

# Вневписанные окружности и дюжины точек.

(Представляется В. Филимоновым и А. Заславским.)

## О появлении этой серии задач.

Всё началось со следующей задачи, которую мне сообщил Д. Терёшин.

**Задача** (Д. Терёшин). Рассмотрим треугольник  $ABC$  и две его вневписанные окружности, одна из которых касается стороны  $AC$  в точке  $K$  и продолжений сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $L$  и  $M$ , а другая — стороны  $AB$  в точке  $P$  и продолжений сторон  $AC$  и  $BC$  в точках  $Q$  и  $R$ . Докажите, что точка пересечения  $X$  прямых  $LM$  и  $QR$  лежит на высоте (проведённой из вершины  $A$ ) треугольника  $ABC$ .

Сходу геометрического решения этой задачи найти не удалось, работали лишь вычислительные способы. Некоторые наблюдения добавили интригу в этот сюжет. Оказалось, что также точка пересечения  $Y$  прямых  $KM$  и  $PR$  лежит на высоте треугольника  $ABC$ , а кроме того, длины отрезков  $AU$  и  $AX$  равны соответственно радиусу вписанной окружности и вневписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ . Были обнаружены другие многочисленные факты, обнаружилась связь с известными трудными задачами олимпиад (некоторые из них присутствуют в серии). Желание получить чисто геометрические объяснения этих фактов побудило рассмотреть более подробно точки касания сторон с вписанной и вневписанными окружностями, и прямые, их соединяющие. Эти четыре окружности обладают различиями, связанными с геометрическим расположением: скажем, вписанная окружность всегда меньше вневписанной, вписанная расположена внутри, а вневписанная — вне треугольника. Однако, эти окружности имеют общие глубокие свойства: каждая из них касается трёх прямых, содержащих стороны треугольника, центр каждой из них лежит на пересечении трёх биссектрис углов треугольника (если под биссектрисой понимать внутреннюю либо внешнюю биссектрису), и как правило, наличие некоторого свойства у одной из окружностей влечёт наличие этого свойства (или аналога этого свойства) и у других. Поэтому вписанная и вневписанные окружности в некотором смысле равноправны по отношению к данному треугольнику, и для понимания некоторых важных геометрических фактов понадобилось одновременное рассмотрение всей четвёрки окружностей. Этим объясняется введение не вполне стандартных, но «равноправных» обозначений (см. ниже).

Разделы А, В, С этой серии появились в результате работы автора текста совместно с И. Богдановым, раздел D добавлен А. Заславским. Благодарим А. Акопяна и В. Протасова за проявленное внимание и замечания.

П. Кожевников

## Обозначения.

Все рассмотрения происходят в произвольном неравнобедренном треугольнике  $ABC$ . На протяжении всей серии придерживаемся следующих обозначений для объектов, связанных с треугольником  $ABC$ .

$R, p$  — радиусы описанной и вписанной окружности, полупериметр;

$a, b, c$  — длины сторон  $BC, CA, AB$ ;

$A', B', C'$  — середины сторон  $BC, CA, AB$ ;

$AH_a, BH_b, CH_c$  — высоты,  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ ;

$\Omega$  — описанная окружность,  $O$  — её центр;

$\omega_0$  — вписанная окружность,  $I_0$  — её центр;  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — вневписанные окружности (касающиеся соответственно сторон  $BC, CA, AB$ ),  $I_1, I_2, I_3$  — их центры,  $r_i$  — радиусы окружностей  $\omega_i$ ;

$I'_0, I'_1, I'_2, I'_3$  — центры вписанной и вневписанных окружностей треугольника  $A'B'C'$ .

В предложенных обозначениях присутствует следующая симметрия: Заметим, что 6 прямых  $I_i I_j$  ( $i \neq j$ ) — внешние и внутренние биссектрисы треугольника  $ABC$ . Поэтому четвёрка точек  $I_0, I_1, I_2, I_3$  — ортоцентрическая, и треугольник  $ABC$  — ортотреугольник (то есть треугольник с вершинами в основаниях высот любого из четырёх треугольников  $I_0 I_1 I_2, I_1 I_2 I_3, I_2 I_3 I_0, I_3 I_0 I_1$ ). При этом точки  $A, B, C$  однозначно соответствуют разбиениям множества из четырёх индексов  $\{0, 1, 2, 3\}$  на пары:  $A = I_0 I_1 \cap I_2 I_3, B = I_0 I_2 \cap I_1 I_3, C = I_0 I_3 \cap I_1 I_2$ .

## Серия А: Первая дюжина: точки касания

Пусть  $A_i, B_i, C_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) — точки касания окружности  $\omega_i$  с прямыми  $BC, CA, AB$  соответственно (на рис. А — красные точки, их 12 штук).

- A1.  $A_0$  и  $A_1$ , а также  $A_2$  и  $A_3$  симметричны относительно  $A'$ , причём  $A_0A_3 = A_1A_2 = c$ ,  $A_0A_2 = A_1A_3 = b$ ,  $A'A_0 = A'A_1 = \frac{|b-c|}{2}$ ,  $A'A_2 = A'A_3 = \frac{b+c}{2}$ . (Аналогично — симметрия относительно  $B'$  и  $C'$ .)
- A2. а) Прямые  $AA_i, BB_i, CC_i$  пересекаются в одной точке.  
б) Прямые  $AA_1, BB_2, CC_3$  пересекаются в одной точке. (Аналогично, тройки прямых  $AA_0, BB_3, CC_2$ ;  $AA_2, BB_1, CC_0$ ;  $AA_3, BB_0, CC_1$  пересекаются в одной точки или параллельны.)
- A3. Радикальные оси пар окружностей  $\omega_i$  и  $\omega_j$  — внутренние и внешние биссектрисы углов треугольника  $A'B'C'$ . (Найдите радикальные центры всевозможных троек из окружностей  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ .)
- A4#. Среди окружностей, касающихся тройки окружностей  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , есть три окружности, проходящие через точку  $I'_0$ . (Докажите аналогичное утверждение для других троек окружностей.)
- A5#.  $AA_1 \parallel I_0A'$  (аналогично  $AA_0 \parallel I_1A'$ ,  $AA_2 \parallel I_3A'$ ,  $AA_3 \parallel I_2A'$  и т. д.).
- A6#. Прямые  $I_0A_1, I_1A_0, I_2A_3, I_3A_2$  пересекаются в одной точке. Что это за точка?

## Серия В: Вторая дюжина: «фокусы»

Обозначим точки пересечения  $B_{01} = B_{10} = A_0B_0 \cap A_1B_1$ ,  $B_{23} = B_{32} = A_2B_2 \cap A_3B_3$ . (Здесь  $A_0B_0 \cap A_1B_1$  — это именно  $B_{01}$ , а не  $A_{01}$ , так как  $A$  соответствует разбиению множества индексов  $\{0, 1, 2, 3\}$  на пары  $0, 1$  и  $2, 3$ .) Аналогично определим точки все 12 точек:  $A_{ij}$ , где  $i \in \{0, 1\}$ ,  $j \in \{2, 3\}$  (везде полагаем  $A_{ij} = A_{ji}$ );  $B_{ij}$ , где  $i \in \{0, 2\}$ ,  $j \in \{1, 3\}$ ;  $C_{ij}$ , где  $i \in \{0, 3\}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . На рис. В1, В2 все эти точки — фиолетовые точки.

Докажите следующие утверждения.

- В0. Докажите, что угол  $B_2B_{23}B_3$  — прямой (то же для аналогичных углов).
- В1. Точки  $B_{23}, C_{23}, A_2, A_3$  лежат на одной окружности. Найдите центр этой окружности. (Аналогично точки  $B_{01}, C_{01}, A_0, A_1$  лежат на одной окружности, и т. д., таким образом получается, что красные и фиолетовые точки расположены на шести окружностях.)
- В2.  $A_{ij}$  лежат на средней линии  $B'C'$  (аналогично,  $B_{ij}$  и  $C_{ij}$  лежат на средних линиях, таким образом, 12 фиолетовых точек расположены по 4 на трёх прямых  $A'B', B'C', C'A'$ ).
- В3.  $A_{13}$  (и аналогично  $A_{02}, B_{01}, B_{23}$  лежат на окружности с диаметром  $AB$ , (причём  $A_{02}B_{01}A_{13}B_{23}$  — прямоугольник.) (Таким образом, фиолетовые точки — расположены по 4 на трёх окружностях с диаметрами  $BC, CA, AB$ ).
- В4. Выразите длины  $A_{02}A_{03}$  и т.д. через  $a, b, c$ .
- В5. Точка  $A_{ij}$  лежит на прямой  $I_iI_j$ , причём  $A_{ij}$  является проекцией точки  $A$  на прямую  $I_iI_j$ . (таким образом, 12 фиолетовых точек лежат по две на шести биссектрисах углов треугольника  $ABC$ ).
- В6. Точки  $A_{02}$  и  $C_{02}$  — фокусы окружностей  $\omega_0$  и  $\omega_2$  (то есть  $A_{02}$  и  $C_{02}$  — пара точек, инверсных относительно каждой из этих двух окружностей). (Таким образом, фиолетовые точки разбиваются на 6 пар фокусов; отсюда, в частности, следует, что внутри каждой из окружностей  $\omega_i$  лежит ровно три фиолетовые точки).
- В7#. Найдите радикальные центры восьми троек таких окружностей с разными центрами из задачи В1.

В8#. Шестёрка точек  $A_{03}A_{02}C_{02}C_{23}B_{23}B_{03}$  лежит на одной окружности (имеются ещё три аналогичные окружности). Найдите центры этих окружностей. Выразите их радиусы через элементы треугольника  $ABC$ .

В9#.  $A_{02}$  и  $A_{13}$  — центры соответственно вписанной и невписанной, либо двух невписанных окружностей для треугольника  $B'H_aH_b$ .

### Серия С: Третья дюжина: «пересечения — на высотах»

Положим  $A_{(3)} = A_0C_0 \cap A_1B_1$  (Здесь  $A_0C_0 \cap A_1B_1$  — это именно  $A_{(3)}$ , а не  $A_{(2)}$ , так как точке  $C$  соответствует разбиению индексов на пары 0, 3 и 1, 2, и индекс 3 — это второй индекс из пары, содержащей 0). Аналогично,  $A_{(2)} = A_0B_0 \cap A_1C_1$ ,  $A_{(0)} = A_2B_2 \cap A_3C_3$ ,  $A_{(1)} = A_2C_2 \cap A_3B_3$ , и точно так же вводятся точки  $B_{(i)}$  и  $C_{(i)}$  — всего 12 точек, они отмечены зелёным на рис. С.

Докажите следующие утверждения.

- С1. Точки  $A_{(i)}$  лежат на прямой  $AH_a$  (и аналогично для точек  $B_{(i)}$  и  $C_{(i)}$ , таким образом 12 зелёных точек лежат по 4 точки на каждой из высот треугольника  $ABC$ ).
  - С2. Отрезок  $AA_{(i)}$  равен по длине  $r_i$ .
  - С3. Прямая  $A_{(i)}A_i$  параллельна одной из биссектрис угла  $A$ .
  - С4. Докажите, что прямые  $A_{(1)}A_1$ ,  $B_{(2)}B_2$  и  $C_{(3)}C_3$  пересекаются в одной точке. (Аналогично, имеются ещё три тройки прямых, пересекающихся в одной точке:  $A_{(0)}A_0$ ,  $B_{(3)}B_3$  и  $C_{(2)}C_2$ ;  $A_{(3)}A_3$ ,  $B_{(0)}B_0$  и  $C_{(1)}C_1$ ;  $A_{(2)}A_2$ ,  $B_{(1)}B_1$  и  $C_{(0)}C_0$ .)
  - С5. Треугольники  $A_1B_2C_3$  и  $A_{(0)}B_{(0)}C_{(0)}$  центрально симметричны. Найдите их центр симметрии. (Аналогично, пары треугольников  $A_0B_3C_2$  и  $A_{(1)}B_{(1)}C_{(1)}$ ,  $A_3B_0C_1$  и  $A_{(2)}B_{(2)}C_{(2)}$ ,  $A_2B_1C_0$  и  $A_{(3)}B_{(3)}C_{(3)}$  центрально симметричны.)
  - С6. Описанные окружности треугольников  $A_{(1)}B_{(2)}C_{(3)}$ ,  $A_{(0)}B_{(3)}C_{(2)}$ ,  $A_{(3)}B_{(0)}C_{(1)}$ ,  $A_{(2)}B_{(1)}C_{(0)}$  имеют общий центр (таким образом зелёные точки расположены по три на четырёх концентрических окружностях). Найдите общий центр этих четырёх окружностей.
- С7.# Выразите длины отрезков  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$  через радиусы  $r_i$ .
- С8.# Выразите радиус описанной окружности треугольника  $A_{(1)}B_{(2)}C_{(3)}$  через  $R$  и  $r_0$ . (Аналогичным образом, выразите радиусы окружностей из задачи С6.)
- С9.# Прямая  $I_iA'$  проходит через  $A_{(i)}$  (аналогично  $I_iB'$  проходит через  $B_{(i)}$ ,  $I_iC'$  проходит через  $C_{(i)}$ ).

### Серия D: Четвертая дюжина.

Положим  $C_0^* = A_0B_0 \cap A_1B_2$ , и аналогично введём 12 точек  $A_i^*$ ,  $B_i^*$ ,  $C_i^*$  (на рис. D они покрашены синим). (Построение этих точек легко описывается следующим образом: Возьмём одну из окружностей, например  $\omega_0$ . Возьмём точки её касания с двумя сторонами, например  $A_0$ ,  $B_0$ . Возьмём точки касания этих же сторон с двумя другими окружностями, которые симметричны выбранным ранее относительно соответствующих середин, в данном случае  $A_1$ ,  $B_2$ . Построим точку пересечения прямых, соединяющих две выбранные пары точек касания).

Докажите следующие утверждения.

- D1. Стороны треугольника  $A_i^*B_i^*C_i^*$  проходят через вершины  $ABC$ .
- D2. Проведём через  $C_i^*$  произвольную прямую и найдем точки  $A''$ ,  $B''$  её пересечения со сторонами  $BC$ ,  $AC$ . Тогда прямые  $A''B_i^*$ ,  $B''A_i^*$  пересекаются в некоторой точке  $C'''$  стороны  $AB$ .
- D3. Прямые  $AA''$ ,  $BB''$ ,  $CC''$  пересекаются в одной точке, изогонально сопряжённая к которой лежит на прямой  $OI_i$ .

- D4. Окружность  $A''B''C''$  проходит через точку Фейербаха  $F_i$ . Наверное, есть ещё какие-то свойства.
- D5. Четыре синие точки, обозначенные одной буквой, лежат на одной прямой — соответствующей стороне ортотреугольника.
- D6. а) Треугольники  $A_i^*B_i^*C_i^*$  и  $ABC$  перспективны (то есть прямые, соединяющие соответствующие вершины этих треугольников, пересекаются в одной точке).  
б) Попробуйте отыскать какие-либо соотношения между четырьмя центрами перспективы.
- D7. (Обобщение задачи D4) Рассмотрим произвольную точку  $C^{**}$  на прямой  $H_aH_b$ . Проведём через  $C^{**}$  произвольную прямую и найдем точки  $A''$ ,  $B''$  её пересечения со сторонами  $BC$ ,  $AC$ . Пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $AA''$  и  $BB''$ , а  $C''$  — точка пересечения  $CP$  и  $AB$ . Тогда описанные окружности всех треугольников  $A''B''C''$  имеют общую точку.

# Вневписанные окружности и дюжины точек.

## Указания, решения, комментарии.

### Серия А: Дюжина точек касания

- A1. Следует из подсчёта отрезков касательных, например,  $2AB_1 = AB_1 + AC_1 = AB + BA_0 + AC + CA_0 = 2p$ , откуда  $B'B_1 = p - \frac{b}{2} = \frac{a+c}{2}$ . (См. также замечание к задаче В5.)
- A2. Следует из теоремы Чевы (используется равенство отрезков касательных).
- A3. Из задачи А1 следует, что точка  $A'$  имеет равные степени относительно окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , значит  $A'$  лежит на их радикальной оси. Кроме того, эта радикальная ось перпендикулярна линии центров  $I_2I_3$ , то есть параллельна (внутренней) биссектрисе угла  $BAC$  или угла  $B'A'C'$ . Таким образом, радикальная ось — биссектриса угла  $B'A'C'$ . Искомые радикальные центры — точки  $I'_0, I'_1, I'_2, I'_3$ .
- A4#. (Эта задача формулировалась как гипотеза в докладе К. Кузнецовой (Великие Луки) на конференции школьников «Старт в науку — 2009»)
- Из задачи А3 следует, что существует инверсия с центром  $I'_0$ , переводящая каждую из окружностей  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  в себя. При этой инверсии прямые  $AB, BC, CA$  перейдут в окружности, проходящие через  $I'_0$  и касающиеся окружностей  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .
- A5#. Гомотетия с центром  $A$ , переводящая  $\omega_1$  в  $\omega_0$ , переводит диаметр  $KA_1$  в диаметр  $A_0L$ . Таким образом, прямая  $AA_1$  совпадает с прямой  $LA_1$ . После этого наблюдения утверждение задачи следует из того, что  $I_0A'$  — средняя линия треугольника  $A_0LA_1$ .
- A6#. В обозначениях из решения предыдущей задачи: треугольники  $A_1LA_0$  и  $A_1AH_a$  гомотетичны (с центром  $A_1$ ), поэтому прямая  $A_1I_0$  является медианой в треугольнике  $A_1AH_a$ , то есть проходит через середину высоты  $AH_a$ .

### Серия В: Вторая дюжина: «фокусы»

- В0. Следует из того, что прямые  $A_iB_i$  параллельны биссектрисам угла  $C$  (внешней или внутренней).
- В1. Из задачи В0 следует, что  $A_2B_{23} \perp A_3B_{23}$  и  $A_2C_{23} \perp A_3C_{23}$ , поэтому указанные 4 точки лежат на одной окружности с диаметром  $A_2A_3$ . Из А1 следует, что центр этой окружности —  $A'$  (а радиус равен  $\frac{b+c}{2}$ . Аналогично, точки  $B_{01}, C_{01}, A_0, A_1$  лежат на одной окружности с центром  $A'$  (и радиусом  $\frac{|b-c|}{2}$ ).
- В2. В прямоугольном треугольнике  $A_2B_{23}A_3$  имеем:  $A'B_{23} = A'A_2$ , (и равно  $\frac{b+c}{2}$  — см. А2), поэтому равнобедренные треугольники  $A_2A'B_{23}$  и  $A_2CB_2$  гомотетичны, и  $A'B_{23} \parallel AC$ , то есть  $B_{23}$  лежит на средней линии  $A'C'$ .
- Замечание.**  $B_{23}$  также лежит на окружности с диаметром  $B_2B_3$ .
- В3. Зная, длину  $A'B_{23}$  (см. В1), легко найти  $C'B_{23} = A'B_{23} = A'C' = \frac{c}{2}$ , поэтому  $B_{23}$  лежит на окружности радиуса  $\frac{c}{2}$  с центром  $C'$ . Для других точек типа  $B_{ij}$  подсчёт аналогичен.
- В4. Из В2 легко получить:  $A_{13}A_{12} = A_{13}C' + C'B' + B'A_{12} = \frac{c+a+b}{2} = p$ ;  $A_{13}A_{03} = A_{13}A_{12} - A_{03}A_{12} = p - b$  (так как  $A_{03}A_{12}$  — диаметр окружности из В2). Аналогично  $A_{03}A_{02} = p - a$ ,  $A_{02}A_{12} = p - c$ .

В5. (Одна из возможных конфигураций этой задачи — в задаче 1.66 в задачнике Прасолова, см. также статью Протасова («Квант», № 4 — 2008); также см. задачу 255 из задачника Шарыгина 9 — 11, которую автор даже отмечает (случайно ли?) в предисловии.)

Из В1 и В2 имеем:  $C'B_{23} \parallel AC$  и  $C'B_{23} = C'A$ , откуда  $\angle B_{23}AC' = \angle C'AB_{23} = \angle B_{23}AB_3$ , таким образом,  $AB_{23}$  — внешняя биссектриса угла  $BAC$ . Кроме того, из В2 следует, что  $BB_{23} \perp AB_{23}$ . Для других точек доказательство аналогично.

**Замечание.** Обратим внимание на множество параллелограммов на рисунке (стороны которых параллельны либо сторонам треугольника  $ABC$ , либо его биссектрисам). Скажем, из параллелограммов  $A_3A_{13}A_{23}C$  и  $BA_{13}A_{23}A_2$  видно геометрическое объяснение задачи А1.

В6. Треугольники  $I_0A_0B_0$  и  $I_0B_0C_0$  подобны (в подсчёте углов используем, что  $B_0C_0$  параллельна внешней биссектрисе угла  $ABC$ ), откуда  $I_0A_0 \cdot I_0C_0 = r_0^2$ .

В7#. Искомые радикальные центры — это точки  $I_i$ , а также точки, симметричные им относительно центра описанной окружности треугольника  $ABC$ .

Например, из В6 следует, что  $I_0A_0 \cdot I_0C_0 = I_0A_0 \cdot I_0B_0 = I_0B_0 \cdot I_0C_0 = r_0^2$ , значит степени точки  $I_0$  относительно окружностей, построенных на отрезках  $A_0A_1$ ,  $B_0B_2$ ,  $C_0C_2$  как на диаметрах (см. В1), равны.

Далее, рассмотрим, например, окружности с диаметрами  $A_2A_3$ ,  $B_1B_3$  и  $C_1C_2$ . Точка  $I_3$  лежит на радикальной оси первых двух окружностей, так как равные отрезки  $I_3A_2$  и  $I_3B_1$  являются касательными к этим окружностям. Кроме того, радикальная ось перпендикулярна линии центров этих окружностей, то есть средней линии треугольника  $ABC$ . Три таких прямые пересекаются в точке, симметричной  $I$  относительно  $O$ .

