

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус

Стојко Стојоски
Коста Мишовски
Скопје

РЕШАВАЊЕ НА ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

За да решиме некоја задача со математичко-логичка содржина не е потребно некое посебно математичко знаење, туку е потребно "математички да се мисли" и логички да се заклучува.

Пред да објасниме што и да било за овој вид задачи, ќе приведеме неколку примери:

1. Седумина браќа имаат по една сестра. Колку вкупно деца има во тоа семејство?

2. Летало јато гуски и тоа: една напред две назад; една назад две напред; една помеѓу две гуски и три гуски летаат во ред. Колку вкупно гуски летале во јатото?

3. Две мајки и две ќерки изеле три јајца. По колку јајца изела секоја од нив?

4. Учениците Горан, Драган, Зоран и Никола се натпреварувале во трчање на 100 м. По завршувањето на трката сите биле прашани на кое место се пласирале. На ова учениците ги дале следните одговори:

Горан - "Јас не сум ни прв, ни последен".

Драган: "Не бев последен"

Зоран: "Јас стигнав прв", и

Никола: "Јас стигнав последен".

Подоцна е утврдено дека тројца од нив ја зборуваат вистината, а само еден лаже.

Дали е можно, користејќи го тој заклучок да утврдиме:

1. Кој ја кажал вистината, а кој лаже?
2. Кој стигнал прв?

барем приближно да одговориме на поставеното прашање. Под логична задача се подразбира секоја задача за чие решавање е потребно поцелосно логично заклучување, од она што го практикуваме и користиме во секојдневниот живот. Со нив се занимава една математичка дисциплина – наречена математичка логика. За решавање на овие задачи се служиме со извесни правила и постапки, со чија примена решавањето до извесен степен е "механизирано" и олеснето, Решавањето на логичките задачи не може да се сведе на исти правила, иста постапка, тие можат да се групираат, така што за некои од нив се користат приближно исти правила и постапки. Дел од нив можат да се решават и без примена на математички правила и постапки, односно користејќи го животното искуство и здравиот разум на човекот.

Решавањето ќе го почнеме со примерот 4. Метод на претпоставка.

Прва претпоставка: Горан не ја зборува вистината, односно дека не стигнал ни прв ни последен. Во овој случај, според условот на задачата, другите тројца ја зборуваат вистината и следува дека Зоран стигнал прв. Никола четврти (последен). Тогаш произлегува дека и Горан ја зборува вистината, затоа што не може да биде ни прв ни последен. Па во овој случај доаѓаме до противречност на нашата претпоставка дека Горан не ја зборува вистината, па затоа ја отфрламе.

Втора претпоставка: Драган лаже, односно дека не бил последен, во тој случај другите тројца треба да ја зборуваат вистината. Според тоа, Никола не може да стигне последен – значи дека Никола лаже. Па и во овој случај доаѓаме до противречност и оваа претпоставка ја отфрламе.

Трета претпоставка: Нека лаже Зоран, а другите тројца нека ја зборуваат вистината. Во тој случај Горан би можел да биде втор или трет, Драган прв, втор или трет, а Зоран (бидејќи лаже) на второ, трето или четврто место, а Никола на четврто место. Од ова може да се заклучи дека прв би можел да биде Драган и пртивречност нема.

Четврта претпоставка: Остана уште да провериме што ќе биде ако претпоставиме дека Никола лаже, односно дека

стигнал последен, бидејќи другите тројца би ја зборува-
ле вистината излегува дека последен не стигнал никој,
што е невозможно. Па и оваа претпоставка ја отфрламе, би-
дејќи е невозможна. Така дојдовме до заклучок дека: 1.
Горан, Драган и Никола ја зборуваат вистината а Зоран
лаже. 2. Прв на целта стигнал Драган. Овој метод на ре-
шавање на логички задачи се нарекува *метод на последо-
вателни претпоставки*. Со овој метод можете да решавате
безброј задачи со таква содржина.

Користејќи го овој метод реши ги задачите;

5. Три момчиња Александар, Бојан и Васил секој во
својот џеб скриле по еден од следниве предмети: гума,
молив и острилка. Откријте кој што скрил во џебот ако
знаеме дека само еден од следните три искази е висти-
нит:

- 1) Александар ја скрил гумата;
- 2) Бојан не ја скрил гумата;
- 3) Васил не ја скрил острилката.

