

# Инварианты многоугольников

Проект предложен М. Прасоловым, М. Скопенковым и Б. Френкиным

## АНОНС

### I. РАЗРЕЗАНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.

**Определение.** Два подобных треугольника на плоскости называются *противоположно ориентированными*, если у одного из них углы  $\alpha, \beta, \gamma$  расположены в указанном порядке по часовой стрелке, а у другого — против часовой стрелки (рисунок 1, углы  $\alpha, \beta, \gamma$  предполагаются различными).

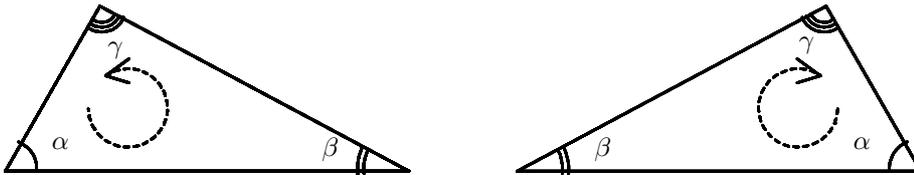


Рисунок 1.

---

**Задача А.** Торт имеет форму треугольника. Коробка для торта имеет форму треугольника, равного данному, но противоположно ориентированного. Всегда ли торт разрезается на две части, которые можно, не переворачивая, уложить в данную коробку?

**Задача В.** Всякий ли треугольник можно разрезать на подобные ему, но ориентированные противоположно треугольники?

---

Обозначим углы треугольников в этих задачах через  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Эти задачи интересны прежде всего конкретными примерами разрезов. Например, при  $\alpha = 90^\circ, \alpha = 2\beta$  или  $\alpha = 3\beta$  торт в Задаче А можно разрезать. (Разрежьте!). Назовем числа  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  *соизмеримыми*, если  $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$  при некоторых целых  $k, l$  и  $m$ , не все из которых равны 0. Основная цель первой части проекта — доказать следующее утверждение:

**Утверждение I.** Если  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  несоизмеримы, то торт в Задаче А и треугольник в Задаче В нельзя разрезать.

### II. РАЗРЕЗАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

---

**Задача С. (3-я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА)** Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на конечное число многогранников, из которых складывается куб.

**Задача D.** Комната имеет форму прямоугольника с отношением сторон  $x$ . Пол в комнате выложен прямоугольными плитками с таким же отношением сторон, причем хотя бы одна плитка ориентирована поперек комнаты, а не вдоль нее (рисунок 2). Докажите, что  $x$  является корнем многочлена с целыми коэффициентами.

---

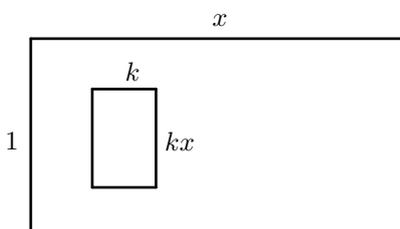


Рисунок 2.

Удивительно, что решить 3-ю проблему Гильберта можно, изучая только разрезания прямоугольников, а не многогранников! В задачах после промежуточного финиша будет предложен новый вариант элементарного решения 3-й проблемы Гильберта, основанный на этой идее.

Что касается Задачи D, то, оказывается, ее можно решить с помощью... физической интерпретации! А именно, каждому разрезанию прямоугольника мы сопоставляем электрическую схему, составленную из сопротивлений.

Все рассматриваемые задачи объединяет общий подход к их решению, основанный на использовании *инвариантов многоугольников*.

# I. РАЗРЕЗАНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.

## Конструкции.

1. Разрежьте нужным образом на 2 части торты указанной формы (рисунок 3):  
 (a)  $\alpha = 90^\circ$ ; (b)  $\alpha = 3\beta$ ; (c)  $\alpha = 2\beta < 90^\circ$ ; (d)  $\alpha = 2\beta > 90^\circ$ ; (e)\*  $\alpha = 30^\circ, \beta = 20^\circ, \gamma = 130^\circ$ ;  
 (f)\*  $\alpha = \frac{n+1}{n}\beta, n - \text{целое}$ . (g) Разрежьте произвольный торт нужным образом на 3 части.

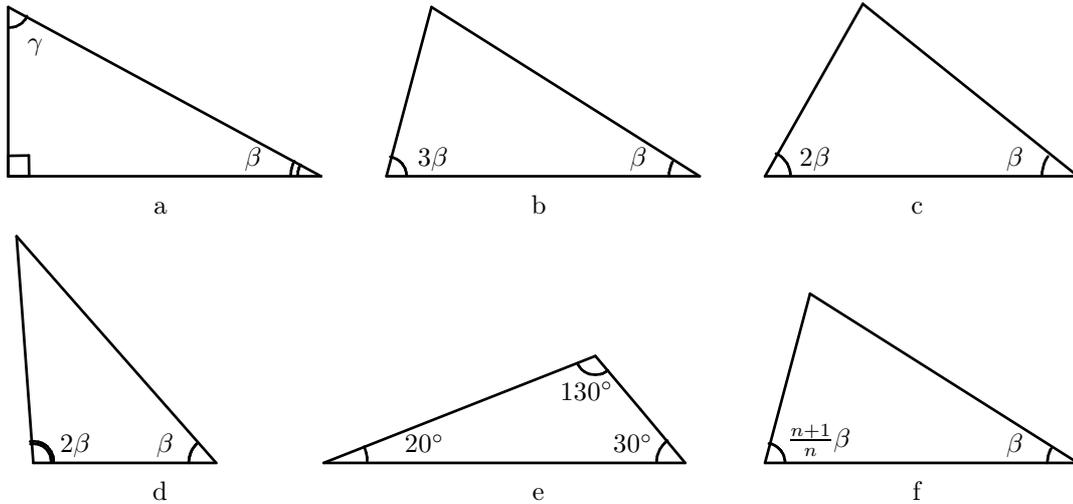


Рисунок 3.

2. Разрежьте треугольник с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  на  $n$  подобных ему:  
 (a)  $\alpha = 90^\circ, n = 2$ ; (b)  $\alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 120^\circ, n = 5$ ; (c)  $\alpha, \beta, \gamma$  произвольны,  $n \geq 4, n \neq 5$ .  
 3. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  различны и отличны от  $90^\circ$ . Тогда треугольник в задаче В нельзя разрезать на:  
 (a) 2 части; (b) 3 части; (c) 4 части.

## Инварианты.

Пусть  $M$  — произвольный многоугольник. На каждой его стороне отметим стрелкой такое направление, что, идя по этой стороне в указанном направлении, мы будем вблизи этой стороны *слева* видеть точки, принадлежащие рассматриваемому многоугольнику, а справа — точки, не принадлежащие ему (рисунок 4). Выберем, далее, некоторую *направленную прямую*  $l$ , то есть прямую, на которой стрелкой отмечено некоторое направление.

Обозначим через  $J_l(M)$  алгебраическую сумму длин всех сторон многоугольника  $M$ , параллельных прямой  $l$ , причем те стороны, которые *одинаково* направлены с прямой  $l$  (стороны  $AB, DE$  и  $FG$  на рисунке 5), возьмем со знаком  $+$ , а те стороны, которые имеют противоположное направление (сторона  $KL$  на рисунке 5), возьмем со знаком  $-$ . Если же сторон, параллельных прямой  $l$ , у многоугольника  $M$  не оказалось, то число  $J_l(M)$  считается равным нулю. Число  $J_l(M)$  будем называть *аддитивным инвариантом*.

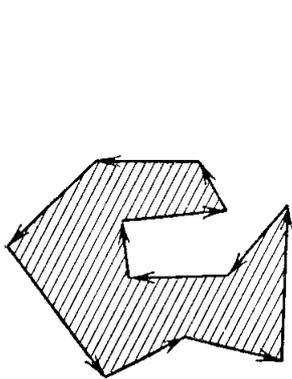


Рисунок 4.

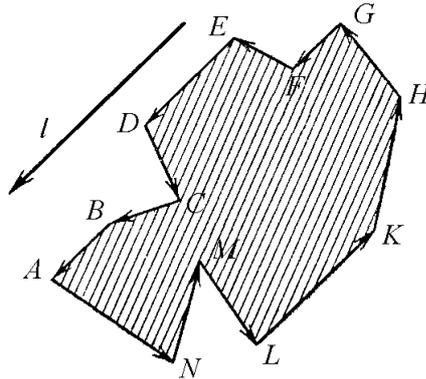


Рисунок 5.

4. (a) Опишите все выпуклые многоугольники  $M$ , такие что  $J_l(M) = 0$  для любой направленной прямой  $l$ .  
 (b) Многоугольник  $M$  разрезан на несколько многоугольников  $M_1, \dots, M_k$ . Тогда  $J_l(M) = J_l(M_1) + \dots + J_l(M_k)$ .  
 (c) Многоугольник  $M$  разрезали на несколько многоугольников и сложили из них новый многоугольник  $M'$ , используя только параллельные переносы частей. Тогда  $J_l(M) = J_l(M')$ .  
 (d) Выпуклый многоугольник  $M$  разрезали на несколько многоугольников и сложили из них квадрат, используя только параллельные переносы частей. Тогда  $M$  центрально-симметричен.

Пусть  $\phi$  — некоторый угол. Обозначим через  $J_{l,\phi}(M)$  сумму величин  $J_{l'}(M)$  по всем различным прямым  $l'$ , которые получаются из направленной прямой  $l$  поворотом на углы, кратные углу  $\phi$  (кратность понимается с точностью до  $2\pi$ ). Выражение  $J_{l,\phi}(M)$  имеет смысл, поскольку в этой сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

- 5. (a)** Многоугольник  $M$  разрезали на несколько многоугольников и сложили из них многоугольник  $M'$ , повернув каждую часть на некоторый угол, кратный углу  $\phi$ . Тогда  $J_{l,\phi}(M) = J_{l,\phi}(M')$ .
- (b)** Для заданных  $l$  и  $\phi$  опишите все треугольники  $M$ , такие что  $J_{l,\phi}(M) = 0$ .
- (c)** Пусть угол  $\phi$  не соизмерим с  $\pi$ . Пусть  $M$  и  $M'$  — два неравносторонних равных треугольника, таких что для любой направленной прямой  $l$  выполнено равенство  $J_{l,\phi}(M) = J_{l,\phi}(M')$ . Тогда стороны этих треугольников можно занумеровать таким образом, чтобы углы между сторонами с одинаковыми номерами были кратны  $\phi$ .
- (d)** Пусть торт в Задаче А разрезали на две части, которые уложили в коробку, повернув одну из них на угол  $\phi$ , а вторую — на угол  $\psi$ . Предположим, что угол  $\phi - \psi$  несоизмерим с  $\pi$ . Докажите, что углы  $2(\alpha - \beta)$ ,  $2(\beta - \gamma)$  и  $2(\gamma - \alpha)$  кратны углу  $\phi - \psi$ .
- (e)\*** Докажите Утверждение I для Задачи А.

Пусть каждой направленной прямой  $XY$  на плоскости поставлено в соответствие число  $f(XY)$ , причем это число меняет знак при смене направления прямой:  $f(XY) = -f(YX)$ . Пусть  $M = X_1X_2\dots X_n$  — произвольный многоугольник, вершины которого занумерованы против часовой стрелки. Обозначим

$$J_f(M) = f(X_1X_2)|X_1X_2| + f(X_2X_3)|X_2X_3| + \dots + f(X_nX_1)|X_nX_1|,$$

где  $|X_1X_2|, |X_2X_3|, \dots, |X_nX_1|$  — длины сторон многоугольника, а  $X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_nX_1$  — соответствующие направленные прямые.

- 6. (a)** Многоугольник  $M$  разрезан на несколько многоугольников  $M_1, \dots, M_n$ . Тогда  $J_f(M) = J_f(M_1) + \dots + J_f(M_n)$ .
- (b)** Пусть треугольник  $ABC$  разрезан на треугольники  $A_iB_iC_i$ , подобные ему и ориентированные противоположно. Докажите, что для любого  $i$  угол между направленными прямыми  $A_iB_i$  и  $AB$  можно представить в виде  $k\alpha + l\beta + m\gamma$ , где числа  $k, l, m$  — целые.
- (c)** Пусть углы треугольника  $ABC$  несоизмеримы. Постройте такую функцию  $f(XY)$ , чтобы  $J_f(ABC) \neq 0$ , но  $J_f(A_iB_iC_i) = 0$  для любого треугольника  $A_iB_iC_i$ , подобного  $ABC$ , но ориентированного противоположно.
- (d)** Докажите Утверждение I для Задачи В.
- (e)\*** Существует ли непрямоугольный, неравносторонний треугольник, который можно разрезать на подобные ему, но ориентированные противоположно треугольники?
- 7.** Можно ли круг разрезать на конечное число частей по отрезкам прямых и дугам окружностей и составить из них квадрат?

## II. РАЗРЕЗАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

### Конструкции.

8. Разрежьте куб на 6 равных тетраэдров.

9. Выложите плитками комнаты с указанным отношением сторон, как это требуется в Задаче D:

- (а)  $x = \sqrt{2}$ ; (б)  $x = \sqrt{p/q}$ ,  $p$  и  $q$  — целые; (с)  $x = \sqrt[4]{2}$ ; (д)\*  $x = \sqrt{r}$ , где  $r$  — периодическая цепная дробь; (е)\*  $x = \sqrt{s}$ , где  $s$  — корень кубического многочлена с целыми коэффициентами без рациональных корней; (Требуется построить замощение для какого-нибудь одного значения  $s$ , удовлетворяющего условию.) (ф) выложите произвольную комнату  $n$  плитками, ориентированными вдоль комнаты, при  $n \geq 4$ ,  $n \neq 5$ .

### 3-я проблема Гильберта: сведение к планиметрической задаче.

Пусть  $M$  — многогранник. Пусть  $l_1, l_2, \dots, l_n$  — длины его ребер,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — двугранные углы при соответствующих ребрах. Сопоставим многограннику  $M$  набор прямоугольников  $l_i \times \alpha_i$  на плоскости, у которых стороны  $l_i$  горизонтальны, а стороны  $\alpha_i$  вертикальны (рисунок 6).

Назовем два таких набора *прямоугольно равносоставленными* ( $\square$ -*равносоставленными*), если прямоугольники одного набора можно разрезать на несколько меньших прямоугольников, из которых можно сложить второй набор, используя только параллельные переносы частей (рисунок 7). Назовем два многогранника *равносоставленными*, если один из них разрезается на несколько меньших многогранников, из которых можно сложить второй многогранник, как угодно поворачивая части.

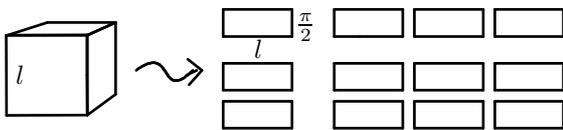


Рисунок 6.

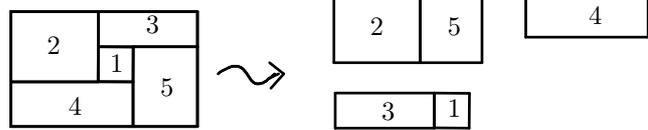


Рисунок 7.

**Лемма I.** Если два многогранника равносоставлены, то соответствующие им наборы прямоугольников будут  $\square$ -равносоставлены после добавления к ним подходящих прямоугольников вида  $l \times \pi$ .

Доказательство этой леммы содержится в задаче 10.

Предположим, что выпуклый многогранник  $M$  разрезан на многогранники  $M_1, M_2, \dots, M_k$ .

10. (а) Пусть  $e$  — ребро многогранника  $M$ ,  $l$  — его длина, а  $\alpha$  — двугранный угол при этом ребре. Обозначим через  $l_1, l_2, \dots, l_n$  длины всех ребер многогранников  $M_i$ , лежащих на ребре  $e$ , а через  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — двугранные углы при соответствующих ребрах. Тогда прямоугольник  $l \times \alpha$  можно разрезать на  $n$  прямоугольников  $l_1 \times \alpha_1, \dots, l_n \times \alpha_n$ .  
 (б) Пусть  $\ell$  — прямая в пространстве, не содержащая ребер многогранника  $M$ . Пусть  $l_1, l_2, \dots, l_n$  — длины всех ребер многогранников  $M_i$ , лежащих на прямой  $\ell$ , а  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — двугранные углы при соответствующих ребрах. Тогда набор  $n$  прямоугольников  $l_1 \times \alpha_1, \dots, l_n \times \alpha_n$   $\square$ -равносоставлен некоторому прямоугольнику вида  $l \times \pi$ .  
 (с) Докажите Лемму I.  
 (д) Докажите, что двугранный угол  $\theta$  при ребре правильного тетраэдра несоизмерим с  $\pi$ .

### 3-я проблема Гильберта: решение планиметрической задачи.

**Лемма II.** Если  $\theta$  и  $\pi$  несоизмеримы, то при любых  $a$  и  $b$  прямоугольники  $a \times \theta$  и  $b \times \pi$  не  $\square$ -равносоставлены. Более того, они остаются не  $\square$ -равносоставленными после добавления к ним любых прямоугольников вида  $l \times \pi$ .

Доказательство этой леммы содержится в задаче 11.

Пусть дан некоторый набор прямоугольников. Можно получить новый набор, разрезав один из данных прямоугольников на два новых. Такую операцию назовем *элементарным преобразованием* набора.

11. (а) Если два набора прямоугольников  $\square$ -равносоставлены, то один из них можно получить из другого последовательностью элементарных преобразований и обратных к ним.

Пусть  $\theta$  и  $\pi$  несоизмеримы. Предположим, что из прямоугольника  $a \times \theta$  получили прямоугольник  $b \times \pi$  последовательностью элементарных преобразований и обратных к ним. Пусть  $\theta, \pi, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$  — длины вертикальных сторон всех прямоугольников, которые возникали в данной последовательности элементарных преобразований. Обозначим  $Y = \{\theta, \pi, y_1, \dots, y_N\}$ .

(б) Можно выбрать такие числа  $y'_1, y'_2, \dots, y'_n \in Y$ , чтобы любое число  $y \in Y$  единственным образом представлялось в виде  $y = p\theta + q\pi + p_1y'_1 + p_2y'_2 + \dots + p_ny'_n$ , где числа  $p, q, p_1, p_2, \dots, p_n$  — рациональные.

Зафиксируем набор таких чисел  $y'_1, \dots, y'_n$ . Для числа  $y \in Y$  обозначим  $f(y) = p$ , где  $p$  — коэффициент при  $\theta$  в представлении  $y = p\theta + q\pi + p_1y'_1 + \dots + p_ny'_n$ . Если  $M$  — набор прямоугольников  $x_1 \times y_1, x_2 \times y_2, \dots, x_n \times y_n$ , где все  $y_i \in Y$ , то положим

$$J(M) = x_1 f(y_1) + x_2 f(y_2) + \dots + x_n f(y_n).$$

- (с) Величина  $J(M)$  не меняется при элементарном преобразовании набора  $M$ .  
 (д) Докажите Лемму II.  
 (е) Докажите теорему Дена: правильный тетраэдр и куб не равносоставлены.

12. (а) Докажите другую теорему Дена: если прямоугольник  $a \times b$  разрезан на квадраты, то  $\frac{a}{b}$  рационально.  
 (б) Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на несколько (больше 1) правильных тетраэдров.

### Разрезания прямоугольника и электрические схемы.

Разрезанию прямоугольника на прямоугольники можно сопоставить электрическую схему, как показано на рисунке 8. Каждому прямоугольнику соответствует резистор, а каждой вертикальной линии разреза (а также вертикальным сторонам исходного прямоугольника) — узел, в котором соединяются несколько резисторов. Сопротивление каждого резистора равно отношению горизонтальной стороны соответствующего прямоугольника к вертикальной. Можно показать, что общее сопротивление данной схемы равно отношению сторон разрезаемого прямоугольника.

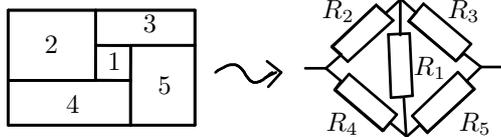


Рисунок 8.

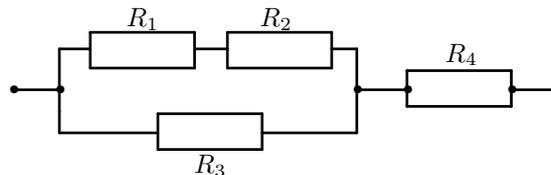


Рисунок 9.

Покажем, как искать общее сопротивление электрической схемы.

Рассмотрим электрическую схему из резисторов. Пусть для каждого резистора задано его *сопротивление*  $R_k$ . Зафиксируем начало и конец схемы, а также число  $U > 0$  (напряжение схемы). Каждому узлу сопоставим действительное число  $U_i$ , которое будем называть *напряжением* в данном узле, следующим образом. В начальном узле напряжение положим равным нулю, а в конечном — равным  $U$ . В остальных узлах выберем напряжения так, чтобы сумма величин  $\frac{(\Delta U_k)^2}{R_k}$  по всем резисторам была минимальна, где  $\Delta U_k$  — разность напряжений на концах  $k$ -ого резистора. Обозначим эту сумму через  $P$ , она называется *общим выделением тепла* схемы.

*Общим сопротивлением* схемы называется величина  $R = \frac{U^2}{P}$ .

Будем считать известным, что распределение напряжений с минимальным выделением тепла существует.

**Пример 1.** Рассмотрим схему из двух резисторов  $R_1$  и  $R_2$ , соединённых параллельно. По определению  $P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2}$  и общее сопротивление равно  $R = \frac{U^2}{P} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ .

**Пример 2.** Рассмотрим схему из двух резисторов  $R_1$  и  $R_2$ , соединённых последовательно. Пусть  $U_1$  — напряжение в их общем узле. Величина  $\frac{U_1^2}{R_1} + \frac{(U-U_1)^2}{R_2}$  должна быть минимальной. Это квадратный трёхчлен относительно  $U_1$ . Находя  $U_1 = \frac{U}{R_2(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})}$ , получим  $R = R_1 + R_2$ .

*Элементарным преобразованием* электрической схемы называется одна из следующих операций:

- 1) замена одного резистора с сопротивлением  $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$  на два параллельно соединенных резистора  $R_1$  и  $R_2$ ;
- 2) замена одного резистора с сопротивлением  $R_1 + R_2$  на два последовательно соединенных резистора  $R_1$  и  $R_2$ ;
- 3) объединение двух узлов с одинаковым напряжением.

**13.** Найдите общее сопротивление и соответствующее разбиение прямоугольника для схем

(а) на рисунке 8 при  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$ ; (б) на рисунке 9.

**14. (а)** Пусть квадрат разрезан на квадраты и прямоугольники, отношение горизонтальной стороны к вертикальной у которых равно  $R$ . Тогда соответствующая электрическая схема состоит из резисторов сопротивлением 1 и  $R$  и имеет общее сопротивление 1.

(б)\* Электрическая схема состоит из резисторов сопротивлением 1 и  $R$ . Докажите, что сопротивление всей схемы выражается в виде  $\frac{P(R)}{Q(R)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены с целыми коэффициентами.

(с) Пусть напряжения в двух узлах, соединенных с некоторым резистором, различны. Докажите, что общее сопротивление схемы растет с ростом  $R$ .

(d) Решите Задачу D.

### Замечание.

*Силой тока* на резисторе называется величина  $I_k = \frac{\Delta U_k}{R_k}$ , где  $\Delta U_k$  — разность напряжений между узлами, соединёнными с резистором. Покажем, что сумма сил тока на резисторах, выходящих из неконцевого узла, равна нулю. Зафиксируем некоторый неконцевой узел. Перенумеруем узлы так, чтобы этот узел был первым, а сопротивления резисторов, выходящих из этого узла, были  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Посмотрим, как зависит общее выделение тепла схемы от  $U_1$ . Общее выделение тепла равно  $\sum_{i=1}^n \frac{(U_i - U_1)^2}{R_i} + C$ , где  $C$  — константа, не зависящая от  $U_1$ . Минимум достигается

в вершине параболы, то есть при  $U_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{U_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$  или, что то же самое, при  $\sum_{i=1}^n \frac{U_i - U_1}{R_i} = 0$ .

Из наших определений следуют *законы Кирхгофа*:

- 1) сумма сил токов на резисторах, выходящих из одного узла, равна нулю;
- 2)  $I_1 R_1 + I_2 R_2 + \dots + I_n R_n = U$  для любого пути  $1, 2, \dots, n$  от начала к концу, где  $U$  — общее напряжение, не зависящее от пути.

Обратно, из законов Кирхгофа следует, что токи распределяются так, чтобы общее выделение тепла было минимальным.

**РЕШЕНИЯ: ЧАСТЬ I.**

- 1a.** Разрежем треугольник по медиане, проведенной из вершины прямого угла (Рисунок 10а).  
**1b.** Разрежем треугольник по прямой, которая делит угол  $\alpha$  в отношении  $2 : 1$  (Рисунок 10б).  
**1c.** Разрежем треугольник по прямой, которая отсекает от угла  $\gamma$  угол, равный  $\beta$  (Рисунок 10с).  
**1d.** Разрежем треугольник по прямой, которая симметрична стороне, противоположной углу  $\gamma$ , относительно биссектрисы этого угла (Рисунок 10д).  
**1e.** *Первый способ.* Возьмем 4-звенную ломанную  $ABCDE$  с равными звеньями и равными углами  $130^\circ$  между звеньями. Продолжим звенья  $AB$ ,  $BC$  и  $DE$ . Пусть  $BFG$  — треугольник, образованный данными прямыми. Тогда углы треугольника  $BFG$  равны  $30^\circ$ ,  $20^\circ$  и  $130^\circ$ . Тем самым построено искомое разрезание треугольника: треугольник  $BFG$  нужно разрезать по ломанной  $BCD$ .  
*Второй способ.* Пусть  $\delta = 10^\circ$ . Возьмем 5-звенную ломаную  $ABCDEF$  с равными звеньями и равными углами  $180^\circ - \delta$  между звеньями. Соединив ее концы  $A$  и  $F$ , получим симметричный шестиугольник с углами  $A = F = 2\delta$ . Построим треугольник  $AFG$  с углами  $GAF = 2\delta$  и  $GFA = 3\delta$  так, чтобы звено  $AB$  лежало на  $AG$ . Шестиугольник  $BCDEFG$  — тоже симметричный, поскольку углы  $B$  и  $F$  равны  $\delta$ . Тем самым искомое разрезание построено, поскольку углы треугольника  $AFG$  равны  $30^\circ$ ,  $20^\circ$  и  $130^\circ$  соответственно: треугольник  $AFG$  нужно разрезать по ломаной  $BCDEF$ .  
*Третий способ* (Рисунок 10е). Треугольник  $ABC$  разрезается по 3-звенной ломаной  $KLMN$ , где  $K \in BC$ ,  $N \in AB$ ,  $BK = KL = LM = MN = NA$ ,  $\angle BKL = \angle LMN = \pi - \alpha$ ,  $\angle KLM = \angle MNA = \pi - \beta$ .  
**1f.** Разрез строится аналогично второму или третьему способу решения задачи 1е.  
**1g.** Разрежем треугольник по трем перпендикулярам, опущенным из центра вписанной окружности на стороны треугольника.