В8#. Это окружности с центрами  $I'_i$ .

В самом деле, пусть, скажем,  $X$  — проекция  $I'_0$  на  $B'C'$ . Тогда из В3 вытекает:  $XA_{12} = XB' + B'A_{12} = \frac{p-b}{2} + \frac{b}{2} = \frac{p}{2}$ . Тогда  $I'_0A_{12}^2 = I'_0X^2 + XA_{12}^2 = \frac{r_0^2 + p^2}{4}$ . Аналогично квадрат расстояния от точки  $I'_0$  до любой из точек  $A_{03}$ ,  $A_{02}$ ,  $C_{02}$ ,  $C_{23}$ ,  $B_{23}$ ,  $B_{03}$  равен  $\frac{r_0^2 + p^2}{4}$ .

Таким же образом, доказывается, что окружность с центром  $I'_1$  имеет радиус  $\frac{r_1^2 + (p-a)^2}{4}$  и т. д.

**Замечание.** На самом деле, нетрудно установить общий факт: три пары фокусов для трёх окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, лежат на одной окружности (доказательство — упражнение на степень точки плюс тот факт, что радикальные оси должны пересекаться в одной точке).

**Замечание.** Это одна из окружностей семейства *Тукера* для треугольника  $I_1I_2I_3$ .

В9#. (См. также статью В. Протасова из «Кванта» № 4 — 2008, эта задача играет важную роль в доказательстве теоремы Фейербаха.)  $C_0A_0$  — биссектриса угла  $AB'H_a$  (из симметрии). Рассмотрим окружность девяти точек, треугольник  $B'H_aH_b$ , вписанный в эту окружность, и точку  $C'$  — середину дуги  $H_aH_b$ . Так как (см. В3)  $C'A_0 = C'H_a = C'H_b$ , то по теореме, обратной лемме о трезубце, получаем, что  $A_0$  — центр вписанной или невписанной окружности для треугольника  $B'H_aH_b$ .

### Серия С: Третья дюжина: «пересечения — на высотах»

С1-3. Из В5 следует, что  $AA_0A_0A_0$  — параллелограмм (его стороны параллельны (внешним) биссектрисам углов  $CBA$  и  $ACB$ ). Также  $A_{(0)}A_0I_0A_0$  — параллелограмм (его стороны параллельны (внутренним) биссектрисам углов  $CBA$  и  $ACB$ ). Поэтому  $\overrightarrow{I_0A_0}$  и  $\overrightarrow{A_{(0)}A}$  симметричны относительно середины отрезка  $A_0A_0$ . Отсюда вытекает С1 и С2. Так как  $I_0A_0A_{(0)}A$  — параллелограмм, то  $A_{(i)}A_i \parallel AI_0$ .

С4. (Это задача Емельянова 10.7 с 5 этапа Всероссийской олимпиады 2002? года.) Из С3 вытекает, что эти прямые — высоты треугольника  $A_{(1)}B_{(2)}C_{(3)}$ .

**Замечание.** Можно показать, что точка пересечения указанных трёх прямых симметрична ортоцентру треугольника  $A_0B_0C_0$  относительно точки  $I'_0$ .

С5. Покажем, что искомые центры симметрии — точки  $I'_i$ .

Так как радикальная ось делит пополам отрезки общих касательных, из задачи А3 вытекает, что прямые  $B_2C_2 (= B_2C_{(0)})$  и  $B_3C_3 (= C_3B_{(0)})$  симметричны относительно прямой  $A'I'_0$ , или относительно точки  $I'_0$ . Аналогично, прямые  $A_1C_{(0)}$  и  $C_3A_{(0)}$  симметричны относительно  $I'_0$ . Это означает, что соответствующие точки пересечения  $C_{(0)}$  и  $C_3$  симметричны относительно  $I'_0$ .

С6. Искомый центр — точка  $H$ .

Из С1 мы знаем, что например,  $A_{(0)} = A_3C_3 \cap AH_a$  и  $C_{(2)} = A_3C_3 \cap CH_c$ . Так как  $A_3C_3$  параллельна биссектрисе угла  $B$ , то  $A_3C_3$  образует также равные углы с высотами  $AH_a$  и  $CH_c$ . Отсюда вытекает, что треугольник  $HA_{(0)}C_{(2)}$  равнобедренный, то есть  $H$  равноудалена от  $A_{(0)}$  и  $C_{(2)}$ .

С7-8. Радиусы описанных окружностей из задачи С6 равны  $|\rho_i|$ , где  $\rho_0 = AH + r_1 = BH + r_2 = CH + r_3$ ,  $\rho_1 = r_0 - AH = BH - r_3 = CH - r_2$ ,  $\rho_2 = AH - r_3 = r_0 - BH = CH - r_1$ ,  $\rho_3 = AH - r_2 = BH - r_1 = r_0 - CH$  (здесь  $AH$  и т. д. позволим быть отрицательными, если соответствующий угол треугольника тупой). Отсюда выражаем  $AH, BH, CH$  через радиусы  $r_i$   $AH = \frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2} - r_1$ ,  $BH = \frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2} - r_2$ ,  $CH = \frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2} - r_3$ .

Получаем:  $\rho_0 = \frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2}$ ,  $\rho_1 = \frac{r_0 + r_1 - r_2 - r_3}{2}$ ,  $\rho_2 = \frac{r_0 - r_1 + r_2 - r_3}{2}$ ,  $\rho_3 = \frac{r_0 - r_1 - r_2 + r_3}{2}$ , или с учётом соотношения  $r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r_0$  (см. задачник Прасолова 12.24),  $\rho_0 = r_0 + 2R$ ,  $\rho_1 = |r_1 - 2R|$ ,  $\rho_2 = |r_2 - 2R|$ ,  $\rho_3 = |r_3 - 2R|$ .

С9.# Из задачи А5 вытекает, что, скажем,  $I_0A'$  пересекает высоту  $AH_a$  в точке  $S$  такой, что  $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{I_0A_0}$ , то есть в точке  $A_{(0)}$  (см. задачи С1-2).

С10.# (задача предложена Д. Прокопенко) 1. Нетрудно видеть, что  $A$  — середина  $MN$ , поэтому  $AA_{(0)}$  серединный перпендикуляр в треугольнике  $MA_0N$ .

2. Из задачи С3 следует, что  $A_0A_{(0)}$  и  $A_0I_0$  симметричны относительно биссектрисы угла  $MA_0N$ . Так как  $A_0I_0$  — высота треугольника, то прямая  $A_0A_{(0)}$  содержит центр описанной окружности треугольника  $MA_0N$ . Из 1 и 2 следует требуемое.

Ответ: ортоцентром треугольника  $A_0MN$  является точка, симметричная  $A_0$  относительно  $I_0$ .

Задачи серии D представляют собой переформулировку утверждения теоремы Емельяновых, и их решения могут быть найдены в книге «Летние Конференции Турнира Городов. Избранные материалы. Выпуск 1.» МЦНМО, 2009.

# Excircles and Dozens of Points.

(Presented by V. Filimonov and A. Zaslavsky.)

## On the Origin of this Series of Problems.

The work on this series started from the problem posed by D. Tereshin.

**Problem** (D. Tereshin). Consider triangle  $ABC$  and its excircles: one of them touches the side  $AC$  at  $K$  and touches the lines  $AB$  and  $BC$  at  $L$  and  $M$ , the other touches the side  $AB$  at  $P$  and touches the lines  $AC$  and  $BC$  at  $Q$  and  $R$ . Prove that the intersection point  $X$  of the lines  $LM$  and  $QR$  lies on the altitude (passing through  $A$ ) of the triangle  $ABC$ .

At once the geometrical solution was not found, only calculations work. Some observations made this problem more exciting. It appears that the intersection point  $Y$  of lines  $KM$  and  $PR$  lies on the altitude of triangle  $ABC$ , and the length of the segments  $AY$  and  $AX$  equal to the radii of incircle and excircle touching the side  $BC$ . Some other results were obtained, and some connections with known problems from olympiads were established. In search for the geometrical explanation of these results we tried to consider in details the touch points of the sides with incircle and excircles, and the lines joining these touch points.

The incircle and the excircles have some different properties (for example, the incircle is smaller than any of the excircles, the incircle lies inside the triangle while the excircle lies outside the triangle). Nevertheless, these four circles have deep common properties: each of them touches the three sidelines of the triangle, the center of each circle is the intersection of three angle bisectors (either internal or external). So as a rule, if one of the four circles has some property, then the others have an analogous property. That is why these four circles in some sense enjoy equal rights with respect to the original triangle. To understand some important geometrical results we need to consider all the four circles simultaneously. Thus we introduce some non-regular but symmetrical notation (see below).

The sections A, B, C of the project were made by the author of the text jointly with I. Bogdanov, the section D was added by A. Zaslavsky. Also A. Akopyan, D. Prokopenko, and V. Protassov had made many useful notes and additions.

P. Kozhevnikov



# Excircles and Dozens of Points.

## Notation.

In a fixed non-equilateral triangle  $ABC$  let us denote:

$R, p$  — the radius of the circumcircle and semiperimeter;

$a, b, c$  — lengths of  $BC, CA, AB$ ;

$A', B', C'$  — midpoints of  $BC, CA, AB$ ;

$AH_a, BH_b, CH_c$  — altitudes,  $H$  — orthocenter of triangle  $ABC$ ;

$\Omega$  — circumcircle,  $O$  — circumcenter;

$\omega_0$  — incircle,  $I_0$  — incenter;  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — excircles (touching segments  $BC, CA, AB$ , respectively),

$I_1, I_2, I_3$  — centers of the excircles,  $r_i$  — radii of  $\omega_i$ ;

$I'_0, I'_1, I'_2, I'_3$  — centers of incircle and excircles of triangle  $A'B'C'$ .

The notation has the following symmetry: Note that 6 lines  $I_i I_j$  ( $i \neq j$ ) are internal and external bisectors of triangle  $ABC$ . Therefore the quadruple  $I_0, I_1, I_2, I_3$  is orthocentric, and  $ABC$  is the orthotriangle (that is the triangle having feet of altitudes as vertices) for each of triangles  $I_0 I_1 I_2, I_1 I_2 I_3, I_2 I_3 I_0, I_3 I_0 I_1$ . To each of the points  $A, B, C$  we put into correspondence a partition of 4-element set  $\{0, 1, 2, 3\}$  into two 2-element subsets:  $A = I_0 I_1 \cap I_2 I_3, B = I_0 I_2 \cap I_1 I_3, C = I_0 I_3 \cap I_1 I_2$ .

Also see the further notation

## Series A: The First Dozen: Touch Points

Let  $A_i, B_i, C_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) be touch points of  $\omega_i$  and lines  $BC, CA, AB$ , respectively (see 12 red points in Fig. A).

Prove the following statements.

- A1.  $A_0$  и  $A_1$  (and also  $A_2$  and  $A_3$ ) are symmetric with respect to  $A'$ , moreover,  $A_0 A_3 = A_1 A_2 = c$ ,  $A_0 A_2 = A_1 A_3 = b$ ,  $A' A_0 = A' A_1 = \frac{|b-c|}{2}$ ,  $A' A_2 = A' A_3 = \frac{b+c}{2}$ . (Similarly there is symmetry with respect to  $B'$  and  $C'$ .)
- A2. a)  $AA_i, BB_i, CC_i$  are concurrent.  
 b)  $AA_1, BB_2, CC_3$  are concurrent. (Similarly, triples of lines  $AA_0, BB_3, CC_2$ ;  $AA_2, BB_1, CC_0$ ;  $AA_3, BB_0, CC_1$  are either concurrent or parallel.)
- A3. Radical axis of pairs  $\omega_i$  and  $\omega_j$  are internal and external bisectors of triangle  $A'B'C'$ . (Find the radical centers of triples of circles  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ .)
- A4. In the set of circles touching  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  there exist three circles passing through  $I'_0$ . (Formulate and prove the similar statement for the other triples of circles.)
- A5.  $AA_1 \parallel I_0 A'$  (similarly  $AA_0 \parallel I_1 A', AA_2 \parallel I_3 A', AA_3 \parallel I_2 A'$ , etc.).
- A6.  $I_0 A_1, I_1 A_0, I_2 A_3, I_3 A_2$  are concurrent. Determine the intersection point of these lines.

### Series B: The Second Dozen: "Foci"

Let us denote  $B_{01} = B_{10} = A_0B_0 \cap A_1B_1$ ,  $B_{23} = B_{32} = A_2B_2 \cap A_3B_3$ . (Here  $A_0B_0 \cap A_1B_1$  is  $B_{01}$ , and not  $A_{01}$ , since  $A$  corresponds to the partition of  $\{0, 1, 2, 3\}$  into pairs  $0, 1$  and  $2, 3$ .) Similarly define all 12 points:  $A_{ij}$  with  $i \in \{0, 1\}$ ,  $j \in \{2, 3\}$  (we put  $A_{ij} = A_{ji}$ );  $B_{ij}$  with  $i \in \{0, 2\}$ ,  $j \in \{1, 3\}$ ;  $C_{ij}$  with  $i \in \{0, 3\}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . (See 12 violet points in Fig. B1, B2.)

Prove the following statements.

- B0.  $\angle B_2B_{23}B_3 = 90^\circ$  (similarly for the other angles).
- B1.  $B_{23}, C_{23}, A_2, A_3$  are concyclic.  
Find the center of the circle passing through these points. (Similarly,  $B_{01}, C_{01}, A_0, A_1$  are concyclic, etc., thus red and violet points belong to 6 circles.)
- B2.  $A_{ij}$  lies on the midline  $B'C'$   
(similarly,  $B_{ij}$  and  $C_{ij}$  lie on midlines, thus 12 violet points lie on 3 lines  $A'B', B'C', C'A'$ ).
- B3.  $A_{13}$  (the same for  $A_{02}, B_{01}, B_{23}$ ) lie on the circle with diameter  $AB$ ,  
(moreover,  $A_{02}B_{01}A_{13}B_{23}$  is a rectangle.)  
(Thus 12 violet points lie on 3 circles with diameters  $BC, CA, AB$ ).
- B4. Find the lengths  $A_{02}A_{03}$ , etc., in terms of  $a, b, c$ .
- B5.  $A_{ij}$  lies on  $I_iI_j$ , moreover,  $A_{ij}$  is the projection of  $A$  to  $I_iI_j$ . (thus 12 violet points belong to 6 bisectors of triangle  $ABC$ ).
- B6.  $A_{02}$  and  $C_{02}$  are *foci* of  $\omega_0$  and  $\omega_2$  (*Foci* means that  $A_{02}$  and  $C_{02}$  is a pair of points inverse to each other with respect to each of two circles). (Thus 12 violet points are partitioned into 6 pairs of foci; in particular, from that it follows that each of  $\omega_i$  contains exactly 3 violet points).
- B7. Determine the radical centers of triples of circles from Problem B1 having distinct centers.
- B8. Six points  $A_{03}, A_{02}, C_{02}, C_{23}, B_{23}, B_{03}$  lie on a circle (also there exist 3 circles constructed in the same manner). Determine the centers of these circles. Find the radii of these circles in terms of  $a, b, c$ .
- B9.  $A_{02}$  and  $A_{13}$  are either the centers of incircle and excircle or the centers of excircles, for the triangle  $B'H_aH_b$ .

### Series C: The Third Dozen: Intersections on the Altitudes

Let  $A_{(3)} = A_0C_0 \cap A_1B_1$  (Here  $A_0C_0 \cap A_1B_1$  is  $A_{(3)}$ , and not  $A_{(2)}$ , since  $C$  corresponds to the partition of  $\{0, 1, 2, 3\}$  into pairs  $0, 3$  and  $1, 2$ , here 3 belongs to the pair containing 0). Similarly,  $A_{(2)} = A_0B_0 \cap A_1C_1$ ,  $A_{(0)} = A_2B_2 \cap A_3C_3$ ,  $A_{(1)} = A_2C_2 \cap A_3B_3$ ; in the same manner define  $B_{(i)}$  and  $C_{(i)}$  — totally 12 green points in Fig. C.

Prove the following statements.

- C1. Points  $A_{(i)}$  lie on the line  $AH_a$  (similarly for  $B_{(i)}$  and  $C_{(i)}$ , thus 12 green points lie on the altitudes of triangle  $ABC$ ).
- C2. The length of  $AA_{(i)}$  is equal to  $r_i$ .
- C3.  $A_{(i)}A_i$  is parallel to one of two bisectors of angle  $A$ .
- C4. Prove that  $A_{(1)}A_1$ ,  $B_{(2)}B_2$ , and  $C_{(3)}C_3$  are concurrent. (Similarly, there exist three triples of concurrent lines:  $A_{(0)}A_0$ ,  $B_{(3)}B_3$ ,  $C_{(2)}C_2$ ;  $A_{(3)}A_3$ ,  $B_{(0)}B_0$ ,  $C_{(1)}C_1$ ;  $A_{(2)}A_2$ ,  $B_{(1)}B_1$ ,  $C_{(0)}C_0$ .)

- C5. Triangles  $A_1B_2C_3$  and  $A_{(0)}B_{(0)}C_{(0)}$  are symmetric (with respect to a point). Define the center of symmetry. (Similarly, pair of triangles  $A_0B_3C_2$  and  $A_{(1)}B_{(1)}C_{(1)}$ ,  $A_3B_0C_1$  and  $A_{(2)}B_{(2)}C_{(2)}$ ,  $A_2B_1C_0$  and  $A_{(3)}B_{(3)}C_{(3)}$  are symmetric.)
- C6. Triangles  $A_{(1)}B_{(2)}C_{(3)}$ ,  $A_{(0)}B_{(3)}C_{(2)}$ ,  $A_{(3)}B_{(0)}C_{(1)}$ ,  $A_{(2)}B_{(1)}C_{(0)}$  Have a common circumcenter (thus green points lie on 4 concentric circles). Define the common circumcenter.
- C7. Find  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$  in terms of radii  $r_i$ .
- C8. Find the radius of the circumcircle of triangle  $A_{(1)}B_{(2)}C_{(3)}$  in terms of  $R$  and  $r_0$ . (Similarly, find the radii of the circles from Problem C6.)
- C9.  $I_iA'$  passes through  $A_{(i)}$  (similarly,  $I_iB'$  passes through  $B_{(i)}$ ,  $I_iC'$  passes through  $C_{(i)}$ ).
- C10. Let  $l_a$  be a line passing through  $A$  and parallel to  $BC$ .  $M = A_0C_0 \cap l_a$ ,  $N = A_0B_0 \cap l_a$ . Prove that  $A_{(0)}$  is the circumcircle of the triangle  $A_0MN$ .  
Determine the orthocenter of the triangle  $A_0MN$ .

### Series D: The Fourth Dozen.

Let  $C_0^* = A_0B_0 \cap A_1B_2$ , and similarly define 12 blue points  $A_i^*$ ,  $B_i^*$ ,  $C_i^*$  (see Fig. D). (The description of these points is as follows: Take one of the circles, for example  $\omega_0$ . Take its two touch points, say  $A_0$ ,  $B_0$ . Take the touch points of these sides with two other circles that are symmetric to  $A_0$ ,  $B_0$  with respect to the midpoints of the sides —  $A_1$ ,  $B_2$ . Take the intersection points of the lines joining pairs of these points.)

Prove the following statements.

- D1. The sidelines of triangle  $A_i^*B_i^*C_i^*$  pass through the vertices of triangle  $ABC$ .
- D2. A line passing through  $C_i^*$  intersects  $BC$ ,  $AC$  at  $A''$ ,  $B''$ , respectively. Show that  $A''B_i^*$  and  $B''A_i^*$  intersect at some point  $C''$  of the line  $AB$ .
- D3.  $AA''$ ,  $BB''$ ,  $CC''$  have a common point that is isogonally conjugate to some point of the line  $OI_i$ .
- D4. The circumcircle of triangle  $A''B''C''$  passes through the Feuerbach point  $F_i$ .
- D5. Four blue points denoted by the same letter lie on a sideline of the orthotriangle.
- D6. a) Triangles  $A_i^*B_i^*C_i^*$  and  $ABC$  are perspective (i.e. the lines joining corresponding vertices of these triangles are concurrent)  
b) Try to find some relations between four centers of perspective.
- D7. (The generalization of the problem D4) Let  $C^{**}$  be a point on line  $H_aH_b$ . An arbitrary line passing through  $C^{**}$  intersects  $BC$ ,  $AC$  at  $A''$ ,  $B''$ , respectively. Let  $P$  be the point of intersection of lines  $AA''$  and  $BB''$ , and  $C''$  be the point of intersection of lines  $CP$  and  $AB$ . Then the circumcircles of all triangles  $A''B''C''$  have the common point.

Tasks from series A, B, C marked # and also from series D were given to the participants after the intermediate finish.

# Excircles and Dozens of Points.

## Hints, Solutions, Comments.

### Series A: The First Dozen: Touch Points

- A1. Follows from the calculation of the tangent segments, for example,  $2AB_1 = AB_1 + AC_1 = AB + BA_0 + AC + CA_0 = 2p$ , hence  $B'B_1 = p - \frac{b}{2} = \frac{a+c}{2}$ . (Also see a comment on B5)
- A2. Follows from Ceva Theorem using the equality of the segments of tangents).
- A3. From A1 it follows that  $A'$  equal powers with respect to the circles  $\omega_2$  and  $\omega_3$ , hence  $A'$  lies on the radical axis of these circles. This radical axis is perpendicular to  $I_2I_3$ , hence it is parallel to the bisector of the angle  $BAC$  (or  $B'A'C'$ ). Thus this radical axis as a bisector of the angle  $B'A'C'$ . Hence radical centers of the triples of circles are  $I'_0, I'_1, I'_2, I'_3$ .
- A4#. (This Problem was formulated in thesis of K. Kuznetsova (Velikie Luki) at the Conference "Start v Nauku — 2009")  
From A3 it follows that there exists an inversion with center  $I'_0$  that takes each of the circles  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  to itself. This inversion takes  $AB, BC, CA$  to the circles passing through  $I'_0$  and touching  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .
- A5#. The homothety with center  $A$  taking  $\omega_1$  to  $\omega_0$  takes diameter  $KA_1$  to diameter  $A_0L$ . Thus  $AA_1$  coincides to  $LA_1$ .  $I_0A'$  is a midline of the triangle  $A_0LA_1$ . This completes the solution.
- A6#. Using the notation of the previous solution: triangles  $A_1LA_0$  and  $A_1AH_a$  are homothetic (with center  $A_1$ ), hence  $A_1I_0$  is the median in triangle  $A_1AH_a$  passing through the midpoint of the altitude  $AH_a$ .