6. Петре, Јордан и Дејан оженети се со Вера, Олга
и Мира. (Но не се знае кој со која е женет). Секој пар
има по едно дете. Имињата на децата се Билјана, Сашко и
Драган. За овие семејства знаеме само дека:

1. Дејановото дете игра фудбал со Олгиното дете.
2. Драган не му е син, на Петре;
3. Мира не му е жена на Јордан.

Опреди ги имињата на сите членови од секое семеј-
ство.

7. Тројца наставници (А, В и С) ги предаваат пред-
метите математика, физика и хемија во градовите Скопје,
Прилеп и Делчево. За нив се знае дека:

1. Наставникот А не предава во Скопје, а наставни-
кот В не предава во Прилеп;
2. Наставникот од Скопје не предава хемија;
3. Наставникот што работи во Прилеп предава мате-
матика.
4. Наставникот В не предава физика.

Во кој град работи наставникот С и кој предмет го
предава?

8. Секое од четирите девојчиња свири на еден музички инструмент и зборува на еден странски јазик, ако знаеме дека:

- Анка свири на клавир и не знае италијански;
- Фанка свири на гитара и не знае германски;
- Цена не свири на хармоника и не знае германски и
- Јана не свири на виолина и не знае англиски.
- Она што свири на гитара не знае италијански.
- Она девојче што знае француски, свири на виолина;

Опреди ја кој јазик зборува и на кој инструмент свири секое од нив?

За да ја решиме оваа задача ќе се послужиме со следните табели и при тоа наместо зборот "зборува" и "свири" ќе пишуваме - т, а место "не знае" "не свири" ќе пишуваме - л.

	клав	виол	харм	гит
Анка	т	л	л	л
Фанка	л	л	л	т
Цена	л	т	л	л
Јана	л	л	т	л

Таб. 1.

	Фран	герм	итал	англ
Анка	л	т	л	л
Фанка	л	л	л	т
Цена	т	л	л	л
Јана	л	л	т	л

Таб. 2

Ги пополнуваме табелите 1 и 2 со т или л прво само оние полиња кои се определени од вториот дел на условот. "ако знаеме дека ..." (тоа се полињата во кои нема кругче). По тоа полињата што се означени со кругче од првиот дел на условот во задачата: "... секое девојче свири еден инструмент" - таблица 1 и "... секое девојче зборува еден странски јазик" - таблица 2.

Од таблицата очигледно е дека решение на задачата е:
 Анка свири на клавир и зборува германски;
 Фанка свири на гитара и зборува англиски;
 Цена свири на виолина и зборува француски и
 Јана свири на хармоника и зборува италијански.

Овој метод на решавање на логички задачи е со користење на табели (таблицы) во кои за определени услови и договори се внесени симболи за пократко запишување. Најчесто за точен (вистинит) исказ се користи т (или 1 или +), а за неточен исказ се користи л (или 0 или -).

Ќе ја решиме со помош на таблица задачата 6, дадена во број XIX-1, а таа гласи:

6. Петре, Јордан и Дејан се оженети со Вера, Олга и Мира. (Но не се знае кој со која). Секој пар има едно дете. Имињата на децата се Билјана, Сашко и Драган. За овие семејства знаеме само дека:

1. Дејановото дете игра фудбал со Олгиното дете.
2. Драган не му е син на Петре.
3. Мира не му е жена на Јордан.

Определи ги имињата на сите членови од секое семејство.

Значи, за решавање на задачата потребно е да се состават две табели и тоа таб. 1 мажи-жени, таблица 2 мажи-деца.

Според условот на задачата се пополнуваат таблиците 1 и 2, а од нив следува одговорот на задачата, т.е.

	Вер.	Олга	Мира
Петре	л	т	л
Јордан	т	л	л
Дејан	л	л	т

Таб. 1

	Бил.	Саш.	Драг
Петре	л	т	л
Јордан	т	л	л
Дејан	л	л	т

Таб. 2

I семејство: Петре, Олга и Сашко

II семејство: Јордан, Вера и Билјана;

III семејство: Дејан, Мира и Драган.

9. Шаховски турнир.

На шаховскиот турнир учествувале 5 шахисти. Определете ги резултатите на сите партии ако знаеме:

2. Бројот на добиените партии на секој играч е различен;

3. Оној играч што го освоил првото место не добил ни една партија;

4. Второпласираниот играч не загубил ни една партија.