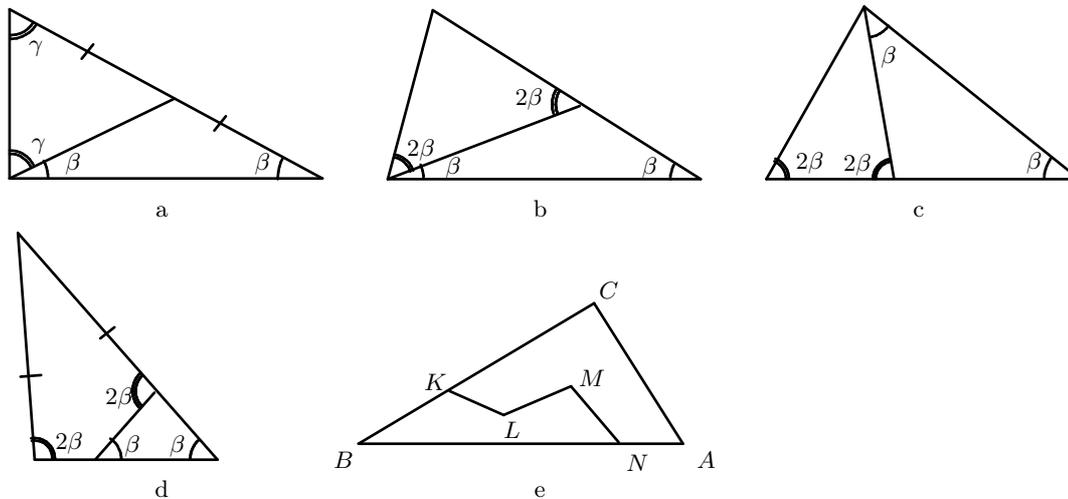


Рисунок 10.

- 2a.** Опустим высоту из вершины прямого угла.  
**2b.** Из вершины угла в  $120^\circ$  проведём разрезы под углом в  $30^\circ$  к сторонам. Затем разрежем полученный равносторонний треугольник, соединив его центр с вершинами.  
**2c.** Если  $n \geq 4$  чётно, разделим одну из сторон треугольника (обозначим её  $a$ ) на  $n/2$  равных частей. Через точки деления проведём всевозможные отрезки, параллельные другим сторонам треугольника, до первого пересечения между собой или со сторонами. Нетрудно видеть, что все полученные точки пересечения лежат на одной прямой, параллельной стороне  $a$ . Проведя эту прямую, получим искомое разрезание.  
 Если  $n \geq 7$  нечётно, разрежем треугольник вышеописанным способом на  $n - 3$  части, а затем один из полученных треугольников разрежем на 4 части тем же способом (т.е. проведя средние линии).  
*Замечание.* Естественный вопрос: а что будет для  $n = 5$ ? Оказывается, примеры в задачах 2a и 2b исчерпывают все треугольники, которые можно разрезать на 5 подобных исходному. Доказательство этого красивого факта будет опубликовано в одном из ближайших номеров журнала "Квант".  
**3a.** Разрез обязательно соединяет вершину треугольника с точкой на противоположной стороне. Если углы при этой точке различны, то их сумма меньше  $\pi$ , поскольку они равны двум углам исходного треугольника. Значит, углы равны, и тогда они прямые.  
 Попутно мы установили простой, но полезный факт, которым будем пользоваться в остальных пунктах данной задачи.  
*Факт 1.* Если к некоторому узлу разбиения примыкают только два малых треугольника, то в действительности исходный треугольник — прямоугольный. Если возникла ситуация из факта 1, будем говорить для краткости, что "получена прямоугольность".  
**3b.** Пусть треугольник разрезан на три подобных ему. Наименьший из его углов не может быть разрезан. У малого треугольника, который содержит этот угол, все вершины — на сторонах исходного. Либо одна, либо две из этих вершин совпадают с вершинами исходного треугольника. В первом случае остаётся выпуклый четырёхугольник, а во втором — треугольник. В обоих случаях убеждаемся несложным перебором, что при дальнейшем разрезании на два треугольника получаем прямоугольность.  
 Мы установили ещё один полезный факт.  
*Факт 2.* Пусть исходный треугольник имеет углы  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ . Тогда угол  $\alpha$  не может быть разрезан. Все вершины малого треугольника, который его накрывает, лежат на границе исходного треугольника. Этот малый треугольник мы будем называть  $\alpha$ -треугольником.  
**3c.** Упорядочим углы исходного треугольника:  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ , соответствующие вершины обозначим  $A, B, C$ . Пусть треугольник разрезан на четыре подобных ему, но ориентированных противоположно. Рассмотрим отрезок, который отсекает от него  $\alpha$ -треугольник.

Предположим вначале, что оставшаяся часть — четырехугольник. Тогда через концы данного отрезка должны проходить еще какие-то разрезы, иначе сразу получаем прямоугольность. Чтобы получилось ровно 4 малых треугольника, таких разрезов должно быть ровно два, причем они должны иметь общую точку на стороне, противоположной углу  $\alpha$ . Заметим теперь, что в полученной схеме разрезания углы всех малых треугольников определяются однозначно. Действительно, из условия противоположной ориентированности мы находим все углы трех треугольников, накрывающих углы исходного треугольника. После этого однозначно находятся углы "центрального" треугольника: они оказываются равны  $\pi - 2\alpha$ ,  $\pi - 2\beta$  и  $\pi - 2\gamma$ . Так как  $\pi - 2\alpha \geq \pi - 2\beta \geq \pi - 2\gamma$ , то  $\pi - 2\alpha = \gamma$ . Отсюда  $\beta = \pi - \alpha - \gamma = \alpha$ . Тем самым получаем, что исходный треугольник — равнобедренный, вопреки условию.

Пусть теперь оставшаяся часть — треугольник, и пусть  $D$  — вершина угла  $\gamma$  в  $\alpha$ -треугольнике. Если какой-либо угол треугольника  $BDC$  не разрезан, то очевидный перебор приводит к прямоугольности. Значит, все три вершины  $B, D, C$  соединены с некоторой точкой  $O$  внутри треугольника. Очевидно,  $\angle ABC > \angle OBC$  и потому  $\angle OBC = \alpha$ . Тогда в силу условия на ориентацию  $\angle OCB = \gamma = \angle ACB$  — противоречие.

**4а.** Многоугольник  $M$  должен быть центрально-симметричным. В самом деле, у выпуклого многоугольника может быть не более двух сторон, параллельных данному направлению  $l$ . Поэтому если  $J_l(M) = 0$  для любой направленной прямой  $l$ , то стороны многоугольника  $M$  разбиваются на пары равных и параллельных. Пусть многоугольник  $M = A_1A_2 \dots A_{2n}$ . Из выпуклости многоугольника  $M$  следует, что единственная возможность —  $A_1A_2 \parallel A_{n+1}A_{n+2}, A_2A_3 \parallel A_{n+2}A_{n+3}, \dots, A_nA_{n+1} \parallel A_{2n}A_1$ . Поэтому  $\overrightarrow{A_1A_k} = -\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+k}}$  для каждого  $k = 2, 3, \dots, n$ . Значит, середина отрезка  $A_1A_{n+1}$  — центр симметрии многоугольника  $M$ .

**4б.** Приведем доказательство из книги [1].

Рассмотрим все отрезки, являющиеся сторонами многоугольников  $M, M_1, M_2, \dots, M_k$ . Отметим на этих отрезках все точки, являющиеся вершинами многоугольников  $M, M_1, M_2, \dots, M_k$ . Тогда мы получим конечное число более мелких отрезков, которые будем называть звеньями. Каждая сторона каждого из многоугольников  $M, M_1, M_2, \dots, M_k$  состоит из одного или нескольких звеньев. На рис. 11 изображено разбиение многоугольника на более мелкие части. Сторона состоит из трех звеньев  $AM, MN, NB$ ; из трех звеньев состоит также сторона  $NP$  заштрихованного на чертеже многоугольника.

Заметим, что для вычисления инварианта  $J_l(M)$  многоугольника  $M$  (или любого из многоугольников  $M_1, M_2, \dots, M_k$ ) можно взять алгебраическую сумму не сторон, а звеньев, параллельных прямой  $l$ , так как длина каждой стороны равна сумме длин составляющих ее звеньев. Поэтому для вычисления суммы, стоящей в правой части соотношения задачи 4б, нужно составить алгебраическую сумму длин всех звеньев, параллельных прямой  $l$ , причем эти звенья нужно учитывать по всем многоугольникам  $M_1, M_2, \dots, M_k$ .

Рассмотрим некоторое звено, которое целиком (кроме, может быть, концов) расположено внутри многоугольника  $M$  (звено  $EF$  на рисунке 11). Тогда к нему примыкают два многоугольника из числа многоугольников  $M_1, M_2, \dots, M_k$ , причем они примыкают к рассматриваемому звену с разных сторон (один — справа, другой — слева). Поэтому при вычислении инварианта одного многоугольника рассматриваемое звено войдет с одним знаком, а при вычислении инварианта другого многоугольника — с противоположным знаком, и в общей алгебраической сумме звеньев эти два члена взаимно уничтожатся. Мы видим, что при вычислении правой части соотношения задачи 4б можно совсем не учитывать звеньев, расположенных внутри многоугольника  $M$ .

Рассмотрим теперь некоторое звено, расположенное на контуре многоугольника  $M$  и параллельное прямой  $l$  (звено  $AM$  на рисунке 11). К нему примыкает только один из многоугольников  $M_1, M_2, \dots, M_k$ , причем с той же стороны, с какой примыкает к рассматриваемому звену многоугольник  $M$ . Следовательно, это звено войдет в сумму  $J_l(M_1) + J_l(M_2) + \dots + J_l(M_k)$  с тем же знаком, что и в инвариант  $J_l(M)$ .

Итак, правая часть соотношения в задаче 4б равна  $J_l(M)$ , утверждение доказано.

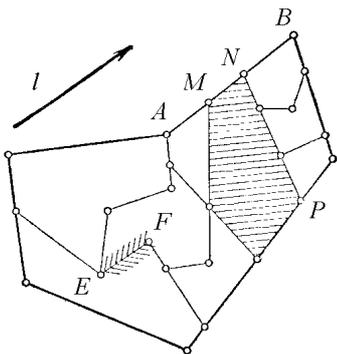


Рисунок 11.

**4с.** Пусть многоугольник  $M$  разрежали на многоугольники  $M_1, M_2, \dots, M_k$  и сложили из них многоугольник  $M'$ , используя только параллельные переносы частей. Заметим, что величины  $J_l(M_i)$  не меняются при параллельных переносах многоугольников  $M_i$ . Поэтому по задаче 4б

$$J_l(M) = J_l(M_1) + \dots + J_l(M_k) = J_l(M'),$$

что и требовалось.

**4д.** Для любого квадрата  $M'$  и любой направленной прямой  $l$  имеем  $J_l(M') = 0$ . Поэтому по задаче 4с  $J_l(M) = J_l(M') = 0$ . Тогда по задаче 4а многоугольник  $M$  центрально симметричен.

**5а.** Следует из 4б.

**5б.** Если угол  $n\pi$  кратен  $\phi$  при некотором нечетном  $n$ , то  $J_{l,\phi}(M) = 0$  автоматически. Предположим далее, что  $n\pi$  не кратен  $\phi$  ни при каком нечетном  $n$ . Ясно, что если ни один из углов между прямой  $l$  и сторонами треугольника  $M$  не кратен  $\phi$ , то  $J_{l,\phi}(M) = 0$ . Предположим теперь, что  $J_{l,\phi}(M) = 0$  и угол между некоторой стороной  $AB$  и прямой  $l$  кратен  $\phi$ . Тогда сторона  $AB$  вносит ненулевой вклад в  $J_{l,\phi}(M)$ . Поэтому ее вклад должен сократиться со вкладом остальных сторон. Значит, у треугольника должна быть еще одна сторона, скажем  $BC$ , образующая с  $l$  угол, кратный  $\phi$ . Все три стороны задействованы

быть не могут, поскольку  $AB \pm BC \pm CA \neq 0$  по неравенству треугольника. Значит, треугольник равнобедренный,  $AB = BC$ , и  $\angle B = n\phi$  для некоторого целого  $n$ . Наоборот, для любого такого треугольника  $J_{l,\phi}(M) = 0$ , при условии, что угол между  $AB$  и  $l$  кратен  $\phi$ , а угол между  $AC$  и  $l$  не кратен  $\phi$ . Мы перечислили все возможности.

**5с.** Рассмотрим направленную прямую  $l$ , содержащую некоторую сторону  $s$ . Тогда  $J_{l,\phi}(M) \neq 0$  по задаче 5б. Значит, и  $J_{l,\phi}(M') \neq 0$ . Отсюда следует, что найдется сторона  $s'$  треугольника  $M'$ , такая что угол между  $s$  и  $s'$  кратен  $\phi$ . Из этого все следует.

**5д.** Можно считать, что  $\psi = 0$ . Из задачи 5а следует, что два треугольника  $M$  и  $M'$  — торт и коробка — должны иметь одинаковые инварианты  $J_{l,\phi}(M)$  для любой направленной прямой  $l$ . Из задачи 5с получаем, что стороны треугольников  $M$  и  $M'$  можно занумеровать таким образом, что углы между сторонами с одинаковыми номерами кратны  $\phi$ . Пусть, например, соответственные стороны треугольников  $M$  и  $M'$  имеют равные номера. Обозначим через  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$  углы, которые образуют эти стороны с некоторой фиксированной прямой. Тогда  $\alpha_i - \alpha'_i = k_i\phi$  для некоторых целых  $k_i$  и  $i = 1, 2, 3$ . С другой стороны,  $\alpha_i - \alpha_{i+1} = \alpha'_{i+1} - \alpha'_i$  для  $i = 1, 2, 3$ , где мы считаем по определению  $\alpha_4 = \alpha_1$ . Из полученной системы 6 линейных уравнений легко получаем нужное следствие. В частности, найдутся целые числа  $k, l, m$ , не равные нулю одновременно, для которых  $k(\alpha_1 - \alpha_2) + l(\alpha_2 - \alpha_3) + m(\alpha_3 - \alpha_1) = 0$ .

**5е. Доказательство Утверждения I для Задачи А.** Достаточно рассмотреть случай неравнобедренного треугольника. Можно считать, что при складывании частей в коробку одна из них оставалась неподвижной, а вторую приложили к ней, повернув на некоторый угол  $\phi$  вокруг некоторой точки  $O$ . Возможны 2 случая.

(1) Угол  $\phi$  несоизмерим с  $\pi$ . Тогда из задачи 5д получаем требуемое утверждение.

(2) Угол  $\phi$  соизмерим с  $\pi$ .

Для любой направленной прямой  $l$  обозначим через  $L$  множество прямых, получающихся из прямой  $l$  поворотами *вокруг точки*  $O$  на углы, кратные  $\phi$ . Введем на множестве направленных прямых функцию  $f$  по следующему правилу:  $f(XY) = 1$ , если  $XY \in L$ ,  $f(XY) = -1$ , если  $YX \in L$ , и  $f(XY) = 0$  — иначе.

Пусть вначале точка  $O$  не является вершиной треугольника  $M$ . Тогда найдутся две стороны треугольника  $M$ , скажем,  $AB$  и  $BC$ , не содержащие точки  $O$ . Для прямой  $l$ , содержащей сторону  $AB$ ,  $J_f(M) = \pm|AB|$  (иначе сразу получаем, что один из углов треугольника  $M$  кратен  $\phi$ , то есть соизмерим с  $\pi$ ). Пусть  $M'$  — треугольник, который получился из  $M$  после перекладывания частей. Рассуждая аналогично задаче 5а, получаем, что  $J_f(M') = J_f(M) = \pm|AB|$ . Значит, сторона длины  $|AB|$  треугольника  $M'$  образует со стороной  $AB$  угол, кратный  $\phi$ . Аналогично, сторона длины  $|BC|$  треугольника  $M'$  образует со стороной  $BC$  треугольника  $M$  угол, кратный  $\phi$ . Тогда, пользуясь тем, что угол  $\phi$  соизмерим с  $\pi$ , аналогично решению задачи 5д получаем соотношение  $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$  для некоторых целых  $k, l, m$ , не равных нулю одновременно.

Нам осталось рассмотреть случай, когда точка  $O$  совпала с одной из вершин треугольника  $M$ . Введем еще один инвариант. Пусть  $OX$  — некоторый *луч* с началом  $O$ . Для любого направленного отрезка  $AB$  обозначим через  $J_{OX}(AB)$  длину пересечения  $AB \cap OX$ , причем она берется со знаком  $+$ , если  $AB$  сонаправлен с лучом  $OX$ , а иначе — со знаком  $-$ . Для произвольного многоугольника  $P$  обозначим через  $J_{OX,\phi}(P)$  сумму величин  $J_{OY}(AB)$ , где  $AB$  пробегает все векторы сторон многоугольника  $P$ , а  $OY$  — все лучи, которые получаются из  $OX$  поворотами на углы, кратные углу  $\phi$ . Тогда данный инвариант не равен нулю для сторон треугольника  $M$ , содержащих вершину  $O$ . Рассуждая аналогично решению задачи 5д, получаем требуемое соотношение  $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$  для некоторых целых  $k, l, m$ , не равных нулю одновременно.

**6а.** Доказательство аналогично решению задачи 4б.

**6б.** Любой треугольник  $A_iB_iC_i$  можно соединить со стороной  $AB$  цепочкой треугольников  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_iB_iC_i$ , в которой соседние треугольники имеют общий отрезок границы, причем  $A_1B_1$  содержится в  $AB$ . Поэтому достаточно доказать, что если одна из сторон треугольника  $A_jB_jC_j$  образует с прямой  $AB$  угол вида  $k\alpha + l\beta + m\gamma$ , то и две другие — тоже. Последнее утверждение очевидно.

**6с.** Задача 6б подсказывает, что *разоблачающую* функцию  $f$  следует искать в виде функции от  $k, l$  и  $m$ .

Итак, пусть  $f(XY) = f(k, l, m)$ , где целые числа  $k, l, m$  таковы, что угол между ориентированными прямыми  $XY$  и  $AB$  равен  $k\alpha + l\beta + m\gamma$ . По определению, угол между ориентированными прямыми  $XY$  и  $AB$  — это угол, на который нужно повернуть прямую  $AB$ , чтобы она совпала с прямой  $XY$ , с учетом направления. Угол между ориентированными прямыми определен с точностью до  $2\pi$ . Поэтому целые числа  $k + 2, l + 2, m + 2$  определяют тот же угол, что и числа  $k, l, m$ . Значит, мы получаем условие, которому обязана удовлетворять наша функция:  $f(k + 2, l + 2, m + 2) = f(k, l, m)$ . Поскольку  $\alpha, \beta, \gamma$  несоизмеримы, то с точностью до замены  $k, l, m \rightarrow k + 2, l + 2, m + 2$  числа  $k, l, m$  однозначно определяются ориентированной прямой  $XY$ . Таким образом, любая функция, удовлетворяющая условию  $f(k + 2, l + 2, m + 2) = f(k, l, m)$ , корректно определяет функцию на множестве ориентированных прямых. (Мы полагаем  $f(XY) = 0$ , если  $XY$  отлична от линий разрезом.)

Найдем, каким еще условиям должна удовлетворять функция  $f(k, l, m)$ . Во-первых,  $f(XY) = -f(YX)$ , поэтому

$$f(k + 1, l + 1, m + 1) = -f(k, l, m). \quad (1)$$

Из этого условия следует также  $f(k + 2, l + 2, m + 2) = f(k, l, m)$ .

Рассмотрим теперь условие  $J_f(A_iB_iC_i) = 0$ . Предположим, что у треугольника  $ABC$  вершины расположены в указанном порядке по часовой стрелке, а у треугольника  $A_iB_iC_i$  — против часовой стрелки. Пусть угол между ориентированными прямыми  $A_iB_i$  и  $AB$  равен  $k\alpha + l\beta + m\gamma$ . Тогда угол между прямыми  $A_iC_i$  и  $AB$  будет равен  $(k - 1)\alpha + l\beta + m\gamma$ , а угол между прямыми  $C_iB_i$  и  $AB$  будет равен  $k\alpha + (l + 1)\beta + m\gamma$ . Поэтому

$$J_f(A_iB_iC_i) = f(k, l, m)|A_iB_i| - f(k, l + 1, m)|B_iC_i| - f(k - 1, l, m)|C_iA_i|.$$

Поскольку треугольники  $A_iB_iC_i$  и  $ABC$  подобны, то условие  $J_f(A_iB_iC_i) = 0$  можно переписать в виде

$$f(k, l, m)|AB| - f(k, l + 1, m)|BC| - f(k - 1, l, m)|CA| = 0. \quad (2)$$

Рассуждая аналогично, условие  $J_f(ABC) \neq 0$  можно переписать в виде

$$f(0, 0, 0)|AB| - f(0, -1, 0)|BC| - f(1, 0, 0)|CA| \neq 0. \quad (3)$$

Итак, нам достаточно найти функцию  $f(k, l, m)$ , удовлетворяющую условиям (1)–(3). Заметим, что второе соотношение задает ограничения на функцию  $f(k, l, m)$  при фиксированном  $m$ . Поэтому определим функцию для  $m = 0$ , а при остальных  $m$  она

определился из первого соотношения. Усмотрев огромный произвол, возьмём  $f(k, 0, 0) = 1$  для всех  $k$ . Тогда  $f(k, 1, 0) = (|CA| - |AB|)/|BC|$  для всех  $k$ . Далее, можно принять  $f(k, l, 0) = ((|CA| - |AB|)/|BC|)^l$ , а делая поправку на первое соотношение, получаем

$$f(k, l, m) = (-1)^m \cdot \left( \frac{|CA| - |AB|}{|BC|} \right)^{l-m}.$$

Для данной функции  $f(k, l, m)$  соотношения (1)–(3) проверяются непосредственно.

**6d. Доказательство Утверждения I для Задачи В.** Непосредственно следует из задач 6a и 6c.

**6e.** Ответ авторам неизвестен.

**7.** Каждому криволинейному многоугольнику  $M$  сопоставим число  $J(M)$ : сумма длин граничных дуг, к которым многоугольник примыкает с "вогнутой" стороны, минус сумма длин дуг, для которых многоугольник примыкает с "выпуклой" стороны. Легко проверить, что инвариант  $J(M)$  одинаков для криволинейных многоугольников, один из которых получается из другого разрезанием по отрезкам и дугам окружностей и складыванием полученных частей. В то же время для круга  $J(M) \neq 0$ , а для квадрата  $J(M) = 0$ .

## РЕШЕНИЯ: ЧАСТЬ II.

**8. Геометрическое решение.** Куб  $ABCA'D'B'C'D'$  разрезается на 6 тетраэдров  $AC'BB'$ ,  $AC'B'A'$ ,  $AC'A'D'$ ,  $AC'D'D$ ,  $AC'DC$ ,  $AC'SB$  шестью плоскостями, проходящими через пару противоположных вершин  $A, C'$  куба и одну из оставшихся вершин. Равенство данных тетраэдров следует из соображений симметрии (например, тетраэдр  $AC'BB'$  переходит в тетраэдр  $AC'A'D'$  при повороте куба на  $120^\circ$  вокруг прямой  $AC'$ ).

**Алгебраическое решение.** Куб  $0 \leq x, y, z \leq 1$  можно разрезать на 6 тетраэдров  $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq z \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq x \leq z \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq z \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq x \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq y \leq x \leq 1$ .

**9a.** Проведем линию, соединяющую середины больших сторон прямоугольника.

**9b.** Разделим две большие стороны прямоугольника на  $q$  равных частей, а две меньшие — на  $p$  равных частей. Проведем через соответственные точки деления линии, параллельные сторонам прямоугольника.

**9c.** Пусть дан прямоугольник  $1 \times x$ ,  $x = \sqrt[4]{2}$ . Отрежем от него прямоугольник  $1 \times \frac{1}{x}$ . От полученной полоски  $1 \times (x - \frac{1}{x})$  отрежем два прямоугольника  $(x^2 - 1) \times (x - \frac{1}{x})$ . От новой полоски  $(3 - 2x^2) \times (x - \frac{1}{x})$  отрежем прямоугольник  $(3 - 2x^2) \times (\frac{3}{x} - 2x)$ . У полученного прямоугольника  $(3 - 2x^2) \times (3x - \frac{4}{x})$  отношение сторон также равно  $x$ , поскольку  $x^4 = 2$ .

**9d.** Пусть

$$r = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

— периодическая цепная дробь. Так как последовательность  $a_k$  периодическая, то для некоторого  $n$

$$r = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{2n} + \frac{1}{r}}}$$

Отталкиваясь от данного равенства, нетрудно построить разрезание прямоугольника  $1 \times r$  на несколько квадратов и один прямоугольник с отношением сторон  $r$ . Действительно, отрежем вначале от прямоугольника  $1 \times r$  квадраты  $1 \times 1$  в количестве  $a_1$  штук. Получим полоску  $1 \times (r - a_1)$  с отношением сторон

$$\frac{1}{r - a_1} = a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{2n} + \frac{1}{r}}}$$

От данной полоски отрежем  $a_2$  квадратов  $(r - a_1) \times (r - a_1)$  и т. д. Продолжая этот процесс, мы получим в итоге прямоугольник с отношением сторон  $r$ .

Из построенного разрезания прямоугольника  $1 \times r$  нетрудно получить требуемое разрезание прямоугольника  $1 \times \sqrt{r}$ : нужно сжать прямоугольник  $1 \times r$  в  $\sqrt{r}$  раз вдоль стороны  $r$ .