### Series B: The Second Dozen: "Foci"

- B0. The statement follows since  $A_iB_i$  is parallel to a bisector (either internal or external) of angle  $C$ .
- B1. From B0 it follows that  $A_2B_{23} \perp A_3B_{23}$  и  $A_2C_{23} \perp A_3C_{23}$ , hence 4 mentioned points lie on the circle with diameter  $A_2A_3$ . From A1 it follows that the center of this circle is  $A'$  (and radius equals to  $\frac{b+c}{2}$ ). Similarly, points  $B_{01}, C_{01}, A_0, A_1$  lie on the circle with center  $A'$  (and radius equals  $\frac{|b-c|}{2}$ ).
- B2. In a right-angled triangle  $A_2B_{23}A_3$ :  $A'B_{23} = A'A_2$ , ( $= \frac{b+c}{2}$  — see A2), hence equilateral triangles  $A_2A'B_{23}$  and  $A_2CB_2$  are homothetic, and  $A'B_{23} \parallel AC$ , that means that  $B_{23}$  lies on the midline  $A'C'$ .
- Note.**  $B_{23}$  also lies on the circle with diameter  $B_2B_3$ .
- B3. Determine the length  $A'B_{23}$  (see B1), and obtain  $C'B_{23} = A'B_{23} = A'C' = \frac{c}{2}$ , hence  $B_{23}$  lies on the circle of radius  $\frac{c}{2}$  with center  $C'$ . For the other points the calculation could be done in the same manner.
- B4. From B2 it is easy to obtain:  $A_{13}A_{12} = A_{13}C' + C'B' + B'A_{12} = \frac{c+a+b}{2} = p$ ;  $A_{13}A_{03} = A_{13}A_{12} - A_{03}A_{12} = p - b$  (since  $A_{03}A_{12}$  is a diameter of the circle from B2). Similarly,  $A_{03}A_{02} = p - a$ ,  $A_{02}A_{12} = p - c$ .
- B5. (One of the possible configurations — Problem 1.66 in the book of Prassolov, also see the article of V. Protassov ("Quant", № 4 — 2008); also see Problem 255 from the book of Sharygin 9 — 11, this Problem is specially mentioned in the Preface.)  
From B1 and B2 it follows:  $C'B_{23} \parallel AC$  и  $C'B_{23} = C'A$ , hence  $\angle B_{23}AC' = \angle C'AB_{23} = \angle B_{23}AB_3$ , thus  $AB_{23}$  is the external bisector of angle  $BAC$ . Moreover, from B2 it follows that  $BB_{23} \perp AB_{23}$ . Similarly for other points.

**Comment.** Note that Fig. contain many parallelograms (the sides of which are parallel either to the sides or to the bisectors of the triangles  $ABC$ ). For example, taking parallelograms  $A_3A_{13}A_{23}C$  and  $BA_{13}A_{23}A_2$  we see another explanation of the equality from A1.

B6. Triangles  $I_0A_0A_2B_0$  and  $I_0B_0C_0A_2$  are similar (in the calculations of angles we use that  $B_0C_0A_2$  is parallel to the external bisector of the angle  $ABC$ ), hence  $I_0A_0A_2 \cdot I_0C_0A_2 = r_0^2$ .

B7#. The radical centers are points  $I_i$  and points symmetrical to them with respect to the circumcenter of triangle  $ABC$ .

For example, from B6 it follows that  $I_0A_0A_2 \cdot I_0C_0A_2 = I_0A_0A_3 \cdot I_0B_0A_3 = I_0B_0A_1 \cdot I_0C_0A_1 = r_0^2$ , hence  $I_0$  has equal powers with respect to the circles with diameters  $A_0A_1, B_0B_2, C_0C_2$  (see B1).

Then, consider, for instance, the circles with diameters  $A_2A_3, B_1B_3$  and  $C_1C_2$ . The point  $I_3$  lies on the radical axis of the first two circles, because the equal segments  $I_3A_2$  and  $I_3B_1$  are tangent lines to these circles. Moreover, the radical axis is perpendicular to the line joining the centers of the circles, i.e. the medial line of  $ABC$ . Three such lines intersect in the point symmetrical to  $I$  with respect to  $O$ .

B8#. These are the circles with centers  $I'_i$ .

Let  $X$  be the projection of  $I'_0$  to  $B'C'$ . Then from B3 it follows:  $XA_{12} = XB' + B'A_{12} = \frac{p-b}{2} + \frac{b}{2} = \frac{p}{2}$ . Further,  $I'_0A_{12}^2 = I'_0X^2 + XA_{12}^2 = \frac{r_0^2 + p^2}{4}$ . Similarly, the square of the distance from  $I'_0$  to each of the points  $A_{03}, A_{02}, C_{02}, C_{23}, B_{23}, B_{03}$  equals to  $\frac{r^2 + p^2}{4}$ .

In the same way it is proved that the radius of the circle with center  $I'_1$  equals to  $\frac{r_1^2 + (p-a)^2}{4}$ , etc.

**Comment.** The following general result holds: three pair of foci for three circles which centers are not collinear lie on a circle (the proof is an exercise on a power of a point with respect to a circle).

**Comment.** This circle is of so called *Tucker* circles for the triangle  $I_1I_2I_3$ .

B9#. (Also see the article of V. Protassov in "Quant" № 4 — 2008, this problem plays an important role in the proof of Feuerbach Theorem.)  $C_0A_0A_2$  is a bisector of angle  $AB'H_a$  (this follows from symmetry). Consider a nine-point circle, triangle  $B'H_aH_b$  is inscribed to this circle,  $C'$  is a midpoint of the arc  $H_aH_b$ . Since (see B3)  $C'A_0A_2 = C'H_a = C'H_b$  we have that  $A_0A_2$  is a center of either inscribed or exscribed circle of triangle  $B'H_aH_b$ .

### Series C: The Third Dozen: Intersections on the Altitudes

C1-3. From B5 it follows that  $AA_0A_2A_0A_3$  is a parallelogram (its sides are parallel to bisectors of angles  $CBA$  and  $ACB$ ). Also  $A_{(0)}A_0A_2I_0A_0A_3$  is a parallelogram (its sides are parallel to bisectors of angles  $CBA$  and  $ACB$ ). Therefore  $\overrightarrow{I_0A_0}$  and  $\overrightarrow{A_{(0)}A}$  are symmetric with respect to the midpoint of the segment  $A_0A_3$ . This implies C1 and C2. Since  $I_0A_0A_{(0)}A$  is a parallelogram,  $A_{(i)}A_i \parallel AI_0$ .

C4. (This is the Problem of Emelyanov No 10.7 from All-Russian Olympiad — 2002?.) From C3 it follows that these lines are the altitudes of the triangle  $A_{(1)}B_{(2)}C_{(3)}$ .

**Note.** One can show that the intersection point of these three lines is symmetric to the orthocenter of triangle  $A_0B_0C_0$  with respect to  $I'_0$ .

C5. Show that the centers are points  $I'_i$ .

Radical axis bisects the segments of common tangents, hence from A3 it follows that  $B_2C_2 (= B_2C_{(0)})$  and  $B_3C_3 (= B_3C_{(0)})$  are symmetric with respect to the line  $A'I'_0$ , and also with respect to point  $I'_0$ . Similarly,  $A_1C_{(0)}$  and  $B_3A_{(0)}$  are symmetric with respect to  $I'_0$ . This means that the corresponding points of intersection  $C_{(0)}$  and  $C_3$  are symmetric with respect to  $I'_0$ .

C6. The center is  $H$ .

From C1 we know that, for example, that  $A_{(0)} = A_3C_3 \cap AH_a$  and  $C_{(2)} = A_3C_3 \cap CH_c$ . Since  $A_3C_3$  is parallel to the bisector of the angle  $B$ , the angles between  $A_3C_3$  and the altitudes  $AH_a$  and  $CH_c$  are equal. From that it follows that triangle  $HA_{(0)}C_{(2)}$  is equilateral, hence  $H$  is equidistant from  $A_{(0)}$  and  $C_{(2)}$ .

C7-8. The radii of the circumcircles from C6 equal  $|\rho_i|$ , where  $\rho_0 = AH + r_1 = BH + r_2 = CH + r_3$ ,  $\rho_1 = r_0 - AH = BH - r_3 = CH - r_2$ ,  $\rho_2 = AH - r_3 = r_0 - BH = CH - r_1$ ,  $\rho_3 = AH - r_2 = BH - r_1 = r_0 - CH$  (here  $AH$ , ect., could be negative if the corresponding angle of the triangle is obtuse). From this we have  $AH = \frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2} - r_1$ ,  $BH = \frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2} - r_2$ ,  $CH = \frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2} - r_3$ .

Further,  $\rho_0 = \frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2}$ ,  $\rho_1 = \frac{r_0 + r_1 - r_2 - r_3}{2}$ ,  $\rho_2 = \frac{r_0 - r_1 + r_2 - r_3}{2}$ ,  $\rho_3 = \frac{r_0 - r_1 - r_2 + r_3}{2}$ , and putting the relation  $r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r_0$  (see the book of Prassolov, Problem 12.24),  $\rho_0 = r_0 + 2R$ ,  $\rho_1 = |r_1 - 2R|$ ,  $\rho_2 = |r_2 - 2R|$ ,  $\rho_3 = |r_3 - 2R|$ .

C9.# From A5 it follows that that  $I_0A'$  intersects the altitude  $AH_a$  at point  $S$  such that  $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{I_0A_0}$ , that is the point  $A_{(0)}$  (see Problems C1-2).

C10.# (This Problems was proposed by D. Prokopenko) 1. It is easy to show that  $A$  is the midpoint of  $MN$ , hence  $AA_{(0)}$  is the perpendicular bisector of  $MN$ .

2. From C3 it follows that  $A_0A_{(0)}$  and  $A_0I_0$  are symmetric with respect to the bisector of the angle  $MA_0N$ . Since  $A_0I_0$  is the altitude of the triangle,  $A_0A_{(0)}$  contains the circumcenter of triangle  $MA_0N$ .

Combining 1 and 2 we get the required statement.

The orthocenter of triangle  $A_0MN$  is the point symmetric to  $A_0$  with respect to  $I_0$ .

The tasks of series D are the reformulation of the Emelyanovs' Theorem, and their solutions can be found in the book "Summer Conferences of the Tournament of Towns. Selected materials. Volume 1." (MCCME, 2009, in Russian)



# Магические графы

К. Кохась, Д. Ростовский

## Определения и обозначения

Все рассматриваемые графы не имеют изолированных вершин, кратных рёбер и петель.

Слова «цикл» и «путь» всюду означают *простой* цикл и *простой* путь в графе.

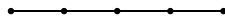
Граф называется *полумагическим*, если на его рёбрах можно расставить положительные числа (веса) так, что для каждой вершины сумма весов рёбер, выходящих из неё, равна одному и тому же числу  $s$ . Граф называется *магическим*, если возможна такая расстановка с попарно различными числами. Заметим, что в полумагическом графе висячая вершина может быть только концом изолированного ребра, причём в магическом графе такое ребро в графе может быть только одно.

Подграф  $F$  данного графа  $G$  называется его *скелетом*, если любая вершина  $G$  является вершиной одного из его рёбер. Скелет называется *1-2-скелетом*, если степень любой его вершины равна 1 или 2, причём степени вершин в каждой компоненте связности одинаковы. Иначе говоря, 1-2-скелет состоит из изолированных рёбер и непересекающихся простых циклов. Если зафиксирован 1-2-скелет  $F$  графа  $G$ , то все рёбра графа  $G$  делятся на три группы: принадлежащие *циклической* части  $F$  (обозначим её  $F_c$ ); принадлежащие *линейной* части  $F$  (обозначим её  $F_\ell$ ), т.е. изолированные рёбра в  $F$ ; наконец, вообще не принадлежащие  $F$ . Будем говорить, что 1-2-скелет *разделяет* рёбра  $e_1$  и  $e_2$ , если эти два ребра лежат в разных группах. Иными словами, хотя бы одно из них должно принадлежать  $F$ , но не оба в  $F_c$  и не оба в  $F_\ell$ .

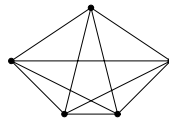
Будем использовать обозначения:  $C_n$  — цикл из  $n$  рёбер ( $n \geq 3$ );  $P_n$  — путь из  $n$  рёбер;  $K_n$  — полный граф с  $n$  вершинами;  $K_{m,n}$  — полный двудольный граф с долями по  $m$  и  $n$  вершин.



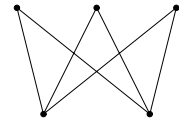
Цикл  $C_5$



Путь  $P_5$



Полный граф  $K_4$



Полный двудольный граф  $K_{2,3}$

Рис. 1. Некоторые стандартные графы

*Прямым произведением*  $F \times G$  двух графов называется граф, у которого множество вершин есть множество всевозможных пар вида  $(v, w)$ , где  $v$  — вершина  $F$ ,  $w$  — вершина  $G$ . Вершины  $(v_1, w_1)$  и  $(v_2, w_2)$  соединены ребром, если либо  $v_1 = v_2$  и в графе  $G$  есть ребро  $w_1 w_2$ , либо  $w_1 = w_2$  и в графе  $F$  есть ребро  $v_1 v_2$ . *Удвоением* графа  $G$  будем называть граф  $G \times P_1$ . *Гантели* будем называть граф, состоящий либо из двух нечётных циклов, пересекающихся ровно по одной вершине, либо из двух нечётных циклов, соединённых путём любой длины.

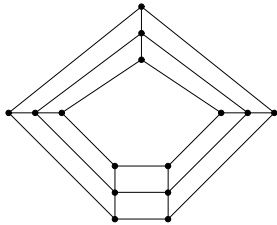


Рис. 2. Граф  $C_5 \times P_2$

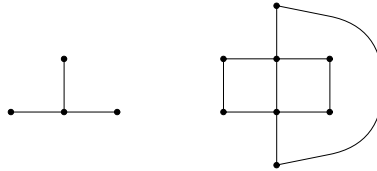


Рис. 3. Граф и его удвоение

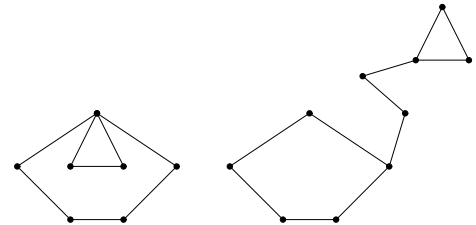


Рис. 4. Гантели

## 1 Примеры

**1.1.** Убедитесь, что магических графов меньше чем с 5 вершинами не существует, за исключением графа  $P_1$  (одно ребро).

**1.2.** Докажите, что любой двудольный граф с нечётным числом вершин — не магический. А как у этих графов с полумагичностью?

**1.3.** Исследуйте следующие графы на полумагичность и магичность (ответы могут зависеть от  $n$  и  $m$ ):

- а)  $K_n$ ;    б)  $K_{m,n}$ ;    в)  $P_n \times P_1$ ;    д)  $P_n \times P_m$  при  $n, m > 1$ ;    е)  $C_n \times P_1$ ;    ф)  $C_n \times P_m$ ,  $n \geq 3, m > 1$ ;  
г) цикл из  $2n$  вершин, в котором противоположные вершины попарно соединены.

## 2 Полумагические графы

**2.1.** Докажите, что если полумагический граф  $G$  содержит чётный цикл, то в  $G$  найдётся полумагический скелет (т.е. скелет, который как самостоятельный граф является полумагическим графом), содержащий не все рёбра этого цикла.



**2.2.** Докажите, что если полумагический граф  $G$  содержит гантелю, то в  $G$  найдётся полумагический скелет, содержащий не все рёбра этой гантели.

**2.3.** Докажите, что в любом полумагическом графе можно выбрать 1-2-скелет.

**2.4.** Основная теорема о полумагических графах. Докажите, что граф тогда и только тогда является полумагическим, когда в нём любое ребро принадлежит некоторому 1-2-скелету.

Следующие задачи посвящены выяснению вопроса, в каких случаях граф содержит 1-2-скелет. Сначала разберёмся с 1-скелетами (в которых каждая вершина имеет степень 1). Будем называть граф *мягким*, если он не содержит 1-скелета, а в противном случае будем называть его *твёрдым*. Мягкий граф будем называть *насыщенным*, если при добавлении в него произвольного ребра он становится твёрдым. Например, полный граф с нечётным числом вершин — мягкий и насыщенный.

Пусть  $G$  — произвольный граф,  $S$  — некоторое множество его вершин. Через  $G \setminus S$  обозначим граф, полученный удалением из  $G$  всех вершин множества  $S$  и их рёбер.

**2.5.** Пусть  $G$  — насыщенный мягкий граф,  $S$  — множество всех вершин в нём, каждая из которых соединена рёбрами со всеми остальными вершинами. Докажите, что компоненты связности графа  $G \setminus S$  являются полными графами.

**2.6.** Основная теорема о мягких насыщенных графах. Граф  $G$  — мягкий и насыщенный тогда и только тогда, когда либо

а)  $G$  полный граф с нечётным числом вершин; либо

б) число вершин графа  $G$  чётно и в нём можно выделить такие непересекающиеся полные подграфы  $S_0, G_1, G_2, \dots, G_k$ , где  $k = |S_0| + 2$ , что при всех  $i$  в каждом  $G_i$  число вершин нечётно и каждая вершина  $G_i$  соединена ребром со всеми вершинами  $S_0$ , и никаких других рёбер в графе нет.

**2.7.** Докажите, что граф  $G$  твёрдый тогда и только тогда, когда для каждого подмножества  $S$  множества вершин графа  $G$  граф  $G \setminus S$  имеет не более  $|S|$  нечётных компонент связности.

**2.8.** Докажите, что граф  $G$  обладает 1-2-скелетом в том и только том случае, если для каждого подмножества  $S$  множества вершин графа  $G$  граф  $G \setminus S$  имеет не более  $|S|$  изолированных вершин.

### 3 Магические графы

**3.1.** Докажите, что любой магический граф обладает двумя свойствами:

(1) Любое его ребро принадлежит какому-нибудь 1-2-скелету.

(2) Любая пара его рёбер разделяется каким-нибудь 1-2-скелетом.

**3.2.** Докажите обратное утверждение: любой граф, удовлетворяющий этим двум условиям, является магическим.

**3.3.** Граф  $G'$  получен из магического графа  $G$  добавлением нового ребра, причём это ребро принадлежит некоторому 1-2-скелету графа  $G'$ . Докажите, что граф  $G'$  — магический.

**3.4.** Граф  $G$  состоит из двух (неизоморфных) компонент связности, каждая содержит не меньше 3 вершин. Обе компоненты являются магическими графами. Верно ли, что граф  $G$  обязательно является магическим?

**3.5.** а) Если полумагический граф  $G$  не содержит изолированных рёбер, и для любого ребра  $e$  найдётся 1-2-скелет, циклическая часть которого не содержит  $e$ , то удвоение  $G$  — магический граф.

б) Пусть  $G$  — полумагический граф без изолированных рёбер, а  $H$  — произвольный граф без изолированных вершин и изолированных рёбер, то граф  $G \times H$  — магический.

**3.6.** Дан граф  $G$ , в котором не менее 4 вершин. Граф  $G_1$  получен добавлением к  $G$  одной новой вершины, которая соединена со всеми вершинами  $G$ . Докажите, что  $G_1$  магический тогда и только тогда, когда  $G$  имеет 1-2-скелет и не имеет изолированных рёбер.

**3.7.** а) Если в графе  $n \geq 5$  вершин и степени всех вершин не меньше  $\frac{n}{2} + 1$ , то граф магический.

б) Существуют неполумагические графы со сколь угодно большим числом вершин  $n$ , у которых минимальная степень вершины равна  $n/2$ .

**3.8.** Пусть  $G$  — связный магический граф с  $n \geq 5$  вершинами и  $r$  рёбрами. Тогда  $r > \frac{5}{4}n$ .

**3.9.** Для каждого  $n = 5, 6, 7, 8$  приведите пример связного магического графа с  $n$  вершинами и  $r$  рёбрами, где  $r$  — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству  $r > \frac{5}{4}n$ .

**3.10.** Постройте такой граф для произвольного  $n \geq 5$ .

**3.11.** Докажите, что связный магический граф с  $n$  вершинами и  $r$  рёбрами существует для любой пары  $n, r$ , в которой  $\frac{5}{4}n < r \leq \frac{n(n+1)}{2}$ .

### Промежуточный финиш

## 4 Однородные графы

Однородные графы степени 1 и 2 устроены исключительно примитивно и вопрос об их магичности решается очевидным образом. Поэтому ограничимся далее случаем степеней, не меньших 3.