5. Четвртопласираниот играч не добил ни една партија.

За решавање на задачата поочигледно е ако ја составиме табелата. Таа е:

Играч	1.	2.	3.	4.	5.	Поени
1.	■	0	1	1	1	3
2.	1	■	0,5	0,5	0,5	2,5
3.	0	0,5	■	0,5	1	2
4.	0	0,5	0,5	■	0,5	1,5
5.	0	0,5	0	0,5	■	1

Од табелата се гледа дека играчот што го освоил првото место на турнирот има 3 поени, а другите резултатите можат да се прочитаат од табелата.

10. Покрај релата седеле три деца и си разговарале. Едното од нив се презивало Ковач, другото Колар а третото Стругар. Нивните родители по занимање биле: едниот стругар, вториот ковач и третиот колар.

- Интересно, - рекло детето чијшто татко бил колар. Ниту еден од нашите татковци не го работи оној занает, од кој произлегува неговото презиме.

- Во право си, - потврдило по кусо размислување детето Ковач. Кој занает го работат нивните родители? Одговорот образложи го.

11. Учениците Горан, Ристо и Сашо разговараат за колачи, и тоа:

- Горан: "Јас не сакам пита со јаболка";

- Ристо: "Јас не сакам торта";

- Сашо: "Јас сакам пита со јаболка".

Двајца од нив лажат. Определи кои колачи тие ги сакаат, ако е познато дека еден од нив сака пита со јаболка, друг торта и трет баклава.

Многу попознат метод за решавање на логички задачи е **методот на дијаграми** (или познат уште како метод на Ојлер-Венови кругови).

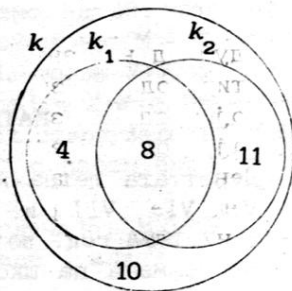
Бројните множества - множествата N_0 , Z , Q , J и R посликовито можеме да ги прикажеме на полуправа или права, таканаречени бројни полуоски и бројни оски. Ако пак сакаме сликовито или со цртежи да прикажеме произволно множество (конечно или бесконечно) ќе ги користиме круговите (затворени криви линии) кои во математичката терминологија се познати под името (Ојлер-Венови кругови или дијаграми).

Пример 12. Во V_1 одделение од 33-јца ученици 12 се членови на математичката секција а 19 се членови на ракометната секција.

Колку млади математичари членуваат во ракометната секција ако знаеме дека 10 ученици од одделението не членуваат во споменатите секции.

Решение: Задачата ќе ја решиме со помош на Ојлер-Веновите кругови, односно цртаме еден голем круг k во кој ги сместуваме сите ученици. Потоа цртаме два помали круга k_1 и k_2 сместени во големиот круг k кои се пресекуваат.

Во кругот k_1 нека ги прикажеме учениците од математичката секција, а во кругот k_2 учениците од ракометната секција (црт. 1). Бидејќи во за-



Црт. 1

дачата се бара колку млади математичари членуваат и во ракетметната секција, тогаш е јасно дека нив ќе ги пронајдеме во заедничкиот дел на двата мали круга, т.е. $k_1 \cap k_2$.

Ако сакаме полесно да одговориме на задачата ќе го разгледаме црт. 1. (Ојлер – Венов дијаграм).

Во големиот круг k има 33-јца ученици а во двата круга заедно $k_1 \cup k_2$ има $33 - 10 = 23$ -јца ученици. Од условот на задачата во кругот k_1 (математичка секција) има 12 ученици, а во делот надвор од кругот k_1 (само во k_2) ќе има $23 - 12 = 11$ ученици а тоа е бројот на учениците кои членуваат само во ракетметната секција. Бројот на учениците што членуваат и во математичката и во ракетметната секција е $19 - 11 = 8$. Значи 8 ученика од математичката секција се истовремено членови и на ракетметната секција. Според тоа, можеме да заклучиме дека од 33-јца ученици:

- математичката секција има 12 ученици по услов;
- ракетметната секција има 19 ученици по услов;
- не се членови на ниедна секција 10 ученици по услов;
- математичката и ракетметната секција има 8 ученици.

13. Во еден центар за странски јазици вработени се определен број преведувачи, од кои секој знае барем еден од трите јазици: француски, германски или англиски.