**9e.** Прямоугольник с отношением сторон  $a$  разрезан на 3 вертикальных полоски. В первой полоске сверху вниз: прямоугольнику с отношением сторон  $a, \frac{1}{a}$ ; во второй:  $a, a, \frac{1}{a}$ ; в третьей:  $a, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}$ . Действительно:

$$\frac{1}{a + \frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + a} + \frac{1}{\frac{1}{a} + a + a} = a;$$

$$(a^2 + 1)(2a^2 + 1)(a^2 + 2) = (a^2 + 1)(a^2 + 2) + (a^2 + 1)(2a^2 + 1) + (2a^2 + 1)(a^2 + 2);$$

$$2a^6 + 2a^4 - 4a^2 - 3 = 0.$$

Многочлен  $2x^3 + 2x^2 - 4x - 3$  не имеет рациональных корней. Действительно, если  $\frac{p}{q}$  — несократимая дробь и корень многочлена, то  $p$  делит свободный член, а  $q$  делит старший. Легко проверить перебором, что  $\pm 3, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$  не являются корнями данного многочлена.

**9f.** Легко построить примеры разрезаний на 4, 6 и 8 частей. По разрезанию на  $n$  частей строится разрезание на  $n + 3$  части.

**10a.** Пусть  $e_i$  — соответствующее ребро некоторого многогранника  $M_j$ . Рассмотрим цилиндр  $C$  с осью  $e$  и радиусом 1. Двугранный угол при ребре  $e$  высекает на поверхности цилиндра ленту  $L$  длиной  $\alpha$  и шириной  $l$ . На поверхности подцилиндра  $C_i$  с осью  $e_i$  и радиусом 1 цилиндра  $C$  двугранный угол при  $e_i$  высекает ленту  $L_i$  ширины  $\alpha_i$  и длины  $l_i$ . Так как многогранники разрезания не пересекаются и покрывают весь многогранник  $M$ , лента  $L$  разрезается на ленты  $L_1, L_2, \dots, L_n$ . Осталось установить естественное соответствие между точками ленты  $L$  и прямоугольника  $l \times \alpha$ , чтобы получить его разрезание на прямоугольники  $l_i \times \alpha_i$ .

**10b.** Любая общая точка прямой  $\ell$  и многогранника  $M$  является либо внутренней точкой некоторого многогранника  $M_i$ , либо лежит на границе нескольких многогранников разрезания. Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — рёбра многогранников разрезания,

которые лежат на прямой  $\ell$  (их длины  $l_1, l_2, \dots, l_n$ ). Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_m$  — длины всевозможных пересечений не по ребру прямой  $\ell$  с гранями многогранников  $M_i$ . Итак, рёбра  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют семейство отрезков на прямой  $\ell$ . Без ограничения общности  $e_1, e_2, \dots, e_s$  — все рёбра, лежащие на одном из таких отрезков  $I$ . Докажем, что набор прямоугольников  $e_1 \times \alpha_1, e_2 \times \alpha_2, \dots, e_s \times \alpha_s$   $\square$ -равносоставлен прямоугольнику  $l \times \pi$ . Проведя доказательство для всех таких отрезков и приложив друг к другу полученные прямоугольники ширины  $\pi$ , получим утверждение задачи.

Пусть  $C$  — поверхность цилиндра с осью  $I$  и радиусом 1 без "крышек". Двугранные углы при  $e_1, e_2, \dots, e_n$  высекают на  $C$  ленты  $l_i \times \alpha_i$  (прямой длины  $l_i$  и окружностной ширины  $\alpha_i$ ). Так как многогранники не пересекаются и покрывают весь многогранник  $M$ , то  $C$  разрезается на ленты  $l_i \times \alpha_i$  и  $f_i \times \pi$ . Продолжим все окружностные разрезы. Тогда  $C$  разрезается на кольца. Выбросим из всех колец ленты ширины  $\pi$  (части лишних лент с прямой длиной  $f_i$ ), а нетронутые кольца разрежем на 2 ленты окружностной ширины  $\pi$ . Из всего оставшегося можно сложить ленту окружностной ширины  $\pi$ , которой соответствует прямоугольник ширины  $\pi$ , разрезанный на части прямоугольников  $l_1 \times \alpha_1, l_2 \times \alpha_2, \dots, l_s \times \alpha_s$ , полученные параллельными переносами, вертикальными и горизонтальными разрезами.

**10с.** Набор прямоугольников, соответствующий первому многограннику, объединённый с некоторым набором прямоугольников ширины  $\pi$ , по 10а и 10б  $\square$ -равносоставлен объединению наборов прямоугольников, соответствующих многогранникам разбиения. Также и для второго. Однако очевидно, что отношение  $\square$ -равносоставленности транзитивно и симметрично. Получаем требуемое.

**10d.** Пусть  $M$  — середина  $CD$ .  $AM$  и  $BM$  перпендикулярны  $CD$ , поэтому величина угла  $\angle AMB$  есть величина двугранного угла при ребре  $CD$  тетраэдра. Пусть длина ребра тетраэдра равна  $a$ , тогда по формуле высоты правильного треугольника  $AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ . По теореме косинусов для треугольника  $AMB$  имеем  $\cos\theta = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AMBM} = \frac{1}{3}$ .

Докажем по индукции, что  $\cos n\theta = \frac{a_n}{3^n}$ , где  $a_n$  — целое и не делится на 3. База индукции для  $n = 0$  и  $n = 1$  очевидна.

Шаг индукции. Формула для суммы косинусов при  $n \geq 1$ :  $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta$ , откуда  $\cos(n+1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta - \cos(n-1)\theta = \frac{2a_n - 3a_{n-1}}{3^{n+1}}$ . Действительно,  $2a_n - 3a_{n-1}$  не делится на 3.

Значит,  $\cos k\theta \neq 1$ , отсюда  $k\theta \neq 2\pi n$ , т.е.  $\theta \neq \frac{2}{k}\pi$ .

**11а.** Пусть первый набор разрезов на прямоугольники, перенесли их, сложив второй набор. Доразрежем прямоугольники: продолжим все вертикальные разрезы в разрезании первого набора и все горизонтальные — у второго. Полученное разрезание можно выполнить элементарными разрезами: сначала разрезаем первый набор по всем вертикальным разрезам, затем разрезаем каждую вертикальную полосу горизонтальными. Собираем горизонтальные строки разрезания второго набора, а затем объединяем их.

**11б.** Введём операцию для набора  $\theta, \pi, y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$ : из игреков убирается с наибольшим номером  $i_s$  такой, что  $p\theta + q\pi + \mu_1 y_{i_1} + \mu_2 y_{i_2} + \dots + \mu_k y_{i_k} = 0$ , где все коэффициенты рациональные и  $\mu_s \neq 0$ . Применим эту операцию к начальному набору сколько можно раз. Получим набор  $\theta, \pi, y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_r}$ . Заметим, что для любого элемента  $x$  из  $Y$  существуют рациональные  $p, q, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ , что  $x = p\theta + q\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \dots + \mu_r y_{j_r}$ . Пусть  $p_1\theta + q_1\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \dots + \mu_r y_{j_r} = x = p_2\theta + q_2\pi + \xi_1 y_{j_1} + \xi_2 y_{j_2} + \dots + \xi_r y_{j_r}$ , тогда  $(p_1 - p_2)\theta + (q_1 - q_2)\pi + (\mu_1 - \xi_1)y_{j_1} + \dots + (\mu_s - \xi_s)y_{j_s} = 0$ . Если  $\mu_t \neq \xi_t$ , то для набора  $\theta, \pi, y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_r}$  можно ещё раз применить описанную операцию — противоречие. Значит  $\mu_t = \xi_t$  для всех  $t$ . Однако  $\theta$  и  $\pi$  несоизмеримы и не равны нулю, значит  $p_1 = p_2$  и  $q_1 = q_2$ , т.е. для любого элемента  $x$  из  $Y$  существуют единственные рациональные  $p, q, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ , что  $x = p\theta + q\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \dots + \mu_r y_{j_r}$ .

**11с.** Пусть получен новый набор разрезанием прямоугольника  $x \times y$ .

Разрез вертикальный: инвариант поменялся на  $x_1 f(y) + x_2 f(y) - x f(y) = 0$ .

Разрез горизонтальный: инвариант поменялся на  $x f(y_1) + x f(y_2) - x f(y)$ .

Пусть  $y_1 = f(y_1)\theta + q_1\pi + \mu_1 y'_1 + \mu_2 y'_2 + \dots + \mu_n y'_n$  и  $y_2 = f(y_2)\theta + q_2\pi + \xi_1 y'_1 + \xi_2 y'_2 + \dots + \xi_n y'_n$ . Тогда  $y = y_1 + y_2 = (f(y_1) + f(y_2))\theta + (q_1 + q_2)\pi + (\mu_1 + \xi_1)y'_1 + (\mu_2 + \xi_2)y'_2 + \dots + (\mu_n + \xi_n)y'_n$ . То есть  $f(y) = f(y_1) + f(y_2)$  и инвариант не поменялся.

**11d.** Так как инвариант сохраняется при элементарном преобразовании набора (11с), то по 11а инварианты  $\square$ -равносоставленных наборов равны. Однако инвариант для набора  $(a \times \theta, l \times \pi)$  равен  $a$ , а для  $b \times \pi$  — нулю. Следовательно, эти наборы не  $\square$ -равносоставлены.

**11е.** Предположим обратное. Тогда по Лемме I наборы 6 раз  $a \times \theta, l_1 \times \pi$  и 8 раз  $b \times \frac{\pi}{2}, l_2 \times \pi$   $\square$ -равносоставлены. Однако первый набор  $\square$ -равносоставлен набору  $6a \times \theta, l_1 \times \pi$ , а второй — набору  $(\frac{b}{2} + l_2) \times \pi$ , значит последние 2 набора  $\square$ -равносоставлены, но по Лемме II они  $\square$ -не равносоставлены в силу 10d. Противоречие.

**12а. Лобовое решение.** Покажем, что отношение сторон разрезаемого прямоугольника рационально. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — длины вертикальных сторон квадратов. Стороны квадратов могут объединяться в отрезки. Либо такой отрезок — это сторона большого прямоугольника, и отсюда  $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_s} = a$  или  $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_s} = b$ , либо к этому отрезку с двух сторон прилегают квадраты разрезания, для сторон которых мы можем записать  $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_s} = x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_t}$  или  $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_s} = x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_s}$ , здесь  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$  — стороны квадратов с одной стороны и  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_t}$  — с другой.

Запишем все такие уравнения (переменными будут иксы,  $a$  и  $b$ ). Будем выражать по очереди переменные, кроме  $b$ , и подставлять их в остальные уравнения. Начнём с  $a$ . После всех использованных возможностей получим, что каждая переменная первой группы (в ней  $a$ ) выражается через переменные другой группы (в ней  $b$ ) линейной комбинацией с рациональными коэффициентами:  $a = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n + \xi b$

$$x_i = \mu_{i1} x_1 + \mu_{i2} x_2 + \dots + \mu_{in} x_n + \mu_i b \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Переменные в левой части выражаются уравнениями, в которых коэффициенты ненулевые только при переменных второй группы (для переменных второй группы добавлены уравнения  $x_i = x_i$ ).

Докажем, что во второй группе только  $b$ . Пусть не так. Пусть  $x_n$  во второй группе. Заметим, что если придадим значения переменным второй группы так, чтобы все равенства выполнялись и все переменные были положительными, то получим соответствующее разрезание прямоугольника (докажите). Возьмём первоначальное разрезание, увеличим  $x_n$  на  $\varepsilon$  так, чтобы все иксы и  $a$  остались положительными. Получим большой прямоугольник со сторонами  $a + \xi_n \varepsilon$  и  $b$ , разрезанный на квадраты со сторонами  $x_1 + \mu_{1n} \varepsilon, x_2 + \mu_{2n} \varepsilon, \dots, x_{n-1} + \mu_{n-1n} \varepsilon, x_n + \varepsilon$ .

$$\text{Запишем равенство площадей: } (a + \xi_n \varepsilon)b = (x_1 + \mu_{1n} \varepsilon)^2 + (x_2 + \mu_{2n} \varepsilon)^2 + \dots + (x_{n-1} + \mu_{n-1n} \varepsilon)^2 + (x_n + \varepsilon)^2 \Rightarrow (\mu_{1n}^2 + \mu_{2n}^2 + \dots + \mu_{n-1n}^2 + 1)\varepsilon^2 + (2x_1 \mu_{1n} + 2x_2 \mu_{2n} + \dots + 2x_{n-1} \mu_{n-1n} + 2x_n - \xi_n b)\varepsilon = 0$$

Мы видим, что не больше двух  $\varepsilon$  удовлетворяют этому равенству, однако первоначально мы могли взять любое  $\varepsilon$  из некоторой малой окрестности нуля. Значит всё-таки во второй группе нет иксов, только  $b$ . Ну а как уже было отмечено, все переменные первой группы выражаются линейной комбинацией через переменные второй группы, то есть  $a = pb$ , где  $p$  рационально.

*Решение, основанное на сведении к Лемме II.* Если прямоугольник  $a \times b$  можно разрезать на квадраты, то он  $\square$ -равносооставлен прямоугольнику  $b \times a$  (поскольку квадрат переходит в себя при повороте на  $90^\circ$ .) Тогда по Лемме II отношение  $\frac{a}{b}$  рационально. *"Физическое" решение.* Данное утверждение следует также из задачи 13b для  $R = 1$ .

**12b.** Предположим противное. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — рёбра тетраэдров, на которые разрезан тетраэдр с ребром  $a$ . Тогда по задаче 10 набор  $6a_1 \times \theta, 6a_2 \times \theta, \dots, 6a_n \times \theta$   $\square$ -равносооставлен набору  $6a \times \theta, l \times \pi$ . Следовательно, по задаче 11  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a$ . Равенство объёмов:  $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = a^3$ . Возводим первое равенство в куб:  $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 + A = a^3$ , где  $A > 0$  — приходим к противоречию со вторым равенством.

*Идея геометрического решения.* Утверждение задачи можно доказать также, рассмотрев ребро одного из меньших тетраэдров, целиком лежащее на грани большего тетраэдра. Тогда в этом ребре сходится несколько двугранных углов, равных  $\theta$ , а их сумма должна быть равна  $\pi$ .

**13a.** Пусть  $U_1$  и  $U_2$  — напряжения в верхнем и нижнем неконцевых узлах. Если выделение тепла на 2-ом и 3-ем резисторе больше выделения тепла на 4-ом и 5-ом, заменим  $U_1$  на  $U_2$ . Получим уменьшение общего выделения тепла. Если теплоты равны, то сделав то же самое, получим уменьшение общего выделения тепла. Значит, минимум выделения тепла достигается при  $U_1 = U_2$ . Далее схема очевидно сводится элементарными преобразованиями к схеме из одного резистора.

**13b.** Схема очевидно сводится элементарными преобразованиями к схеме из одного резистора.

**14a.** *Геометрическое решение.* По задаче 11a данное разрезание прямоугольника можно получить последовательностью элементарных преобразований (и обратных к ним). Заметим, что общее сопротивление схемы при элементарном преобразовании не меняется.

*"Физическое решение".* Предположим, что прямоугольная пластинка сделана из однородного проводящего материала. Будем считать его удельное сопротивление равным 1. Соединим противоположные вертикальные стороны пластинки с полюсами источника постоянного тока. Сопротивление пластинки будет равно отношению горизонтальной стороны к вертикальной. Пусть теперь прямоугольник разрезан на меньшие прямоугольники. Нанесем на пластинку все линии разреза. Заметим, что ток по пластинке идет в горизонтальном направлении. Поэтому если мы разрежем пластинку по всем горизонтальным линиям, то ее сопротивление не изменится.

Теперь можно разрезать пластинку по всем вертикальным линиям, соединив при этом проводами пары вертикальных сторон меньших прямоугольников, которые совмещались в исходном прямоугольнике. Ясно, что сопротивление всей цепи при этом не изменится.

Каждая из меньших прямоугольных пластинок в полученной цепи представляет собой резистор, сопротивление которого равно отношению горизонтальной стороны соответствующей пластинки к вертикальной.

Тем самым мы показали, что общее сопротивление цепи, построенной по разрезанию прямоугольника, равно отношению его сторон. Из этого следует утверждение задачи 14a.

**14b.** *Аналитическое решение.* Пусть  $U = 1$ . Пусть минимум выделения тепла достигается при  $U_1, U_2, \dots, U_n$ . Зафиксируем  $U_2, U_3, \dots, U_n$  и будем рассматривать выделение тепла как функцию от  $U_1$ . Поскольку эта функция является суммой квадратов линейных функций и не постоянна, после раскрытия скобок коэффициент при  $U_1^2$  положителен. Минимум квадратичной функции достигается в вершине параболы, поэтому  $U_1 = a_2(R)U_2 + a_3(R)U_3 + \dots + a_n(R)U_n + a_1(R)$ , где  $a_i(R)$  — отношение многочленов от  $R$  с целыми коэффициентами. Подставим выражение для  $U_1$  в нашу квадратичную функцию. Получим функцию от  $(n-1)$ -ой переменной. Эта функция как функция от  $U_2$  не может быть постоянной (рассмотрите, как ведёт себя теплота при больших  $U_2$ ). Рассуждая аналогично предыдущему, получим  $U_n = \frac{P_n(R)}{Q_n(R)}$ . Переходя обратно, находим  $U_i = \frac{P_i(R)}{Q_i(R)}$ . Отсюда общее сопротивление равно  $\frac{U^2}{P} = \frac{P(R)}{Q(R)}$ .

*Геометрическое решение.* Покажем, что отношение сторон разрезаемого прямоугольника есть отношение многочленов с целыми коэффициентами от отношения сторон прямоугольников. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — длины вертикальных сторон прямоугольников, а  $R_1, R_2, \dots, R_n$  — их отношения сторон горизонтальной к вертикальной. Стороны прямоугольников могут объединяться в отрезки. Либо такой отрезок — это сторона большого прямоугольника, и отсюда  $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_s} = a$  или  $x_{i_1}R_{i_1} + x_{i_2}R_{i_2} + \dots + x_{i_s}R_{i_s} = b$ , либо к этому отрезку с двух сторон прилегают прямоугольники разрезания, для сторон которых мы можем записать  $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_s} = x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_t}$  или  $x_{i_1}R_{i_1} + x_{i_2}R_{i_2} + \dots + x_{i_s}R_{i_s} = x_{j_1}R_{j_1} + x_{j_2}R_{j_2} + \dots + x_{j_t}R_{j_t}$ , здесь  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$  — стороны прямоугольников с одной стороны и  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_t}$  — с другой.

Запишем все такие уравнения (переменными будут иксы,  $a$  и  $b$ ). Будем выражать по очереди переменные, кроме  $b$ , и подставлять их в остальные уравнения. Начнём с  $a$ . После использования всех возможностей получим, что каждая переменная первой группы (в ней  $a$ ) выражается через переменные другой группы (в ней  $b$ ) линейной комбинацией, коэффициенты которой — отношения многочленов от  $R_1, R_2, \dots, R_n$ :

$$a = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n + \xi b$$

$$x_i = \mu_{i1} x_1 + \mu_{i2} x_2 + \dots + \mu_{in} x_n + \mu_i b \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Переменные в левой части выражаются уравнениями, в которых коэффициенты ненулевые только при переменных второй группы (для переменных второй группы добавлены уравнения  $x_i = x_i$ ).

Докажем, что во второй группе только  $b$ . Пусть не так, и  $x_n$  во второй группе. Заметим, что если придадим значения переменным второй группы так, чтобы все равенства выполнялись и все переменные были положительными, то получим соответствующее разрезание прямоугольника (докажите). Возьмём первоначальное разрезание, увеличим  $x_n$  на  $\varepsilon$  так, чтобы все иксы и  $a$  остались положительными. Получим большой прямоугольник со сторонами  $a + \xi_n \varepsilon$  и  $b$ , разрезанный на прямоугольники с вертикальными сторонами  $x_1 + \mu_{1n} \varepsilon, x_2 + \mu_{2n} \varepsilon, \dots, x_{n-1} + \mu_{n-1n} \varepsilon, x_n + \varepsilon$ .

$$\text{Запишем равенство площадей: } (a + \xi_n \varepsilon)b = R_1(x_1 + \mu_{1n} \varepsilon)^2 + R_2(x_2 + \mu_{2n} \varepsilon)^2 + \dots + R_{n-1}(x_{n-1} + \mu_{n-1n} \varepsilon)^2 + R_n(x_n + \varepsilon)^2 \Rightarrow (R_1 \mu_{1n}^2 + R_2 \mu_{2n}^2 + \dots + R_{n-1} \mu_{n-1n}^2 + 1)\varepsilon^2 + (2R_1 x_1 \mu_{1n} + 2R_2 x_2 \mu_{2n} + \dots + 2R_{n-1} x_{n-1} \mu_{n-1n} + 2R_n x_n - \xi_n b)\varepsilon = 0$$

Мы видим, что не больше двух  $\varepsilon$  удовлетворяют этому равенству, однако первоначально мы могли взять любое  $\varepsilon$  из некоторой малой окрестности нуля. Значит, всё-таки во второй группе нет иксов, только  $b$ . Ну а как уже было отмечено, все переменные первой группы выражаются линейной комбинацией через переменные второй группы, то есть  $a = pb$ , где  $p$  — отношение многочленов от  $R_1, R_2, \dots, R_n$ .

**14c.** *Ответ:* нет, не может. Увеличим сопротивление этого резистора, оставив напряжение неизменным на всех узлах. Тогда выделение тепла уменьшится, а после перераспределения станет ещё меньше, значит общее сопротивление увеличится.

**14d.** Пусть прямоугольник с отношением сторон  $R$  разрезан на прямоугольники с отношением сторон  $R$  и  $\frac{1}{R}$ , причём есть хотя бы один прямоугольник второго вида. Сделав растяжение с коэффициентом  $R$ , получим квадрат, разрезанный на квадраты

и прямоугольники с отношением сторон  $\frac{1}{R^2}$ . По задаче 14а имеем электрическую цепь с сопротивлением 1 из резисторов сопротивления 1 и  $\frac{1}{R^2}$ . По задаче 14b, общее сопротивление есть отношение многочленов с целыми коэффициентами от  $R$ . Приравняем к единице.

- 1) Если отношение многочленов не тождественно 1, то  $R$  является корнем многочлена с целыми коэффициентами.
- 2) Если многочлены равны, то если увеличить  $R$ , общее сопротивление останется единицей. Тогда сопротивление резисторов с сопротивлением  $\frac{1}{R^2}$  уменьшится. Если уменьшать их по очереди, то по решению задачи 14с получим, что общее сопротивление уменьшилось - противоречие.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ: ПОЛНЫЕ ИНВАРИАНТЫ.

В данной задаче были построены примеры инвариантов, которые позволяют доказывать невозможность некоторых разрезов. Естественный вопрос: какие из этих инвариантов являются *полными*, то есть в каких случаях совпадение инвариантов для двух многоугольников влечет существование требуемого разрезания? Оказывается, большинство из построенных нами инвариантов в действительности являются полными.

Начнем с простейшего инварианта —  $J_l(M)$  (*инварианта Хадвигера*). Как мы показали, если многоугольник  $M$  можно разрезать на несколько многоугольников и сложить из них новый многоугольник  $M'$ , используя только параллельные переносы частей, то  $J_l(M) = J_l(M')$  (задача 4с). Оказывается, в некотором смысле верно и обратное утверждение:

**Теорема Хадвигера–Глюра.** [1] Многоугольник  $M$  можно разрезать на несколько многоугольников и сложить из них многоугольник  $M'$ , используя только параллельные переносы частей, если и только если площади многоугольников  $M$  и  $M'$  равны, и для любой направленной прямой  $l$  выполнено равенство  $J_l(M) = J_l(M')$ .

Мы не знаем, верно ли аналогичное утверждение для инварианта  $J_{l,\phi}(M)$  (сравни с задачей 5а). Известно, что оно справедливо в частном случае  $\phi = \pi$ . В этом случае  $J_{l,\phi}(M) \equiv 0$ , и другая теорема Хадвигера–Глюра утверждает: любые два многоугольника равной площади на плоскости можно разрезать на многоугольники с соответственно параллельными сторонами. На первый взгляд в это утверждение трудно поверить — например, рассмотрите на плоскости два равных треугольника, повернутые друг относительно друга на малый угол.

Теперь перейдем к многогранникам. Набор прямоугольников, который мы сопоставляем многограннику, называется его *инвариантом Дена* (это определение эквивалентно общепринятому алгебраическому определению [2]). Удивительно, что утверждение, в некотором смысле обратное Лемме I, также справедливо:

**Теорема Сидлера.** [1] Если два многогранника имеют равные объемы и соответствующие им наборы прямоугольников являются  $\square$ -равносоставленными после добавления к ним подходящих прямоугольников вида  $l \times \pi$ , то два исходных многогранника равносоставлены.

Построенный нами инвариант  $\square$ -равносоставленности наборов прямоугольников на плоскости не является полным, но аналогичным образом можно построить полный инвариант (*инвариант Кеньёна* [4]).

В заключение обсудим достаточность полученных нами условий на числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $x$  в Задачах А, В, D. Мы не знаем, может ли число  $x$  в Задаче D быть корнем *произвольного* многочлена с целыми коэффициентами. Однако в близкой задаче о разрезании квадрата на подобные прямоугольники ответ отрицательный:

**Теорема Ласковича–Секкереша–Фрайлинга–Ринна.** [3, 5] Для каждого  $x > 0$  эквивалентны условия:

- (1) квадрат можно разрезать на подобные прямоугольники с отношением сторон  $x$ ;
- (2) число  $x$  — алгебраическое и все комплексные числа, ему сопряженные, имеют положительную действительную часть;
- (3) существуют положительные рациональные числа  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , такие что

$$c_1 x + \frac{1}{c_2 x + \frac{1}{\dots + \frac{1}{c_n x}}} = 1.$$

Таким образом, квадрат можно разрезать на подобные прямоугольники с отношением сторон  $2 + \sqrt{2}$ , но нельзя — на прямоугольники с отношением сторон  $1 + \sqrt{2}$ .

Нам неизвестно полное описание углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , для которых треугольники в Задачах А и В можно разрезать. Неизвестно даже, существует ли непрямоугольный, неравносторонний треугольник, который можно разрезать на несколько подобных ему, но противоположно ориентированных треугольников.

### БЛАГОДАРНОСТИ.

Авторы благодарны С. Дориченко, А. Заславскому, К. Кохасю, Г. Челнокову и А. Шаповалову за полезные обсуждения.

### ЛИТЕРАТУРА.

- [1] Болтянский В.Г., Равновеликие и равносоставленные фигуры, Популярная лекция по математике, выпуск 22, М. 1956.
- [2] Фукс Д., Можно ли из тетраэдра сделать куб?, "Квант" 11 (1990), 2–11.
- [3] Freiling C., Rinne D., Tiling a square with similar rectangles, Math. Res. Lett. 1 (1994), 547–558.
- [4] Kenyon R., Tilings and discrete Dirichlet problems, Israel Journal of Mathematics 105 (1998), 61–84.
- [5] Laszkovich M., Szekeres G., Tiling of the square with similar rectangles, Discr. Comp. Geometry 13 (1995), 569–572.