Назовём *псевдоциклом* набор рёбер, образующий чётный цикл или гантелю (напомним, что оба цикла в гантеле — нечётные). Рассмотрим некоторый чётный цикл. Расставим мысленно на его рёбрах попеременно числа 1 и  $-1$ , а на всех рёбрах, не входящие в этот цикл, — нули. Будем говорить, что два ребра *слабо разделяются* этим циклом, если они при этой расстановке получают разные веса. Аналогично, выбрав некоторую гантелю, расставим на ней числа  $\pm 1$  и  $\pm 2$  как на рис. 5 при  $a = 1$ , а на не вошедших в неё рёбрах расставим нули. Два ребра *слабо разделяются* этой гантелей, если они при этой расстановке получают разные веса. Наконец, будем говорить, что два ребра *слабо разделяются псевдоциклами*, если существует чётный цикл или гантеля, слабо разделяющая эти рёбра.

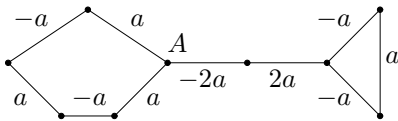


Рис. 5. Знакопеременные веса рёбер гантели

- 4.1. Докажите, что в однородном графе степени  $d \geq 3$  любое ребро содержится в псевдоцикле.
- 4.2. Докажите, что однородный граф степени  $d \geq 3$  является магическим тогда и только тогда, когда в нём любые два ребра слабо разделяются псевдоциклами.
- 4.3. Докажите следующую теорему: Пусть  $G$  — однородный граф степени  $d \geq 3$ , и  $G_1, \dots, G_k$  — его компоненты связности. Тогда  $G$  — магический граф тогда и только тогда, когда все  $G_i$  — магические графы.

Назовём индексом рёберной связности  $\ell(G)$  графа  $G$  наименьшее число рёбер, которые необходимо из него выкинуть, чтобы он потерял связность.

- 4.4. Пусть  $G$  — связный однородный двудольный граф. Докажите, что его магичность или немагичность зависят только от величины  $\ell(G)$  и проведите полное исследование этой зависимости.

## 5 Добавления

- 5.1. Добавление к задаче 1.3.а. Граф называется *супермагическим*, если на нём существует магическая расстановка, веса рёбер в которой — последовательные натуральные числа.

При каких  $n$  граф  $K_n$  является супермагическим?

- 5.2. Добавление к задаче 3.7. В графе 2009 вершин, степень каждой не меньше 1006. В графе удалили не более 500 рёбер. Докажите, что граф остался магическим.

# Решения

## 1 Примеры

**1.1.** Если в графе на 4 вершинах 1 или 2 ребра, то в нём есть изолированные вершины. В любом графе с 3 или 4 рёбрами есть две смежные вершины степени 2, что противоречит магичности. Если рёбер 6, то это полный граф  $K_4$ , обсуждавшийся в задаче 1.3а). Наконец, если рёбер 5, то граф представляет собой цикл  $ABCD$  с диагональю  $AC$ . Тогда  $2s$  — т. е. сумма весов рёбер при вершинах  $A$  и  $C$  — это сумма весов всех рёбер графа с удвоенным весом ребра  $AC$ . С другой стороны,  $2s$  — сумма весов рёбер при вершинах  $B$  и  $D$ , т. е. сумма весов всех рёбер, кроме  $AC$ . Но это значит, что ребро  $AC$  имеет нулевой вес, что запрещено.

**1.2.** Ответ: граф не полумагический. Пусть первая доля содержит  $k$  вершин, вторая —  $\ell$  вершин,  $s$  — сумма весов рёбер у каждой вершины. Если граф полумагический, то сумма весов всех рёбер графа равна сумме весов рёбер, выходящих из вершин первой доли, т. е.  $ks$ , и она же равна сумме весов рёбер, приходящих во вторую долю, т. е.  $\ell s$ . Значит,  $\ell = k$ , что невозможно, если общее число вершин нечётно.

**1.3.** а) Ответ: граф всегда полумагический, магическим он является при  $n = 2$  и при  $n > 5$ .

Полумагичность очевидна. Как и во всяком однородном графе, можно все веса взять равными единице.

При  $n = 3$  граф не магический — это тоже очевидно.

При  $n = 4$  имеем 4 вершины  $A, B, C, D$ . Допустим, что граф магический, пусть  $s$  — сумма весов рёбер, сходящихся в одной вершине. Тогда  $2s$  — т. е. сумма весов рёбер при вершинах  $A$  и  $C$  — это сумма весов всех рёбер графа без веса ребра  $CD$ , но с удвоенным весом ребра  $AC$ . Делая аналогичный подсчёт для вершин  $B$  и  $D$ , находим, что веса рёбер  $AC$  и  $BD$  равны.

При  $n > 5$  граф магический. Это можно установить следующим образом. Поскольку граф однороден, мы можем рассматривать произвольные (не обязательно положительные) веса рёбер. (В регулярном графе мы всегда можем сделать веса положительными, добавив ко всем весам одну и ту же большую положительную константу.) Опишем конструкцию построения магических меток однородного графа с помощью чётных циклов.

Выпишем все чётные циклы, являющиеся подграфами нашего графа, и пронумеруем их числами от 1 до  $N$  (где  $N$  — их количество). Для  $k$ -го цикла в нашем списке назначим веса его рёбер — попеременно плюс и минус  $3^k$ , эти веса поставим в качестве меток возле соответствующих рёбер. После того как мы просмотрели все циклы, сложим все метки, стоящие около каждого ребра.

Докажем, что полученная разметка рёбер графа магическая. Действительно, каждый цикл даёт нулевой суммарный вклад весов в каждую вершину, поэтому сумма весов каждой вершины равна нулю. Проверим, что все веса различны. Для каждого ребра выпишем список номеров тех циклов, в которые входит это ребро. Очевидно, что для любых двух рёбер графа существует чётный цикл, содержащий лишь одно из них. Следовательно, для любых двух рёбер списки номеров циклов не совпадают. Но тогда суммы весов, назначенные с помощью этих циклов, для разных рёбер попарно не равны. Это следует из того, что каждый такой суммарный вес можно трактовать как  $N$ -значное число в троичной системе счисления, в которой используются цифры 0 и  $\pm 1$ . Несовпадение списков означает, что полученные числа различаются в каких-то разрядах троичной записи и поэтому не равны.

б) Ответ: граф полумагический только при  $m = n$ . При  $m = n > 2$  он магический.

Для полумагичности необходимо, чтобы числа  $m$  и  $n$  были равны. *На балу каждая дама танцевала с пятью кавалерами, а каждый кавалер с пятью дамами. Докажите, что дам и кавалеров было поровну.* Ну или что-то в этом роде.

При  $m = n$  граф однородный и потому полумагический. При  $m = n = 2$  он не магический, это очевидно. А при  $m = n > 2$  граф магический, в чём можно убедиться конструкцией аналогичной предыдущему решению.

с) Ответ: граф полумагический, но не магический.

Для полумагичности достаточно расставить на двух крайних рёбрах двойки, а на остальных единицы. Чтобы убедиться, что граф не магический, достаточно посмотреть на ребро, у которого обе вершины степени 2, и смежные с ним рёбра.

д) Ответ: граф магический, если  $m$  или  $n$  нечётны, и не полумагический, если  $m$  и  $n$  чётны.

При чётных  $n$  и  $m$  граф двудольный и имеет  $(n+1)(m+1)$  вершин (нечётное число). По утверждению задачи 1.2 граф не может быть полумагическим.

Докажем, что при нечётном  $n$  и  $m > 1$  граф магический.

Сначала рассмотрим случай  $m = 2$ . Стартовая полумагическая расстановка неотрицательных весов на графе показана на рис. 6: жирные рёбра имеют вес  $2M$ , пунктирные — вес 0, остальные рёбра имеют вес  $M$ , где  $M$  — большое число, которое мы выберем чуть позже. Это ещё не доказательство полумагичности, поскольку некоторые веса нулевые, а граф не однородный.

Теперь мы выполним основную конструкцию построения весов с помощью чётных циклов (см. решение задачи 1.3а), но с тремя поправками (всё-таки наш граф не однородный). Первая поправка состоит в том, что мы будем рассматривать не все циклы, а только 4-циклы (стороны клеточек). Вторая поправка состоит в том, что итоговый вес ребра мы положим равным сумме веса, назначенного с помощью основной конструкции, и веса этого же ребра

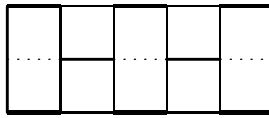


Рис. 6. Почти полумагические веса на графе  $P_n \times P_2$

в стартовой расстановке. Наконец, третья поправка — назначая положительные и отрицательные веса рёбер каждого цикла (здесь у нас есть произвол, с какого знака начинать), мы будем следить, чтобы рёбра, имеющие нулевой вес в стартовой расстановке, всегда получали положительный вес. Наконец, выберем число  $M$  настолько большим, чтобы в результате выполнения всей этой конструкции все веса рёбер оказались бы положительными и различными. Полученная расстановка весов будет магической.

В случае, когда  $n$  — нечётно,  $m > 2$ , мы действуем аналогично. Стартовые расстановки весов показаны на рис. 7 (нечётная сторона вертикальна).

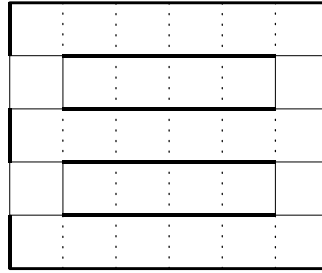


Рис. 7. Полумагические веса на графе  $P_n \times P_m$

е) Ответ: граф всегда полумагический. Магическим он является лишь при чётном  $n$ .

Граф можно представлять себе как набор вершин и рёбер  $n$ -угольной призмы.

Пусть  $n = 2k$ . В графе есть очевидные циклы длины 4 (контуры граней) и два  $2k$ -цикла (контуры оснований). Здесь также выполнено свойство, что для любых двух рёбер найдётся чётный цикл, содержащий лишь одно из них. Таким образом, применима основная конструкция для однородных графов.

Пусть  $n = 2k + 1$ . Проверим, что граф не магический. Пусть  $d$  — сумма весов рёбер, сходящихся в вершине. Тогда, как нетрудно видеть, сумма весов всех рёбер графа равна  $nd$ . Обозначим наш граф-призму через  $A_1A_2 \dots A_{2k+1}B_1 \dots B_{2k+1}$ . Сумма весов рёбер, выходящих из вершин  $A_1, A_3, \dots, A_{2k+1}, B_2, B_4, \dots, B_{2k}$ , равна  $nd$  и при этом представляет собой сумму весов всех рёбер графа без ребра  $B_1B_{2n+1}$ , но с ребром  $A_1A_{2n+1}$ , учтённым дважды. Следовательно, веса рёбер  $A_1A_{2n+1}$  и  $B_1B_{2n+1}$  равны.

ф) Ответ: граф магический. Решение аналогично 1.3d). Пусть  $A_1, \dots, A_{m+1}$  — вершины графа  $P_m$ . Стартовая полумагическая расстановка неотрицательных весов на графе  $C_n \times P_m$  выглядит следующим образом: рёбра всех подграфов вида  $C_n \times A_i$  имеют вес 2, остальные рёбра имеют вес 0. В качестве набора чётных циклов опять рассматриваем 4-циклы.

г) Ответ: граф всегда полумагический, а при нечётных  $n$  он ещё и магический.

Полумагический он, потому что однородный. При  $n = 2$  это граф  $K_4$ , мы его обсуждали в задаче 1.3 а). При нечётном  $n$  граф магический, поскольку работает основная конструкция: есть хороший запас чётных циклов — 4-циклы, содержащие соседние диаметры, и  $(n + 1)$ -циклы вида «полукруг».

При чётном  $n$  граф не магический. Пусть  $A_1A_2 \dots A_nB_n \dots B_2B_1$  — вершины цикла. Рёбра, выходящие из вершин  $A_i, B_i$ , где  $i$  пробегает все нечётные индексы, — это все рёбра графа, кроме  $A_nB_n$ , причём ребро  $A_1B_1$  учтено дважды. Отсюда следует, что в любой полумагической расстановке весов противоположные рёбра  $2n$ -цикла имеют одинаковый вес.

## 2 Полумагические графы

**2.1.** Пусть  $a$  — минимальный вес ребра в данном чётном цикле. Обходя цикл, будем попеременно то уменьшать, то увеличивать на  $a$  вес рёбер цикла. В результате вес некоторых рёбер станет нулевым — сотрём их. Оставшийся граф с полученной расстановкой весов и будет искомым полумагическим скелетом.

**2.2.** Пусть  $A$  — вершина одного из нечётных циклов гантели, к которой прикреплена ручка гантели (или второй цикл, если ручки нет). Рассмотрим следующее назначение весов рёбер гантели. Будем обходить нечётный цикл, начиная с вершины  $A$ , и попеременно присваивать рёбрам веса  $\pm a$ . Вернувшись в вершину  $A$ , мы получим, что оба ребра данного цикла, сходящиеся в вершине  $A$ , имеют вес  $a$ . Продолжим движение по ручке, попеременно назначая веса её рёбер

$\mp 2a$ . Дойдя до второго цикла, обойдём его, продолжая назначать веса  $\pm a$ . В результате мы получим полумагическое назначение весов с нулевой суммой в каждой вершине (см рис. 5).

Прибавим построенные веса к уже имеющимся весам рёбер гантели, причём подберём  $a$  так, чтобы все веса получились в результате неотрицательными и вес по крайней мере одного из рёбер стал равен нулю. Получится полумагическая разметка рёбер графа, причём все нулевые рёбра можно стереть (очевидно, изолированных вершин от этого появиться не может). Останется искомый полумагический скелет.

**2.3.** С помощью конструкций из решений задач 2.1, 2.2 мы можем последовательно уменьшать количество рёбер в графе, разрушая чётные циклы и гантели, и сохраняя при этом полумагичность. Заметим, что в силу полумагичности наш граф ни в какой момент не будет иметь всяких вершин (кроме вершин изолированных рёбер). Заметим также, что если в компонента связности графа имеет два нечётных цикла, то в ней можно найти чётный цикл или гантелю. Если же компонента содержит ровно один (нечётный) цикл и не имеет при этом всяких вершин, то ничего, кроме этого цикла, она содержать не может. Значит, в тот момент, когда все чётные циклы и гантели будут разрушены, граф будет представлять собой несколько изолированных рёбер плюс несколько изолированных (нечётных) циклов.

**2.4.** Проверим, что в полумагическом графе любое ребро принадлежит некоторому 1-2-скелету. Пусть  $G$  — любой из графов с минимальным числом рёбер, имеющий ребро  $e$ , не принадлежащее ни одному 1-2-скелету. Фиксируем полумагическую расстановку  $\mathcal{W}$  весов на графе  $G$ . Возьмём произвольный 1-2-скелет и с помощью него построим ещё одну полумагическую расстановку весов  $\mathcal{S}$ : пусть каждое ребро из линейной части скелета имеет вес  $a$ , каждое ребро из циклической части — вес  $a/2$ , а рёбра, не входящие в скелет, (и в том числе  $e$ ) имеют вес 0. Число  $a$  подберём таким образом, веса из расстановки  $\mathcal{S}$  не превосходили соответствующих весов из расстановки  $\mathcal{W}$  и чтобы хотя бы на одном ребре равенство достигалось. Теперь вычтем из весов расстановки  $\mathcal{W}$  веса  $\mathcal{S}$ . Получится полумагическая расстановка весов, в которой не все веса равны нулю, так как вес ребра  $e$  не изменился. Если теперь стереть ребра нулевого веса, получится полумагический граф  $G'$ , который является скелетом в  $G$ , содержит меньше рёбер, чем  $G$ , причём ребро  $e$  не принадлежит никакому 1-2-скелету  $G'$  (потому что «скелет моего скелета — мой скелет»). Это противоречит определению графа  $G$ . Следовательно, таких графов  $G$  не существует, *ч.д.*

Теперь убедимся, что если в графе любое ребро принадлежит какому-нибудь 1-2-скелету, то граф — полумагический. Для каждого 1-2-скелета поставим на всех рёбрах его циклической части вес 1, а на всех изолированных рёбрах — вес 2. Тогда вклад этого скелета в каждую вершину будет одинаковым. Перебирая все 1-2-скелеты, просуммируем веса, полученные таким способом. Это и есть требуемая полумагическая расстановка весов.

**2.5.** Мы приводим решение из [1, § 3.1.2]. Пусть  $A, B, C$  — вершины из  $G \setminus S$ , причём  $B$  соединено ребром с  $A$  и  $C$ . Для доказательства утверждения задачи достаточно проверить, что в этом случае в граф  $G$  содержит ребро  $AC$ . Допустим, что это не так. По определению множества  $S$ , в графе  $G$  найдётся вершина  $D$ , не соединённая с  $B$  ребром. Если к графу  $G$  добавить ребро  $AC$ , то в силу насыщенности, полученный граф будет обладать 1-скелетом и ребро  $AC$  будет принадлежать этому скелету. Покрасим этот скелет в красный цвет. Аналогично при добавлении ребра  $BD$  найдём синий 1-скелет, содержащий ребро  $BD$ . Сейчас мы из этих двух скелетов соберём 1-скелет графа  $G$  и получим противоречие.

Объединим эти скелеты; кратности рёбер, которые оказались одновременно красными и синими, будем считать равными единице. Получим 1-2-скелет графа  $G \cup AC \cup BD$ . Очевидно, рёбра  $AC$  и  $BD$  принадлежат циклической части этого 1-2-скелета, причём все циклы в ней чётные, так как красные и синие рёбра в циклах чередуются.

Если рёбра  $AC$  и  $BD$  лежат в разных циклах, то искомый 1-скелет построить совсем легко: возьмём за основу красный 1-скелет и все красные рёбра того цикла, где лежит ребро  $AC$ , заменим на синие рёбра этого же цикла.

Пусть теперь рёбра  $AC$  и  $BD$  лежат в одном цикле  $\gamma$ . Начнём движение из вершины  $B$  по синему ребру  $BD$  и дальше вдоль цикла  $\gamma$ , пока не дойдём до вершины  $A$  или  $C$ . Пусть это будет  $A$ , эти случаи совершенно аналогичны. Поскольку красное ребро, начинающееся в вершине  $A$ , — это  $AC$ , мы в процессе движения пришли в  $A$  по синему ребру. Таким образом, пройденный путь из  $B$  в  $A$  начинается и кончается синим ребром. Возьмём тогда синий скелет, заменим все синие рёбра пройденного пути на красные, а также добавим ребро  $AB$ . Получится 1-скелет графа  $G$ .

**2.6.** Мы приводим решение из [1, § 3.1.2]. Если число вершин в насыщенном мягком графе  $G$  нечётно, то очевидно, что он полный. Пусть число вершин в  $G$  чётно и пусть  $S$  — множество всех вершин  $G$ , которые соединены со всеми остальными вершинами,  $s$  — их количество;  $G_1, G_2, \dots, G_k$  — компоненты связности графа  $G \setminus S$ . По утверждению предыдущей задачи мы знаем, что они являются полными графами.

Если в  $G \setminus S$  являются нечётными не более  $s$  компонент, то 1-скелет находится легко. Рассмотрим тогда случай, когда в графе  $G \setminus S$  не менее  $s + 1$  нечётной компоненты, а с учётом того, что число вершин в  $G$  чётно — не менее  $s + 2$  компонент. Если нечётных компонент оказалось больше  $s + 2$ , соединим любые две из них ребром, получится граф  $G_1$ , для которого верно, что граф  $G_1 \setminus S$  имеет больше  $s$  нечётных компонент связности. В таком графе не может быть 1-скелетов (это очевидно, и к тому же следует из простой части утверждения задачи 2.7), что противоречит насыщенности графа  $G$ .

Итак, у графа  $G$  ровно  $s + 2$  нечётные компоненты. По аналогичным соображениям у него не может быть при этом чётных компонент.

**2.7.** Это утверждение — классическая теорема Татта (W. Tutte) Мы приводим её доказательство, следуя изложению в [1, § 3.1.2].

Если в графе  $G$  нашлось такое множество вершин  $S$ , что в графе  $G \setminus S$  больше  $|S|$  нечётных компонент связности, то граф  $G$  мягкий. Это очевидно.

Проверим обратное утверждение. Допустим, что для каждого подмножества  $S$  множества вершин графа  $G$  граф  $G \setminus S$  имеет не более  $|S|$  нечётных компонент связности, но при этом граф  $G$  мягкий.

Число вершин графа  $G$  должно быть чётно, так как в противном случае при  $S = \emptyset$  сразу получаем противоречие. Добавим к графу  $G$  несколько рёбер, чтобы получился насыщенный мягкий граф  $G'$ . Пусть  $S'$  — множество вершин, смежных с каждой вершиной  $G'$ ,  $s$  — их количество. Поскольку количество вершин в графе  $G'$  такое же как и в  $G$ , т. е. чётно, то по основной теореме о мягких насыщенных графах, граф  $G' \setminus S'$  содержит  $s + 2$  нечётные компоненты (нам важно, что их больше  $s$ ), каждая из которых — полный граф. Уберём те рёбра, которые мы добавили, делая граф насыщенным. Возможно, при этом некоторые компоненты графа  $G' \setminus S'$  распадутся на части, но в любом случае хотя бы один из «осколков» нечётной компоненты будет нечётным и общее число нечётных компонент будет больше  $s$ . Таким образом, построенное множество  $S'$  опровергает основное обсуждаемое свойство графа  $G$ .

**2.8.** Пусть  $n$  — количество вершин графа  $G$ . Построим новый граф  $G'$  с  $2n$  вершинами: каждой вершине  $v$  графа  $G$  соответствуют две вершины  $v'$  и  $v''$  в  $G'$ ; каждому ребру  $uv$  в графе  $G$  соответствуют два ребра в графе  $G'$  —  $u'v''$  и  $u''v'$  (других рёбер в  $G'$  нет). Ясно, что  $G'$  — двудольный граф, и количество его рёбер в два раза превосходит число рёбер в  $G$ .