Колку преведувачи има вработено во центарот ако се знае дека:

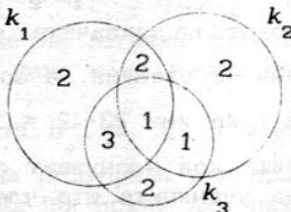
- Осум од нив знаат француски јазик;
- Шест од нив знаат германски јазик;
- седум од нив знаат англиски јазик;
- четири од нив знаат француски и англиски јазик;
- тројца од нив знаат француски и германски јазик;
- двајца од нив знаат англиски и германски јазик
- еден од нив знае англиски, германски и француски.

Решение: При решавањето на оваа задача ќе размислуваме на следниот начин.

Од условот на задачата произлегува дека овде заеднички круг не ни е потребен бидејќи не постои вработен преведувач што не знае некој од јазиците.

Нека ги означиме со k_1 преведувачите што го знаат францускиот јазик, со k_2 германскиот, а со k_3 англискиот јазик, црт. 2.

Од условот на задачата знаеме дека француски јазик знаат 8 преведувачи, германски 6 и англиски 7. Прво ги пополнуваме оние делови од $k_1 \cap k_2 \cap k_3$ без унијата од другите два круга. Со оваа постапка утврдуваме дека само по еден јазик (било кој) го познаваат само двајца преведувачи. Тогаш според условот на задачата во $k_1 \cap k_2 \cap k_3$ - има 1 преведувач, во $k_1 \cap k_2$ - има 3 преведувачи, во $k_2 \cap k_3$ - има 2 преведувачи, а во $k_1 \cap k_3$ - има 4 преведувачи.



Црт. 2

Значи, можеме да заклучиме дека вкупниот број преведувачи во центарот е $\delta(k_1 \cup k_2 \cup k_3)$, односно тој е еднаков на бројот на преведувачите што ги знаат трите јазици (1) собран со бројот на преведувачите што знаат само два јазика $1+2+3 = 6$ преведувачи и собран со преведувачите што знаат само по еден јазик $2+2+2 = 6$ или во центарот има вкупно 13 преведувачи.

14. За учениците од VII¹ одделение знаеме дека:

1. Сите ученици членуваат во некоја секција: математичка, хорска или фудбалска.

2. 24-јца ученици се членови на фудбалската или математичката секција.

3. 18 ученици се членови на математичката, а не се членови на хорската секција.

4. 3-јца ученици членуваат во сите секции.

5. Еден ученик е член само на фудбалската секција,

6. Еден ученик не членува во математичката секција но затоа е пак член и на фудбалската и хорската секција.

7. Постојат 5 ученици што се членови на математичката и фудбалската секција.

Во одделението има 34-јца ученици. Определи:

а) Колку ученици не се членови на математичката секција?

б) Колку ученици се членови на хорската секција, а не се членови на фудбалската секција?

в) Колку ученици се членови на фудбалската секција?

Решение: Множествата

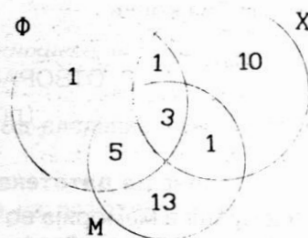
нека ги означиме со:

М – математичка секција,

Х – хорска секција и

Ф – фудбалска секција.

Тогаш: Од условот 2 следува дека бројот на учениците што членуваат само во хорската секција е $34 - 24 = 10$ ученици.



Црт. 3

Од условот 4 следува дека бројот на учениците што членуваат во сите 3 секции е 3-јца ученици.

Од условот 6 следува дека само 1 ученик е член и во хорската и во фудбалската секција $(X \cap \Phi) \setminus M$.

Од условот 5 следува дека само 1 ученик е член на фудбалската секција $\Phi \setminus (M \cup X)$.

Од условот 3 следува дека во $M \setminus X$ има 18 ученици, а од условот 7 следува дека во $(M \cap \Phi) \setminus X$ има 5 ученици, во $M \setminus (\Phi \cup X)$ има 13 ученици.

Од цртежот 3 јасно се гледа и одговорот на барањата во задачата, т.е.

а) Бројот на учениците што не членуваат во математичката секција е 12, т.е. $\delta((\Phi \cup X) \setminus M) = 12$.