# Invariants of polygons

The project is proposed by M.Prasolov, M. Skopenkov and B.Frenkin

## ANNOUNCEMENT

### I. DISSECTIONS OF A TRIANGLE.

**Definition.** Two similar triangles in a plane are called *oriented oppositely* if one of them includes angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  clockwise, and another one counterclockwise (Fig. 1, angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  are supposed to be mutually unequal).

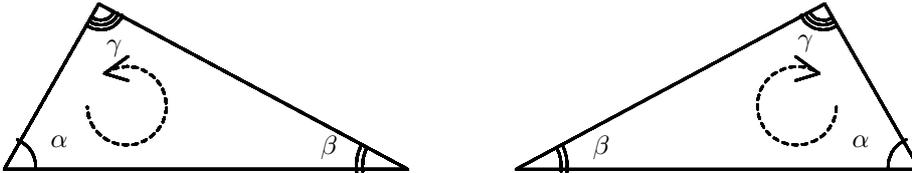


Fig. 1.

---

**Problem A.** A cake is of triangular shape. The box for the cake has shape of a triangle equal to the given one but oriented oppositely. Is it always possible to dissect the cake into two parts such that they can be put into the box without flipping?

**Problem B.** Is it valid that any triangle can be dissected into triangles similar to it but oriented oppositely?

---

Denote the angles of the triangles in the above problems as  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$ . The most interesting in these problems are the specific instances of dissections. For example, in the cases  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\alpha = 2\beta$  or  $\alpha = 3\beta$  the cake in Problem A can be dissected. (Dissect it!).

Call the numbers  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  *commensurable* if  $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$  for some integers  $k$ ,  $l$  and  $m$ , not vanishing simultaneously. The main purpose in the first part of the project is to prove the following statement:

**Statement I.** If  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  are incommensurable then the cake in Problem A and the triangle in Problem B cannot be dissected.

### II. DISSECTIONS OF A RECTANGLE.

---

**Problem C. (HILBERT'S THIRD PROBLEM)** Prove that a regular tetrahedron cannot be dissected into a finite number of polyhedrons which can be combined into a cube.

**Problem D.** A room is of rectangular shape with side ratio  $x$ . The floor of the room is covered by rectangular tiles with the same side ratio. Furthermore, some tile is oriented crosswise, not lengthwise (Fig. 2). Prove that  $x$  is a root of a polynomial with integer coefficients.

---

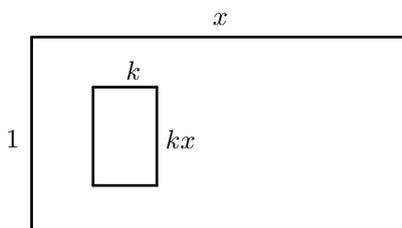


Fig. 2.

Surprisingly, Hilbert's third problem can be solved by considering dissections of rectangles only, not of polyhedrons! In the problems following the preliminary finish, a new version of elementary solution of Hilbert's third problem is proposed which is based on this idea.

As regards Problem D, it occurs to be possible to solve it by means of... physical interpretation! Specifically, to every dissection of a rectangle we attach a circuit formed of resistors.

All the problems concerned admit a common approach based on using of *invariants of polygons*.

# I. DISSECTIONS OF A TRIANGLE.

## Constructions

- Dissect the cakes of the indicated form (Fig.3) into two parts in the described mode:  
 (a)  $\alpha = 90^\circ$ ; (b)  $\alpha = 3\beta$ ; (c)  $\alpha = 2\beta < 90^\circ$ ; (d)  $\alpha = 2\beta > 90^\circ$ ; (e)\*  $\alpha = 30^\circ, \beta = 20^\circ, \gamma = 130^\circ$ ;  
 (f)\*  $\alpha = \frac{n+1}{n}\beta, n$  integer. (g) Dissect an arbitrary cake into 3 parts in the described mode.

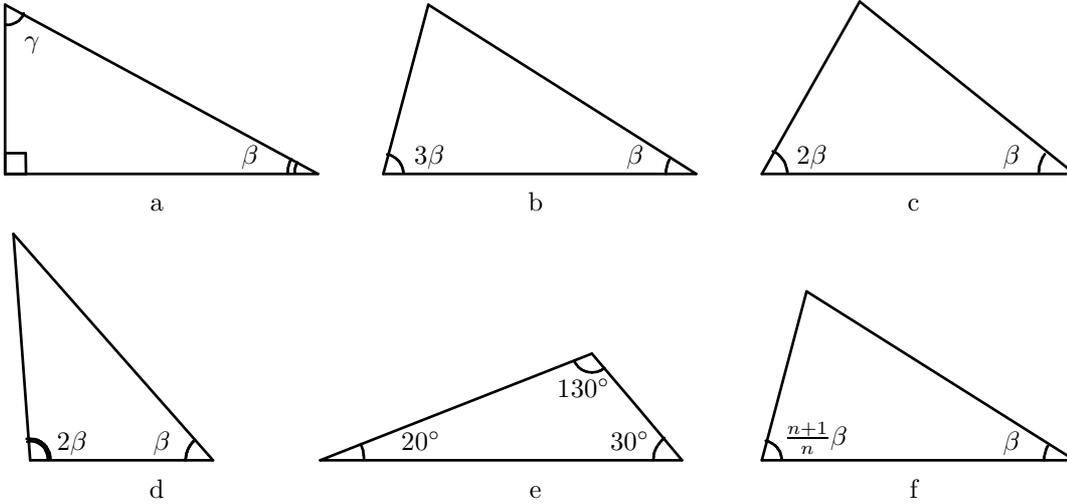


Fig. 3.

- Dissect a triangle having angles  $\alpha, \beta, \gamma$  into  $n$  triangles similar to it:  
 (a)  $\alpha = 90^\circ, n = 2$ ; (b)  $\alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 120^\circ, n = 5$ ; (c)  $\alpha, \beta, \gamma$  arbitrary,  $n \geq 4, n \neq 5$ .
- Let  $\alpha, \beta, \gamma$  be distinct and different from  $90^\circ$ . Then the triangle from Problem B cannot be dissected into:  
 (a) 2 parts; (b) 3 parts; (c) 4 parts.

## Invariants.

Let  $M$  be an arbitrary polygon. At each its side, let an arrow mark the direction such that points close to this side from the *left* belong to the polygon, and those from the *right* do not (Fig. 4). Now choose some *directed line*  $l$ , that is, a line and a direction on it marked by an arrow.

Let  $J_l(M)$  denote the algebraic sum of lengths for all sides of  $M$  parallel to  $l$ , such that those sides having the *same* direction as  $l$  (sides  $AB, DE$  and  $FG$  at Fig. 5), are taken with + sign, and those having the *opposite* direction (side  $KL$  at Fig. 5) are taken with - sign. If  $M$  has no sides parallel to  $l$ , we set  $J_l(M) = 0$ . The number  $J_l(M)$  is called the *additive invariant*.

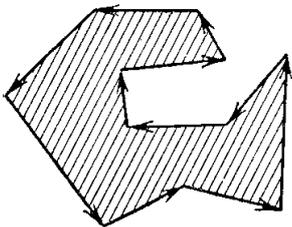


Fig. 4.

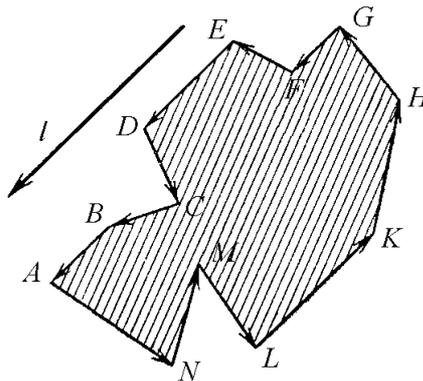


Fig. 5.

- (a) Describe all convex polygons  $M$  such that  $J_l(M) = 0$  for any directed line  $l$ .  
 (b) A polygon  $M$  is dissected into several polygons  $M_1, \dots, M_k$ . Then  $J_l(M) = J_l(M_1) + \dots + J_l(M_k)$ .  
 (c) A polygon  $M$  is dissected into several polygons, and they were combined to form a new polygon  $M'$  using only parallel translations of the parts. Then  $J_l(M) = J_l(M')$ .  
 (d) A convex polygon  $M$  is dissected into several polygons, and they were combined to form a square using only parallel translations of the parts. Then  $M$  is central symmetrical.

Let  $\phi$  be some angle. Let  $J_{l,\phi}(M)$  denote the sum of  $J_{l'}(M)$  for all distinct lines  $l'$  obtained from some directed line  $l$  by rotations through angles divisible by  $\phi$  (divisibility is up to  $2\pi$ ). The expression  $J_{l,\phi}(M)$  makes sense since only a finite number of terms does not equal zero in this sum.

- 5.(a)** A polygon  $M$  is dissected into several polygons, and they are combined to form a polygon  $M'$  by rotating each part through some angle divisible by  $\phi$ . Then  $J_{l,\phi}(M) = J_{l,\phi}(M')$ .
- (b)** Given  $l$  and  $\phi$ , describe all triangles  $M$  such that  $J_{l,\phi}(M) = 0$ .
- (c)** Let an angle  $\phi$  be incommensurable with  $\pi$ . Let  $M$  and  $M'$  be two equal non-isosceles triangles such that for any directed line  $l$  we have  $J_{l,\phi}(M) = J_{l,\phi}(M')$ . Then the sides of these triangles can be numbered so that the angles between sides with equal numbers are divisible by  $\phi$ .
- (d)** Let the cake from Problem A be dissected into two parts which are packed into a box, being rotated: one part through some angle  $\phi$ , and another part through some angle  $\psi$ . Suppose the angle  $\phi - \psi$  is incommensurable with  $\pi$ . Prove that the angles  $2(\alpha - \beta)$ ,  $2(\beta - \gamma)$  and  $2(\gamma - \alpha)$  are divisible by  $\phi - \psi$ .
- (e)\*** Prove Statement I for Problem A.

To every directed line  $XY$  in the plane, attach a number  $f(XY)$  so that it changes sign when the direction of the line is changed:  $f(XY) = -f(YX)$ . Let  $M = X_1X_2 \dots X_n$  be an arbitrary polygon whose vertices are numbered counterclockwise. Set

$$J_f(M) = f(X_1X_2)|X_1X_2| + f(X_2X_3)|X_2X_3| + \dots + f(X_nX_1)|X_nX_1|,$$

where  $|X_1X_2|, |X_2X_3|, \dots, |X_nX_1|$  are side lengths of the polygon, and  $X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_nX_1$  are the corresponding directed lines.

- 6. (a)** A polygon  $M$  is dissected into several polygons  $M_1, \dots, M_n$ . Then  $J_f(M) = J_f(M_1) + \dots + J_f(M_n)$ .
- (b)** Let triangle  $ABC$  be dissected into triangles  $A_iB_iC_i$  similar to it and oriented oppositely. Prove that for any  $i$  the angle between directed lines  $A_iB_i$  and  $AB$  can be represented in the form  $k\alpha + l\beta + m\gamma$ , where  $k, l, m$  are integers.
- (c)** Suppose the angles of triangle  $ABC$  are incommensurable. Construct a function  $f(XY)$  such that  $J_f(ABC) \neq 0$  but  $J_f(A_iB_iC_i) = 0$  for any triangle  $A_iB_iC_i$  similar to  $ABC$  and oriented oppositely.
- (d)** Prove Statement I for Problem B.
- (e)\*** Does there exist a non-right non-isosceles triangle which can be dissected into triangles similar to it but oriented oppositely?
- 7.** Is it possible to dissect a circle into a finite number parts by segments and arcs so that the parts can form a square?

## II. DISSECTIONS OF A RECTANGLE.

### Constructions.

8. Dissect a cube into 6 equal tetrahedrons.
9. Tile as required in Problem D the rooms with the following side ratio:
  - (a)  $x = \sqrt{2}$ ; (b)  $x = \sqrt{p/q}$ ,  $p$  and  $q$  integer; (c)  $x = \sqrt[4]{2}$ ; (d)\*  $x = \sqrt{r}$  where  $r$  is a periodic continued fraction;
  - (e)\*  $x = \sqrt{s}$  where  $s$  is a root of a cubic polynomial with integer coefficients having no rational roots; (It is asked to construct such a tiling only for a single value of  $s$ , not for any  $s$  satisfying this property.)
  - (f) Tile an arbitrary room by  $n$  bars oriented lengthwise, for  $n \geq 4$ ,  $n \neq 5$ .

### Hilbert's Third Problem: reduction to a planimetric problem.

Let  $M$  be a polyhedron. Let  $l_1, l_2, \dots, l_n$  be lengths of its edges,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  be dihedral angles between the corresponding edges. Attach to  $M$  a set of rectangles  $l_i \times \alpha_i$  in a plane, such that sides  $l_i$  are horizontal and sides  $\alpha_i$  are vertical (Fig. 6).

Call two such sets *rectangular-scissor-congruent* ( $\square$ -scissor-congruent) if each rectangular from some set can be dissected into several rectangles which can be combined to form the other set using only parallel translations of parts (Fig. 7). Two polyhedrons are *scissor-congruent* if some of them can be dissected into several polyhedrons which can be combined to form the other polyhedron.

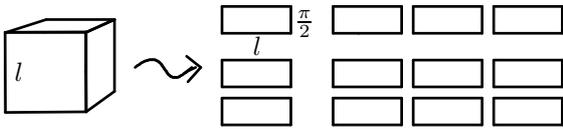


Fig. 6.

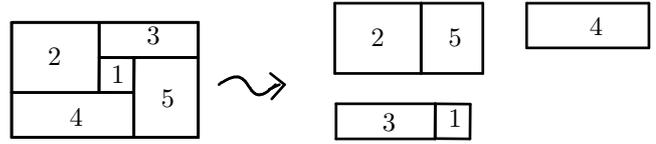


Fig. 7.

**Lemma I.** If two polyhedrons are scissor-congruent then the corresponding sets of rectangles become  $\square$ -scissor-congruent after adding appropriate rectangles of the form  $l \times \pi$ .

The proof of this lemma is contained in Problem 10.

Suppose a convex polyhedron  $M$  is dissected into polyhedrons  $M_1, M_2, \dots, M_k$ .

10. (a) Let  $e$  be an edge of a polyhedron  $M$ ,  $l$  is its length, and  $\alpha$  is the dihedral angle at this edge. Denote by  $l_1, l_2, \dots, l_n$  the lengths of the edges in  $M_i$ , belonging to  $e$ , and by  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  the dihedral angles at the corresponding edges. Then the rectangle  $l \times \alpha$  can be dissected into  $n$  rectangles  $l_1 \times \alpha_1, \dots, l_n \times \alpha_n$ .
- (b) Let  $\ell$  be a line in the space not containing the edges of a polyhedron  $M$ . Denote by  $l_1, l_2, \dots, l_n$  the lengths of the edges in polyhedrons  $M_i$ , belonging to  $\ell$ , and by  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  the dihedral angles at the corresponding edges. Then the set of  $n$  rectangles  $l_1 \times \alpha_1, \dots, l_n \times \alpha_n$  is  $\square$ -scissor-congruent to some rectangle of the form  $l \times \pi$ .
- (c) Prove Lemma I.
- (d) Prove that the dihedral angle  $\theta$  at an edge of the regular tetrahedron is incommensurable with  $\pi$ .

### Hilbert's Third Problem: solution of the planimetric problem.

**Lemma II.** If  $\theta$  and  $\pi$  are incommensurable, then rectangles  $a \times \theta$  and  $b \times \pi$  are not  $\square$ -scissor-congruent for any  $a$  and  $b$ . Moreover they remain not  $\square$ -scissor-congruent after adding any rectangles of the form  $l \times \pi$ .

The proof of this lemma is contained in Problem 11.

Let some set of rectangles be given. We may obtain a new set by dissecting one of the given rectangles into two rectangles. This operation is called an *elementary transformation* of the set.

11. (a) Two sets of rectangles are  $\square$ -scissor-congruent then one of them can be obtained from the other one by a sequence of elementary and inverse to them transformations.

Assume that  $\theta$  and  $\pi$  are incommensurable. Suppose that the rectangle  $b \times \pi$  is obtained from the rectangle  $a \times \theta$  by a sequence of elementary and inverse to them transformations. Let  $\theta, \pi, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$  be the lengths of vertical sides of all the rectangles occurring in this sequence of transformations. Set  $Y = \{\theta, \pi, y_1, \dots, y_N\}$ .

- (b) There exist numbers  $y'_1, y'_2, \dots, y'_n \in Y$  such that any number  $y \in Y$  is uniquely represented in the form  $y = p\theta + q\pi + p_1y'_1 + p_2y'_2 + \dots + p_ny'_n$  with rational  $p, q, p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Fix some set of such numbers  $y'_1, \dots, y'_n$ . For  $y \in Y$  set  $f(y) = p$ , where  $p$  is the coefficient in the representation  $y = p\theta + q\pi + p_1y'_1 + \dots + p_ny'_n$ . If  $M$  is the set of rectangles  $x_1 \times y_1, x_2 \times y_2, \dots, x_n \times y_n$  where all  $y_i \in Y$  then put

$$J(M) = x_1f(y_1) + x_2f(y_2) + \dots + x_nf(y_n).$$

- (c) The value of  $J(M)$  is invariant under an elementary transformation of the set  $M$ .
- (d) Prove Lemma II.
- (e) Prove Dehn's theorem: regular tetrahedron and cube are not scissor-congruent.
12. (a) Prove another Dehn's theorem: if a rectangle  $a \times b$  is dissected into squares then  $\frac{a}{b}$  is rational.
- (b) Prove that a regular tetrahedron cannot be dissected into several (more than 1) regular tetrahedrons.

### Dissections of a rectangle and electrical circuits.

To a dissection of a rectangle into rectangles we can attach an electrical circuit as shown at Fig. 8. To every rectangle there corresponds a resistor, and to every vertical line in the dissection (as well as to every vertical side of the original rectangle) there corresponds a node where several resistors connect. The resistance of every resistor equals the ratio of the horizontal side of the corresponding rectangle and the vertical one. It can be shown that the total resistance of the circuit equals the ratio of sides of the initial triangle.

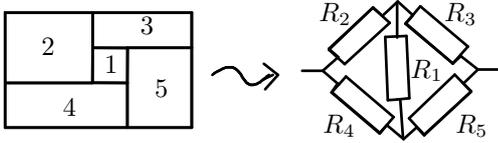


Fig. 8.

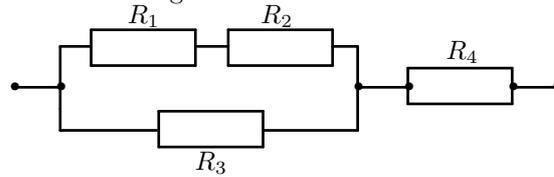


Fig. 9.

Let us show how to find the total resistance of an electrical circuit.

Consider an electrical circuit consisting of resistors. Let the *resistance*  $R_k$  be given for each resistor. Fix the beginning and the end of the circuit, and a real number  $U > 0$  (voltage of the circuit). To each node we are going to assign a real number  $U_i$  called *the voltage* at the node as follows. For the beginning of the circuit we define the voltage to be equal to zero, and for the end of the circuit we define it to be equal to  $U$ . Choose the voltages at the remaining nodes in such a way that the sum of the values  $\frac{(\Delta U_k)^2}{R_k}$  over all the resistors is minimal, where  $\Delta U_k$  is the difference between the voltages at the ends of the  $k$ -th resistor. Denote this sum by  $P$ , it is called *the total calorification*.

The *total resistance* is  $R = \frac{U^2}{P}$ .

Further it is allowed to use that the distribution of the voltages with the minimal calorification exists.

**Example 1.** Consider a circuit consisting of two parallel resistors  $R_1$  and  $R_2$ . By definition  $P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2}$  and the total resistance is  $R = \frac{U^2}{P} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ .

**Example 2.** Consider a circuit consisting of two subsequent resistors  $R_1$  and  $R_2$ . Let  $U_1$  be the voltage at their common node. The value  $\frac{U_1^2}{R_1} + \frac{(U-U_1)^2}{R_2}$  should be minimal possible. This is a quadratic function with respect to  $U_1$ . Evaluating  $U_1 = \frac{U}{R_2(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})}$  we get  $R = R_1 + R_2$ .

An *elementary transformation* of an electrical circuit is one of the following operations:

- 1) replacing a resistor of resistance  $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$  by two parallel resistors of resistances  $R_1$  and  $R_2$ ;
- 2) replacing a resistor of resistance  $R_1 + R_2$  by two subsequent resistors of resistances  $R_1$  and  $R_2$ ;
- 3) joining two nodes with the same voltage.

**13.** Find the total resistance and corresponding rectangle dissections for the following circuits:

(a) the circuit in Fig. 8 for  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$ ; (b) the circuit in Fig. 9.

**14. (a)** Suppose a square is dissected into squares and rectangles with the ratio of the horizontal and the vertical sides equal to  $R$ . Then the corresponding electrical circuit consists of resistors with resistance 1 and  $R$  and has total resistance 1.

(b)\* A circuit consists of resistors with resistance 1 or  $R$ . Prove that the total resistance of the circuit can be expressed as  $\frac{P(R)}{Q(R)}$  where  $P(x)$  and  $Q(x)$  are polynomials with integer coefficients.

(c) Suppose that the voltages at the two nodes connected with a resistor of resistance  $R$  are distinct. Prove that the total resistance of the circuit increases if  $R$  increases.

(d) Solve Problem D.

#### Remark.

The *current strength* at a resistor  $I_k = \frac{\Delta U_k}{R_k}$ , where  $\Delta U_k$  is the difference between the voltages of the two nodes connected with the resistor. Let us show that the sum of the current strengths at all the resistors having a common node (distinct from the beginning and the end of the circuit) equals zero. Fix such a node. Renumber the nodes so that this node is first, and the resistances of the resistors connected with this node are  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Let us see how the total resistance of the circuit depends on  $U_1$ . The total calorification is  $\sum_{i=1}^n \frac{(U_i - U_1)^2}{R_i} + C$ , where  $C$  is a constant

not depending on  $U_1$ . The minimum attends at the vertex of the parabola, so  $U_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{U_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$ , which is equivalent to

$$\sum_{i=1}^n \frac{U_i - U_1}{R_i} = 0.$$

Our definition imply also *the Kirchgoff laws*:

1) the sum of current strengths at all the resistors having a common node (distinct from the beginning and the end of the circuit) equals zero;

2)  $I_1 R_1 + I_2 R_2 + \dots + I_n R_n = U$  for any path  $1, 2, \dots, n$  going from the beginning of the circuit to the end, where  $U$  is the total voltage not depending on the path.

Vice versa, the Kirchgoff laws imply that the current strength distribute so that the total calorification is minimal.

**SOLUTIONS: PART I.**

- 1a. Dissect the triangle by the median from the vertex of the right angle (Fig. 10a).
- 1b. Dissect the triangle by the line which divides the angle  $\alpha$  as  $2 : 1$  (Fig. 10b).
- 1c. Dissect the triangle by the line which separates angle of size  $\beta$  from the angle  $\gamma$  (Fig. 10c).
- 1d. Dissect the triangle by the line symmetrical to the side opposite to  $\gamma$  relative the bisector of this angle (Fig. 10d).
- 1e. *First method.* Take an open polygon  $ABCDE$  with 4 equal edges and equal angles  $130^\circ$  between them. Extend the edges  $AB, BC$  and  $DE$ . Denote by  $BFG$  the triangle formed by these lines. Then the angles of triangle  $BFG$  are equal to  $30^\circ, 20^\circ$  and  $130^\circ$ . Thus we constructed the required dissection of the triangle: dissect triangle  $BFG$  by open polygon  $BCD$ .
- Second method.* Let  $\delta = 10^\circ$ . Take an open polygon  $ABCDEF$  with 5 equal edges and equal angles  $180^\circ - \delta$  between them. Connecting its endpoints  $A$  and  $F$  we obtain a symmetrical hexagon with angles  $A = F = 2\delta$ . Construct triangle  $AFG$  with angles  $GAF = 2\delta$  and  $GFA = 3\delta$  such that edge  $AB$  lies on  $AG$ . Hexagon  $BCDEFG$  is symmetrical as well because angles  $B$  and  $F$  are equal to  $\delta$ . Thus we have obtained the required dissection since the angles of triangle  $AFG$  are equal to  $30^\circ, 20^\circ$  and  $130^\circ$  respectively: dissect triangle  $AFG$  by open polygon  $BCDEF$ .
- Third method.* (Fig. 10e) Dissect triangle  $ABC$  by open polygon  $KLMN$  with 3 edges where  $K \in BC, N \in AB, BK = KL = LM = MN = NA, \angle BKL = \angle LMN = \pi - \alpha, \angle KLM = \angle MNA = \pi - \beta$ .
- 1f. Dissection is constructed similarly to the second or third method in the solution of Problem 1e.
- 1g. Dissect the triangle by three perpendiculars from the incenter to the sides of the triangle.

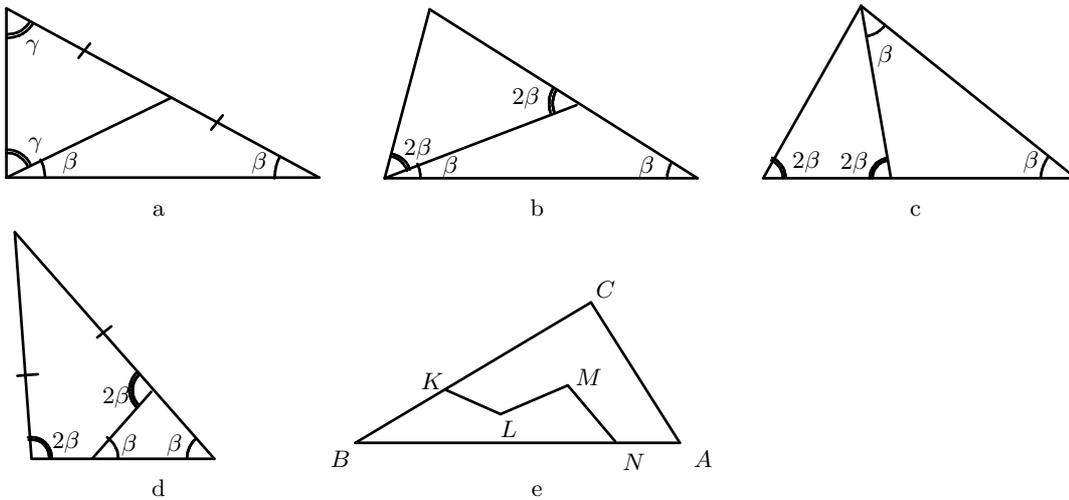


Fig. 10.