Заметим, что существование 1-2-скелета в исходном графе равносильно тому, что в графе  $G'$  найдётся паросочетание из  $n$  рёбер. В самом деле, для каждого цикла  $v_1v_2 \dots v_\ell$ , принадлежащего скелету, в графе  $G'$  присутствуют рёбра  $v'_1v''_2, v'_2v''_3, \dots, v'_\ell v''_1$ ; аналогично, для изолированного ребра  $uv$  данного скелета в  $G'$  есть рёбра  $u'v''$  и  $v'u''$ . Ясно, что все такие рёбра образуют полное паросочетание. Обратно, если дано полное паросочетание графа  $G'$ , то по нему нетрудно построить 1-2-скелет в  $G$ . Например, рёбрам  $u'v'', v'w'', w'z'', z'u''$  паросочетания соответствует цикл  $uvwz$  в графе  $G$ , а рёбрам  $u'v''$  и  $v'u''$  — изолированное ребро  $uv$  в скелете.

Теперь рассмотрим условие о том, что для каждого подмножества  $S$  множества вершин графа  $G$  граф  $G \setminus S$  имеет не более  $|S|$  изолированных вершин. Сформулируем его для графа  $G'$ . Возьмём любой набор  $S$  вершин графа  $G$ . Что значит, что при их выкидывании вершина  $u$  осталась изолированной? Это значит, что в графе  $G'$  все соседи вершины  $u'$  лежат в множестве  $S''$ . Если после выкидывания набора  $S$  образовалось  $k > |S|$  изолированных вершин, то в графе  $G'$  нарушается условие леммы Холла: у  $k$  вершин не более  $|S|$  соседей, что меньше, чем  $k$ . Ясно, что верно и обратное. Таким образом, наше условие равносильно выполнению в графе  $G'$  леммы Холла, то есть, снова равносильно наличию в  $G'$  полного паросочетания.

### 3 Магические графы

**3.1.** (1) Этим свойством обладают все полумагические графы.

(2) Докажем более общий факт: если в полумагическом графе есть такой полумагический набор весов рёбер, в котором веса каких-то двух рёбер  $e_1$  и  $e_2$  не равны, то рёбра  $e_1$  и  $e_2$  разделяются 1-2-скелетом.

Это устанавливается аналогично решению задачи 2.4. Выберем минимальный граф; фиксируем ту расстановку, где веса не равны; отнимем подходящим образом веса у рёбер, принадлежащих скелету; получится меньший граф. Так как исходный граф мы выбрали минимальным, одно из рёбер  $e_1, e_2$  должно было получить при этом нулевой вес и было стёрто. Тогда в оставшемся графе по утверждению задачи 2.4 второе из этих рёбер принадлежит некоторому 1-2-скелету, который будет также и скелетом в исходном графе и будет разделять рёбра  $e_1$  и  $e_2$ .

**3.2.** Пронумеруем все 1-2-скелеты и для  $k$ -го скелета положим вес рёбер циклической части равным  $3^k$ , а вес рёбер линейной части —  $2 \cdot 3^k$ . Теперь для каждого ребра найдём сумму его весов по всем содержащим его 1-2-скелетам. Получится полумагическая расстановка весов, которая является магической в силу единственности троичной записи натурального числа.

**3.3.** Следует из 3.2.

**3.4.** Ответ: нет, граф  $G$  может оказаться не магическим. Мы почерпнули этот пример в [5]. На рисунке 8 показаны два магических графа. Для любой магической расстановки весов ребра, нарисованные пунктиром, должны иметь вес  $r/2$ , где  $r$  — суммарный вес рёбер, сходящихся в одной вершине.

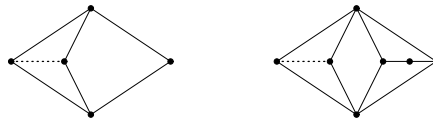


Рис. 8. Объединение магических графов — не всегда магический граф

**3.5.** а) Удвоение  $G^2$  состоит из двух экземпляров графа  $G_1$  и  $G_2$  графа  $G$  и множества рёбер  $E$  между соответственными вершинами. Соответственные рёбра в компонентах  $G_1$  и  $G_2$  будем называть *параллельными*. Рёбра из множества  $E$  будем называть *вертикальными*. Подграф в  $G^2$ , состоящий из двух соответственных компонент в  $G_1$  и  $G_2$ , назовём *дублированным*.

Сначала опишем конструкцию *поворота параллельных рёбер* в удвоенном графе. Пусть подграф  $H$  графа  $G^2$  представляет собой объединение подграфов, лежащих в компонентах  $G_1$  и  $G_2$ , таких что эти подграфы содержат

параллельные ребра  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ . Уберём в подграфе  $H$  рёбра  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  и добавим рёбра  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$ . Полученный подграф назовём  $H'$ . Будем говорить, что подграф  $H'$  получен из  $H$  с помощью поворота параллельных рёбер. Очевидно, что подграфы  $H$  и  $H'$  одновременно являются (или не являются) 1-2-скелетами.

Теперь докажем, что граф  $G^2$  из условия задачи является магическим. Для этого применим критерий магичности — утверждение задач 3.1–3.2.

(1) Любое ребро принадлежит 1-2-скелету. Для рёбер из  $G_1$  (и из  $G_2$ ) это очевидно: в качестве скелета берём 1-2-скелет в  $G_1$ , содержащий это ребро, в объединении с его дублем в  $G_2$ . Для вертикальных рёбер следует взять поворот параллельных рёбер подходящего дублированного 1-2-скелета.

(2) Любая пара рёбер разделяются 1-2-скелетом. В случае, когда оба ребра  $e_1$  и  $e_2$  из  $G_1$  (или оба из  $G_2$ ), возьмём дублированный 1-2-скелет, содержащий ребро  $e_1$ . Если этот скелет не разделяет ребра  $e_1$  и  $e_2$ , оба этих ребра принадлежат скелету. Тогда выполним поворот ребра  $e_2$  и параллельного ему, получится скелет, разделяющий рёбра.

В случае, когда ребро  $e_1$  из  $G_1$ , а ребро  $e_2$  из  $G_2$ , возьмём в  $G_1$  1-2-скелет, содержащий  $e_1$  (он существует в силу утверждения задачи 2.4), а в  $G_2$  — 1-2-скелет, не содержащий  $e_2$  (существует по условию). Их объединение есть искомым разделяющий 1-2-скелет.

Если  $e_1$  из  $G_1$ , а  $e_2$  — вертикальное, подойдёт дублированный скелет, содержащий ребро  $e_1$ .

Наконец, если оба ребра —  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  — вертикальные, то поскольку в графе  $G$  не было изолированных рёбер, в  $G_1$  найдётся ребро  $A_1X_1$  (где  $X_1 \neq B_1$ ) или  $B_1Y_1$  (где  $Y_1 \neq A_1$ ). Выберем дублированный скелет, содержащий это ребро, и повернём это ребро и параллельное ему.

б) Доказывается аналогично п. а).

**3.6.** Утверждение задачи мы взяли в [6]. Доказательство, приведённое там, опирается на критерий магичности графа, который не встречался в данной серии задач. Задача содержит два утверждения, сложным является утверждение «тогда» — *если  $G'$  — магический граф, то граф  $G$  имеет 1-2-скелет и не имеет изолированных рёбер и изолированных вершин*. Мы приводим доказательства этого утверждения, найденные участниками конференции.

Доказательство 1. Если бы в  $G$  была изолированная вершина, то в графе  $G'$  она оказалась бы висячей и граф  $G'$  не мог бы быть магическим. Если бы в  $G$  было изолированное ребро, то концы этого ребра в графе  $G'$  оказались бы смежными вершинами степени 2 и граф  $G'$  не мог бы быть магическим.

Допустим, что в  $G$  не существует 1-2-скелета.

Обозначим новую вершину графа  $G'$  через  $S$ . Возьмём какой-нибудь 1-2-скелет  $K$  графа  $G'$ , можно считать, что все циклические компоненты в нём суть нечётные циклы. Рассмотрим компоненту этого скелета, содержащую вершину  $S$ . Эта компонента не может быть нечётным циклом, так как иначе при удалении из него вершины  $S$  мы могли бы разбить остальные вершины этого цикла на пары и вместе с остальными частями рассматриваемого скелета получили бы скелет  $G$ . Значит, эта компонента является изолированным ребром  $SA_1$ . Сейчас мы построим в графе  $G$  два множества вершин —  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$  и  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ , удовлетворяющих следующим условиям: все ребра  $A_iB_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) принадлежат скелету  $K$ , и все рёбра из вершин  $A_i$ , ведут в множество  $\mathcal{B}$ .

Для начала конструкции возьмём  $\mathcal{A} = \{A_1\}$ , и положим  $B_1 = S$ . Допустим, что уже построены множества  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$  и  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ , Допустим, что из множества  $\mathcal{A}$  выходит какое-либо ребро, идущее вне  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , скажем,  $A_kB_{k+1}$ . Вершина  $B_{k+1}$  принадлежит некоторой компоненте скелета  $K$ . Если это нечётный цикл, то мы легко можем перестроить скелет  $K$ , чтобы получился полноценный 1-2-скелет графа  $G$ , что невозможно.

Для этого рассмотрим кратчайший путь от  $B_1$  до  $B_{k+1}$ , идущий по вершинам  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  и в котором вершины множеств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  чередуются. Он имеет чётную длину. Выберем в нём все рёбра с чётным номером (последнее из них оканчивается вершиной  $B_{k+1}$ ) и разобьём на пары все остальные вершины нечётного цикла.

Значит, можно считать, что вершина  $B_{k+1}$  принадлежит изолированному ребру  $B_{k+1}A_{k+1}$  скелета  $K$ . Поместим тогда вершину  $B_{k+1}$  в множество  $\mathcal{B}$ , а вершину  $A_{k+1}$  — в множество  $\mathcal{A}$ .

Будем продолжать увеличивать множества  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  описанным образом, пока это возможно. В конце концов окажется, что из множества  $\mathcal{A}$  все рёбра ведут только в  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . Предположим, что две вершины  $A_i$  и  $A_j$  соединены ребром. Рассмотрим кратчайший путь между этими вершинами, в котором вершины из  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  чередуются (существование такого пути легко усмотреть из процесса построения пары множеств). Вместе с ребром  $A_iA_j$  он образует нечётный цикл, и тогда скелет  $K$  перестраивается в скелет графа  $G$  способом, аналогичным описанному выше.

Итак, требуемые множества  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  построены. Заметим теперь, что суммы весов всех вершин в этих множествах равны (ибо в них поровну вершин). С другой стороны, сумма весов всех вершин из  $\mathcal{A}$  складывается из весов всех рёбер вида  $A_iB_j$ , в сумма весов вершин  $\mathcal{B}$  — из тех же рёбер, а так же из рёбер вида  $B_1B_i$  (напомним, что вершина  $B_1 = S$  соединена со всеми вершинами графа  $G$ )! Противоречие.

**Доказательство 2** (А. Цыбышев). Рассмотрим магическую расстановку весов на рёбрах графа  $G'$ . Мысленно забудем про рёбра, выходящие из  $S$ , и будем временно рассматривать только рёбра графа  $G$ . Применим к ним алгоритм «избавления» от чётных циклов и гантелей, описанный в решении задач 2.1 и 2.2. В результате останется граф  $F$  с весами на рёбрах, в котором нет чётных циклов и гантелей, а сумма весов в каждой вершине такая же как в начале. Вернём обратно рёбра из вершины  $S$  — получится полумагический граф  $F'$ .

Если в графе  $F$  найдётся изолированная вершина  $A$ , то в графе  $F'$  вершина  $A$  будет висячей, что противоречит его полумагичности.

Пусть в  $F$  есть висячая вершина  $A$ , и пусть  $B$  — соседняя с ней вершина. Найдём в графе  $F'$  1-2-скелет, содержащий ребро  $SB$ . Очевидно, он должен состоять из цикла  $SABSA$ , а также других циклов и изолированных рёбер. Но тогда эти циклы, изолированные рёбра и ребро  $AB$  образуют 1-2-скелет графа  $G$ , что и требовалось.

Осталось разобрать случай, когда в  $F$  нет ни изолированных, ни висячих вершин. Поскольку в нём нет также чётных циклов и гантелей, все его компоненты — нечётные циклы. Но тогда они образуют искомый 1-2-скелет графа  $G$ .

Теперь докажем вторую часть утверждения задачи. Проверим, что если в графе  $G$  есть 1-2-скелет и нет изолированных рёбер, то граф  $G'$  удовлетворяет свойствам задачи 3.1 (и следовательно, магический). Обозначим новую вершину графа  $G'$  через  $A$ , а 1-2-скелет в графе  $G$  (любой, если их несколько) — через  $S$ .

1) Проверим, что каждое ребро  $G'$  принадлежит 1-2-скелету.

Случай а). Интересующее нас ребро  $BC$  лежит в графе  $G$ .

а1) Если ребро  $BC$  принадлежит линейной части скелета  $S$ , заменим в  $S$  ребро  $BC$  на треугольник  $ABC$  — получится скелет графа  $G'$ , содержащий  $BC$ .

а2) Если ребро  $BC$  принадлежит циклической части скелета  $S$ , скажем, циклу  $BCD \dots B$ , заменим в  $S$  ребро  $CD$  на два ребра  $AC, AD$  — получится скелет графа  $G'$ , содержащий  $BC$  (в слегка увеличенном цикле).

а3) Если ребро  $BC$  не принадлежит  $S$  и при этом вершины  $B$  и  $C$  принадлежат одной компоненте скелета — циклу  $BD_1 \dots D_p C E_1 \dots E_q B$ , сконструируем из этого цикла два новых:  $BD_1 \dots D_p C B$  и  $AE_1 \dots E_q A$  (при  $q = 1$  второй цикл — это просто изолированное ребро), получится скелет графа  $G'$ , содержащий  $BC$ .

а4) Если ребро  $BC$  не принадлежит  $S$  и при этом вершины  $B$  и  $C$  принадлежат разным компонентам скелета —  $BB_1 \dots B_p B$  и  $CC_1 \dots C_q C$ , заменим их на один большой цикл  $BB_1 \dots B_p AC_1 \dots C_q CB$ .

Случай б). Интересующее нас ребро  $AB$  выходит из вершины  $A$ .

Если вершина  $B$  содержится в изолированном ребре  $BC$  1-2-скелета, то заменим это ребро на цикл  $ABCA$ . Если же вершина  $B$  содержится в цикле  $BD_1 \dots D_p B$ , то заменим его на цикл  $ABD_1 \dots D_p A$ .

2) Проверим, что любые два ребра  $e$  и  $f$  разделяются 1-2-скелетами.

Случай а) Интересующие нас ребра принадлежат графу  $G$ .

а1) Одно из рёбер, скажем,  $e$ , принадлежит циклической части скелета. Если ребро  $f$  принадлежит скелету, заменим цикл, в котором лежит ребро  $e$ , на увеличенный цикл, не содержащий ребра  $e$  (проходящий через вершину  $A$ , мы так делали в случае а2). Если ребро  $f$  не принадлежит скелету, заменим цикл, в котором лежит ребро  $e$ , на увеличенный цикл, содержащий ребро  $e$ .

а2) Одно из рёбер —  $e$  — лежит в линейной части скелета, а другое — тоже в линейной или вообще не принадлежит скелету. Добавим к скелету рёбра, соединяющие концы ребра  $e$  с вершиной  $A$ .

а3) Оба ребра не принадлежат скелету. В качестве разделяющего возьмём скелет, содержащий ребро  $e$ , построенный в первой части решения; при его построении добавлялись рёбра не принадлежащие графу  $G$ .

Случай б) Одно из рёбер лежит в  $G$ , другое — в  $G'$ . Мы оставляем читателю довести до конца этот несложный перебор. Следует помнить, что граф  $G$  имеет не менее 4 вершин и не имеет изолированных рёбер.

**3.7.** Мы взяли это утверждение в [3].

а) Возьмём любые рёбра  $e$  и  $f$  и докажем, что они разделяются некоторым 1-2-скелетом. Выкинем из графа две вершины — концы ребра  $f$  — и все рёбра, выходящие из них. В оставшемся графе  $n - 2$  вершины и степень каждой из них не меньше, чем  $\frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$ . Тогда, как известно, в этом графе найдётся цикл, проходящий по всем его вершинам (гамильтонов цикл). Этот цикл, вместе с ребром  $f$ , образует 1-2-скелет в исходном графе. Он разделяет рёбра  $e$  и  $f$ , так как  $f$  лежит в его линейной части, а  $e$  — нет.

б) Построим граф  $G$  на  $n = 2k$  вершинах  $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k$ , в котором проведены все рёбра вида  $X_i Y_j$  и ребро  $Y_1 Y_2$ . Степень каждой из вершин  $X_i$  не меньше  $k = \frac{n}{2}$ . Докажем, что  $G$  не является полумагическим графом.

Рассмотрим любой 1-2-скелет в  $G$ . Каждая из вершин  $X_i$  имеет в этом скелете либо одну, либо две смежные вершины среди  $Y_i$ . Поскольку вершин обоих типов поровну, то 1-2-скелет должен являться паросочетанием из  $k$  рёбер вида  $X_i Y_j$ . Это значит, что ребро  $Y_1 Y_2$  не содержится ни в одном 1-2-скелете, т. е.  $G$  — не полумагический.

**3.8.** В магическом графе нет вершин степени 1, и более того, никакие две вершины степени 2 не соединены ребром. Пусть  $V$  — множество вершин степени 2 (возможно, пустое), а  $W$  — множество вершин степени 3 или больше. Обозначим сумму весов рёбер в каждой вершине через  $s$ . Сумма весов всех рёбер, выходящих из  $V$ , равна  $s|V|$ . С другой стороны, все эти рёбра имеют один из концов в  $W$ , поэтому сумма их весов не превосходит  $s|W|$ . Таким образом,  $|V| \leq |W|$  (причём строго меньше, если внутри  $W$  есть хотя бы одно ребро). Далее, сумма степеней всех вершин не меньше, чем  $2|V| + 3|W|$ , поэтому в графе есть не меньше, чем  $|V| + \frac{3}{2}|W|$  рёбер. Но  $|V| + \frac{3}{2}|W| \geq \frac{5}{4}(|V| + |W|) = \frac{5}{4}n$ , т. е.  $|W| \geq |V|$ .

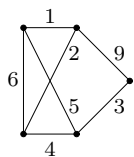
Для того чтобы количество рёбер действительно равнялось  $\frac{5}{4}n$ , необходимо, чтобы не было рёбер с обоими концами в  $W$ , т. е. чтобы граф был двудольным. В этом случае  $s|V| = s|W|$ , т. е.  $|V| = |W|$ . Но количество рёбер между  $V$  и  $W$ , с одной стороны, равно  $2|V|$ , а с другой стороны, не меньше чем  $3|W|$ , т. е.  $|V| \geq \frac{3}{2}|W|$ , что невозможно. Таким образом, неравенство  $r > \frac{5}{4}n$  доказано.

**3.9.** Пусть  $n = 5, 6, 7$  или  $8$ . На рисунке изображены магические графы с минимальным числом рёбер.

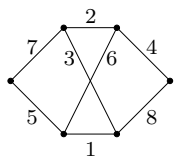
**3.10.** На рис. 10 а, б, с, е, ф) изображены примеры магических графов с минимальным возможным количеством рёбер. Вид графа зависит от остатка от деления  $n$  на 4. При  $n = 4k$  приведены два вида графов: двудольный и недвудольный, при  $n = 4k + 2$  — только двудольный, в остальных двух случаях приведён пример недвудольного графа.

Доказательство магичности представленных графов состоит в рутинной проверке критерия магичности (задача 3.2). Мы не будем здесь делать эту проверку, но заметим, что есть обходной манёвр, который позволяет не делать такого перебора, и лишь немного не дотягивает до строгого доказательства, а именно, мы приведём магическую

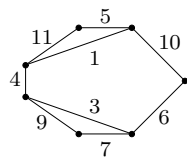




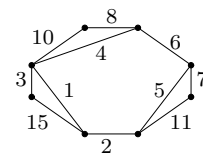
a) 5 вершин, 7 рёбер



b) 6 вершин, 8 рёбер

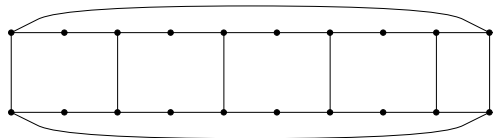


c) 7 вершин, 9 рёбер

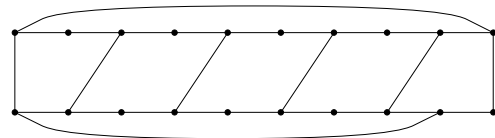


d) 8 вершин, 11 рёбер

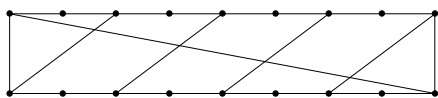
Рис. 9. Минимальные магические графы



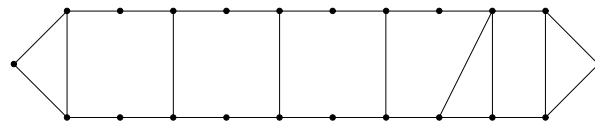
a)  $n = 4k, r = 5k + 1$ , двудольный граф



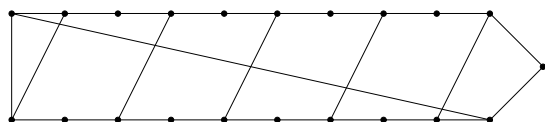
b)  $n = 4k, r = 5k + 1$ , недвудольный граф



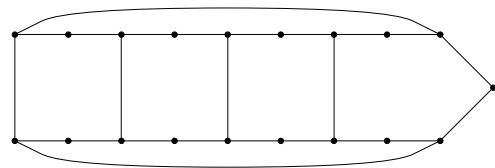
c)  $n = 4k + 2, r = 5k + 3$ , двудольный граф



d)  $n = 4k + 2, r = 5k + 4$ , недвудольный граф



e)  $n = 4k + 1, r = 5k + 2$ , недвудольный граф



f)  $n = 4k + 3, r = 5k + 4$ , недвудольный граф

Рис. 10. Примеры магических графов с минимальным числом рёбер

расстановку весов рёбер, в «достаточно типичном» случае. Мы ограничимся случаем  $n = 4k + 3, r = 5k + 4, k = 2$ ; расстановка весов показана на рис 11.