б) Бројот на учениците што членуваат во хорската секција, а не членуваат во фудбалската секција е 11, т.е. $\delta(X \setminus \Phi) = 11$.

в) Бројот на учениците што членуваат во фудбалската секција е 10, т.е. $\delta\Phi = 10$.

Покрај досега спомнатите и користените методи за решавање логички задачи постојат и други. Овде ќе се задржиме уште на два метода. Истите ќе ги илустрираме со примери.

17. (Стара позната задача со фазани и зајаци)

Во еден кафез имало зајаци и фазани. Изброени се 94 нозе и 36 глави. Колку фазани и колку зајаци има во кафезот?

Оваа задача може да се реши преку равенка со една непозната или преку систем од две линеарни равенки со две непознати, но мислиме дека за повеќето од вас и едниот и другиот начин на решавање се познати.

Ние ќе ви понудиме и трет начин на решавање – таканаречен метод на **лажна претпоставка** што ретко се користи. Имено, ќе претпоставиме (секако лажно) дека во кафезот има само зајаци. Тогаш, сите глави ќе имаат по 4 нозе, односно вкупно има $36 \cdot 4 = 144$ нозе, па како вишок се јавуваат 50 нозе, т.е. $144 - 94 = 50$. Овој вишок на нозе се токму нозете на фазаните за кои претпоставивме дека се зајаци. Бидејќи фазаните имаат по две нозе, а не четири, тогаш ако $50 : 2 = 25$, а тоа претставува бројот на фазаните во кафезот. Бројот на зајаци се добива: $36 - 25 = 11$.

До истиот резултат се доаѓа ако лажно се претпостави дека во кафезот има само фазани. Тогаш, сите глави ќе имаат по две нозе, т.е. $36 \cdot 2 = 72$ нозе, при што се јавува недостаток од 22 нозе, односно $94 - 72 = 22$. Овој недостаток е токму тоа што претпоставиме дека и зајациите имаат по две нозе, а не четири. Па, ако $22 : 2$ се добива 11 што е бројот на зајациите во кафезот. Бројот на фазаните е $36 - 11 = 25$. Значи, користејќи лажна претпоставка со точно и правилно логично размислување дојдовме до точен и логичен заклучок-решение.

Да ја решиме со методот на лажната претпоставка и познатата задача со гуските:

Летало јато гуски. Во пресрет им доаѓа една гуска која им вели: "Добро утро сто гуски"? Една гуска од јатото одговара: "Ние не сме 100, туку сме, колку што сме, уште толку да сме, половина од нас, четвртина од нас и ти, ако дојдеш со нас, ќе бидеме 100". Колку гуски има во јатото?

За да ја решиме задачата со метод на лажна претпоставка, ќе претпоставиме дека во јатото имало 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... гуски, односно број што е делив со 4, (затоа што во задачата се јавува четвртина) а потоа составуваме израз по условот на самата задача.

Ако претпоставиме (секако лажно) дека во јатото биле 8 гуски, тогаш од условот во задачата изразот би бил $8+8+\frac{8}{2}+\frac{8}{4} = 16+4+2 = 22$. Но, бројот 22 не се содржи во бројот 99 што се добива од условот на задачата. Значи, изборот на бројот 8 не е добар и го отфрламе. Ако лажно претпоставиме дека во јатото има 12 гуски, тогаш изразот составен по условот на задачата ќе биде:

$12+12+\frac{12}{2}+\frac{12}{4} = 24+6+3 = 33$. Бројот 33 се содржи во бројот 99 - 3 пати, па бројот на гуските во јатото ќе го добиеме кога лажната претпоставка ќе ја помножиме со 3, т.е. $3 \cdot 12 = 36$ гуски, Изразот добиен од условот на задачата ќе биде: $36+36+\frac{36}{2}+\frac{36}{4} = 99$ што наполно се согласува со самиот текст на задачата. Значи, во јатото имало 36 гуски. Да забележиме дека во лажната претпоставка можеме да го користиме кој и да било природен број делив со 4 кој го дели бројот 99 или се дели со бројот 99.

Со метод на лажна претпоставка реши ги задачите:

19. На едно паркиралиште за моторни возила има паркирано мотори и леки коли. Колку мотори и колку леки коли има, ако сме изброиле 90 возила и 324 гуми?

20. Во четири гајби има 390 феврека. По колку февреци има во секоја гајба, ако февреците се распоредени така, што во секоја наредна гајба да има за половина повеќе февреци од февреците во претходната гајба.

