$$

за $0 < x < \pi$ и

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} sin0 = 0 = u(\pi, t)$$

за $0 < t < T$.

ДОДАТОК

ГЛАВА 9

9 ОБИЧНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

9.1. Дефиниција и примери

Нека $F(x, y, z)$ е функција определена на некое множество D од R^3. Нека I е фиксен интервал на правата и разгледуваме функцијата $y(x)$ која има непрекинат извод на I, при што $(x, y(x), y'(x))$ припаѓа на D ако е $x \in I$. Тогаш функцијата $F(x, y(x), y'(x))$, е добро дефинирана на интервалот I. Ќе работиме со функции $y(x)$ за кои што важи

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \qquad (1)$$

за сите $x \in I$. Равенката (1) се вика *обична диференцијална равенка,* а функцијата $y(x)$ што ја задоволува равенката е *нејзино решение.*

Пример 1. Решенијата на диференцијалната равенка

$$y' - f(x) = 0$$

се дадени со неопределениот интеграл

$$y = \int f(x) + c$$

Пример 2. Диференцијалната равенка

$$\varphi(y)y' + \psi(x) = 0 \qquad (2)$$

се вели-дека е равенка со *раздвоени променливи.* Ако $y = y(x)$ е решение на (2), тогаш

$$\varphi(y(x))y'(x) + \psi(x) = 0$$

Со интегрирање по однос на x, добиваме

$$\int \varphi(y(x))y'(x)dx + \int \psi(x)dx = C$$

или, според методот на замена кај неопределениот интеграл, имаме

$$\int \varphi(y)dy + \int \psi(x)dx = C \qquad (3)$$

Што значи решенијата на равенката (2) ја задоволуваат имплицитната равенка (3). Обратно, ако $y = y(x)$ ја задоволува равенката (3), тогаш со диференцирање на (3) по x, ја добиваме равенката (2) за $y = y(x)$.

Сега можеме да заклучиме, дека општото решение на диференцијалната равенка (2) е имплицитната равенка (3)

Пример 3. Равенката

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (4)$$

се вика линеарна диференцијална равенка. Ако ги помножиме двете страни на (4) со $e^{\int p(x)dx}$ имаме

$$y'e^{\int p(x)dx} + e^{\int p(x)dx}P(x)y = Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)e^{\int p(x)dx}\right] = e^{\int p(x)dx}Q(x) \qquad (5)$$

Нека земеме, дека $y = y(x)$ е решение на (4). Тогаш таа ја задоволува (5). Со интегрирање на двете страни од (5), добиваме

$$e^{\int p(x)dx}y = \int \left[e^{\int p(x)dx}Q(x)\right]dx + c$$

или

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int \left[e^{\int p(x)dx}Q(x)\right]dx \qquad (6)$$

Обратно, ако функцијата $y(x)$ е дадена со (6), тогаш лесно се проверува дека ја задоволува (4). Што значи (6) е општо решение на равенката (4).

Во сите дадени примери има бесконечно многу решенија на секоја диференцијална равенка. Во суштина, решенијата прават една фамилија која зависи од реален параметар C кој се добива при интегрирањето. Ако поставиме услов $y(x_0) = y_0$, тогаш обично добиваме определено решение кое се вика уште партикуларно решение кое го задоволува почетниот услов:

$$y = y_0 \text{ за } x = x_0.$$

Нека сега разгледаме диференцијална равенка од облик

$$y' = f(x, y) \quad (7)$$

Се покажува, дека при определени услови, постои единствено решение на (7) кое го задоволува почетниот услов

$$y(x_0) = y_0 \quad (8)$$

Функцијата $f(x, y)$ дефинирана на D од R^2 се вели дека го задоволува условот на Липшиц по однос на y, ако постои константа К таква што

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leq K|y - y'| \quad (9)$$

за сите $(x, y) \in D$ и $(x, y') \in D$

Теорема 1 Нека $f(x, y)$ е непрекината функција на областа D од R^2. Нека претпоставиме дека постои број $M > 0$ таков што $|f(x, y)| \leq M$ и нека функцијата го задоволува условот на Липшиц (9). Нека P е правоаголник

$$P: |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta$$

кој се содржи во D, така што $\mathrm{M}\alpha < \beta$. Тогаш постои единствено решение на (7) за $|x - x_0| \leq \alpha$, кое го задоволува условот (8).

Доказот за теоремата го испуштаме.

Досега разгледуваните диференцијални равенки се од прв ред зашто се појавува само првиот извод на непознатата функција y. Ако во равенката фигурираат изводи од втор ред тогаш е таа од втор ред итн.

Обична диференцијална равенка од ред n има облик

$$F(x, y, y', \dots, y^{n)}) = 0 \quad (10)$$

Функцијата $y = y(x)$ каде x е од некој интервал I е решение на (10), ако

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \quad (11)$$

за сите $x \in I$

Пример. Ја разгледуваме диференцијалната равенка

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

каде $a_{0,} a_{1,\dots,} a_n$, се константи и $a_0 \neq 0$. Проверуваме дали функцијата $y = e^{rx}$ е решение на равенката. Изводите се $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}, \dots$, $y^{(n)} = r^n e^{rx}$. Заменуваме во равенката и добиваме

$$e^{rx} a_0 r^n + e^{rx} a_1 r^{n-1} + \dots + a_n e^{rx} = 0$$

од каде

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (12)$$

Секое решение на алгебарската равенка (12) дава едно решение за дадената равенка.