**3.11.** Мы приводим решение по мотивам [4]. Пусть уже построен связный магический граф с  $n$  вершинами и  $r$  рёбрами, не являющийся полным. Если он недвудольный, то при добавлении к нему ещё одного (любого!) ребра он не утрачивает магичности.

Действительно, новое ребро  $e$  обязательно входит в некоторый цикл. Если этот цикл чётен, то припишем ребру  $e$  значение  $\varepsilon$ , а к остальным рёбрам цикла прибавим попеременно  $\pm\varepsilon$ , причём подберём  $\varepsilon$  так, чтобы все веса остались положительными и различными. Полученная расстановка весов на новом графе будет магической.

Пусть теперь ребро  $e$  входит в нечётный цикл. В силу недвудольности исходного графа, существует нечётный цикл, не содержащий  $e$ . Тогда  $e$  лежит в некоторой гантели (см. лемму в решении задачи 4.1.). И опять можно приписать ребру  $e$  вес  $\varepsilon$ , а к рёбрам гантели прибавить поправки  $\pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon$ , чтобы расстановка осталась магической.

Таким образом, достаточно для каждого  $n \geq 5$  построить «минимальный» недвудольный граф. Это было сделано в предыдущей задаче для  $n \neq 4k + 2$  (см. рис. 10 b, e, f). Конструкции графов мы взяли в статье [4]. К сожалению, конструкция минимального недвудольного графа для  $n = 4k + 2$  в этой статье неверна. Кроме того, граф на рис. 10 b) при  $n = 8$  не магический (в нём не разделяются 1-2-скелетами наклонное и нижнее ребро), пример магического графа при  $n = 8$  показан на рис. 9 d), его изобрёл участник конференции А. Цыбышев. Мы не знаем, существует ли недвудольный магический граф с  $4k + 2$  вершинами и  $5k + 3$  рёбрами (при  $k > 3$ ), поэтому для случая  $5k + 3$  рёбер оставим двудольный пример, а конструкцию добавления ребер начнём с недвудольного графа, содержащего  $5k + 4$  ребра. Этот недвудольный граф с  $4k + 2$  вершинами и  $5k + 4$  рёбрами показан на рис. 10 d). Пример расстановки весов на этом графе при  $k = 3$  см. на рис. 12.

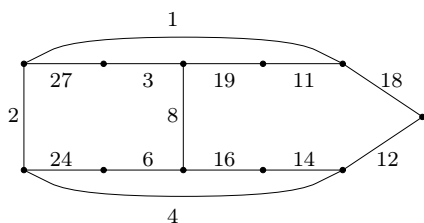


Рис. 11.  $n = 4k + 3, r = 5k + 4, k = 2$

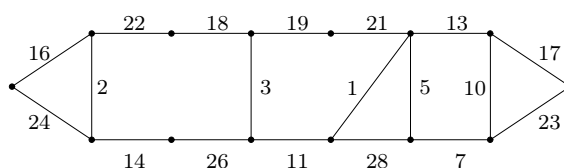


Рис. 12.  $n = 4k + 2, r = 5k + 4, k = 3$

## 4 Однородные графы

### 4.1. Решение 1 (вокруг двудольности).

**Лемма.** Пусть в связном графе даны два нечётных цикла, один из которых содержит ребро  $e$ , а другой — нет. Тогда  $e$  содержится в чётном цикле или гантеле.

**Доказательство.** Если циклы не пересекаются или пересекаются по одной вершине, то ребро  $e$ , очевидно, содержится в гантеле. Рассмотрим случай, когда циклы пересекаются не менее чем по двум вершинам. Пусть  $X$  и  $Y$  — концевые вершины ребра  $e$ . Удалим ребро  $e$  из первого цикла, на оставшуюся часть этого цикла будем ссылаться как на путь  $XU$ . Пусть  $A$  и  $B$  — первая и последняя вершина пути  $XU$ , принадлежащие второму циклу, тогда отрезки пути  $XA$  и  $BV$  не пересекаются с циклом. Вершины  $A$  и  $B$  делят второй цикл на два пути разной чётности. Один из них дополняет пути  $XA$  и  $BV$  до нечётного пути  $XABU$ , который, вместе с ребром  $XU$ , образует чётный цикл.

Теперь обратимся к утверждению задачи. Не умаляя общности можно считать, что граф связный. Рассмотрим произвольное ребро  $e$  с концами  $A$  и  $B$ . Выкинем его из графа. Допустим сначала, что граф  $G \setminus e$  распался на две компоненты связности. Поскольку степени всех вершин были больше 1, компоненты содержат более одной вершины. Ни одна из компонент не может быть двудольным графом. В самом деле, в двудольном графе сумма степеней вершин в обеих долях одинаковы; в нашей же компоненте сумма степеней в одной компоненте будет кратна  $d$ , а в другой (в той, куда попадёт конец ребра  $e$ ) сумма степеней будет сравнима по модулю  $d$  с  $-1$ . Таким образом, в каждой компоненте есть нечётный цикл. Значит, ребро  $e$  содержится в гантеле.

Теперь предположим, что граф  $G \setminus e$  связан. Рассмотрим произвольный путь из  $A$  в  $B$  в этом графе. Если он нечётен, то  $e$  содержится в чётном цикле. Пусть этот путь чётен (и, значит,  $e$  содержится в нечётном цикле). Тогда, если бы граф  $G \setminus e$  был двудольным, то эти вершины попали бы в одну и ту же долю, что невозможно, ибо сумма степеней вершин в этой доле была бы сравнима по модулю  $d$  с  $-2$ , а в противоположной доле — кратна  $d$ . Значит, граф  $G \setminus e$  не двудольный, а тогда найдётся нечётный цикл, не содержащий  $e$ . Осталось воспользоваться утверждением, приведённым в начале решения.

**Решение 2.** Это решение предложил участник конференции Алексей Цыбышев.

Расставим на всех рёбрах исходного однородного графа числа  $1/d$ , сумма в каждой вершине будет равна 1. Начнём проводить процесс, описанный в решении задачи 2.3, — избавляться от чётных циклов и гантелей, меняя соответствующим образом веса рёбер и откидывая нулевые рёбра. В итоге останется 1-2-скелет с полумагической расстановкой. Очевидно, что на его рёбрах стоят числа 1 и  $1/2$ . Но поскольку  $1/d$  не равно ни 0, ни 1, ни  $1/2$ , любое ребро хоть раз изменило свой вес. Это значит, что любое ребро содержится в каком-нибудь псевдоцикле.

**4.2.** Будем называть расстановку  $\pm 1$  на чётных циклах и  $\pm 1, \pm 2$  на гантелях, описанную в тексте условий, стандартной расстановкой на псевдоцикле.

**Лемма.** Пусть в графе задана расстановка чисел на рёбрах, причём веса всех рёбер ненулевые, а сумма в каждой вершине равна нулю. Тогда любое ребро содержится в чётном цикле или гантеле.

**Доказательство** леммы почти дословно повторяет решение задачи 4.1. Вместо количества рёбер нужно говорить о сумме их весов и пользоваться тем, что в двудольном графе сумма весов рёбер, выходящих из обеих долей, одинаковы.

1. Предположим, что однородный граф  $G$  — магический с суммой  $s$  в каждой вершине. Вычтем из веса каждого ребра число  $s/d$ , получится расстановка на рёбрах различных чисел с нулевой суммой в каждой вершине.

Выберем в графе  $G$  произвольное ребро ненулевого веса и согласно лемме найдём содержащий его псевдоцикл. Вычтем из весов рёбер этого псевдоцикла его стандартную расстановку, умноженную на такой коэффициент, чтобы вес данного ребра обнулится. Теперь выкинем из  $G$  все «нулевые» рёбра. Полученная разметка рёбер уменьшенного графа по-прежнему обладает нулевой суммой в каждой вершине. Снова выберем в нём ребро и снова применим лемму, и т. д.

Количество рёбер в графе на каждом шагу уменьшается и рано или поздно все рёбра станут «нулевыми». Это будет означать, что исходная разметка рёбер графа  $G$  является «суммой» стандартных расстановок на псевдоциклах с подходящими коэффициентами. Поскольку любые два ребра  $G$  имеют разный вес, то для них найдётся псевдоцикл, вносящий в эти рёбра разный вклад. Это и означает, что он слабо разделяет эти два ребра.

2. Предположим теперь, что любые два ребра слабо разделяются псевдоциклами. Выпишем все псевдоциклы, и пронумеруем их числами от 1 до  $N$  (где  $N$  — их количество). Для  $k$ -го псевдоцикла назначим веса его рёбер, умножив его стандартную расстановку на  $5^k$ . Теперь для каждого ребра сложим все назначенные ему веса и прибавим большую константу  $C$ , чтобы все веса стали положительными. Будем считать этот результат окончательным весом данного ребра. Полученная разметка рёбер графа — магическая: каждый псевдоцикл даёт нулевой суммарный вклад весов в каждую вершину; добавление  $C$  к каждому ребру изменяет сумму в вершине на  $dC$ . При этом веса всех рёбер различны. Действительно, так как целое число однозначно представляется в виде комбинации степеней пятёрки с коэффициентами  $-2, -1, 0, 1, 2$ , а у любых двух рёбер хотя бы в одном псевдоцикле коэффициенты при соответствующей степени пятёрки различны.

**4.3.** Эта теорема является непосредственным следствием критерия магичности однородных графов, изложенного в предыдущей задаче.

Докажем, что любые два ребра  $G$  слабо разделяются псевдоциклами. Если они лежат в одной компоненте, то это следует её магичности. Если же в разных, то в одной из них можно выбрать псевдоцикл, содержащий соответствующее ребро (задача 4.1.), он и будет разделять эти два ребра.

4.4. 1. Проверим сначала, что  $\ell(G) \neq 1$ . Если  $\ell(G) = 1$ , то при удалении одного ребра  $e$  граф распадается на две компоненты связности. Рассмотрим любую из них. Как и сам граф  $G$ , она является двудольным графом, причём степень одной её вершины равна  $d - 1$ , а остальных — ровно  $d$ . Как уже обсуждалось (см. решение задачи 4.1.), этого не может быть.

2. Докажем, что если  $\ell(G) \geq 3$ , то  $G$  — магический. Возьмём любые два ребра  $e$  и  $f$  и докажем, что они слабо разделяются псевдоциклами. При выкидывании этих рёбер граф остаётся связным, поэтому найдётся цикл, содержащий  $e$ , но не содержащий  $f$ . В силу двудольности этот цикл чётен, и он разделяет  $e$  и  $f$ .

3. Докажем, что если  $\ell(G) = 2$ , то  $G$  — не магический. Пусть при выкидывании рёбер  $e$  и  $f$  граф теряет связность; тогда образуется ровно две компоненты связности, обозначим их  $V$  и  $W$ . Каждая из них является двудольным графом. Если рёбра  $e$  и  $f$  имеют общий конец, то в одной из компонент окажется вершина степени  $d - 2$ , в то время как остальные её вершины имеют степень  $d$  — такой граф не может быть двудольным. Следовательно,  $e = AB$  и  $f = CD$  не имеют общих рёбер, и в одной компоненте содержатся вершины  $A, C$ , а в другой — вершины  $C$  и  $D$ , степени которых равны  $d - 1$ . Значит,  $A$  и  $C$  (а также  $B$  и  $D$ ) попадают в разные доли и все пути между ними нечётны.

Докажем, что рёбра  $e$  и  $f$  не могут слабо разделяться псевдоциклом. Нечётных циклов (а значит, и гантелей) в графе  $G$  вообще нет в силу его двудольности. Если же чётный цикл содержит, например, ребро  $e$ , то он содержит и ребро  $f$ , причём из выводов предыдущего абзаца следует, что между ними в цикле с каждой стороны расположено нечётное число рёбер. Значит, этот цикл не может слабо разделять рёбра  $e$  и  $f$ .

## References

- [1] Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. М.: Мир, 1998.
- [2] Doob M. Characterizations of regular magic graphs // J. Combin. Theory, ser. B. Vol. 25. 1978. P. 94–104.
- [3] Katerinis P. Minimum degree, factors and magic graphs.
- [4] Trenkler M. Number of vertices and edges of magic graphs // Ars Combinatoria. 2000. Vol. 55. P. 93–96.
- [5] Trenkler M. Some results on magic graphs // Proceedings of the third Czechoslovak symposium on graph theory. Teubner-texte zur Mathematik. Bd. 59. Leipzig: Taubner Verlagsgesellschaft, 1983. P. 328–332. arXiv:0906.1317v1.
- [6] Semaničová A. Magic graphs having saturated vertex // Tatra Mt. Math. Publ. 2007. Vol. 36. P. 121–128.

# Magic graphs

K. Kokhas, D. Rostovskiy

## Definitions and notations

All the graphs under consideration are supposed to be without isolated vertices, multiple edges and loops.

The words “cycle” and “path” mean *simple* cycle and *simple* path in a graph.

For every edge of a graph we assign a positive number that we call a weight of this edge. A graph is called *semimagic* if it is possible to choose weights of its edges and a positive number  $s$  such that for each vertex the sum of weights of its edges equals to  $s$ . A graph is called *magic* if it possible to choose these weights to be pairwise different. Observe that a vertex of degree 1 in the semimagic graph is necessarily the endpoint of the isolated edge. A magic graph can contain at most 1 isolated edge.

A subgraph  $F$  of a given graph  $G$  is called a *skeleton*, if it contains all the vertices of  $G$  and none of them is isolated vertex in  $F$ . *1-2-skeleton* is a skeleton such that all its vertices have degree 1 or 2 and for each component the degrees of its vertices are the same. In other words 1-2-skeleton consists of isolated edges and simple cycles only. For each 1-2-skeleton we can split all the edges of the graph onto 3 groups: edges that belong to the *cyclic* part of  $F$  (we will denote it by  $F_c$ ); edges that belong to the *linear* part of  $F$ , i. e. isolated edges in  $F$  (we will denote it by  $F_\ell$ ); and edges that do not belong to  $F$ . We say that 1-2-skeleton *separates* edges  $e_1$  and  $e_2$  if these two edges belong to different groups. In other words at least one of them belongs to  $F$  but at most one belongs to  $F_c$  and at most one belongs to  $F_\ell$ .

We will use the following notations:  $C_n$  is the cycle with  $n$  edges ( $n \geq 3$ );  $P_n$  is the path with  $n$  edges;  $K_n$  is the complete graph with  $n$  vertices;  $K_{m,n}$  is the complete bipartite graphs with parts of  $m$  and  $n$  vertices.

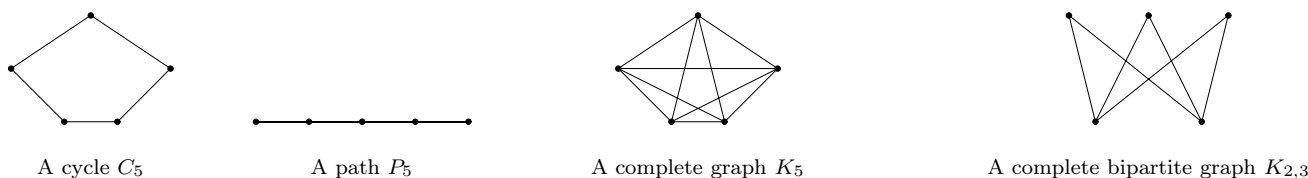


Figure 1: Some standard graphs

A *direct product*  $F \times G$  of two graphs is the following graph. Its vertex set is the set of all pairs  $(v, w)$ , where  $v$  is a vertex of  $F$ ,  $w$  is a vertex of  $G$ . The vertices  $(v_1, w_1)$  and  $(v_2, w_2)$  are joined by an edge, if either  $v_1 = v_2$  and  $G$  contains the edge  $w_1 w_2$ , or  $w_1 = w_2$  and  $F$  contains the edge  $v_1 v_2$ . The graph  $G \times P_1$  is called *the double* of graph  $G$ . *Dum-bell* is a graph consisting of either two odd cycles which share exactly one common vertex, or two odd cycles joined by a path of an arbitrary length.

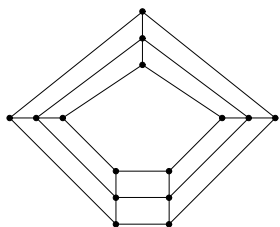


Figure 2: Graph  $C_5 \times P_2$

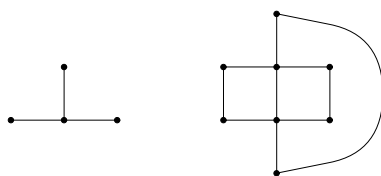


Figure 3: Graph and its double

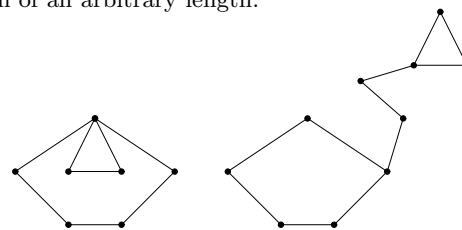


Figure 4: Dum-bells

## 1 Examples

**1.1.** Show that magic graphs with less than 5 vertices do not exist, except the graph  $P_1$  (one edge).

**1.2.** Prove that a bipartite graph with odd number of vertices is non magic. Could it be semimagic?

**1.3.** Determine whether these graphs are semimagic or magic (the answers may depend on  $n$  and  $m$ )

- a)  $K_n$ ;    b)  $K_{m,n}$ ;    c)  $P_n \times P_1$ ;    d)  $P_n \times P_m$  при  $n, m > 1$ ;    e)  $C_n \times P_1$ ;    f)  $C_n \times P_m, n \geq 3, m > 1$ ;  
g) cycle of  $2n$  vertices, where every two opposite vertices are joined by edge.

## 2 Semimagic graphs

**2.1.** Prove that if a semimagic graph  $G$  contains an even cycle then  $G$  contains also a semimagic skeleton (i. e. the skeleton which is a semimagic graph itself) such that not all the edges of the cycle belong to this skeleton.

**2.2.** Prove that if a semimagic graph  $G$  contains a dum-bell then  $G$  contains also a semimagic skeleton such that not all the edges of the dum-bell belong to this skeleton.

**2.3.** Prove that each semimagic graph has 1-2-skeleton.

**2.4.** The main theorem about semimagic graphs. Prove that a graph is semimagic if and only if each of its edges belongs to some 1-2-skeleton.

In the following problems we find out when a graph contains 1-2-skeleton. We call a graph *soft* if it does not have 1-skeleton, and *solid* if it contains 1-skeleton. A soft graph is called *saturated* if it turns solid when an arbitrary edge has been added.

Let  $G$  be an arbitrary graph,  $S$  is an arbitrary set of its vertices. Denote by  $G \setminus S$  the graph obtained by deletion of all the vertices of the set  $S$  and its edges.

**2.5.** Let  $G$  be a saturated soft graph,  $S$  be the set of all its vertices such that each of them is joined with all other vertices. Prove that all components of the graph  $G \setminus S$  are complete graphs.

**2.6.** The main theorem about saturated soft graphs. A graph  $G$  is saturated and soft if and only if either

a)  $G$  is a complete graph with odd number of vertices, or

b) the number of vertices of  $G$  is even and we can split it onto complete graphs  $S_0, G_1, G_2, \dots, G_k$ , where  $k = |S_0| + 2$ , such that for all  $i$  the number of vertices in  $G_i$  is odd and every vertex of  $G_i$  is joined with all the vertices of  $S$ .

**2.7.** Prove that a graph  $G$  is solid if and only if for each set  $S$  of vertices of  $G$  the graph  $G \setminus S$  has at most  $|S|$  odd components.

**2.8.** Prove that graph  $G$  contains 1-2-skeleton if and only if for each set  $S$  of vertices of  $G$  the graph  $G \setminus S$  has at most  $|S|$  isolated vertices.

### 3 Magic graphs

**3.1.** Prove that each magic graph has the following two properties:

(1) Every edge of the graph belongs to some 1-2-skeleton.

(2) Every two edges are separated by some 1-2-skeleton.

**3.2.** Prove the converse statement: if a graph has these two properties then it is magic.

**3.3.** Graph  $G'$  is obtained from magic graph  $G$  by adding a new edge and this new edge belongs to some 1-2-skeleton of graph  $G'$ . Prove that  $G'$  is magic.

**3.4.** Graph  $G$  consists of two (non isomorphic) components, each component has at least 3 vertices. Both components are magic graphs. Is it true that  $G$  is necessarily magic?

**3.5.** a) For each edge  $e$  in a semimagic graph  $G$  (without isolated edges) there exists a 1-2-skeleton, whose cyclic part does not contain  $e$ . Prove that the double of  $G$  is magic.

b)  $G$  is a semimagic graph without isolated edges,  $H$  is an arbitrary connected graph without isolated edges. Prove that  $G \times H$  is a magic graph.

**3.6.**  $G$  is an arbitrary graph with at least 4 vertices. Graph  $G'$  is obtained by adding one more vertex to  $G$ , and this vertex is joined with all the "old" vertices of  $G$ . Prove that the graph  $G'$  is magic if and only if the graph  $G$  is without isolated edges and it has 1-2-skeleton.

**3.7.** a) Graph  $G$  has  $n \geq 5$  vertices. The degrees of vertices of  $G$  are at least  $\frac{n}{2} + 1$ . Prove that  $G$  is a magic graph.

b) Prove that for any large  $n$  there exist non semimagic graph such that the minimal degree of its vertices equals to  $\lfloor n/2 \rfloor$ .