- 2a. Draw the altitude from the vertex of the right angle.
- 2b. Draw slits from the vertex of the angle equal to  $120^\circ$ , having angle  $30^\circ$  with its sides. Then dissect the obtained regular triangle connecting its center with its vertices.
- 2c. For  $n \geq 4$ , divide some side of the triangle (denote it by  $a$ ) into  $n/2$  equal parts. Through the dividing points, draw various segments parallel to the remaining sides of the triangle, up to the nearest meet with itself or with another side of the triangle. It is easily seen that all obtained points of meet belong to the same line parallel to  $a$ . Draw this line to obtain the required dissection.
- For  $n \geq 7$  odd, dissect the triangle by the above method into  $n - 3$  parts, then dissect one of the obtained triangles into 4 parts by the same method (i.e., draw midlines).
- Remark.* A natural question arises: what is the situation for  $n = 5$ ? It turns out that examples in Problems 2a and 2b exhaust triangles allowing dissection into 5 triangles similar to the original one. The proof of this nice fact will be published in one of the next few issues of the journal "Kvant".
- 3a. A slit has to connect some vertex of the triangle with a point at the opposite side. If the angles to this point are not equal then their sum is  $< \pi$ , since they are equal to two angles of the original triangle. Hence the angles are equal and thus are right. By the way, we have established a simple but useful fact which will be used in the rest of this problem.
- Fact 1.* If some node of the dissection has only two adjacent small triangles then the original triangle is in fact right. If such a situation occurs, we say for brevity that "we have obtained rectangularity".
- 3b. Let a triangle be dissected into three triangles similar to it. The smallest of its angles cannot be dissected. The small triangle including this angle has all its vertices at the sides of the original triangle. Either one or two of these vertices coincide with the vertices of the original triangle. In the first case, the remaining part is a convex quadrangle, and in the second case, a triangle. In both cases, an easy examination of cases shows that the subsequent dissection into two triangles yields rectangularity.
- We have established a new useful fact.
- Fact 2.* Let the original triangle have angles  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ . Then the angle  $\alpha$  may not be dissected. Each vertex of the small triangle containing it belongs to the boundary of the original triangle. We will call this small triangle  $\alpha$ -triangle.
- 3c. Suppose a triangle is dissected into 4 triangles similar to it but oriented oppositely. Consider the segment separated by the  $\alpha$ -triangle.
- Suppose this segment dissects the triangle into the  $\alpha$ -triangle and a quadrangle. Then the endpoints of this segment belong to some other slits, for otherwise we have rectangularity. To obtain just 4 small triangles, we need 2 such slits having a common point at the side opposite to the angle  $\alpha$ . Note that in the obtained layout for dissection, angles of all the small triangles are uniquely determined. Indeed, the condition of opposite orientation determines all angles of three triangles containing the angles

of the original triangle. Then the angles of the "central" triangle are uniquely determined: they equal to  $\pi - 2\alpha$ ,  $\pi - 2\beta$  and  $\pi - 2\gamma$ . Order the angles of the original triangle:  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ . Then  $\pi - 2\alpha \geq \pi - 2\beta \geq \pi - 2\gamma$ . Thus  $\pi - 2\alpha = \gamma$ . Hence  $\beta = \pi - \alpha - \gamma = \alpha$ . Thus we see that the original triangle is isosceles, contrary to our assumption.

Now assume that the remaining part is a triangle. Order the angles of the original triangle:  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ , denote by  $A, B, C$  the corresponding vertices. Denote by  $D$  the vertex of the angle  $\gamma$  in the  $\alpha$ -triangle. If some angle of the triangle  $BCD$  is not dissected then we obviously obtain rectangularity. So all three its vertices are connected with some point  $O$  inside the triangle. Clearly,  $\angle ABC > \angle OBC$  and thus  $\angle OBC = \alpha$ . Now the orientation condition implies  $\angle OCB = \gamma = \angle ACB$ , a contradiction.

**4a.** Polygon  $M$  has to be central symmetrical. In fact, a convex polygon can have not more than two sides parallel to the direction  $l$ . Thus if  $J_l(M) = 0$  for any directed line  $l$  then the sides of  $M$  divide into pairs of equal and parallel sides. Suppose  $M = A_1A_2 \dots A_{2n}$ . Its convexity implies that the only possible case is  $A_1A_2 \parallel A_{n+1}A_{n+2}, A_2A_3 \parallel A_{n+2}A_{n+3}, \dots, A_nA_{n+1} \parallel A_{2n}A_1$ . Hence  $\vec{A_1A_k} = -\vec{A_{n+1}A_{n+k}}$  for each  $k = 2, 3, \dots, n$ . Thus the midpoint of the segment  $A_1A_{n+1}$  is the center of symmetry for  $M$ .

**4b.** We present the proof from [1].

Consider all segments which are sides of  $M, M_1, M_2, \dots, M_k$ . Mark all points on them which are vertices of  $M, M_1, M_2, \dots, M_k$ . Then we obtain a finite number of smaller segments which we will call links. Each side of each polygon  $M, M_1, M_2, \dots, M_k$  consists of one or more links. Fig. 11 shows a dissection of a polygon into smaller parts. Side  $AM$  consists of three links  $AM, MN, NB$ ; side  $NP$  of the shaded polygon in the figure consists of three links as well.

Note that in calculating the invariant  $J_l(M)$  of the polygon  $M$  (or of any polygon  $M_1, M_2, \dots, M_k$ ) we may use the algebraic sum of links parallel to  $l$ , instead of sides, since the length of each side equals the sum of length of links contained in it. So for calculating the sum in the right side of the relation in Problem 4b, we have to form the algebraic sum of lengths of all links parallel to  $l$  and counted over all polygons  $M_1, M_2, \dots, M_k$ .

Consider a link which is entirely (excluding endpoints, possibly) situated inside  $M$  (link  $EF$  at Fig. 11). Then it is adjacent for two polygons among  $M_1, M_2, \dots, M_k$  which adjoin the link from opposite sides (right and left). So in calculating the invariant of one of these polygons, the link will take plus sign, and for the other polygon it will take minus sign, so that in the total algebraic sum these two links cancel. We see that in calculating of the right-hand side in the relation from Problem 4b, we may ignore links situated inside  $M$ .

Now consider a link which belongs to the outline of  $M$  and is parallel to the line  $l$  (link  $AM$  at Fig. 11). To this link, there adjoins only one of polygons  $M_1, M_2, \dots, M_k$ , and from the same side as  $M$ . Hence this link has the same sign in the sum  $J_l(M_1) + J_l(M_2) + \dots + J_l(M_k)$  as in the invariant  $J_l(M)$ .

Thus the right-hand side of the relation in Problem 4b equals  $J_l(M)$ , and our assertion is proven.

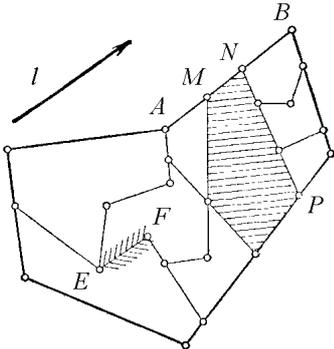


Fig. 11.

**4c.** Suppose a polygon  $M'$  is dissected into polygons  $M_1, M_2, \dots, M_k$  which are combined into a polygon  $M'$  using only parallel shifts of parts. Note that the values of  $J_l(M_i)$  are invariant under shifts of  $M_i$ . Thus the result of Problem 4b implies

$$J_l(M) = J_l(M_1) + \dots + J_l(M_k) = J_l(M),$$

as required.

**4d.** For any square  $M'$  and any directed line  $l$  we have  $J_l(M') = 0$ . Hence by Problem 4c,  $J_l(M) = J_l(M') = 0$ . Then by Problem 4a the polygon  $M$  is central symmetrical.

**5a.** Follows from 4b.

**5b.** If the angle  $n\pi$  is divisible by  $\phi$  for some odd  $n$  then obviously  $J_{l,\phi}(M) = 0$ . In the sequel suppose that  $n\pi$  is not divisible by  $\phi$  for any odd  $n$ . Clearly, if no angle between  $l$  and the sides of triangle  $M$  is divisible by  $\phi$  then  $J_{l,\phi}(M) = 0$ . Suppose now that  $J_{l,\phi}(M) = 0$ , and the angle between some side  $AB$  and the line  $l$  is divisible by  $\phi$ . Then side  $AB$  has nonzero contribution to  $J_{l,\phi}(M)$ . Hence its contribution has to cancel with contributions of the remaining sides. Consequently, the triangle has another side, say  $BC$ , whose angle with  $l$  is divisible by  $\phi$ . All three sides cannot be in use because  $AB \pm BC \pm CA \neq 0$  by triangle inequality. Hence the triangle is isosceles,  $AB = BC$ , and  $\angle B = n\phi$  for some integer  $n$ . Conversely, for any such triangle we have  $J_{l,\phi}(M) = 0$ , provided the angle between  $AB$  and  $l$  is divisible by  $\phi$  and the angle between  $AC$  and  $l$  is not. These are all the possible cases.

**5c.** Consider a directed line  $l$  containing some side  $s$ . Then  $J_{l,\phi}(M) \neq 0$  by Problem 5b. Thus  $J_{l,\phi}(M') \neq 0$ . Hence there exists a side  $s'$  of triangle  $M'$  such that the angle between  $s$  and  $s'$  is divisible by  $\phi$ . This implies what is required.

**5d.** We may assume  $\psi = 0$ . The result of Problem 5a implies that two triangles  $M$  and  $M'$ , the cake and the box, must have the same invariant  $J_{l,\phi}(M)$  for any directed line  $l$ . From Problem 5c we see that the sides of triangles  $M$  and  $M'$  can be enumerated so that the angle between sides with the same numbers are divisible by  $\phi$ . For instance, let the corresponding sides of triangles  $M$  and  $M'$  have the same number. Denote by  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$  the angle between these sides and some fixed

line. Then  $\alpha_i - \alpha'_i = k_i\phi$  for some integer  $k_i$  and  $i = 1, 2, 3$ . On the other hand,  $\alpha_i - \alpha_{i+1} = \alpha'_{i+1} - \alpha'_i$  for  $i = 1, 2, 3$ , where we set  $\alpha_4 = \alpha_1$  by definition. The resulting system of 6 linear equations easily leads to the required consequence. In particular, there exist integers  $k, l, m$  such that some of them is not zero and  $k(\alpha_1 - \alpha_2) + l(\alpha_2 - \alpha_3) + m(\alpha_3 - \alpha_1) = 0$ .

**5e. Proof of Statement I for Problem A.** It suffices to consider the case of a non-isosceles triangle. We may assume that while packing the parts into the box, one of them remains fixed, and the other one is joined to it being rotated through an angle  $\phi$  around some point  $O$ . Two cases are possible.

(1) The angle  $\phi$  is incommensurable with  $\pi$ . Then the result of Problem 5 implies our assertion.

(2) The angle  $\phi$  is commensurable with  $\pi$ .

For any directed line  $l$ , denote by  $L$  the set of lines obtained from  $l$  by rotations *around point  $O$*  through angles divisible by  $\phi$ . On the set of directed lines, introduce the following function  $f$ :  $f(XY) = 1$  if  $XY \in L$ ,  $f(XY) = -1$  if  $YX \in L$ , and  $f(XY) = 0$  otherwise.

First let the point  $O$  be distinct from the vertices of the triangle  $M$ . Then there exist two sides of  $M$ , say  $AB$  and  $BC$ , not containing the point  $O$ . For the line  $l$  containing the side  $AB$ ,  $J_f(M) = \pm|AB|$  (otherwise one of the angles of the triangle  $M$  immediately is divisible by  $\phi$ , thus commensurable with  $\pi$ ). Let  $M'$  be the triangle obtained from  $M$  after moving the parts. Arguing similarly to Problem 5a we obtain that  $J_f(M') = J_f(M) = \pm|AB|$ . Thus the side of length  $|AB|$  in the triangle  $M'$  and the side  $AB$  of  $M$  form an angle divisible by  $\phi$ . Similarly, the side of length  $|BC|$  in  $M'$  and the side  $BC$  of  $M$  form an angle divisible by  $\phi$ . Then using commensurability of  $\phi$  and  $\pi$ , and arguing as in Problem 5d we obtain  $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$  for some integers  $k, l, m$ , not vanishing simultaneously.

It remains to consider the case when the point  $O$  coincides with one of the vertices of the triangle  $M$ . Let us introduce one more invariant. Let  $OX$  be some *ray* starting at  $O$ . For any directed segment  $AB$ , denote by  $J_{OX}(AB)$  the length of the intersection  $AB \cap OX$  taken with  $+$  sign if  $AB$  has the same direction as  $OX$ , and with  $-$  sign otherwise. For any polygon  $P$  denote by  $J_{OX,\phi}(P)$  the sum of values  $J_{OY}(AB)$ , where  $AB$  runs over all directed sides of  $P$ , and  $OY$  runs over all rays obtained from  $OX$  by rotations through angles divisible by  $\phi$ . Then the given invariant is not zero for the sides of the triangle  $M$  containing  $O$ . Arguing as in Problem 5d we get the required relation  $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$  for some integers  $k, l, m$ , not vanishing simultaneously.

**6a.** The proof is similar to the solution of Problem 4b.

**6b.** Any triangle  $A_iB_iC_i$  can be connected with side  $AB$  by a chain of triangles  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_iB_iC_i$  such that consecutive triangles have a common part of the boundary, and  $A_1B_1$  is contained in  $AB$ . Hence it suffices to prove that if some side of triangle  $A_jB_jC_j$  and the line  $AB$  form an angle of the form  $k\alpha + l\beta + m\gamma$  then this is true for two other sides. The latter statement is obvious.

**6c.** Problem 6b suggests that the *revealing* function  $f$  is to be some function in  $k, l$  and  $m$ .

Thus let  $f(XY) = f(k, l, m)$  where integers  $k, l, m$  are such that the angle between directed lines  $XY$  and  $AB$  equals  $k\alpha + l\beta + m\gamma$ . By definition, the angle between directed lines  $XY$  and  $AB$  is the angle of the rotation which maps  $AB$  into  $XY$  as directed lines. The angle between directed lines is determined up to  $2\pi$ . Hence integers  $k + 2, l + 2, m + 2$  define the same angle as  $k, l, m$ . Thus we obtain a condition for our function:  $f(k + 2, l + 2, m + 2) = f(k, l, m)$ . Since  $\alpha, \beta, \gamma$  are incommensurable, integers  $k, l, m$  are uniquely determined by directed line  $XY$  up to substitution  $k, l, m \rightarrow k + 2, l + 2, m + 2$ . Hence any function subject to  $f(k + 2, l + 2, m + 2) = f(k, l, m)$  correctly defines a function on the set of directed lines. (We set  $f(XY) = 0$  if  $XY$  is distinct from dissecting lines.)

Now we determine the other conditions on  $f(k, l, m)$ . First,  $f(XY) = -f(YX)$ , hence

$$f(k + 1, l + 1, m + 1) = -f(k, l, m). \quad (1)$$

This condition also implies  $f(k + 2, l + 2, m + 2) = f(k, l, m)$ .

Consider now the condition  $J_f(A_iB_iC_i) = 0$ . Suppose the vertices of triangle  $ABC$  are situated in the above order clockwise, and the vertices of triangle  $A_iB_iC_i$  counterclockwise. Let the angle between directed lines  $A_iB_i$  and  $AB$  be equal to  $k\alpha + l\beta + m\gamma$ . Then the angle between lines  $A_iC_i$  and  $AB$  equals  $(k - 1)\alpha + l\beta + m\gamma$ , and the angle between lines  $C_iB_i$  and  $AB$  equals  $k\alpha + (l + 1)\beta + m\gamma$ . Hence

$$J_f(A_iB_iC_i) = f(k, l, m)|A_iB_i| - f(k, l + 1, m)|B_iC_i| - f(k - 1, l, m)|C_iA_i|.$$

Since triangles  $A_iB_iC_i$  and  $ABC$  are similar, the condition  $J_f(A_iB_iC_i) = 0$  may be rewritten in the form

$$f(k, l, m)|AB| - f(k, l + 1, m)|BC| - f(k - 1, l, m)|CA| = 0. \quad (2)$$

The same argument shows that the condition  $J_f(ABC) \neq 0$  may be rewritten in the form

$$f(0, 0, 0)|AB| - f(0, -1, 0)|BC| - f(1, 0, 0)|CA| \neq 0. \quad (3)$$

Thus it suffices to find a function  $f(k, l, m)$  satisfying (1)–(3). Note that the second relation determines some restrictions on  $f(k, l, m)$  for  $m$  fixed. Thus it suffices to define the function for  $m = 0$ , and then the first relation will determine it for all other  $m$ . In view of utter arbitrariness, put  $f(k, 0, 0) = 1$  for all  $k$ . Then  $f(k, 1, 0) = (|CA| - |AB|)/|BC|$  for all  $k$ . Furthermore we may assume  $f(k, l, 0) = ((|CA| - |AB|)/|BC|)^l$ , and correction for the first relation gives

$$f(k, l, m) = (-1)^m \cdot \left( \frac{|CA| - |AB|}{|BC|} \right)^{l-m}.$$

For this function  $f(k, l, m)$  relations (1)–(3) are verified immediately.

**6d. Proof of Statement I for Problem B.** Straightforward from Problems 6a and 6c.

**6e.** The answer is unknown to the authors.

**7.** To any curvilinear polygon  $M$ , attach an integer  $J(M)$  equal to the length sum of boundary arcs such that the polygon adjoins them from the "concave" side, minus the length sum of arcs such that the polygon adjoins them from the "convex"

side. It is easy to check that  $J(M)$  has equal values for two polygons such that one of them is obtained from the other one but dissection by segments and arcs and combining the obtained parts. On the other hand, a circle has  $J(M) \neq 0$ , and a square has  $J(M) = 0$ .

## SOLUTIONS: PART II.

**8. Geometric solution.** The cube  $ABCD A' B' C' D'$  can be dissected into 6 tetrahedrons  $AC' BB'$ ,  $AC' B' A'$ ,  $AC' A' D'$ ,  $AC' D' D$ ,  $AC' DC$ ,  $AC' CB$  by six planes passing through the pair of the opposite vertices  $A, C'$  and one of the remaining vertices of the cube. The congruence of the tetrahedrons follows from symmetry (for instance, tetrahedron  $AC' BB'$  maps onto tetrahedron  $AC' A' D'$  under rotation of the cube through  $120^\circ$  around the line  $AC'$ ).

*Algebraic solution.* The cube  $0 \leq x, y, z \leq 1$  can be dissected into 6 tetrahedrons  $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq z \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq x \leq z \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq z \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq x \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq y \leq x \leq 1$ .

**9a.** Draw the line joining the midpoints of two long sides of the rectangle.

**9b.** Divide two long sides of the rectangle into  $q$  equal parts, and two short sides into  $p$  equal parts. Through the corresponding division points, draw lines parallel to the sides of the rectangle.

**9c.** Let a rectangle  $1 \times x$ ,  $x = \sqrt[4]{2}$  be given. Cut off a rectangle  $1 \times \frac{1}{x}$ . From the obtained strip  $1 \times (x - \frac{1}{x})$ , cut off two rectangles  $(x^2 - 1) \times (x - \frac{1}{x})$ . From the strip  $(3 - 2x^2) \times (x - \frac{1}{x})$ , cut off a rectangle  $(3 - 2x^2) \times (\frac{3}{x} - 2x)$ . The obtained rectangle  $(3 - 2x^2) \times (3x - \frac{4}{x})$  has side ratio equal to  $x$  as well since  $x^4 = 2$ .

**9d.** Let

$$r = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

is a periodic continuous fraction. Since the sequence  $a_k$  is periodic, for some  $n$  we have

$$r = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{2n} + \frac{1}{r}}}$$

Starting from this equality, we easily construct a dissection of the rectangle  $1 \times r$  into several squares and a single rectangle with side ratio  $r$ . In fact, cut off  $a_1$  squares  $1 \times 1$  first. We obtain the strip  $1 \times (r - a_1)$  with side ratio

$$\frac{1}{r - a_1} = a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{2n} + \frac{1}{r}}}$$

Now cut off  $a_2$  squares  $(r - a_1) \times (r - a_1)$  etc. Proceeding in such a way, we obtain a rectangle with side ratio  $r$ .

The constructed dissection of the rectangle  $1 \times r$  leads easily to the required dissection of the rectangle  $1 \times \sqrt{r}$ : contract the rectangle  $1 \times r$  in  $\sqrt{r}$  times along side  $r$ .

**9e.** The rectangle with side ratio  $a$  is dissected into 3 vertical strips. First strip includes top-down rectangles with side ratio  $a, \frac{1}{a}$ ; the second one, respectively:  $a, a, \frac{1}{a}$ ; the third one:  $a, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}$ . In fact,

$$\frac{1}{a + \frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + a} + \frac{1}{\frac{1}{a} + a + a} = a;$$

$$(a^2 + 1)(2a^2 + 1)(a^2 + 2) = (a^2 + 1)(a^2 + 2) + (a^2 + 1)(2a^2 + 1) + (2a^2 + 1)(a^2 + 2);$$

$$2a^6 + 2a^4 - 4a^2 - 3 = 0.$$

The polynomial  $2x^3 + 2x^2 - 4x - 3$  has no rational roots. Indeed, if  $\frac{p}{q}$  is a fraction in its lowest terms then  $p$  divides the intercept, and  $q$  divides the leading coefficient. The examination of cases shows easily that  $\pm 3, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$  are not roots of the given polynomial.

**9f.** It is easy to dissect the rectangle into 4, 6 and 8 parts. Given the dissection into  $n$  parts it is easy to construct the dissection into  $n + 3$  parts.

**10a.** Let  $e_i$  be the corresponding edge of some polyhedron  $M_j$ . Consider a cylinder  $C$  having axis  $e$  and radius 1. The dihedral angle at edge  $e$  cuts off in the cylinder surface a band  $L$  having length  $\alpha$  and width  $l$ . In the surface of the sub-cylinder  $C_i$  having axis  $e_i$  and radius 1, the dihedral angle at edge  $e_i$  cuts off a band  $L_i$  having  $\alpha_i$  and length  $l_i$ . Since the dissection polyhedrons are disjoint and cover  $M$ , the band  $L$  is dissected into bands  $L_1, L_2, \dots, L_n$ . It remains to establish the natural correspondence between points of  $L$  and of the rectangle  $l \times \alpha$  to obtain its dissection into rectangles  $l_i \times \alpha_i$ .

**10b.** Any common point of the line  $\ell$  and of polyhedron  $M$  is either an internal point of some polyhedron  $M_i$  or belongs to the boundary of several dissection polyhedrons. Let  $e_1, e_2, \dots, e_n$  be the edges of dissection polyhedrons belonging to the line  $\ell$  (and having length  $l_1, l_2, \dots, l_n$  resp.). Let  $f_1, f_2, \dots, f_m$  be the lengths of various intersections of  $\ell$  with faces of  $M_i$ , not coinciding with edges. Thus edges  $e_1, e_2, \dots, e_n$  form a family of segments on  $\ell$ . Without loss of generality,  $e_1, e_2, \dots, e_s$  is the set of edges belonging to such a segment  $I$ . We will prove that the set of rectangles  $e_1 \times \alpha_1, e_2 \times \alpha_2, \dots, e_s \times \alpha_s$  is scissor-congruent to the rectangle  $l \times \pi$ . Having proved this for every such segment and joining together the obtained rectangles of width  $\pi$ , we get the assertion of the problem.

Let  $C$  be the surface of a cylinder having axis  $I$  and radius 1 without heads. The dihedral angles at  $e_1, e_2, \dots, e_n$  cut off from  $C$  bands  $l_i \times \alpha_i$  (having line length  $l_i$  and circle width  $\alpha_i$ ). Since the polyhedrons are disjoint and cover the whole polyhedron  $M$ ,  $C$  is dissected into bands  $l_i \times \alpha_i$  and  $f_i \times \pi$ . Extend all circular slits. Then  $C$  is dissected into rings. Remove from rings all bands having width  $\pi$  (parts of redundant bands having line length  $f_i$ ), and dissect not changed rings into 2 bands having circular width  $\pi$ . All the remaining can be combined into a band of circular width  $\pi$  which corresponds to the rectangle of width  $\pi$  dissected into parts of rectangles  $l_1 \times \alpha_1, l_2 \times \alpha_2, \dots, l_s \times \alpha_s$ , obtained by shifts, vertical and horizontal slits.

**10c.** The set of rectangles corresponding to the first polyhedron, being combined with some set of rectangles having width  $\pi$ , is by 10a and 10b  $\square$ -scissor-congruent to the join of sets of rectangles corresponding to the dissection polyhedrons. The same is true for the second polyhedron. But obviously the  $\square$ -scissors-congruence relation is transitive and symmetrical, and we are done.

**10d.** Let  $M$  be the midpoint of  $CD$ . Since  $AM$  and  $BM$  are perpendicular to  $CD$ , the value of  $\angle AMB$  equals the value of the dihedral angle at edge  $CD$  of the tetrahedron. Suppose the length of the edge of the tetrahedron equals  $a$ , then the formula for the altitude of the regular triangle gives  $AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ . By cosine theorem applied to triangle  $AMB$ ,  $\cos\theta = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AMBAM} = \frac{1}{3}$ .

Let us prove by induction that  $\cos n\theta = \frac{a_n}{3^n}$  where  $a_n$  is an integer not divisible by 3. For initial values  $n = 0$  and  $n = 1$ , the fact is obvious.

The induction step. Formula for the sum of cosines for  $n \geq 1$ :  $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta$ , so  $\cos(n+1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta - \cos(n-1)\theta = \frac{2a_n - 3a_{n-1}}{3^{n+1}}$ . Indeed,  $2a_n - 3a_{n-1}$  is not divisible by 3.

Hence  $\cos k\theta \neq 1$ , then  $k\theta \neq 2\pi n$ , i.e.  $\theta \neq \frac{2}{q}\pi$ .

**11a.** Suppose the first set is dissected into rectangles which are shifted are combined into the second set. Extend all the vertical slits in the dissection of the first set and horizontal slits in the dissection of the second one. The obtained dissection can be fulfilled by elementary dissections: first dissect the first set through all vertical slits, then dissect each vertical strip by horizontal slits. Collect all horizontal strips in the dissection of the the second set and join them.