Ако равенката (12) има n −различни корени, $r_1, r_2, \dots, r_n$, тогаш

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

е решение на диференцијалната равенка за било кои вредности на константите.

Пример. Да се реши равенката

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Соодветната алгебарска равенка е

$$r^2 + r - 2 = 0$$

Корени се $r_1 = 1$ и $r_2 = -2$ следователно решението е

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

Задачи за вежба

1. Да се решат равенките:

а) $y' = \dfrac{xy}{x-1}$

б) $e^{x^2+y} + \dfrac{y}{x} y' = 0$

в) $y' = \dfrac{x}{y\sqrt{1-x^2}}$

г) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y\sqrt{1-x^2}}$

г) $dy = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Променливите се раздвоени затоа

$$\int y dy = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Диференцијалната равенка од облик

$$y' = f(x,y) \qquad\qquad (*)$$

се вика хомогена, ако можеме да ја напишеме во облик $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. Решавањето на хомогената равенка оди со смената

$$\frac{y}{x} = z, \qquad y = zx, \qquad y' = z'x + z, \qquad z'x + z = g(z)$$

на тој начин добиваме равенка на фнкцијата z чии што променливи се раздвојуваат.

2. Да се решат следниве хомогени равенки:

а) $y' = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$, б) $(x^2+y^2) - 2xyy' = 0$.

а) Го делиме броителот и именителот со x^2 и добиваме

$$y' = \frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{2x^2}$$

со смената

$$\frac{y}{x} = z, \quad z'x + z = \frac{1+z^2}{2} - z$$

од каде

$$\frac{2dz}{z^2+1-2z} = \frac{dx}{x}$$

со интегрирање добиваме

$$-\frac{2}{z-1} = \ln|x| + C$$

ако, наместо z ставиме $\frac{y}{x}$

$$\frac{2}{1-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$$

или

$$\frac{2x}{x-y} = \ln|x| + C$$

3. Да се решат линеарните равенки

а) $(x^2 - x)y' + (1 - 2x)y + x^2 = 0;$

б) $xy' + 2y = (3x + 2)e^{3x};$

в) $y' + ytgx = \sin 2x.$

4. Да се определи решението на равенката

$$xy' + y - e^x = 0$$

ако $y = b$ за $x = a$

Решение. По делењето со x имаме

$$y' + \frac{1}{x}y - \frac{e^x}{x} = 0$$

Равенката е линеарна, $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{e^x}{x}$.

Според формулата за решението

$$y = Ce^{-\int\frac{dx}{x}} + e^{-\int\frac{dx}{x}}\int\left[e^{\int\frac{dx}{x}}\frac{e^x}{x}\right]dx$$

$$y = Ce^{-\ln x} + e^{-\ln x}\int\left[e^{\ln x}\frac{e^x}{x}\right]dx$$

$$y = \frac{C}{x} + \frac{1}{x}\int x\frac{e^x}{x}dx$$

$$y = \frac{C}{x} + \frac{1}{x}e^x$$

Сега го користиме почетниот услов за да ја определиме константата C:

$$b = \frac{c}{a} + \frac{e^a}{a}, \quad c = ab - e^a$$

Така партикуларното решение ќе биде

$$y = \frac{ab - e^a}{x} + \frac{e^x}{x}$$

5. Бернулиева диференцијална равенка е од облик

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

Се решава следната смена

$$z = y^{1-n}, \qquad z' = (1-n)y'y^{-n}$$

Со замена во равенката добиваме

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$$

$$z'(1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

Последната равенка е линеарна по функција $z(x)$.

Да се решат равенките

а) $y' + y = xy^2$

б) $y' - y + y^2(x^2 + x + 1) = 0$

в) $xy' + y = y^2 \ln x;$

г) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

д) $y' = \dfrac{y\varphi'(x) - y^2}{\varphi(x)}$, каде $\varphi(x)$е дадена функција;

ѓ) $ydy - \dfrac{ay^2}{x^2}dx = \dfrac{bdx}{x^2}$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bartl R,G.; The elements of real analysis, New York 1964.

[2] Бермант А.Ф. Курс Математическово анализа Улја Втузов, част втораја, Москва 1946.

[3] Beals R.: Advanced Mathematical analysis, New York 1973.

[4] Берман Т.Н. Сборник задач по курсу математическова анализа,Москва 1963.

[5] Демидович Б.П. Сборник задач и упражненим по математическому анализу, Москва 1963.

[6] Љашко И.И. со група автори Математическиј анализ в примерах и задачах, II дел, Киев 1977.

[7] Rishard R. Methods of Real Analysis Blaisdel Publishing Company 1964.

[8] Лазов П., Ивановски Ѓ. Елементи на математичката анализасо некои примери, Скопје 1981.

[9] Burkill J.C. and Burkill H. A second course in mathematical analysis Cambridge 1970

[10] Fleming W. Functions of several variables, Brown University 1965.

[11] Friedman A. : Advanced calculus, New York 1971.

[12] Миличиќ Р. Ушчумлиќ М. Зборник задатака из више математике II, Београд 1971.

[13] Речкоски Н. Виша Математика, Охрид 1997.

[14] Rudin W. Real and Complex Analysis, third edition, Wiskonsin 1987.

[15] Шапкарев И. Задачи за вежбање по математика II за студентите на техничките факултети, Скопје 1972.