**3.8.**  $G$  is a connected magic graph with  $n \geq 5$  vertices and  $r$  edges. Prove that  $r > \frac{5}{4}n$ .

**3.9.** For  $n = 5, 6, 7, 8$  construct a connected magic graph with  $n$  vertices and  $r$  edges, where  $r$  is the minimal integer that satisfies the inequality  $r > \frac{5}{4}n$ .

**3.10.** Construct an analogous graph for each  $n \geq 5$ .

**3.11.** Prove that there exists a connected magic graph with  $n$  vertices and  $r$  edges, if the pair  $(n, r)$  satisfies the inequality  $\frac{5}{4}n < r \leq \frac{n(n+1)}{2}$ .

## Semifinal

### 4 Regular graphs

We will not discuss when regular graphs of degree 1 and 2 are magic. Below we will consider regular graphs of degree at least 3.

A *pseudocycle* is an even cycle or dum-bell (remind that both cycles in dum-bell are even).

Consider an even cycle. Put alternatively on its edges weights 1 and  $-1$ , let all other edges have weight 0. We say that two edges are *weakly separated* by the cycle if they have had different weights. Analogously, for each dum-bell, put the weights  $\pm 1$  and  $\pm 2$  on its edges as in fig. 5 (where  $a = 1$ ), and let all other edges have weight 0. We say that two edges are *weakly separated* by the dum-bell if they have had different weights. Finally, we say that two edges are *weakly separated* by a pseudocycle if there exists an even cycle or a dum-bell that weakly separates these edges.

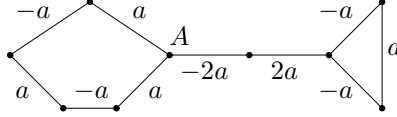


Figure 5: Alternative weights of dum-bell edges

4.1. Prove that every edge of the regular graph of degree  $d \geq 3$  belongs to some pseudocycle.

4.2. Prove that the regular graph of degree  $d \geq 3$  is magic if and only if any two of its edges are separated by pseudocycle.

4.3. Prove the following theorem. Let  $G$  be a regular graph of degree  $d \geq 3$  and  $G_1, \dots, G_k$  be its components. Then  $G$  is magic if and only if all  $G_i$  are magic.

*Index of edge connectivity*  $\ell(G)$  is the minimal number of edges of  $G$  that should be erased in order to obtain disconnected graph.

4.4. Let  $G$  be connected regular bipartite graph. Prove that the property “to be magic” or “to be non-magic” depends on  $\ell(G)$  only and completely investigate this dependence.

### 5 Addendum

5.1. To the problem 1.3.a. Graph is called *supermagic* if its magic weights are consecutive positive integers.

For which  $n$  graph  $K_n$  is supermagic?

5.2. To the problem 3.7. A graph has 2009 vertices of degree at least 1006. At most 500 edges were deleted. Prove that the rest graph is still magic.

# Solutions

## 1 Examples

**1.1.** If a graph with 4 vertices has 1 or 2 edges then it has isolated vertex. If it has 3 or 4 edges then it contains two adjacent vertices of degree 2 and hence it is non-magic. The graph with 6 edges is necessarily  $K_4$ , see problem 1.3a).

Finally, if it has 5 edges then it is isomorphic to the cycle  $ABCD$  with the diagonal  $AC$ . Then the sum of weights of edges adjacent to vertices  $A$  and  $C$  equals  $2s$ . Geometrically, it is the sum of weights of all edges, where the weight of  $AC$  has multiplicity 2. The other way to obtain the sum  $2s$  is to sum up the weights of edges adjacent to vertices  $B$  and  $D$ . This is a sum of all edges of the graph except  $AC$ . Therefore  $AC$  has zero weight, which is forbidden.

**1.2.** Answer: the graph is not semimagic. Let one part of the graph contains  $k$  vertices, the second part contains  $\ell$  vertices, and let  $s$  be the sum of weights of all edges adjacent to the same vertex. If the graph is semimagic, then the sum of weights of edges adjacent to vertices of the first part equals  $ks$ , the sum of weights of edges adjacent to vertices of the second part equals  $\ell s$ , and both sums equals the sum of weights of all edges of the graph. Therefore  $\ell = k$ . This is impossible because the total number of vertices is odd.

**1.3.** a) Answer: the graph is always semimagic, it is magic for  $n = 2$  and  $n > 5$  only.

To show that the graph is semimagic take all weights equal to 1.

If  $n = 3$  the graph is not magic, it is evident.

If  $n = 4$  we have 4 vertices  $A, B, C, D$ . Assume that it is magic, let  $s$  be the sum of weights of all edges adjacent to the same vertex. Then  $2s$  is the sum of all edges adjacent to vertices  $A$  and  $C$ , i.e. the sum of all edges of the graph except  $CD$  but with weight of  $AC$  counted twice. By the analogous consideration for vertices  $B$  and  $D$  we will obtain that the weights of  $AC$  and  $BD$  coincide.

If  $n > 5$  the graph is magic. We will prove this by the following construction. Since the graph is regular, we may consider arbitrary weights (not necessarily positive), because in the regular graph we can make all the weights to be positive by adding a large positive constant. Let us describe the *main construction* of magic weights for the regular graphs by means of even cycles.

Write out all even cycles that are contained in our graph and enumerate them by numbers from 1 to  $N$  (where  $N$  is the total number of these cycles). For any  $k$  put the weights  $\pm 3^k$  alternatively on the edges of  $k$ -th cycle. After that for each edge sum up all the weights on it.

Let us check that this set of weights is magic. Indeed, the sum of weights of edges adjacent to every vertex equals 0, because the contribution of each cycle to this sum is 0. Now let us check that all weights are distinct. For each edge of the graph write out the list cycles which contain this edge. It is clear that for any two edges there exists an even cycle that contains one of these edges only. Therefore for any two edges their lists of cycles do not coincide. But then the sums of weights determined by the cycles are not equal. This is because the weights obtained by our construction may be regarded as  $N$ -digital ternary numbers in system (with base 3) with digits 0 and  $\pm 1$ . Since all lists are distinct then all these ternary numbers are distinct also.

b) Answer: the graph is semimagic for  $m = n$  only. For  $m = n > 2$  it is magic.

The equality  $m = n$  is necessary for the graph to be semimagic (see problem 1.2).

If  $m = n$  the graph is regular and hence semimagic. If  $m = n = 2$  it is evidently non-magic (see problem 1.1). And if  $m = n > 2$ , the graph is magic, due to construction from the previous solution.

c) Answer: the graph is semimagic but non-magic.

To show that it is semimagic it is sufficient to assign weights of all edges to be 1, except leftmost and rightmost edges of weight 2. The graph is non-magic because it contains adjacent vertices of degree 2.

d) Answer: the graph is magic if either  $m$  or  $n$  is odd. If both  $m$  and  $n$  are even, then the graph is not semimagic.

If both  $m$  and  $n$  are even, then the graph is bipartite with  $(n + 1)(m + 1)$  vertices (odd number). This graph is not semimagic due to problem 1.2.

Now prove that the graph is magic for odd  $n$  and  $m > 1$ .

At first consider case  $m = 2$ . Consider the initial placement of nonnegative semimagic weights depicted on fig. 6: bold edges have weight  $2m$ , dashed edges have weight 0, all other edges have weight  $M$ , where  $M$  is a big number, that we will choose later. This set of weights is almost semimagic, but some weights here are zero and the graph is not regular.

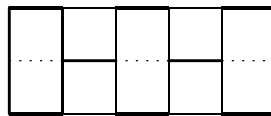


Figure 6: Almost semimagic weights on graph  $P_n \times P_2$

Now we will perform the main construction of magic weights for the regular graphs by means of even cycles, but with 3 corrections (because our graph is not regular):

- 1) In the main construction we will consider 4-cycles only (i.e. the sides of cells).
  - 2) The final weight of an edge will be equal to the sum of its initial weight and the weight obtained by the main construction.
  - 3) When we assign positive and negative weights of edges in cycles, we choose plus sign for edges whose initial weight has been equal to zero.
- Finally, choose  $M$  so big that all the final weights turn out to be positive and distinct. Then this set of weights will be magic.

Now consider a case  $n$  is odd,  $m > 2$ . We perform analogous actions. The initial weights are depicted on fig. 7 (odd number  $n$  corresponds to the vertical side of the picture).

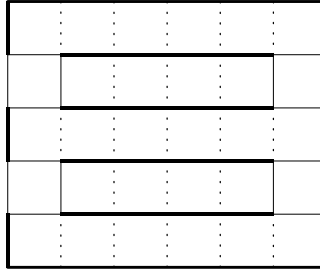


Figure 7: Almost semimagic weights on graph  $P_n \times P_m$

e) Answer: the graph is always semimagic. It is magic for even  $n$  only.

We may realize this graph as edges of  $n$ -gonal prism.

Let  $n = 2k$ . The graph contains evident cycles of length 4 (sides of facets) and two  $2k$ -cycles (sides of bases). The property “for any two edges there is a cycle that contains one of them only” is satisfied. Therefore we can perform the main construction for regular graphs.

Let us prove that the graph is non-magic for  $n = 2k + 1$ . As usual let  $s$  be the sum of weights of edges adjacent to the same vertex. It is easy to see that the sum of weights of all edges equals  $nd$ . Denote our prism by  $A_1A_2 \dots A_{2k+1}B_1 \dots B_{2k+1}$ . The sum of weights of edges adjacent to vertices  $A_1, A_3, \dots, A_{2k+1}, B_2, B_4, \dots, B_{2k}$ , equals  $nd$  and can be interpreted as the sum of weights of all edges of the graph except  $B_1B_{2n+1}$  and with edge  $A_1A_{2n+1}$  counted twice. Hence, the weights of  $A_1A_{2n+1}$  and  $B_1B_{2n+1}$  are equal.

f) Answer: the graph is magic.

Solution is analogous to solution 1.3d). Let  $A_1, \dots, A_{m+1}$  be vertices of graph  $P_m$ . Initial placement of nonnegative weights on the graph looks as follows: all edges of subgraphs of the form  $C_n \times A_i$  have weight 2, all other weights are 0. We apply the main construction for 4-cycles only.

g) Answer: the graph is always semimagic; it is magic for odd  $n$ .

It is semimagic because it is regular. For  $n = 2$  this graph is  $K_4$ , we discuss it in problem 1.3 a). For odd  $n$  it is magic because the main construction works (we have a good store of even cycles here: 4-cycles that contains subsequent diameters and  $(n + 1)$ -cycles of the form “semicircle”).

For even  $n$  the graph is non-magic. Let  $A_1A_2 \dots A_nB_n \dots B_2B_1$  be vertices of the given cycle. The set of edges adjacent to all vertices  $A_i, B_i$ , where  $i$  runs over odd numbers, is the set of all edges of the graph except  $A_nB_n$  and with  $A_1B_1$  counted twice. It follows that in any semimagic set of weights the opposite edges of the cycle have the same weight.

## 2 Semimagic graph

**2.1.** Let  $a$  be the minimal weight of the edges in the given cycle. We will move along the cycle and decrease and increase by  $a$  alternatively the weights of the edges of the cycle. After that erase all the edges with zero weight. The remaining graph together with the weights of its edges will be desired semimagic skeleton.

**2.2.** Let  $A$  be the vertex of degree 3 (or 4) of one of odd cycles of the dum-bell. We will bypass the dum-bell starting from the vertex  $A$ . First of all we will move along the odd cycle and assign the weights to its edges to be  $\pm a$  alternatively. After return to the vertex  $A$ , we have two edges of weight  $a$  adjacent to  $A$ . Then we move along the handle of dum-bell and assign the weights of its edges to be  $\mp 2a$  alternatively. After that we move along the second cycle assigning its edges weights  $\pm a$  alternatively. We obtain semimagic weights with  $s = 0$  (see fig. 5).

Now we are going to add new weights to old ones. For this choose the value of parameter  $a$  so that all the weights of the graph would be nonnegative and the weight of at least one of the edges would be equal to 0. We will obtain semimagic weights. After erasing all the edges with zero weight we obtain the desired skeleton.

**2.3.** The constructions of solutions 2.1, 2.2 allow us to decrease consequently the number of edges in the graph by destroying its even cycles and dum-bells. The graph will be semimagic during all these operations and therefore there will be no pendant



vertices in it (except the endpoints of isolated edges). Observe that if a component of the graph contains two even cycles then it contains also an odd cycle or a dum-bell. And if a component contains exactly one (odd) cycle and does not contain pendant vertices then this component is exactly this odd cycle.

So, after destroying all even cycles and dum-bells we will obtain a graph consisting of several isolated edges and several (odd) cycles.

**2.4.** Let us check that every edge of a semimagic graph belongs to some 1-2-skeleton. Let  $G$  be a graph with minimal number of edges such that one of its edges, say,  $e$  does not belong to any 1-2-skeleton. Fix a set of semimagic weights  $\mathcal{W}$  on graph  $G$ . Fix an arbitrary 1-2-skeleton and construct one more semimagic set of weights  $\mathcal{S}$  as follows. Let each edge of the linear part of the skeleton has weight  $a$ , each edge of the cyclic part has weight  $a/2$  and all other edges (including  $e$ ) have weight 0. Choose the value of  $a$  so that all the weights of the set  $\mathcal{S}$  do not exceed the corresponding weights in the set  $\mathcal{W}$  and for at least one edge we have an equality. Now subtract from weights of  $\mathcal{W}$  the weights of  $\mathcal{S}$ . We obtain a semimagic set of weights, where not all the weights are equal to 0, because the weight of edge  $e$  has not changed. Now remove all edges of zero weight. We obtain semimagic graph  $G'$  which is a skeleton of  $G$ .  $G'$  contains less edges than  $G$  and edge  $e$  does not belong to any 1-2-skeleton of  $G'$ , because "the skeleton of my skeleton is my skeleton". This is a contradiction with the definition of  $G$ . Therefore the graph  $G$  does not exist.

Now let us check that if every edge of the graph belongs to some 1-2-skeleton, then the graph is semimagic. For each 1-2-skeleton assign the weight of its cyclic edges be 1 and the weight of its isolated edges be 2. We obtain semimagic set of weights (but with zero weights). Let us sum up all these set of weights over all 1-2-skeletons. The result is the desired semimagic set of weights.

**2.5.** We take this problem and the following solution from [1, §3.1.2]. Let  $A, B, C$  be vertices of  $G \setminus S$  and  $B$  is joined with both  $A$  and  $C$ . It is sufficient to prove that graph  $G$  contains edge  $AC$ . Assume that this is not true. By the definition of the set  $S$  graph  $G$  contains the vertex  $D$  such that the edge  $BD$  does not belong to the graph. If we add edge  $AC$  to graph  $G$ , then the new graph has 1-skeleton (since graph  $G$  is saturated). It is clear that edge  $AC$  must belong to this skeleton. Color this skeleton in red. Analogously, if we add edge  $BD$  to graph  $G$ , we can find blue 1-skeleton containing edge  $BD$ . Now from these two skeletons we will construct a 1-skeleton of graph  $G$  and get a contradiction.

Consider the union of these skeletons; the edges which are red and blue simultaneously we will consider as usual (non-multiple) edges. Then this union is a 1-2-skeleton of graph  $G \cup AC \cup BD$ , and all its cycles are even because red and blue edges alternate.

It is clear that edges  $AC$  and  $BD$  are both in the cyclic part. If these edges belong to different cycles, then the desired 1-skeleton can be constructed as follows. Take the red skeleton and replace all red edges of the cycle that contains  $AC$  by blue edges of the same cycle. Now consider the second case, let edges  $AC$  and  $BD$  belong to cycle  $\gamma$ . Let us bypass cycle  $\gamma$  starting from vertex  $B$  and edge  $BD$  till we reach vertex  $A$  or  $C$ . Let it be  $A$  for definiteness. Since the red edge of vertex  $A$  is  $AC$ , we finish our movement by blue edge. Hence the path from  $B$  to  $A$  starts and finishes with blue edges. Take the blue skeleton, replace all blue edges of the path by red edges of the same path and add edge  $AB$ . We obtain 1-skelton of graph  $G$ .

**2.6.** We take this problem and the following solution from [1, §3.1.2]. It is evident that a soft saturated graph with odd number of vertices is necessarily complete. Let the number of vertices in  $G$  be even; let  $S$  be the set of all vertices of  $G$  that are joined with all other vertices and  $s$  be the number of these vertices; let  $G_1, G_2, \dots, G_k$  be components of connectivity of graph  $G \setminus S$ . Due to the statement of the previous problem we know that they are all complete graphs.

If  $G \setminus S$  has at most  $s$  odd components, construction of the 1-skeleton is trivial. Assume that  $G \setminus S$  has at least  $s + 1$  odd components; taking into account parity of number of vertices of  $G$ , we conclude that  $G \setminus S$  has at least  $s + 2$  odd components. If the number of odd components is greater than  $s + 2$ , join any two of them by an edge. We obtain graph  $G_1$  such that graph  $G_1 \setminus S$  has more than  $s$  odd components of connectivity. There are no 1-skeletons in this graph (it is evident, it follows also from the easy part of the statement of problem 2.7), but this is impossible because graph  $G$  is saturated.

Thus, graph  $G$  has exactly  $s + 2$  odd components. It can not have even components due to analogous reasons.

**2.7.** This statement is classical Tutte theorem. The following proof is from [1, §3.1.2].

If we can find the set of vertices  $S$  in graph  $G$ , such that graph  $G \setminus S$  has more than  $|S|$  odd components of connectivity, then graph  $G$  is soft. It is clear.

Check the converse statement. Assume that for any subset  $S$  of the set of vertices of  $G$  graph  $G \setminus S$  has at most  $|S|$  components of connectivity but at the same time graph  $G$  is soft.

The number of vertices of graph  $G$  is even because otherwise  $S = \emptyset$  leads to the contradiction. Add several edges to graph  $G$  to obtain soft saturated graph  $G'$ . Let  $S'$  be set of vertices joined with every vertex of  $G'$ ,  $s$  be number of its elements. Since  $G'$  and  $G$  have equal (even) number of vertices due to main theorem about soft saturated graphs we have that graph  $G' \setminus S'$  contains  $s + 2$  odd components, each of them is a complete graph. Now remove those edges we have add making graph saturated. It is possible that some components of graph  $G' \setminus S'$  will fall to parts but at least one part of odd component will be odd and the total number of odd components will be grater than  $s$ . Thus, the set  $S'$  disproves the property of  $G$  under consideration.

**2.8.** Let  $n$  be the number of vertices of graph  $G$ . Construct a new graph  $G'$  with  $2n$  vertices. For every vertex  $v$  in  $G$  take two vertices  $v'$  and  $v''$  in  $G'$ ; for every edge  $uv$  define two edges in  $G'$ :  $u'v''$  and  $u''v'$ . Then  $G'$  is a bipartite graph, that has twice as many edges as  $G$ .

Remark that the existence of 1-2-skeleton in  $G$  is equivalent to the existence of perfect matching in  $G'$ . Indeed, for each cycle  $v_1 v_2 \dots v_\ell$  of the skeleton graph  $G'$  has edges  $v'_1 v''_2, v''_2 v'_3, \dots, v'_\ell v''_1$ ; analogously for any isolated edge graph  $G'$  contains

edges  $u'v''$  and  $v'u''$ . It is clear that all these edges form a perfect matching. Conversely, for any perfect matching of graph  $G'$  it is not difficult to construct a 1-2-skeleton. For example, the edges  $u'v''$ ,  $v'w''$ ,  $w'z''$ ,  $z'u''$  of the perfect matching determine a cycle  $uvwz$  of the graph  $G$ , and edges  $u'v''$  and  $v'u''$  determine an isolated edge  $uv$  of the skeleton.

As we know, for each set  $S$  of vertices of  $G$  the graph  $G \setminus S$  has at most  $|S|$  isolated vertices. Let us reformulate this property in terms of graph  $G'$ . Consider an arbitrary set  $S$  of vertices of graph  $G$ . What does it mean that after deletion of this set the vertex  $u$  becomes isolated? This means that in the graph  $G'$  all neighbours of  $u'$  belong to  $S''$ . If after removing set  $S$  we have  $k > |S|$  isolated vertices then the conditions of Hall theorem is not satisfied in graph  $G$  because we found a set of  $k$  vertices that has at most  $|S|$  neighbours (the last number is less then  $k$ ). The converse is also true (i.e. if the conditions of Hall theorem is not satisfied, then the property under discussion holds). Therefore this property is equivalent to the conditions of Hall theorem in graph  $G'$  that is equivalent to existence of perfect matching in  $G'$ .

### 3 Magic graphs

**3.1.** (1) All the semimagic graphs have this property.

(2) We will prove more general fact: if a semimagic graph has a semimagic set of weights such that two edges, say  $e_1$  and  $e_2$ , have distinct weights, then the edges  $e_1$  and  $e_2$  are separated by a 1-2-skeleton.

It can be done analogously to the solution of problem 2.4. Choose a minimal graph; fix a set of weights, where not all weights are equal; subtract by a suitable way the weights belonging to a skeleton; we will obtain smaller graph. Since the initial graph was minimal, one of edges  $e_1$ ,  $e_2$  must receive zero weight and should be removed. In the remaining graph the second edge due to statement of problem 2.4 belongs to some 1-2-skeleton, that sepapates these edges in the initial graph.

**3.2.** Let us enumerate all the 1-2-skeletons. Let the edges of cyclic part of  $k$ -th skeleton have weights  $3^k$ , and edges of linear parts have weight  $2 \cdot 3^k$ . For each edge sum up all its weights over all 1-2-skeletons. The set of weights obtained is semimagic due to uniqueness of ternary notation of numbers.

**3.3.** It follows from 3.2.

**3.4.** Answer: no, graph  $G$  is not necessarily magic. Two magic graphs are depicted on the fig. 8 For any set of magic weights the edges denoted by dashed lines must have weight  $s/2$ .