**11b.** Introduce the following operation for the set  $\theta, \pi, y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$ : remove  $y_i$  with the greatest  $i_s$  such that  $p\theta + q\pi + \mu_1 y_{i_1} + \mu_2 y_{i_2} + \dots + \mu_k y_{i_k} = 0$  where all coefficients are rational and  $\mu_s \neq 0$ . Apply this operation to the initial set repeatedly until possible. We obtain a set  $\theta, \pi, y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_r}$ . Note that for any  $x \in Y$  there exist rational  $p, q, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  such that  $x = p\theta + q\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \dots + \mu_r y_{j_r}$ . Suppose  $p_1\theta + q_1\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \dots + \mu_r y_{j_r} = x = p_2\theta + q_2\pi + \xi_1 y_{j_1} + \xi_2 y_{j_2} + \dots + \xi_r y_{j_r}$ , then  $(p_1 - p_2)\theta + (q_1 - q_2)\pi + (\mu_1 - \xi_1)y_{j_1} + \dots + (\mu_r - \xi_r)y_{j_r} = 0$ . If  $\mu_t \neq \xi_t$  then the set  $\theta, \pi, y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_r}$  allows to apply the above operation once more — a contradiction. Hence  $\mu_t = \xi_t$  for all  $t$ . But  $\theta$  and  $\pi$  are incommensurable and nonzero, hence  $p_1 = p_2$  and  $q_1 = q_2$ , i.e. for any  $x$  from  $Y$  there exist unique rational  $p, q, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  such that  $x = p\theta + q\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \dots + \mu_r y_{j_r}$ .

**11c.** Suppose a new set is obtained by dissecting the rectangle  $x \times y$ .

The slit is vertical: the invariant becomes  $x_1 f(y) + x_2 f(y) - x f(y) = 0$ .

The slit is horizontal: the invariant becomes  $x f(y_1) + x f(y_2) - x f(y)$ .

Suppose  $y_1 = f(y_1)\theta + q_1\pi + \mu_1 y'_1 + \mu_2 y'_2 + \dots + \mu_n y'_n$ ,  $y_2 = f(y_2)\theta + q_2\pi + \xi_1 y'_1 + \xi_2 y'_2 + \dots + \xi_n y'_n$ . Then  $y = y_1 + y_2 = (f(y_1) + f(y_2))\theta + (q_1 + q_2)\pi + (\mu_1 + \xi_1)y'_1 + (\mu_2 + \xi_2)y'_2 + \dots + (\mu_n + \xi_n)y'_n$ . That is,  $f(y) = f(y_1) + f(y_2)$  and the invariant has not changed.

**11d.** Since the invariant does not change under elementary transformation of the set (11c), by 11a invariants of  $\square$ -scissor-congruent sets are equal. However the invariant of the set  $(a \times \theta, l \times \pi)$  equals  $a$ , and that of  $b \times \pi$  is zero. Hence these sets are not  $\square$ -scissor-congruent. **11e.** Suppose the contrary. Then by Lemma I the sets of 6 copies of  $a \times \theta$ ,  $l_1 \times \pi$  and of 8 copies of  $b \times \frac{\pi}{2}$  are  $l_2 \times \pi$   $\square$ -scissor-congruent. However the first set is  $\square$ -scissor-congruent to the set  $6a \times \theta$ ,  $l_1 \times \pi$ , and the second one to the set  $(\frac{b}{2} + l_2) \times \pi$ . Hence two latter sets are  $\square$ -scissor-congruent, but this is impossible by Lemma II in view of 10d. A contradiction.

**12a.** *Solution based on reduction to Lemma II.* If the rectangle  $a \times b$  can be dissected into squares, then it is  $\square$ -scissor-congruent to the rectangle  $b \times a$  (since the square maps onto itself under rotation through  $90^\circ$ .) Then by Lemma II the relation  $\frac{a}{b}$  is rational.

*Straightforward solution.* We also show that side ratio of a rectangle is uniquely determined by the arrangement of squares. Fix  $b$ . Let  $x_1, x_2, \dots, x_n$  be the side lengths of squares. The sides of squares may join into segments which are either sides of a rectangle, and hence  $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_s} = a$  or  $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_s} = b$ , or from both sides they side with squares whose sides satisfy  $a_1 + a_2 + \dots + a_s = b_1 + b_2 + \dots + b_t$ , here  $a_1, a_2, \dots, a_s$  are sides of squares, say, from the left and  $b_1, b_2, \dots, b_t$  from the right.

Write down all these equations. Express the variables subsequently and substitute them in the remaining equations starting from  $a$ . Eventually, the variables of the group containing  $a$  are expressed through the variables of another group by linear combinations with rational coefficients. Prove that the second group contains only  $b$ . Note that if the values of variables in the second group are such that all variables are positive then we obtain the required dissection of the rectangle into squares.

$$a = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n + \xi b$$

$$x_i = \mu_{i1} x_1 + \mu_{i2} x_2 + \dots + \mu_{in} x_n + \mu_i b$$

Naturally, the coefficients are nonzero only at variables of the second group. Let  $x_n$  be in the second group. Take the original dissection, replace  $x_n$  by  $\varepsilon$  so that each  $x$  and  $a$  remain positive. We obtain another dissection into squares of sizes  $x_1 + \mu_{1n}\varepsilon, x_2 + \mu_{2n}\varepsilon, \dots, x_{n-1} + \mu_{n-1n}\varepsilon, x_n + \varepsilon$  and a rectangle  $a + \xi_n \varepsilon \times b$ .

$$\text{Write down the equation for areas: } (a + \xi_n \varepsilon)b = (x_1 + \mu_{1n}\varepsilon)^2 + (x_2 + \mu_{2n}\varepsilon)^2 + \dots + (x_{n-1} + \mu_{n-1n}\varepsilon)^2 + (x_n + \varepsilon)^2 \Rightarrow (\mu_{1n}^2 + \mu_{2n}^2 + \dots + \mu_{n-1n}^2 + 1)\varepsilon^2 + (2x_1\mu_{1n} + 2x_2\mu_{2n} + \dots + 2x_{n-1}\mu_{n-1n} + 2x_n - \xi_n b)\varepsilon = 0$$

We see that not more than two  $\varepsilon$ 's satisfy this equation but we could start with any  $\varepsilon$  from some neighborhood of zero. Thus the second group contains only  $b$  and no  $x$ . As already mentioned, all variables are expressible as linear combinations of variables from the second group, so  $a = pb$  where  $p$  is rational.

*"Physical" solution.* Our assertion also follows from the result of Problem 13b with  $R = 1$ .

**12b.** Suppose the contrary. Let  $a_1, a_2, \dots, a_n$  be the edges of tetrahedrons in a dissection of a tetrahedron having edge  $a$ . Then the result of Problem 10 implies that the set  $6a_1 \times \theta, 6a_2 \times \theta, \dots, 6a_n \times \theta$  is  $\square$ -scissor-congruent to the set  $6a \times \theta, l \times \pi$ . Hence by Problem 11 we have  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a$ . The volumes are equal:  $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = a^3$ . Cube the first equation:  $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 + A = a^3$  where  $A > 0$  — a contradiction with the second equation.

*Sketch of a geometric solution.* Take an edge of a smaller tetrahedron completely contained in a face of a larger tetrahedron. Then all the dihedral angles at this edge are equal to  $\theta$ , but their sum should be  $\pi$ . Since  $\theta$  and  $\pi$  are incommensurable, we obtain a contradiction.

**13a.** Let  $U_1$  and  $U_2$  be voltage in the upper and the lower non-boundary nodes. If the calorification at the 2nd and 3rd resistors is greater than at the 4th and 5th ones then replace  $U_1$  by  $U_2$ . The total calorification will decrease. If the calorification is equal

then we decrease the total calorification by the same way. Hence the minimum calorification is obtained at  $U_1 = U_2$ . Now the circuit is reduced by obvious elementary transformations to a circuit consisting of a single resistor.

**13b.** The circuit is reduced by obvious elementary transformations to a circuit consisting of a single resistor.

**14a. Geometrical solution.** By problem 11, the given dissection of the rectangle can be obtained as a sequence of elementary (and inverse to them) transformations. Now note that the total resistance of the circuit does not change under an elementary transformation.

"Physical solution". Suppose that a rectangular plate is made of a homogeneous conductive material. Assume its specific resistance to be equal to 1. Connect the vertical sides of the plate with poles of a direct current source. Then the resistance of the plate equals the ratio of horizontal and vertical sides. Now suppose that the rectangle is dissected into smaller rectangles. Mark all slits on the plate. Note that the sense of current on the plate is horizontal. So if we dissect the plate through all horizontal slits then its resistance does not change.

Now we may dissect the plate through all vertical slits and connect by wires those pairs of vertical sides of small rectangles which did coincide in the original rectangle. Clearly total resistance of the circuit does not change.

Each of small rectangular plates in the circuit obtained is a resistor with resistance equal to the ratio of the horizontal and the vertical sides of the corresponding plate.

Thus we have shown that total resistance of the circuit corresponding to a dissection of a rectangle equals its side ratio. This implies the assertion of Problem 14a.

**14b. Analytical solution.** Suppose  $U = 1$ . Suppose the minimum calorification corresponds to  $U_1, U_2, \dots, U_n$ . Fix  $U_2, U_3, \dots, U_n$  and consider the calorification as a function of  $U_1$ . Since this function is a sum of squares of linear functions and is not constant, after grouping coefficients we get a positive coefficient at  $U_1^2$ . The minimum of a square function is achieved at the vertex of a parabola, hence  $U_1 = a_2(R)U_2 + a_3(R)U_3 + \dots + a_n(R)U_n + a_1(R)$  where  $a_i(R)$  is a ratio of two polynomials in  $R$  having integer coefficients. Substitute the expression for  $U_1$  into our square function to get a function in  $(n-1)$  variables. As a function in  $U_2$ , it cannot be constant (consider the behavior of calorification for large  $U_2$ ). Arguing as above, we obtain  $U_n = \frac{P_n(R)}{Q_n(R)}$ .

Returning, we find  $U_i = \frac{P_i(R)}{Q_i(R)}$ . Thus the total calorification equals  $\frac{U^2}{P} = \frac{P(R)}{Q(R)}$ .

*Geometrical solution.* We will show that the side ratio of the dissected rectangle is the ratio of some polynomials with integer coefficients in side ratios of rectangles. Let  $x_1, x_2, \dots, x_n$  be the lengths of vertical sides of rectangles, and  $R_1, R_2, \dots, R_n$  be the ratios of their horizontal and vertical sides. The sides of the rectangles may be united into segments. Either such a segment is a side of the initial rectangle, hence  $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_s} = a$  or  $x_{i_1}R_{i_1} + x_{i_2}R_{i_2} + \dots + x_{i_s}R_{i_s} = b$ , or this segment is situated between two dissection rectangles whose sides satisfy  $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_s} = x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_t}$  or  $x_{i_1}R_{i_1} + x_{i_2}R_{i_2} + \dots + x_{i_s}R_{i_s} = x_{j_1}R_{j_1} + x_{j_2}R_{j_2} + \dots + x_{j_t}R_{j_t}$ , here  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$  are sides of the rectangles from one side, and  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_t}$  from the other.

Write down all these equations (in variables  $x$ 's,  $a$  and  $b$ ). Express the variables except  $b$  subsequently and substitute to the remaining equations, starting with  $a$ . After using all possibilities we obtain that each variable from the first group (containing  $a$ ) is expressed through the variables from the second group (containing  $b$ ) as a linear combination whose coefficients are ratios of polynomials in  $R_1, R_2, \dots, R_n$ :

$$a = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n + \xi b$$

$$x_i = \mu_{i1} x_1 + \mu_{i2} x_2 + \dots + \mu_{in} x_n + \mu_i b \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

The left-hand variables are expressed by equations which have nonzero coefficients only at the variables from the second group (for these variables we add equations  $x_i = x_i$ ).

Let us prove that the second group consists of  $b$  only. Suppose the contrary. Let  $x_n$  belong to the second group. Note that if the variables from the second group have such values that all equations are valid and the values are positive then we obtain the required dissection of the rectangle (prove this). Take the original dissection, increase  $x_n$  by  $\varepsilon$  so that all  $x$ 's and  $a$  remain positive. We obtain a large rectangle with sides  $a + \xi_n \varepsilon$  and  $b$  dissected into rectangles with vertical sides  $x_1 + \mu_{1n} \varepsilon, x_2 + \mu_{2n} \varepsilon, \dots, x_{n-1} + \mu_{n-1n} \varepsilon, x_n + \varepsilon$ .

The equality of areas has the form  $(a + \xi_n \varepsilon)b = R_1(x_1 + \mu_{1n} \varepsilon)^2 + R_2(x_2 + \mu_{2n} \varepsilon)^2 + \dots + R_{n-1}(x_{n-1} + \mu_{n-1n} \varepsilon)^2 + R_n(x_n + \varepsilon)^2 \Rightarrow (R_1 \mu_{1n}^2 + R_2 \mu_{2n}^2 + \dots + R_{n-1} \mu_{n-1n}^2 + 1)\varepsilon^2 + (2R_1 x_1 \mu_{1n} + 2R_2 x_2 \mu_{2n} + \dots + 2R_{n-1} x_{n-1} \mu_{n-1n} + 2R_n x_n - \xi_n b)\varepsilon = 0$

We see that not more than two  $\varepsilon$ 's satisfy this equation, but originally we can take any  $\varepsilon$  from some neighborhood of zero. Hence the second group in fact does not contain any  $x$  but  $b$  only. As was already noted above, all variables of the first group can be expressed as linear combinations of the variables from the second group, that is,  $a = pb$ , where  $p$  is a ratio of polynomials in  $R_1, R_2, \dots, R_n$ .

**14c. Answer:** no, it is impossible. Increase the resistance of this resistor keeping the voltage at all nodes the same. Then the calorification will decrease, and after redistribution it will decrease once more, hence the total resistance will increase.

**14d.** Suppose a rectangle with side ratio  $R$  is dissected into rectangles with side ratio  $R$  and  $\frac{1}{R}$ , and there exists some rectangle of the second form. After dilation with factor  $R$  we obtain a square dissected into squares and rectangles having side ratio  $\frac{1}{R^2}$ . By Problem 14a, we have a circuit with resistance 1, which consists of resistors with resistance 1 and  $\frac{1}{R^2}$ . By Problem 14b, total resistance is a ratio of polynomials in  $R$  with integer coefficients. Assign the value 1 to it.

1) If the ratio of the polynomials is not 1 identically then  $R$  is a root of a polynomial with integer coefficients.

2) If both polynomials are equal then under increasing  $R$ , total resistance remains equal to 1. Then if some resistor has resistance  $\frac{1}{R^2}$  then its resistance decreases. If we decrease these resistance one after another then the solution of Problem 14 shows that total resistance decreases, a contradiction.

## SUMMARY: COMPLETE INVARIANTS.

In the present project, we have constructed examples of invariants which make it possible to prove impossibility of some dissections. A natural question arises, what invariants among them are *complete*, that is, in which cases equality of invariants for two polygons implies existence of the required dissection?

It turns out that most of the constructed invariants are in fact complete.

Start with the simplest example,  $J_l(M)$  (*Hadwiger invariant*). As shown above, if a polygon  $M$  can be dissected into several polygons which can be combined using only parallel shifts of parts to form a new polygon  $M'$  then  $J_l(M) = J_l(M')$  (Problem 4c). In some sense, the converse turns out to be true as well:

**Hadwiger–Gluer Theorem.** [1] A polygon  $M$  can be dissected into several polygons which can be combined into a polygon  $M'$  by parallel shifts of parts only, if and only if the areas of  $M$  and  $M'$  are equal and any directed line  $l$  satisfies  $J_l(M) = J_l(M')$ .

We do not know whether the similar assertion is valid for the invariant  $J_{l,\phi}(M)$  (cf. Problem 5a). It is known to be true in the particular case  $\phi = \pi$ . Then  $J_{l,\phi}(M) \equiv 0$ , and another Hadwiger–Gluer theorem states that any two polygons in the plane, having equal area can be dissected into polygons whose corresponding sides are parallel. At first sight, this is improbable: consider, for instance, two congruent triangles in the plane such that one of them is obtained from the other one by rotation through a small angle.

Now consider polyhedrons. The set of rectangles which we attach to polyhedron is called its *Dehn invariant* (this definition is equivalent to the usual algebraic definition [2]). Surprisingly, some converse for Lemma I is true as well:

**Sidler theorem** [1] If two polyhedrons have equal volume and the corresponding sets of rectangles become  $\square$ -scissor-congruent after adding appropriate rectangles of the form  $l \times \pi$  then two original polyhedrons are scissor-congruent.

The above constructed invariant of  $\square$ -scissor-congruence of sets of rectangles in the plane is not complete but an analogous procedure leads to a complete invariant (*Kenyon invariant* [4]).

To conclude, let us discuss sufficiency of the obtained conditions for the numbers  $\alpha, \beta, \gamma$  and  $x$  in Problems A, B, D. We don't know whether the number  $x$  in Problem D be a root of an *arbitrary* polynomial having integer coefficients. However a similar problem on dissection a square into similar rectangles has negative answer:

**Laszkovich–Szekeres–Freiling–Rinne theorem.** [3, 5] For any  $x > 0$  the following conditions are equivalent:

- (1) a square can be dissected into similar rectangles with side ratio  $x$ ;
- (2) the number  $x$  is algebraic, and all complex numbers conjugate to it have positive real part;
- (3) there exist positive rational numbers  $c_1, c_2, \dots, c_n$  such that

$$c_1x + \frac{1}{c_2x + \frac{1}{\dots + \frac{1}{c_nx}}} = 1.$$

Thus a square can be dissected into similar rectangles with side ratio  $2 + \sqrt{2}$  but cannot be dissected into rectangles with side ratio  $1 + \sqrt{2}$ .

We don't possess a complete description of angles  $\alpha, \beta, \gamma$  such that triangles in Problems A and B can be dissected. It is not even known whether a triangle exists which is not right but can be dissected into several triangles similar to it but oriented oppositely.

#### ACKNOWLEDGEMENTS.

The authors appreciate S. Dorichenko, A.Zaslavsky, K. Kokhas, G.Chelnokov and A.Shapovalov for useful discussion.

#### BIBLIOGRAPHY.

- [1] Boltyansky V.G., Equivalent and scissor-congruent figures, Popular lectures in mathematics, issue 22, ., 1956 (Rus.).
- [2] Fuks D., Can a tetrahedron be turned into a cube?, "Kvant" 11 (1990), 2–11.
- [3] Freiling C., Rinne D., Tiling a square with similar rectangles, Math. Res. Lett. 1 (1994), 547–558.
- [4] Kenyon R., Tilings and discrete Dirichlet problems, Israel Journal of Mathematics 105 (1998), 61–84.
- [5] Laszkovich M., Szekeres G., Tiling of the square with similar rectangles, Discr. Comp. Geometry 13 (1995), 569–572.

# Разрезания металлического прямоугольника

М.СКОПЕНКОВ, М.ПРАСОЛОВ, С.ДОРИЧЕНКО

**З**АДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ НАГЛЯДНЫ И КРАСИВЫ, но иногда их совсем не просто решить. С давних пор они вдохновляли дизайнеров и архитекторов. Ученые обратили на них внимание, когда обнаружилась их неожиданная связь с физикой и теорией вероятностей. Об одной из таких задач и пойдет речь в этой статье.

## Какие прямоугольники можно разрезать на квадраты

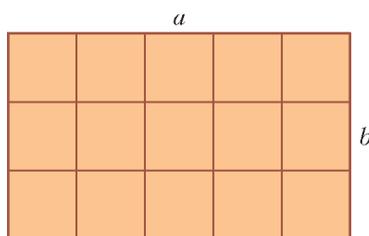


Рис.1. Прямоугольник  $a \times b$  разрезается на  $a \cdot b$  одинаковых квадратов

Прямоугольник размером  $a \times b$ , где  $a$  и  $b$  – целые числа, легко разрезается на  $a \cdot b$  одинаковых квадратов (рис.1). Так же легко разрезать на равные квадраты прямоугольник с рациональным отношением сторон.

Естественный вопрос: какие прямоугольники

можно разрезать на квадраты не обязательно одного и того же размера? Оказывается, ответ тот же самый:

**Теорема Дена о разрезании прямоугольника.** Если прямоугольник можно разрезать на квадраты (не обязательно равные), то отношение длин его сторон рационально.

Эту теорему открыл Макс Ден в 1903 году.

Его доказательство было довольно сложным. Впоследствии появились более простые. Мы приведем одно из них, принадлежащее Р.Л.Бруксу, К.А.Б.Смиту, А.Г.Стоуну и У.Т.Татту. Они придумали его, еще будучи студентами.<sup>1</sup> Это доказательство основано на физической интерпретации, использующей электрические цепи. При этом физические соображения служат отправной точкой, а само доказательство чисто математическое.

Итак, пусть прямоугольник разрезан на квадраты. Чтобы найти отношение его сторон, достаточно найти стороны этих квадратов с точностью до пропорциональности. Покажем на примере, как это можно сделать.

<sup>1</sup> Увлекательный рассказ об этом можно прочитать в главе «Квадрирование квадрата» книги М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М.: Мир, 1999).

## Как найти стороны квадратов

На рисунке 2 изображено фото<sup>2</sup> прямоугольного шкафа с квадратными полками. Представим себе, что мы хотим изготовить такой же шкаф. Для этого нам в



Рис.2. Прямоугольный шкаф с квадратными полками

первую очередь нужно узнать размеры полок. Просто измерить эти величины на фотографии не удастся, так как мы видим шкаф «под углом», а значит, истинные длины искажены.

Для того, чтобы найти эти размеры, занумеруем квадраты (полки), как показано на рисунке 3. Будем считать, что горизонтальная сторона прямоугольника (шкафа) равна 1, а вертикальную сторону (без учета ножек) обозначим через  $x$ . Сторону квадрата  $k$  обозначим через  $x_k$ .

<sup>2</sup> Фото с сайта <http://www.mynl.com/www/project11.html>

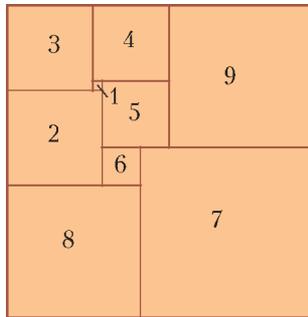


Рис.3. Нумерация квадратов

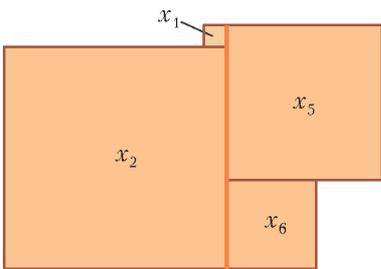


Рис.4. Условие вертикальной стыковки:  $x_1 + x_2 = x_5 + x_6$

разрезу слева, равна сумме сторон квадратов, примыкающих справа. Вертикальная сторона прямоугольника равна сумме сторон примыкающих к ней квадратов.<sup>3</sup>

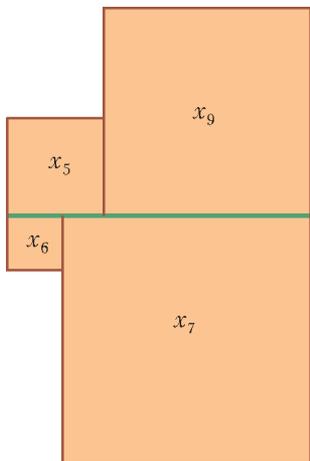


Рис.5. Условие горизонтальной стыковки:  $x_5 + x_9 = x_6 + x_7$

К левой стороне прямоугольника примыкают квадраты 2, 3 и 8, откуда  $x = x_2 + x_3 + x_8$ . К правой стороне квадрата 3 примыкают квадраты 1 и 4:  $x_3 = x_1 + x_4$ . Аналогично,  $x_6 + x_8 = x_7$ ,  $x_1 + x_2 = x_5 + x_6$ ,  $x_4 + x_5 = x_9$ . Равенство для правой стороны прямоугольника мы не записываем, поскольку оно следует из предыдущих (получается сложением всех выписанных равенств). Сформулируем наше наблюдение, (рис. 4):

**Условие вертикальной стыковки.** Для каждого вертикального разреза сумма сторон квадратов, примыкающих к

Заменив слово «вертикальный» на «горизонтальный», а слова «слева» и

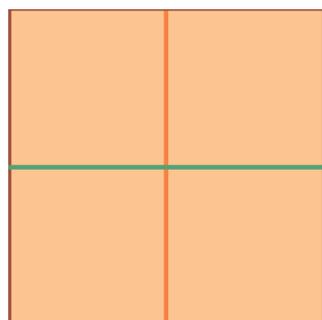


Рис.6. В таком разрезании один горизонтальный и два вертикальных разреза

«справа» – на «сверху» и «снизу», мы получаем условие горизонтальной стыковки, (рис. 5).

<sup>3</sup> Для разрезаний, у которых в некоторых точках сходится сразу 4 квадрата (как на рисунках 1 или 6), надо уточнить понятие разреза. Покрасим все горизонтальные стороны квадратов, не лежащие на периметре прямоугольника, в зеленый цвет. Они объединятся в несколько зеленых отрезков, которые мы и назовем горизонтальными разрезами. Вертикальные стороны квадратов, не лежащие на периметре, покрасим в оранжевый цвет. Полученные оранжевые отрезки делаются горизонтальными разрезами на части, именно эти части мы и назовем вертикальными разрезами (рис. 6).

Из этого условия в нашем примере со шкафом получим:  $1 = x_3 + x_4 + x_9$ ,  $x_4 = x_1 + x_5$ ,  $x_1 + x_3 = x_2$ ,  $x_5 + x_9 = x_6 + x_7$ ,  $x_2 + x_6 = x_8$ . Условие для нижней стороны прямоугольника мы не записываем, поскольку оно следует из остальных.

Итак, осталось решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x &= x_2 + x_3 + x_8, & x_3 &= x_1 + x_4, & x_6 + x_8 &= x_7, \\ x_1 + x_2 &= x_5 + x_6, & x_4 + x_5 &= x_9, \\ x_3 + x_4 + x_9 &= 1, & x_4 &= x_1 + x_5, & x_1 + x_3 &= x_2, \\ x_5 + x_9 &= x_6 + x_7, & x_2 + x_6 &= x_8. \end{aligned}$$

Такие уравнения называются *линейными*.