Решение: I гајба - 48; II гајба $48+24 = 72$; III гајба $72+36 = 108$; IV гајба $108+54 = 162$.

Постојат уште многу различни видови на логички задачи за кои, секако постојат и различни приоди и методи за нивното решавање. Но овде ќе се задржиме уште на еден тип логички задачи, а тоа е определување на "неисправно" (потешко или полесно) топче од повеќе дадени еднакви топчиња. И оваа постапка ќе ја илустрираме преку следниот пример:

21. Дадени се 12 топчиња што меѓу себе се наплно еднакви, освен едно топче кое има поголема (или помала) маса од другите. Колку најмалку мерења се потребни, употребувајќи вага без тегови, за да го определиш тоа топче?

Решение: Постапката за решавање на овој тип задачи ја сведуваме на следното:

Формираме група од еднаков број топчиња. Во овој случај 3 групи од по 4-топчиња. Секако дека и неистовремено топче ќе биде во една од овие групи. Мерењата се изведуваат на следниот начин:

I мерење: Ставаме на вагата две групи топчиња избрани произволно. При ова мерење можни се две состојби:

1. групите на топчиња да бидат во рамнотежа или
2. групите на топчиња да не се во рамнотежа.

II мерење: Ако е исполнет услов 1 од првото мерење т.е. ваганите групи на топчиња да бидат во рамнотежа, тогаш ја земаме третата група на топчиња и ја поделуваме на две нови групи од по две топчиња. Сигурно е дека "неисправното" топче се наоѓа во една од тие две групи. Овие групи од по две топчиња ги ставаме на вага. Овде рамнотежа не може да постои, па едната група од топчиња е потешка од другата.

III мерење: Ако бараме потешко топче, тогаш ја земаме онаа група од две топчиња што е потешка при II мерење. (ако бараме полесно топче - работиме спротивно од она што е овде објаснето). Ги земаме тие две топчиња и ги ставаме на вага. На тој начин го определуваме потешкото топче. Значи, за да го определиме "неисправно" топче во овој случај ни беа потребни три мерења. Да видиме сега колку мерења се потребни ако при првото мерење групите топчиња не се во рамнотежа (втор случај). Тогаш за

II мерење се зема групата топчиња што е по тешка, де-лејќи ја на две нови групи од по две топчиња. Постапка-та на работа понатака е иста како и во првиот случај. Значи, независно од исходот на првото мерење за да го определиме "неисправното" топче во овој случај потребни ни се три мерења.

На сличен начин реши ги следните задачи:

22. Од 6 по големина еднакви топчиња едно од нив нема иста маса. (може да биде потешко или полесно). Како со најмал можен број на мерења на вага без тегови можеш да утврдиш кое топче нема иста маса?

23. Од 20 топчиња на изглед сите еднакви, едно е малце потешко. Како ќе утврдиш со најмал можен број на мерења на вага без тегови кое топче е потешко?

На крајот, до колку ви помогнавме во начинот и изборот на методите во решавањето на логичките задачи, решете ги самостојно и овие логички задачи:

1. Кој број следува во низата 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

2. Тулата е тешка 1kg и половина тула. Колку тежи тулата?

3. Полжав се качува по телефонски столб висок 10m и тоа дење се качува 3m, ноќе се спушта 2m. За колку дена полжавот ќе се качи на врвот од столбот?

4. Ученик треба да плати чоколада од 49 денари. Ученикот има монети само од по два денари, а касиерката има монети само од по пет денари. Може ли ученикот имајќи ги само овој вид пари да плати и како?

5. На еден излет биле: 35 ученици кои завршиле шестото одделение; 25 ученици што завршиле седмо одделение и 10 ученици што завршиле осмо одделение. Учениците со себе понесле 35 сока и секој од нив испил точно по еден сок. Како е можно тоа? (Одговор: Бројот на учениците бил: оваа година завршиле 8 одделение 10 ученици, 7 одделение 15 ученици и 6 одделение 10 ученици).

6. Зоран во дворот засадил 19 ружи, распоредувајќи ги во 3 реда така што во секој ред има по 5 ружи. Како го сторил тоа?

7. Гуска и пол за ден и пол снесува јајце и пол. Колку јајца ќе снесат 9 гуски за 9 дена? (54 јајца).