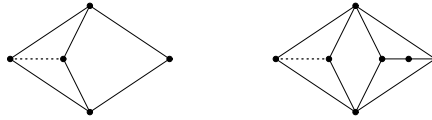


Figure 8: Union of magic graphs can be non-magic

**3.5.** a) The double  $G^2$  consists of two copies  $G_1$  and  $G_2$  of the graph  $G$  and of the set of edges  $E$  between the corresponding vertices. The corresponding edges in parts  $G_1$  and  $G_2$  are called *parallel*. The edges from the set  $E$  are called *vertical*. A subgraph of  $G^2$  consisting of two copies of some subgraph of  $G$  is called *duplicated*.

First of all describe a construction of *rotation of parallel edges* in  $G^2$ . Let subgraph  $H$  of graph  $G^2$  be the union of two subgraphs in parts  $G_1$  and  $G_2$  (without vertical edges) such that these subgraphs contain parallel edges  $A_1B_1$  and  $A_2B_2$ . Let us replace edges  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  in subgraph  $H$  by edges  $A_1A_2$  and  $B_1B_2$ . Denote the new subgraph by  $H'$ . We say that subgraph  $H'$  is obtained from  $H$  by the rotation of parallel edges. It is clear that both of  $H$  and  $H'$  are (or are not) 1-2-skeletons.

To prove that graph  $G^2$  is magic let us apply criterion from problems 3.1–3.2.

(1) Every edge belongs to 1-2-skeleton. It is clear for edges from  $G_1$  (and from  $G_2$ ): duplicate the 1-2-skeleton containing this edge in  $G_1$ . For vertical edges choose suitable rotation of edges of appropriate duplicated 1-2-skeleton.

(2) Every two edges are separated by 1-2-skeleton.

- If both of edges  $e_1$  and  $e_2$  belong to  $G_1$  consider a duplicated 1-2-skeleton containing  $e_1$ . If it does not separate  $e_1$  and  $e_2$ , then both edges belong to the skeleton. By rotating edge  $e_2$  and its parallel copy we obtain a separating skeleton.
- If  $e_1$  belongs to  $G_1$ , and  $e_2$  belongs to  $G_2$ , consider the union of 1-2-skeleton in  $G_1$  containing  $e_1$  (it exists due to the statement of problem 2.4), and 1-2-skeleton in  $G_2$  that does not contain  $e_2$  (it exists by the condition of the problem).
- If  $e_1$  belongs to  $G_1$  and  $e_2$  is vertical consider a duplicated skeleton containing  $e_1$ .
- Finally, if both of edges  $A_1A_2$  and  $B_1B_2$  are vertical choose in  $G_1$  an edge  $A_1X_1$  (where  $X_1 \neq B_1$ ) or  $B_1Y_1$  (where  $Y_1 \neq A_1$ ), this edge exists since  $G$  has no isolated edges. Consider a duplicated skeleton containing this edge and rotate this edge together with parallel edge.

b) Analogously to a).

**3.6.** We take the statement of the problem from [5]. The following solution was found by participants of the conference.

1. Check that if graph  $G'$  is magic then graph  $G$  has 1-2-skeleton and has no isolated vertices and edges. Isolated vertex in  $G$  corresponds to a pendant vertex in  $G'$ . Isolated edge in  $G$  corresponds to two adjacent vertices of degree 2. Both constructions are impossible in a magic graph.

Assume that  $G$  does not contain 1-2-skeleton.

Denote by  $S$  the new vertex of graph  $G'$ . Fix an arbitrary 1-2-skeleton in graph  $G'$ , w.l.o.g. we may assume that all its cycles are odd. Consider the component of the skeleton that contains vertex  $S$ . If this component is an odd cycle, remove vertex  $S$  and split other vertices of the cycle on pairs. Together with other components of the skeleton they form a skeleton of graph  $G$ . Therefore we may assume that this component is an isolated edge  $SA_1$ . Now we will construct two sets of vertices  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$  and  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  such that the edges  $A_i B_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) belong to skeleton  $K$  and all the vertices adjacent to vertices of the set  $\mathcal{A}$  belong to  $\mathcal{B}$ .

Let  $\mathcal{A} = \{A_1\}$ ,  $B_1 = S$ . Assume that the sets  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$  and  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$  have constructed already and there is an edge that joins some vertex of the set  $\mathcal{A}$  with some vertex outside  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , say  $A_k B_{k+1}$ . Vertex  $B_{k+1}$  belongs to some component of the skeleton  $K$ . If this component is an odd cycle we can easily reconstruct the skeleton  $K$  to obtain a 1-2-skeleton of graph  $G$ .

To do this consider the shortest path in  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  from  $B_1$  to  $B_{k+1}$  such that the vertices of  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  alternate. The path has even length, choose all its even edges (the last of them has endpoint  $B_{k+1}$ ) and split onto pairs all other vertices of the odd cycle.

Therefore we may assume that vertex  $B_{k+1}$  belongs to the isolated edge  $B_{k+1} A_{k+1}$  of skeleton  $K$ . Then place vertex  $B_{k+1}$  to the set  $\mathcal{B}$  and vertex  $A_{k+1}$  to the set  $\mathcal{A}$ .

We will increase sets  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  by this algorithm until it is possible. As a result we obtain that the set  $\mathcal{A}$  is joined by edges with  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  only. Assume there exists an edge  $A_i A_j$  consider the shortest path between these two vertices such that the vertices of  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  alternate in it (the existence of this path can be easily seen from the process of construction of sets  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$ ). This path together with edge  $A_i A_j$  form an odd cycle. Then the skeleton  $K$  can be reconstructed to the skeleton of graph  $G$  as described above.

So we have sets  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$ . Since these sets have equal number of elements, the sums of weights of their vertices are equal. But the sum of weights of  $\mathcal{A}$  equals the sum of weights of all edges  $A_i B_j$  while the sum of weights of  $\mathcal{B}$  equals the sum of weights of all edges  $A_i B_j$  and edges of the form  $B_1 B_i$  (remind that  $B_1 = S$  is adjacent to all other vertices of graph  $G$ ). We obtain a contradiction.

2. The proof of the converse statement — if graph  $G$  has 1-2-skeleton and does not contain isolated edges, then  $G'$  satisfies conditions of the problem 3.1 (and therefore it is magic) — is not difficult technical exercise. The skeletons that we need for edge separating can be constructed by a suitable transformation of skeleton in  $G$ .

**3.7.** a) Prove that an arbitrary two edges  $e$  and  $f$  can be separated by some 1-2-skeleton. Remove the endpoints of edge  $e$  (and all their edges) from the graph  $G$ . The remaining part of the graph has  $n - 2$  vertices of degree at least  $\frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$ . Then it is known that there is a Hamiltonian cycle in this graph (the cycle that passes through all the vertices of the graph). This cycle together with edge  $f$  forms 1-2-skeleton that separates edges  $e$  and  $f$ .

b) Consider the graph  $G$  with  $n = 2k$  vertices  $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k$  such that its set of edges consists of all edges  $X_i Y_j$  and edge  $Y_1 Y_2$ . The degree of each vertex  $X_i$  is at least  $k = \frac{n}{2}$ . Let us prove that  $G$  is non semimagic.

Consider an arbitrary 1-2-skeleton of  $G$ . In this skeleton each vertex  $X_i$  has one or two adjacent vertices among the vertices  $Y_i$ . Since we have equal number of vertices of both types, the 1-2-skeleton must be perfect matching. Therefore edge  $Y_1 Y_2$  does not belong to any 1-2-skeleton. Hence graph  $G$  is non-magic.

**3.8.** A magic graph has no vertex of degree 1 and any two vertices of degree 2 are not adjacent in it. Let  $V$  be the set of vertices of degree 2 (possibly,  $V = \emptyset$ ),  $W$  be the set of vertices of degree at least 3. Let  $s$  be the sum of weights in each vertex. The sum of weights of edges that have an endpoint in  $V$  equals  $s|V|$ . The second endpoints of these edges belong to  $W$ , therefore this sum does not exceed  $s|W|$ . So,  $|V| \leq |W|$ . The sum of degrees of all the vertices is at least  $2|V| + 3|W|$  hence the number of edges is not less than  $|V| + \frac{3}{2}|W|$ . But  $|V| + \frac{3}{2}|W| \geq \frac{5}{4}(|V| + |W|) = \frac{5}{4}n$ , because  $|W| \geq |V|$ .

The equality would be possible if there are no edges with both endpoints in  $W$ , i.e. in a bipartite graph. But in this case  $s|V| = s|W|$ , so  $|V| = |W|$ . Then the number of edges between  $V$  and  $W$  equals  $2|V|$  (from the point of view of the set  $V$ ) and in the same time it is at least  $3|W|$ . Hence  $|V| \geq \frac{3}{2}|W|$  that is impossible. The inequality  $r > \frac{5}{4}n$  is proven.

**3.9.** See fig.9.

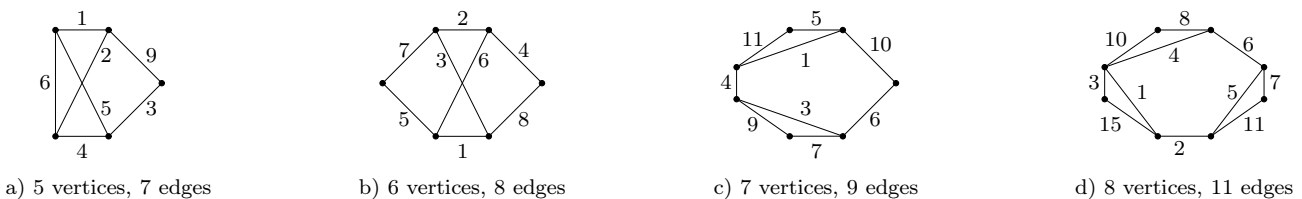
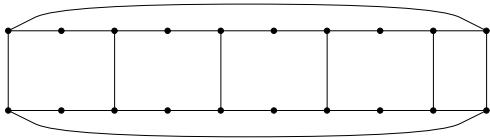
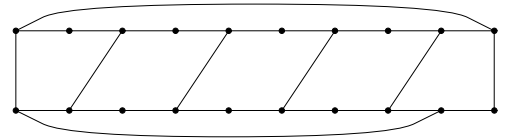


Figure 9: Minimal magic graphs

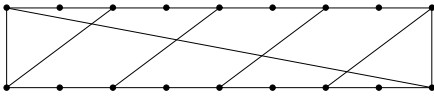
**3.10.** Magic graphs with minimal number of edges are depicted on fig. 10 a, b, c, e, f). For  $n = 4k$  we have bipartite and non bipartite examples, for  $n = 4k + 2$  we have bipartite example only, in other cases the graphs are non bipartite.



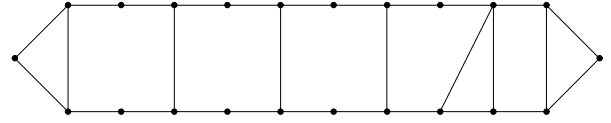
a)  $n = 4k, r = 5k + 1$ , bipartite graph



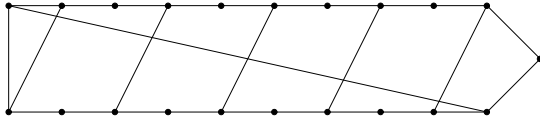
b)  $n = 4k, r = 5k + 1$ , non bipartite graph



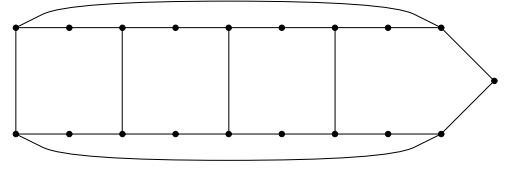
c)  $n = 4k + 2, r = 5k + 3$ , bipartite graph



d)  $n = 4k + 2, r = 5k + 4$ , non bipartite graph



e)  $n = 4k + 1, r = 5k + 2$ , non bipartite graph



f)  $n = 4k + 3, r = 5k + 4$ , non bipartite graph

Figure 10: Magic graphs with minimal number of vertices

The proof that the depicted graphs are magic consists of the routine verification that criterion from problems 3.2 holds. Instead of this this verification we show magic sets of weights for “typical case”. Of course, this is not the proof but it follows that in concrete cases we really have magic graphs whose edges are separated in the spirit of the criterion. In general case the graphs will be magic too because the separation of its edges takes place “by the same reasons” as in this concrete examples. We restrict ourselves with case  $n = 4k + 3, r = 5k + 4, k = 2$ ; see fig. 11.

**3.11.** This solution is a variation of [3]. Observe that if we add an arbitrary edge to non bipartite, connected (and non complete) magic graph then it remains be magic.

Indeed, the new edge  $e$  belongs to some cycle. If this cycle is even, assign the weight  $\varepsilon$  to this edge and the weight  $\pm\varepsilon$  alternatively to all other edges of the cycle. Choose the value of  $\varepsilon$  so that all the weights remain positive and distinct. We obtain a magic set of weights.

If the cycle is odd choose another cycle that does not contain  $e$  (it exists because the graph is non bipartite). Then  $e$  belongs to some dum-bell (see lemma from solution 4.1) Once again, we can assign the weight  $\varepsilon$  to edge  $e$  and weights  $\pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon$  to other edges of dum-bell and obtain a magic set of weights.

Thus, to complete the solution it is sufficient for each  $n \geq 5$  to construct “minimal” non-bipartite graph. It was done in the solution of the previous problem for  $n \neq 4k + 2$  (see fig. 10 b, e, f). We found these examples in [3]. Unfortunately, the construction of minimal non-bipartite graph for  $n = 4k + 2$  in this article is wrong. In addition, the graph on fig. 10 b) is not magic for  $n = 8$  (it is impossible to separate by 1-2-skeletons the slanted and the lowest edges). Magic non bipartite graph for  $n = 8$  is depicted on fig. 9 d), it was invented by A. Tsybyshev. We do not know whether non bipartite magic graph with  $4k + 2$  vertices and  $5k + 3$  edges ( $k > 3$ ) exists, so for the case of  $5k + 3$  edges we leave bipartite example, and begin our construction from non bipartite graph with  $5k + 4$  edges. This non bipartite graph with  $4k + 2$  vertices and  $5k + 4$  edges is depicted on fig. 10 d). Magic weights on this graph for  $k = 3$  see on fig. 12.

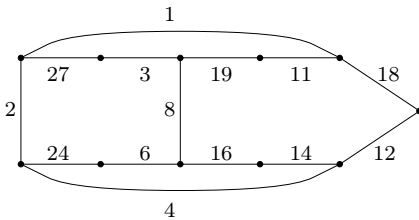


Figure 11:  $n = 4k + 3, r = 5k + 4, k = 2$

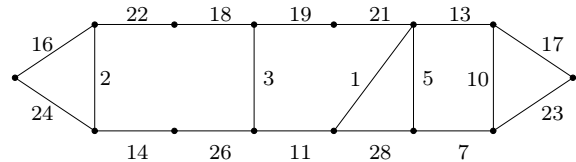


Figure 12:  $n = 4k + 2, r = 5k + 4, k = 3$

## 4 Regular graphs

### 4.1. Solution 1.

**Lemma.** If a connected graph contains two odd cycles, and an edge  $e$  belongs to only one of them, than there exists an even cycle or a dum-bell that contains edge  $e$ .

*Proof.* The statement is trivial if cycles do not intersect or intersect by one vertex.

Assume that intersection of the cycles contains at least two vertices. Let  $X$  and  $Y$  be the endpoints of edge  $e$ . Remove edge  $e$  from the first cycle, the remaining part of this cycle we will call the path  $XY$ . Let  $A$  and  $B$  be the first and the last vertex in the path  $XY$  that belong to the second cycle. Then the parts  $XA$  and  $BY$  of the path  $XY$  do not intersect the second cycle. Vertices  $A$  and  $B$  split the second cycle onto two paths whose number of vertices have different parity. Adding one of them to paths  $XA$  and  $BY$  we can obtain an odd path  $XABY$ . Together with edge  $XY$  it forms an even cycle.

Let us return to the statement of the problem. W.l.o.g. we may assume that the graph is connected. Remove an arbitrary edge  $e = AB$  from the graph. Assume that graph  $G \setminus e$  falls to two components of connectivity. Since the degrees of all vertices were greater than 1 these components contain more than one vertex. Either of components can not be a bipartite graph. This is because in the bipartite graph the sums of degrees of all vertices in parts are equal, but in our components one of sums is divisible by  $d$  and another (which contains vertex  $A$  or  $B$ ) is not divisible by  $d$ . Therefore each component contains an odd cycle. Hence edge  $e$  belongs to some dum-bell.

Now assume that the graph  $G \setminus e$  is connected. Consider an arbitrary path from  $A$  to  $B$ . If this path has odd number of edges then  $e$  is contained in an even cycle. Assume that this path is even (then  $e$  is contained in odd cycle). If graph  $G \setminus e$  is bipartite then both vertices  $A$  and  $B$  are in the same part. But this is impossible because the sums of degrees in the parts are not equal: first sum is equivalent  $-2 \pmod{d}$  and the second sum is divisible by  $d$ . Hence graph  $G \setminus e$  is non bipartite and there exists an odd cycle that does not contain  $e$ . It remains to use lemma.

**Solution 2** (by A. Tsybyshev). Assign weights  $1/d$  to all edges of our regular graph. Then sum of weights in each vertex is equal to 1. Now start the process of destroying even cycles and dum-bells by changing weights and removing zero-weight edges that is described in the solution 2.3. As a result of this process we obtain a 1-2-skeleton with magic set of weights. Since we do not change the sum of weights in each vertex the sum of weights in each vertex is still equal to 1. Therefore the weights of edges are 1 and  $1/2$ . Since  $d \neq 1, 1/2, 0$  we change the weight of every edge at least once. Hence each edge belongs to some pseudocycle.

**4.2.** The placement of numbers  $\pm 1$  on even cycles and  $\pm 1, \pm 2$  on dum-bells that was described in section 4 (problems) we will call *standard* weights on pseudocycle.

**Lemma.** Let every edge of the graph has non zero (not necessarily positive) weight and sum of weights in each vertex is equal to 0. Then every edge is contained in even cycle or dum-bell.

The proof is analogous to the solution of the problem 4.1.

1. Assume that the regular graph  $G$  is magic and sum of weights in each vertex is equal to  $s$ . Subtract the number  $s/d$  from every weight. We obtain a placement of pairwise distinct numbers on edges of the graph with zero sum in each vertex.

Choose in the graph  $G$  an arbitrary edge of non zero weight and a pseudocycle that contains this edge (it exists due to lemma). Subtract from the weights of this pseudocycle the standard weights of the pseudocycle multiplied by the appropriate coefficient in order to make the weight of chosen edge to be zero. Then remove all zero-weight edges. We obtain a placement with zero sum in each vertex. Then repeat this operation and so on.

In each step we decrease the number of edges therefore sooner or later all edges become zero-weight. It means that the initial placement of numbers is a "sum" with appropriate coefficient of standard placements for pseudocycles. Since any two edges have distinct weights in the initial placement, there exists a pseudocycle such that its standard weights for this edges are distinct. By definition this pseudocycle weakly separates these edges.

2. Assume that every two edges are weakly separated by pseudocycles. Let us enumerate all pseudocycles. For  $k$ -th pseudocycle assign weights of its edges to be the standard placement multiplied by  $5^k$ . For each edge sum up its weights over all pseudocycles and after that add a large positive constant in order to make all weights positive. The obtained set of weights is magic.

**4.3.** It follows from the previous problem.

**4.4. 1.** Let us check first that  $\ell(G) \neq 1$ . If  $\ell(G) = 1$  then we can remove an edge  $e$  and obtain the graph with two components of connectivity. Each component itself is a magic graph, one of its vertices has degree  $d - 1$  and all others have degree  $d$ . This is impossible (see solution 4.1).

2. Prove that if  $\ell(G) \geq 3$ , then graph  $G$  is magic. Choose any two edges  $e$  and  $f$  and check that they are weakly separated by pseudocycles. After removing these edges the graph remains connected. Therefore there exists a cycle that contains  $e$  and does not contains  $f$ . Since the graph is bipartite this cycle is even and it separates edges  $e$  and  $f$ .

3. Prove that for  $\ell(G) = 2$  graph  $G$  is non magic. If after removing edges  $e$  and  $f$  from graph  $G$  we obtain a disconnected graph then it has two components, say  $V$  and  $W$ , each of them is a bipartite graph. If the edges  $e$  and  $f$  have common endpoint then one of components has unique vertex of degree  $d - 2$  and other vertices of degree  $d$ . Such graph can not be bipartite. Therefore  $e = AB$  and  $f = CD$  have no common vertices, one component contains vertices  $A$  and  $C$ , another component contains vertices  $B$  and  $D$  of degree  $d - 1$ . Hence  $B$  and  $D$  are in different parts of the component and all the paths that join these points have odd number of edges.

Now prove that edges  $e$  and  $f$  are not weakly separated by a pseudocycle. Since  $G$  is bipartite there are no even cycles (and dum-bells) in it. And all even cycles that contain both  $e$  and  $f$  do not separate these edges due to previous paragraph.

## References

- [1] Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. М.: Мир, 1998.

- [2] *Doob M.* Characterizations of regular magic graphs // J. Combin. Theory, ser. B. Vol. 25. 1978. P. 94–104.
- [3] *Trenkler M.* Number of vertices and edges of magic graphs // Ars Combinatoria. 2000. Vol. 55. P. 93–96.
- [4] *Trenkler M.* Some results on magic graphs // Proceedings of the third Czechoslovak symposium on graph theory. Teubner-texte zur Mathematik. Bd. 59. Leipzig: Taubner Verlagsgesellschaft, 1983. P. 328–332. arXiv:0906.1317v1.
- [5] *Semaničová A.* Magic graphs having saturated vertex // Tatra Mt. Math. Publ. 2007. Vol. 36. P. 121–128.