#### Как решить систему линейных уравнений<sup>4</sup>

Будем последовательно выражать неизвестные. В первом уравнении неизвестная  $x$  выражена через другие неизвестные. Больше  $x$  нигде не участвует, поэтому переходим ко второму уравнению. В нем неизвестная  $x_3$  выражена через  $x_1$  и  $x_4$ . Подставим это выражение в другие уравнения системы, содержащие неизвестную  $x_3$  – в первое, шестое и восьмое. Получим систему

$$\begin{aligned} x &= x_2 + x_1 + x_4 + x_8, & x_3 &= x_1 + x_4, & x_6 + x_8 &= x_7, \\ x_1 + x_2 &= x_5 + x_6, & x_4 + x_5 &= x_9, \\ x_1 + 2x_4 + x_9 &= 1, & x_4 &= x_1 + x_5, & 2x_1 + x_4 &= x_2, \\ x_5 + x_9 &= x_6 + x_7, & x_2 + x_6 &= x_8. \end{aligned}$$

Она равносильна исходной. Но теперь неизвестная  $x_3$  участвует только во втором уравнении. Перейдем к третьему уравнению. Подставляя выражение  $x_7 = x_6 + x_8$  в девятое уравнение, получим систему, содержащую  $x_7$  только в третьем уравнении:

$$\begin{aligned} x &= x_2 + x_1 + x_4 + x_8, & x_3 &= x_1 + x_4, & x_6 + x_8 &= x_7, \\ x_1 + x_2 &= x_5 + x_6, & x_4 + x_5 &= x_9, \\ x_1 + 2x_4 + x_9 &= 1, & x_4 &= x_1 + x_5, & 2x_1 + x_4 &= x_2, \\ x_5 + x_9 &= 2x_6 + x_8, & x_2 + x_6 &= x_8. \end{aligned}$$

Будем продолжать таким же образом дальше. В итоге мы получим систему «уравнений»

$$\begin{aligned} x &= 33/32, & x_3 &= 9/32, & x_7 &= 1/2, & x_1 &= 1/32, \\ x_4 &= 1/4, & x_9 &= 15/32, & x_5 &= 7/32, & x_2 &= 5/16, \\ x_8 &= 7/16, & x_6 &= 1/8. \end{aligned}$$

Решение исходной системы найдено! Значения неизвестных  $x_1, \dots, x_9$  – это и есть стороны квадратов. В нашем примере прямоугольник оказался разрезан на попарно различные квадраты.

**Задача 1.** Докажите, что плоскость можно замостить попарно различными квадратами, длины сторон которых: а) рациональные; б) целые числа.

А можно ли *квадрат* разрезать на попарно различные квадраты? Задача эта появилась в начале прошлого века и оказалась очень сложной. Решили ее только

<sup>4</sup> Подробно об этом рассказывается в статье В.Гутенмахера «Системы линейных уравнений» в «Кванте» №1 за 1984 год.

спустя несколько десятилетий уже известные нам четыре студента и независимо от них Р.Шпраг. Но если Р.Шпраг использовал сложный перебор, то нашим студентам найти решение помогла физическая интерпретация. Потом было найдено много разных примеров, пример с наименьшим количеством квадратов изображен на рисунке 7.



Рис.7. Квадратное одеяло, сшитое из квадратных лоскутков

**Задача 2\*.** Можно ли куб разрезать на несколько попарно-различных кубиков?

### Когда наш метод работает

Итак, для шкафа мы нашли все интересующие нас размеры. Но будет ли так и для любого другого разрезания? Ясно, что если решение системы, построенной по условиям стыковки, единственно, то мы найдем его нашим методом. И, конечно же, оно будет рациональным: ведь коэффициенты системы рациональны, а мы, выражая неизвестные, используем только сложение, вычитание, умножение и деление. Это простое наблюдение мы назовем так:

**Теорема о решении системы.** Пусть система линейных уравнений с рациональными коэффициентами имеет единственное решение. Тогда это решение состоит из рациональных чисел.

Бывают системы линейных уравнений, у которых решение не единственно. Например, система

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_3 = 1$$

имеет бесконечно много решений: в качестве  $x_1$  можно взять любое число  $t$ , в качестве  $x_2$  число  $-t$ , а в качестве  $x_3$  число  $1 - t$ . У нее есть и иррациональные решения (когда  $t$  иррационально).

Совершенно не очевидно, что условий стыковки достаточно, чтобы найти стороны квадратов, т.е. что

система, построенная по реальному разрезанию, имеет единственное решение. Оказывается, что это всегда так: наш метод позволяет *однозначно* восстановить все размеры по фотографии разрезания (если мы считаем горизонтальную сторону прямоугольника равной 1). Мы докажем это с помощью физической интерпретации. А теорема Дена о разрезании прямоугольника отсюда сразу следует по теореме о решении системы.

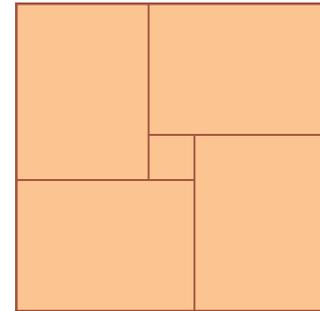


Рис.8. План квартиры

**Задача 3.** Архитектор нарисовал план квартиры. На плане (рис. 8) показано, как должны примыкать комнаты друг к другу, но их размеры искажены. Можно ли сделать все комнаты квадратными?

### Физическая интерпретация

Оказывается, каждому разрезанию прямоугольника на квадраты можно сопоставить электрическую цепь. Если мы найдем токи в этой электрической цепи, то мы найдем и стороны квадратов. Но обо всем по порядку.

Мы будем рассматривать *математическую модель* электрической цепи.<sup>5</sup> Вместо физических законов и опытных фактов у нас будут определения, аксиомы, теоремы.

С математической точки зрения *электрическая цепь* — это связный плоский граф, каждому ребру которого сопоставлено некоторое положительное число, причем концы одного из ребер отмечены знаками «+» и «-». Ребро с отмеченными концами называется *батарежкой*, остальные — *резисторами*. Число, сопоставленное батарейке, называется *напряжением* батарейки, а числа, сопоставленные резисторам, — их *сопротивлениями*. Вершины графа называются *узлами*, от-

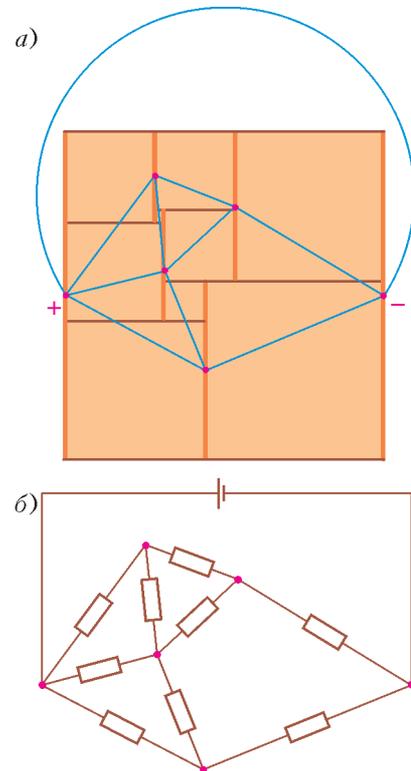


Рис.9. а) Построение электрической цепи по разрезанию. б) Общепринятое изображение электрической цепи

<sup>5</sup> Желаящим подробно разобраться в физике происходящего рекомендуем, например, статью «Правила Кирхгофа» в «Кванте» №1 за 1985 год.

меченные узлы батарейки – *положительной и отрицательной клеммами*.

По разрезанию цепь строится так (рис. 9,а). На каждой вертикальной линии разреза отметим по точке – это будут узлы электрической цепи. На вертикальных сторонах прямоугольника выберем по клемме, отметим их знаками «+» (на левой стороне) и «-» (на правой стороне) и соединим с батарейкой.

Каждый квадрат ограничен слева и справа двумя вертикальными разрезами. В электрической цепи его изображением служит резистор, соединяющий два узла на этих разрезах (узлы могут оказаться на продолжениях сторон квадрата). Сопротивление каждого резистора положим равным 1.<sup>6</sup> Напряжение батарейки также положим равным 1. Нужная нам электрическая цепь построена (рис. 9, б).

### Как найти токи в электрической цепи

Теперь объясним, что такое *токи* в электрической цепи и как их можно найти.

Занумеруем резисторы, как показано на рисунке 10 (т.е. так же, как соответствующие квадраты). Нарисуем на каждом резисторе стрелку слева направо, а на батарейке – справа налево, т.е. от отрицательной клеммы к положительной.<sup>7</sup> Электрическая цепь

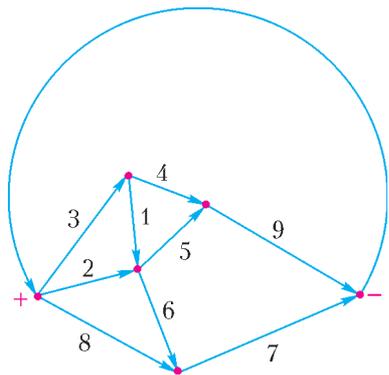


Рис.10. Нумерация резисторов и выбор направлений на резисторах и батарейке

делит плоскость на части. Обходя границу любой части по часовой стрелке, получим замкнутую цепочку ребер, называемую *контуром*.<sup>8</sup> Сила тока через  $k$ -й резистор – это просто некоторое действительное число  $I_k$ , сопоставленное резистору. Сила тока через батарейку – это некоторое действительное число  $I$ . Напряжение на резисторе – это произведение силы тока на сопротивление резистора. (А для батарейки напряжение вообще от тока не зависит. Такая батарейка в физике называется *идеальной*.) Силы тока определяются следующими аксиомами (правилами), проиллюстрированными на рисунках 12, 13, 14.

<sup>6</sup> Мы раз и навсегда фиксируем единицы измерения: сопротивления будем измерять в килоомах, напряжения – в вольтах, токи – в миллиамперах. В дальнейшем единицы измерения не указываются.

<sup>7</sup> Мы нарисовали предполагаемые направления тока. Читателя может смутить, что в одном из ребер ток направлен от «минуса» к «плюсу». Но это действительно так: ток в резисторах идет от «плюса» к «минусу», а вот в батарейке – наоборот.

<sup>8</sup> Для простоты будем считать, что контур не проходит ни через какое ребро дважды. Это не всегда так (рис. 11). Однако в дальнейшем мы увидим, что это так для любой цепи, построенной по разрезанию прямоугольника.

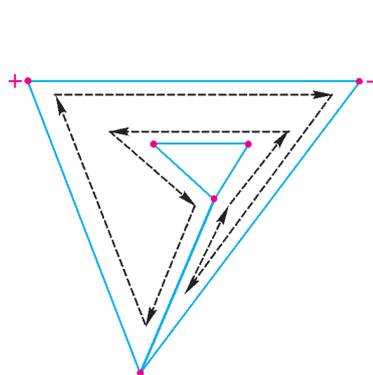


Рис.11. Контур, проходящий по ребру дважды

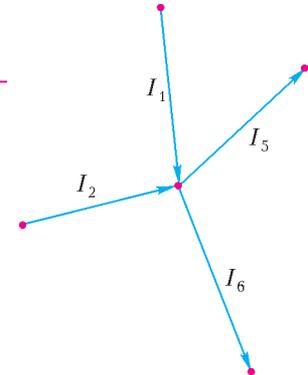


Рис.12. Первое правило Кирхгофа:  $I_1 + I_2 = I_5 + I_6$

**Первое правило Кирхгофа.** В каждом узле сумма входящих токов равна сумме выходящих.

Для нашего примера (см. рис.10) получаем такие уравнения:

$$I = I_2 + I_3 + I_8,$$

$$I_3 = I_1 + I_4, \quad I_6 + I_8 = I_7,$$

$$I_1 + I_2 = I_5 + I_6,$$

$$I_4 + I_5 = I_9.$$

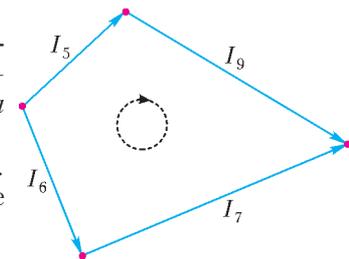


Рис.13. Второе правило Кирхгофа для контура без батарейки:  $I_5 + I_9 - I_6 - I_7 = 0$  (учтено, что все сопротивления в нашем примере равны 1)

(Мы не записываем уравнение для правой клеммы, поскольку оно непосредственно следует из остальных.)

**Второе правило Кирхгофа.** Для любого контура сумма напряжений на резисторах (с соответствующими знаками) равна напряжению батарейки (с соответствующим знаком), если контур содержит батарейку, а иначе – равно нулю. Напряжение на резисторе берется со знаком «+», если направление стрелки на резисторе совпадает с направлением обхода контура, а иначе – со знаком «-». Так же определяется знак для батарейки.

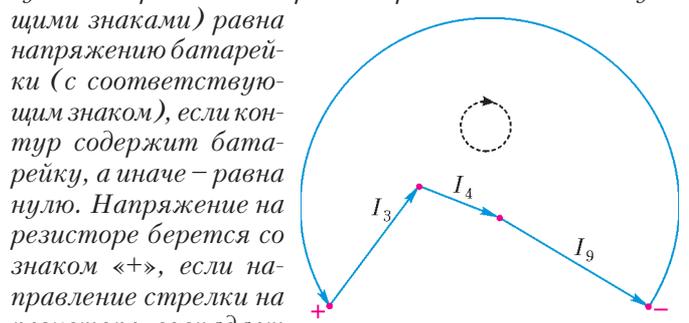


Рис.14. Второе правило Кирхгофа для контура с батарейкой:  $-I_3 - I_4 - I_9 = -1$  (учтено, что напряжение батарейки в нашем примере равно 1)

Поскольку у нас напряжение батарейки равно 1 и все сопротивления равны 1, получаем уравнения

$$-I_3 - I_4 - I_9 = -1, \quad I_4 - I_1 - I_5 = 0,$$

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0, \quad I_5 + I_9 - I_6 - I_7 = 0, \quad I_2 + I_6 - I_8 = 0.$$

(Мы не записываем уравнение для контура вокруг всей цепи, поскольку оно непосредственно следует из остальных.) Решая полученную систему уравнений, находим все силы токов:

$$I = 33/32, \quad I_3 = 9/32, \quad I_7 = 1/2, \quad I_1 = 1/32, \quad I_4 = 1/4, \\ I_9 = 15/32, \quad I_5 = 7/32, \quad I_2 = 5/16, \quad I_8 = 7/16, \quad I_6 = 1/8.$$

У нас есть аксиомы (правила Кирхгофа), которые мы заимствовали из физики, а все остальные утверждения об электрических цепях мы выводим из них чисто математически.

**Задача 4.** Выведите из второго правила Кирхгофа более общее правило, которое получается, если заменить в формулировке контур на любую замкнутую цепочку ребер (не проходящую ни через какую вершину дважды).

### Правила Кирхгофа совпадают с условиями стыковки

Удивительным образом правила Кирхгофа дают нам ту же самую систему уравнений на силы токов, что и условия стыковки на длины сторон квадратов! Докажем это.

Рассмотрим первое правило Кирхгофа. Зафиксируем вертикальный разрез и соответствующий ему узел.

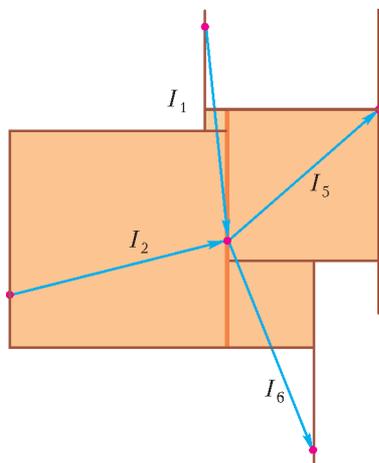


Рис.15. Первое правило Кирхгофа и условие вертикальной стыковки

Входящие в узел токи соответствуют сторонам квадратов, примыкающим к разрезу слева, а выходящие из узла – сторонам квадратов справа (рис. 15). Значит, первое правило Кирхгофа в этом узле для токов совпадает с правилом вертикальной стыковки.

Рассмотрим второе правило Кирхгофа. Возьмем любой горизонтальный разрез. Ясно, что резисторы, соответствующие примыкающим к нему квадратам, образуют контур (рис. 16). Квадраты сверху образуют верхнюю часть контура, а квадраты снизу – нижнюю. Поскольку все сопротивления единичны, напряжение на каждом резисторе равно силе тока на нем. Значит, правило горизонтальной стыковки для нашего разреза совпадает со вторым правилом Кирхгофа.

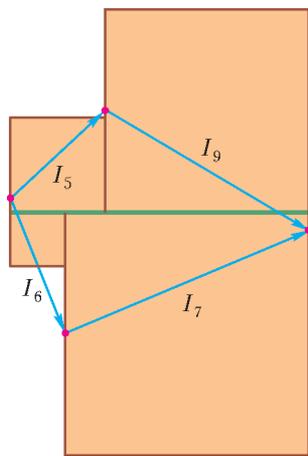


Рис.16. Второе правило Кирхгофа и условие горизонтальной стыковки

Наоборот, возьмем любой контур. Его самый левый узел соответствует некоторому вертикальному разрезу. К разрезу примыкают справа два квадрата, соответствующие двум выходящим из узла резисторам контура. Рассмотрим горизонтальный разрез, к которому примыкают эти квадраты. Снова, все квадраты, примыкающие к разрезу сверху, образуют верхнюю часть нашего контура, а все примыкающие снизу – нижнюю. Значит, второе правило

Кирхгофа для нашего контура совпадает с правилом горизонтальной стыковки.

Итак, правила Кирхгофа совпадают с условиями стыковки. Значит ли это, что токи совпадают с длинами сторон квадратов? Да, но только если наша система уравнений имеет *лишь одно* решение. В этом случае, изготовив по разрезанию электрическую цепь, длины сторон квадратов можно было бы найти... просто измерив токи!

### Единственность распределения токов в электрической цепи

**Теорема единственности.** Пусть сопротивления всех резисторов цепи положительны. Тогда система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа, в которой силы тока – неизвестные, а напряжение батарейки и сопротивления резисторов известны, имеет не более одного решения.

На «физическом уровне строгости» эта теорема почти очевидна. Пусть решений два. Вычтем одно из другого. Тогда напряжение батарейки станет нулевым, а ток не везде будет равен нулю, чего не бывает.

С точки зрения математики это объяснение нельзя считать доказательством. Нельзя исключить возможность, что наша система уравнений имеет какие-то «посторонние» решения, которых не бывает в «реальной» электрической цепи. Да и в нашем рассуждении мы нигде не использовали, что сопротивления всех резисторов строго положительны. А без этого предположения теорема неверна: в кольце из сверхпроводника (т.е. резистора с нулевым сопротивлением) может течь ненулевой ток при нулевом напряжении!

Вот как можно математически строго доказать теорему единственности:

**Доказательство теоремы единственности.** Пусть есть два решения. Первое будем обозначать  $I_1, I_2, \dots$ , второе  $J_1, J_2, \dots$ . Наша цель – доказать, что их разность  $I_1 - J_1, I_2 - J_2, \dots$  нулевая.

Рассмотрим любое уравнение нашей системы. Пусть, например, оно записано для узла, изображенного на рисунке 12. Подставив в него первое решение, получим:  $I_1 + I_2 = I_5 + I_6$ . Подставив второе, получим  $J_1 + J_2 = J_5 + J_6$ . Вычтем одно равенство из другого:  $(I_1 - J_1) + (I_2 - J_2) = (I_5 - J_5) + (I_6 - J_6)$ . Получается, что разность наших решений удовлетворяет тому же самому уравнению. Так будет и для уравнения, записанного для любого другого узла или любого контура, не содержащего батарейку.

Пусть теперь уравнение записано для контура, содержащего батарейку, например для контура на рисунке 14. Подставляя в это уравнение наши решения, получим равенства  $I_3 + I_4 + I_9 = 1$  и  $J_3 + J_4 + J_9 = 1$ . Вычтем одно равенство из другого:  $(I_3 - J_3) + (I_4 - J_4) + (I_9 - J_9) = 0$ . Получается, что разность наших решений удовлетворяет тому же самому уравнению, только с нулевой правой частью. Но в правой части исходного уравнения стояло напряжение батарейки. Получаем, что разность наших решений подчиняется правилам

Кирхгофа для той же цепи, только с нулевым напряжением батарейки.

Теорема единственности свелась к такому утверждению:

**Принцип техники безопасности.** Если напряжение батарейки равно нулю, то и все силы тока в электрической цепи нулевые.

**Доказательство.** Пусть в цепи есть ненулевые токи. Если сила тока на каких-то ребрах отрицательна, то поменяем на каждом из них направление стрелки, знак силы тока и знак напряжения. Ясно, что правила Кирхгофа по-прежнему будут выполняться, а все силы тока станут неотрицательными. Начнем движение с ребра, на котором сила тока ненулевая, и будем двигаться в направлении стрелок. Из первого правила Кирхгофа следует, что мы можем неограниченно продолжать движение (ведь если у вершины есть положительный входящий ток, то есть и выходящий). Рано или поздно мы впервые вернемся в вершину, в которой уже побывали. Значит, мы получим замкнутую цепочку ребер, на которых сила тока неотрицательна, причем хотя бы на одном из них она больше нуля. По задаче 4 получаем противоречие со вторым правилом Кирхгофа, потому что напряжение батарейки равно нулю. Принцип техники безопасности, а вместе с ним и теорема единственности доказаны.

**Задача 5\*.** Выведите из правил Кирхгофа, что если напряжение батарейки положительно, то сила тока через нее: а) не равна нулю; б) положительна.

**Задача 6.** Напряжение батарейки увеличили в  $n$  раз. Докажите, что все силы тока в цепи также увеличились в  $n$  раз.

#### Доказательство теоремы Дена о разрезании прямоугольника

Пусть прямоугольник разрезан на квадраты. Расположим его так, чтобы две его стороны были вертикальными, а две другие – горизонтальными. Будем считать, что длина горизонтальной стороны равна 1. Ясно, что стороны всех квадратов либо вертикальны, либо горизонтальны. Рассмотрим электрическую цепь, соответствующую разрезанию. Система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа для этой цепи, имеет решение – в качестве сил токов можно взять длины сторон квадратов. По теореме единственности других решений у этой системы нет. Значит, по теореме о решении системы оно состоит из рациональных чисел. Поэтому длины сторон всех квадратов, а следовательно, и отношение сторон прямоугольника рациональны. Теорема Дена доказана.

**Задача 7.** Покажите, что квадрат нельзя разрезать на подобные (но не обязательно равные) прямоугольники с отношением сторон  $\sqrt{2}$ .

#### Десерт

Мы ответили на все вопросы, поставленные в статье, но ее название осталось загадкой. Объяснение названия мы оставили на десерт: это будет наглядная картинка электрической цепи, построенной по разрезанию. Раньше физическая интерпретация выглядела

как некоторый трюк, теперь наша цель – показать, как до нее можно додуматься.

Пусть большой прямоугольник разрезан на меньшие (не обязательно квадраты), и требуется выразить отношение сторон большого прямоугольника через отношения сторон меньших. Расположим большой прямоугольник так, чтобы две его стороны были вертикальными, а две другие – горизонтальными. Отношением сторон прямоугольника договоримся считать отношение длины его горизонтальной стороны к длине вертикальной.

**Пример 1.** Прямоугольник с отношением сторон  $R$  разделен вертикальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон  $R_1$  и  $R_2$  (рис.17,а). Покажем, что  $R = R_1 + R_2$ . Действительно, пусть вертикальная сторона большого прямоугольника равна  $x$ . Тогда горизонтальные стороны меньших прямоугольников равны  $R_1x$  и  $R_2x$ . Значит,  $R = (R_1x + R_2x)/x = R_1 + R_2$ .

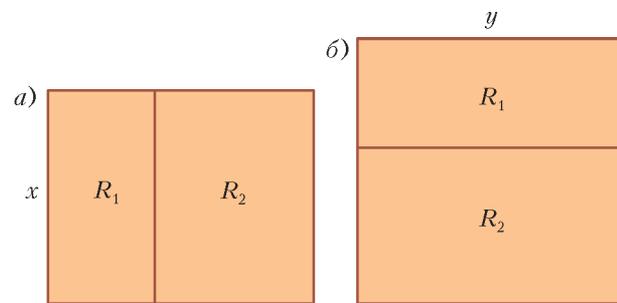


Рис.17. Разрезания прямоугольника на 2 прямоугольника

**Пример 2.** Прямоугольник с отношением сторон  $R$  разделен горизонтальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон  $R_1$  и  $R_2$  (рис.17,б). Покажем, что  $R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ . Действительно, пусть горизонтальная сторона большого прямоугольника равна  $y$ . Тогда вертикальные стороны меньших прямоугольников равны  $y/R_1$  и  $y/R_2$ . Значит,

$$R = \frac{y}{y/R_1 + y/R_2} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Да это же формулы сопротивления цепей из последовательно и параллельно соединенных резисторов! Объяснение очень простое (рис. 18, 19).

Представим себе, что у нас есть прямоугольная металлическая пластинка. Соединим ее вертикальные стороны с клеммами батарейки (точнее, к каждой из вертикальных сторон по всей длине приложим проводник, соединенный с соответствующей клеммой). Тогда через пластинку пойдет ток в горизонтальном направлении. Пластинка играет роль резистора. Как известно из физики, ее сопротивление пропорционально отношению длины к площади вертикального поперечного сечения. Иными словами, сопротивление пластинки пропорционально отношению ее сторон. Для простоты будем считать коэффициент пропорциональности равным 1.

Для примера 1 приставим друг к другу две прямоугольные пластинки одинаковыми вертикальными сто-

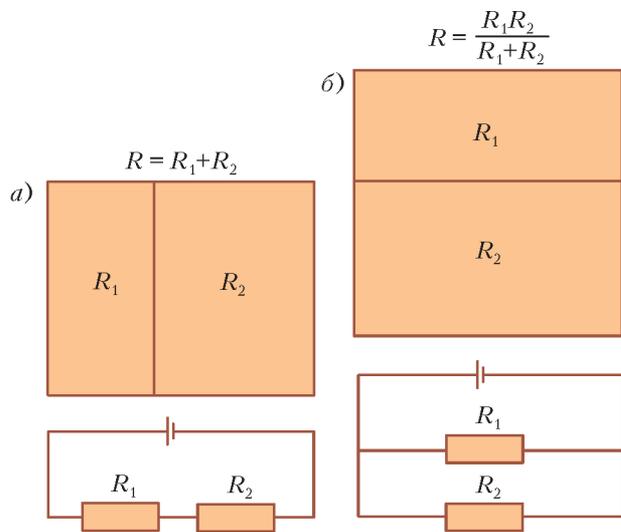


Рис.18. Формулы для отношения сторон такие же, как и для сопротивления

ронами. Оставшиеся вертикальные стороны соединим с полюсами батарейки. Получим цепь из двух последовательно соединенных резисторов (рис.19,а). Если отношения сторон этих пластинок  $R_1$  и  $R_2$ , то их сопротивления – тоже  $R_1$  и  $R_2$ . Сопротивление большой пластинки, составленной из двух, равно  $R_1 + R_2$  как сопротивление двух последовательно соединенных резисторов. Вот «физическое» объяснение того, что отношение сторон большой пластинки равно  $R_1 + R_2$ .

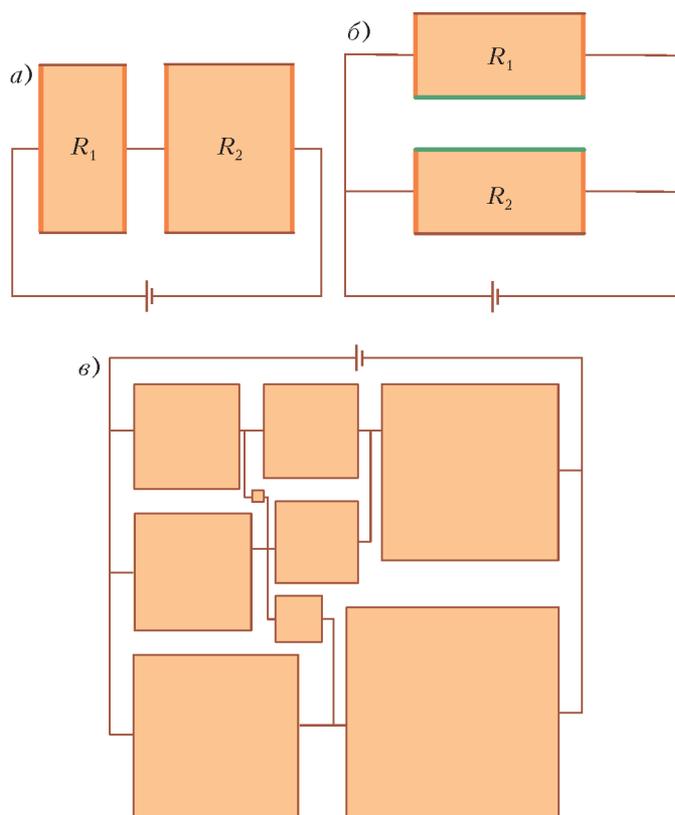


Рис.19. Электрические цепи из металлических пластинок

Перейдем к примеру 2. Приставим две пластинки друг к другу одинаковыми горизонтальными сторонами, а вертикальные стороны соединим с полюсами батарейки (рис.19,б). Поскольку ток течет в горизонтальном направлении, то через линию стыковки ток не идет. Изолируем пластинки друг от друга: ток и сопротивление цепи не изменятся. Мы получим пару параллельно соединенных резисторов, значит, отношение сторон большого прямоугольника находится по формуле  $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ .

Это же построение можно применить для любого разрезания прямоугольника на прямоугольники, скажем для изображенного на рисунке 3. Представим себе большую прямоугольную пластинку, разбитую на меньшие. Вертикальные стороны большой пластинки соединим с полюсами батарейки. Вдоль горизонтальных линий разреза изолируем меньшие пластинки друг от друга, а вдоль вертикальных линий разреза пусть они стыкуются. Мы получим электрическую цепь, сопротивление которой равно отношению сторон большой пластинки (рис.19,в). На самом деле это та же самая электрическая цепь, которую мы построили раньше.

Таким образом, чтобы найти отношение сторон прямоугольника, достаточно измерить сопротивление электрической цепи, построенной по разрезанию! Об этом мы подробно расскажем в одном из следующих номеров журнала.

**Задача 8.** Прямоугольник разделен на пять прямоугольников с отношениями сторон  $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ ,  $R_4 = R_5 = 3$  так, как показано на рисунке 20. Найдите отношение сторон большого прямоугольника.

**Задача 9\*\*.** На плоскости дана электрическая цепь из резисторов сопротивлением 1 и батарейки напряжением 1. Предположим, все силы токов в цепи ненулевые, а все контуры – треугольные<sup>9</sup>. Попробуйте доказать, что тогда эта цепь получается из некоторого разрезания прямоугольника на квадраты.

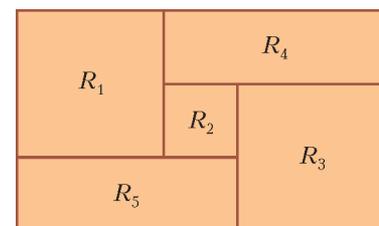


Рис. 20. Разрезание прямоугольника на 5 прямоугольников

Авторы благодарны Евгению Выродову, Сергею Маркелову, Евгению Могилевскому, Владимиру Протасову, Александру Прохорову, Святославу Фельдшеру и Борису Френкину за ценные замечания.

М. Скопенков благодарен за помощь Институту проблем передачи информации РАН и Университету науки и техники короля Абдуллы (Саудовская Аравия).

<sup>9</sup> На самом деле, достаточно предположения, что в каждом контуре потенциалы вершин попарно различны.

# Собери квадрат

М.СКОПЕНКОВ, О.МАЛИНОВСКАЯ, С.ДОРИЧЕНКО

**Б**ЫВАЮТ ОЧЕНЬ ПРОСТЫЕ ВОПРОСЫ, ОТВЕТЫ на которые найти совсем не просто. Вот один из них: *когда из прямоугольников, подобных данному, можно сложить квадрат?*

Иными словами, *при каких  $r$  из прямоугольников с отношением сторон  $r$  можно сложить квадрат?*

Хотите узнать ответ? Тогда в путь!

## Наглядные разрезания

Если  $r$  рационально, то квадрат сложить можно. В этом несложно убедиться, глядя на рисунок 1. Здесь отношения сторон всех прямоугольников равны  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  — целые.

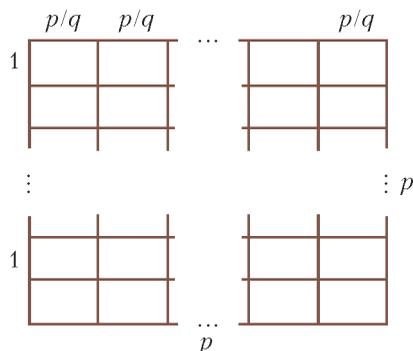


Рис. 1. Разрезание квадрата со стороной  $p$

А может ли отношение сторон быть иррациональным? Может. Рассмотрим разбиение на 5 подобных прямоугольников на рисунке 2 — два верхних лежат горизонтально, оставшиеся — вертикально. Раз верх-

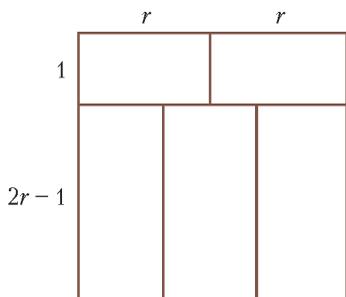


Рис. 2. Разрезание на 5 прямоугольников

ние прямоугольники подобны и лежат горизонтально, то они равны. Пусть их размеры  $1 \times r$ , тогда сторона квадрата равна  $2r$ . Находим длины сторон нижних прямоугольников (см. рис. 2):  $2r - 1$  и  $\frac{2r}{3}$ . Так как нижние прямоугольники подобны верхним и расположены вертикально, то получаем уравнение  $3 \frac{2r-1}{r} = 2r$ .

Решая его, находим два корня:  $r = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$ , которые иррациональны. Для каждого из них строится разрезание — размеры всех прямоугольников уже выражены через  $r$ , осталось только подставить значение.

**Задача 1.** Дизайнеру заказали раму для квадратного окна (рис. 3). Можно ли сделать все стекла в раме подобными прямоугольниками?

**Задача 2.** Можно ли разрезать квадрат на 3 неравных подобных прямоугольника?

**Задача 3.** Можно ли разрезать квадрат на 5 квадратов?

**Задача 4.** Можно ли разрезать квадрат на несколько прямоугольников с отношениями сторон  $2 + \sqrt{2}$ ? Тот же вопрос для  $2 - \sqrt{2}$ , для  $3 + 2\sqrt{2}$  и для  $3 - 2\sqrt{2}$ .



Рис. 3. Проект окна

Интересно, какие именно иррациональные значения может принимать  $r$ . Для ответа на этот вопрос нам потребуются разрезания произвольного прямоугольника, а не только квадрата.

## Истина в электричестве

Пусть большой прямоугольник разрезан на маленькие. Как выражается отношение сторон большого прямоугольника через отношения сторон маленьких?

Начнем с двух простых формул для горизонтального и вертикального разбиений на два прямоугольника (рис. 4). Докажите их самостоятельно. Здесь отношения горизонтальных сторон прямоугольников к вертикальным обозначены через  $R, R_1, R_2$ .

Не кажется ли вам, что эти формулы вы уже встречали? Конечно, это же формулы для сопротивления

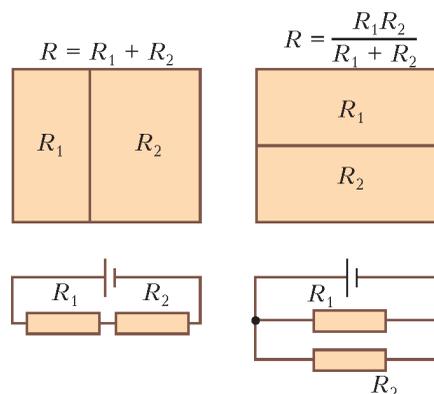


Рис. 4. Формулы для отношения сторон прямоугольника

цепей из последовательно и параллельно соединенных резисторов!

На самом деле, каждому разрезанию можно сопоставить электрическую цепь и использовать физические законы для решения нашей задачи. Этим мы сейчас и займемся.

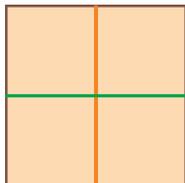


Рис. 5. Условимся считать, что в таком разрезании один горизонтальный и два вертикальных разреза

Сначала построим по разрезанию граф. На вертикальных разрезах<sup>1</sup> (на рисунках 5 и 6 они окрашены в оранжевый цвет) и на вертикальных сторонах большо

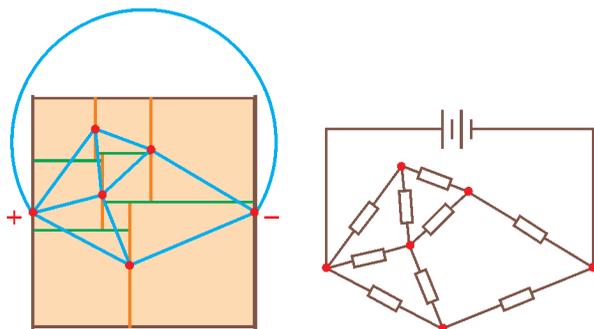


Рис. 6. Построение электрической цепи по разрезанию

го прямоугольника отметим по красной точке. Это будут вершины графа. Для каждого маленького прямоугольника соединим ребром две красные вершины, которые лежат на разрезах, содержащих стороны прямоугольника. Ребер получится столько, сколько маленьких прямоугольников.

Также соединим ребром крайние (слева и справа) вершины. Граф построен.

Вдоль каждого ребра, кроме последнего, припаем резистор, сопротивление которого равно отношению горизонтальной стороны соответствующего прямоугольника к вертикальной.<sup>2</sup>

Припишем концам последнего ребра знаки плюс и минус и вдоль этого ребра припаем батарейку. Напря-

<sup>1</sup> Дадим точное определение разреза. Покрасим все горизонтальные стороны маленьких прямоугольников, не лежащие на периметре большого, в зеленый цвет. Они объединятся в несколько зеленых отрезков, которые мы назовем *горизонтальными разрезами*. Вертикальные стороны маленьких прямоугольников, не лежащие на периметре большого, покрасим в оранжевый цвет. Полученные оранжевые отрезки делятся горизонтальными разрезами на части, именно эти части мы и назовем *вертикальными разрезами* (см. рис. 5).

<sup>2</sup> Конечно, отношение сторон – величина безразмерная, а сопротивление имеет размерность. Поэтому, чтобы говорить о равенстве, мы раз и навсегда фиксируем систему единиц: длины будем измерять в сантиметрах, сопротивления – в килоомах, напряжения – в вольтах, токи – в миллиамперах. В дальнейшем единицы измерения указывать не будем.

жение батарейки возьмем равным длине горизонтальной стороны большого прямоугольника (почему – станет ясно позже).

Электрическая цепь построена.

Оказывается, отношение сторон большого прямоугольника всегда можно выразить через отношения сторон маленьких. В этом нам поможет такая теорема.

**Теорема о сопротивлении цепи и отношении сторон прямоугольника.** *Сопротивление электрической цепи, построенной по разрезанию, равно отношению горизонтальной стороны большого прямоугольника к вертикальной.*

Наша ближайшая цель – доказать эту теорему. Но как это сделать, если в ее формулировке участвуют физические, а не математические понятия? Ведь решаем-то мы математическую задачу о разрезании!

Придется дать строгое математическое определение электрической цепи и ее сопротивления. А физическая интуиция будет помогать нам.

### Математическая модель электрической цепи

**Определение.** *Электрической цепью* мы называем связный плоский граф (возможно, с кратными ребрами, но без петель), в котором:

- каждому ребру сопоставлено положительное число;
- одно из ребер выделено, его концы отмечены знаками «+» и «-»;
- при удалении любого ребра граф остается связным.

Требование связности после удаления ребра нужно для того, чтобы в цепи не было «лишних» участков (по которым ток не течет).

Может возникнуть вопрос, почему мы требуем, чтобы граф был плоский – ведь электрическую цепь можно спаять из проводов, как угодно расположенных в пространстве. Объяснение такое: для нашей задачи нам достаточно плоских электрических цепей, а для них некоторые определения формулируются проще.

**Определение.** Выделенное ребро называется *батарейкой*, остальные – *резисторами*. Число, сопоставленное батарейке, называется *напряжением* батарейки, а числа, сопоставленные резисторам, – их *сопротивлениями*. Вершины, отмеченные знаками «+» и «-», называются *клеммами* батарейки.

Изобразим цепь на плоскости так, чтобы отрицательная клемма батарейки была правее положительной и концы каждого ребра не лежали на одной вертикальной прямой. Нарисуем на каждом резисторе стрелку слева направо, а на батарейке – справа налево, т.е. от отрицательной клеммы к положительной (рис. 7).

**Определение.** *Силы токов* через резисторы и батарейку – это числа на ребрах графа, которые удовлетворяют правилам Кирхгофа<sup>3</sup> (рис. 8, 9 и 10).

Справедливы три важные теоремы.

<sup>3</sup> Их формулировку можно найти, например, в статье «Разрезания металлического прямоугольника» в «Кванте» №3 за 2011 год. Желаящим подробно разобраться в физике происходящего рекомендуем еще статью «Правила Кирхгофа» в Кванте №1 за 1985 год.

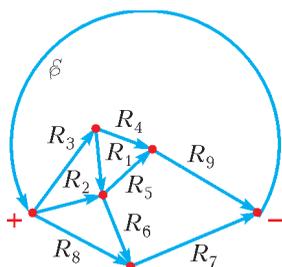


Рис. 7. Нумерация резисторов и выбор направлений на резисторах и батарее

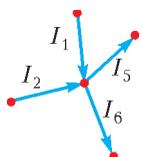


Рис. 8. Первое правило Кирхгофа:  $I_1 + I_2 = I_5 + I_6$

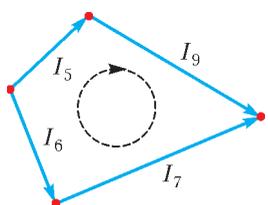


Рис. 9. Второе правило Кирхгофа для контура без батарейки:  $R_5 I_5 + R_9 I_9 - R_6 I_6 - R_7 I_7 = 0$

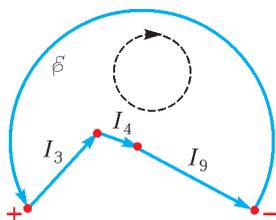


Рис. 10. Второе правило Кирхгофа для контура с батарейкой:  $-R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_9 I_9 = -\mathcal{E}$

**Теорема существования и единственности.** Для любой электрической цепи найдется расстановка чисел (сил токов) на ребрах, удовлетворяющая всем правилам Кирхгофа, и притом только одна.

*Замечание.* Сила тока через резистор может быть и отрицательна (с точки зрения физики это означает, что ток течет против направления стрелки).

**Теорема положительности.** Сила тока через батарейку всегда положительна (иными словами, ток через батарейку всегда течет от отрицательной клеммы к положительной).

**Теорема о силах тока и длинах сторон.** Для цепи, построенной по разрезанию, силы токов через резисторы равны длинам вертикальных сторон соответствующих маленьких прямоугольников, а через батарейку – длине вертикальной стороны большого.

*Замечание.* Именно в последней теореме необходимо условие о том, что напряжение батарейки равно горизонтальной стороне большого прямоугольника.

Эти три теоремы доказаны нами в предыдущей статье «Разрезания металлического прямоугольника» в «Кванте» №3 за 2011 год для разрезаний на квадраты. Но для разрезаний на прямоугольники доказательство совершенно аналогично. Правда, половина теоремы существования и единственности, а именно утверждение о существовании, была доказана только для цепи, построенной по разрезанию, но именно в такой формулировке она нам и потребует.

### Сопротивление цепи

**Определение.** Сопротивление цепи – это отношение напряжения батарейки к силе тока через нее.

Физический смысл этого определения таков: если все резисторы цепи заменить на один резистор с таким сопротивлением, то ток через батарейку не изменится (рис. 11).

Мы ввели все необходимые понятия и готовы привести

**Доказательство теоремы о сопротивлении цепи и отношении сторон прямоугольника.** По теореме о силах тока и длинах сторон, сила тока через батарейку равна вертикальной стороне большого прямоугольника. По определению, сопротивление цепи равно отношению напряжения батарейки к силе тока через нее, что равно отношению горизонтальной стороны большого прямоугольника к вертикальной, что и требовалось.

Доказанная теорема сводит вычисление отношения сторон прямоугольника к вычислению сопротивления электрической цепи. Но как находить это сопротивление? Тут нам очень пригодится такое утверждение:

**Лемма о сопротивлении цепи.** Силы тока в электрической цепи и ее сопротивление можно выразить через сопротивления резисторов и напряжение батарейки с помощью сложения, вычитания, умножения и деления.

**Доказательство.** Мы докажем эту лемму только для цепи, построенной по разрезанию. Запишем все правила Кирхгофа для нее. Возникает система уравнений, где неизвестные – это силы токов через ребра, а коэффициенты – это  $\pm 1$ , а также сопротивления резисторов и напряжение батарейки. Цепь построена по разрезанию, значит, у нашей системы заведомо есть решение – длины вертикальных сторон прямоугольников. А других решений и нет – по теореме существования и единственности. Если решение системы одно, то оно выражается через коэффициенты с помощью четырех арифметических операций (подумайте сами, почему, или посмотрите доказательство теоремы о решении системы из нашей предыдущей статьи). Значит, все силы тока, а также сопротивление цепи выражаются через  $\pm 1$ , напряжение батарейки и сопротивления резисторов. При этом от чисел  $\pm 1$  в нашем выражении легко избавиться: например, заменив 1 на  $\frac{r}{r}$ , где  $r$  – сопротивление одного из резисторов. Лемма доказана.

На самом деле, есть явная формула для сопротивления любой электрической цепи через сопротивления резисторов. Эта формула дается *теоремой Кирхгофа о деревьях*, но нам она не понадобится.

Теперь мы можем говорить о разрезаниях прямоугольника на языке физики. Все соответствия – в Словарике (с. 9).

### Невозможные разрезания

С помощью электрических цепей мы получим некоторые требования к числам  $r$ , для которых из прямоугольников с отношением сторон  $r$  можно сложить квадрат.

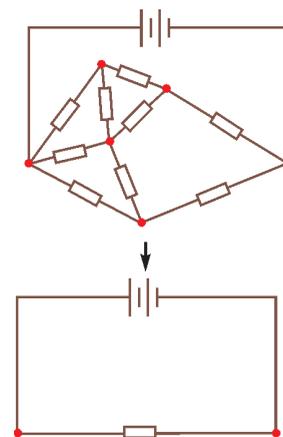


Рис. 11. Замена всех резисторов цепи на единственный резистор

## Словарик

Разрезание большого прямоугольника на маленькие	Электрическая цепь
Вертикальный разрез	Узел
Маленький прямоугольник	Резистор
Длина его вертикальной стороны	Сила тока через резистор
Отношение его горизонтальной стороны к вертикальной	Сопротивление резистора
Вертикальные стороны большого прямоугольника	Клеммы батарейки
Длина его вертикальной стороны	Сила тока через батарейку
Длина его горизонтальной стороны	Напряжение батарейки
Отношение его горизонтальной стороны к вертикальной	Сопротивление электрической цепи

**Теорема.** Пусть квадрат разрезан на прямоугольники с отношением сторон  $r$ . Тогда  $r$  – корень ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.

**Доказательство.** Применим такой трюк: растянем квадрат в  $r$  раз по горизонтали. Получим прямоугольник с отношением сторон  $r$ , разрезанный на квадраты и прямоугольники с отношением сторон  $r^2$ . Сопоставим разрезанию электрическую цепь. Она состоит из резисторов сопротивлением 1 и  $r^2$ , а сама имеет сопротивление  $r$ . По лемме о сопротивлении цепи, число  $r$  можно выразить через числа 1 и  $r^2$  с помощью четырех арифметических действий. Значит, найдутся два ненулевых многочлена  $p(x)$  и  $q(x)$  с целыми

коэффициентами, такие что  $r = \frac{p(r^2)}{q(r^2)}$ , т.е.

$q(r^2) \cdot r - p(r^2) = 0$ . Получили, что  $r$  – корень многочлена  $q(x^2) \cdot x - p(x^2)$  с целыми коэффициентами. Этот многочлен не равен тождественно нулю, так как многочлены  $p(x^2)$  и  $q(x^2)$  – ненулевые, причем  $x$  входит в многочлен  $q(x^2) \cdot x$  только в нечетной степени, а в многочлен  $p(x^2)$  – только в четной. Теорема доказана.

В обратную сторону теорема неверна. Например, квадрат нельзя разрезать на прямоугольники с отношением сторон  $\sqrt{2}$  (докажите!), хотя это число – корень многочлена  $x^2 - 2$ .

Разрезания для  $r$  вида  $a + b\sqrt{2}$ 

Попробуем найти все числа  $r$  вида  $a + b\sqrt{2}$ , где  $a$  и  $b$  – рациональны, для которых квадрат разрезается на прямоугольники с отношением сторон  $r$ .

Числа вида  $r = a + b\sqrt{2}$  с рациональными  $a$  и  $b$  мы будем называть *хорошими*. Число  $\bar{r} = a - b\sqrt{2}$  назовем *сопряженным* к хорошему числу  $r = a + b\sqrt{2}$ . Сопряженное число определено однозначно, потому что хорошее число единственным образом представляется в виде  $r = a + b\sqrt{2}$  с рациональными  $a$  и  $b$  (проверьте!).

**Лемма об операциях над хорошими числами.** Если  $x$  и  $y \neq 0$  – хорошие, то и  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $x \cdot y$ ,  $x/y$  –

хорошие, причем  $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$ ,  $\overline{x - y} = \bar{x} - \bar{y}$ ,  $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ ,  $\overline{x/y} = \bar{x}/\bar{y}$ .

**Доказательство.** Пусть  $x = a + b\sqrt{2}$ ,  $y = c + d\sqrt{2}$ , где  $a, b, c, d$  рациональны. Тогда сразу видим, что

$$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$

$$x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{2},$$

$$x \cdot y = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

– хорошие. Для частного  $x/y$  нужно еще применить обычный прием – «умножить на сопряженное»:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \\ &= \left( \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} \right) + \left( \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2} \right) \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Видим, что и оно – хорошее ( $c^2 - 2d^2$  не равно нулю, так как  $y$  не равно нулю). Так же легко вычисляются сопряженные, например,

$$\begin{aligned} \overline{x \cdot y} &= (ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2} = \\ &= (a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = \bar{x} \cdot \bar{y}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Задача 5.** Можно ли представить  $1 + \sqrt{2}$  в виде суммы квадратов нескольких хороших чисел?

Приведем пример разрезания квадрата на прямоугольники с отношением сторон  $r = a + b\sqrt{2}$  в случае, когда сопряженное к нему положительно. Возьмем прямоугольник со сторонами 1 и  $a + b\sqrt{2}$ . Назовем его *эталонным*. Умножим стороны эталонного прямоугольника на число  $\bar{r}$ . Получим прямоугольник со сторонами  $a - b\sqrt{2}$  и  $a^2 - 2b^2$ , и он подобен эталонному. Запишем  $a^2 - 2b^2$  в виде  $k/l$  для

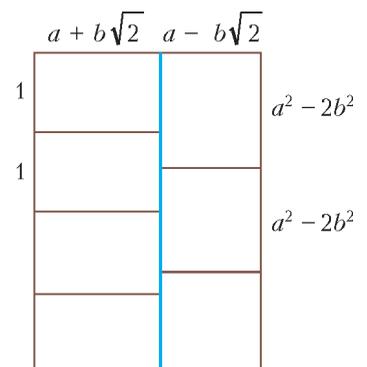


Рис. 12. Вот так из прямоугольников с хорошим отношением сторон можно составить прямоугольник с рациональными сторонами

некоторых натуральных чисел  $k$  и  $l$ . Сложим  $l$  копий этого прямоугольника и  $k$  копий эталонного, как на рисунке 12. Мы получим прямоугольник  $2a \times k$  с рациональными сторонами, а из его копий уже нетрудно сложить квадрат.

**Задача 6.** На прямоугольном листе бумаги нарисовано разбиение на прямоугольники. Разрешается разрезать лист вдоль любого отрезка на два прямоугольника, потом произвести такие операции по отдельности с каждой из получившихся частей, и так далее. Если таким образом можно реализовать исходное разбиение, то назовем его *тривиальным* (см. рис. 1, 2). Попробуйте описать все хорошие числа  $r$ , для которых существует тривиальное разрезание квадрата на прямоугольники с отношением сторон  $r$ .

Из примера видно, что если сопряженное к хорошему числу  $r$  положительно, то разрезание всегда возможно. Если же сопряженное число отрицательно, то не понятно, что делать.

Нам снова поможет физика! Давайте рассмотрим электрическую цепь, в которой сопротивления всех резисторов – положительные хорошие числа, причем сопряженные к ним тоже положительные.

Что произойдет с сопротивлением цепи, если сопротивления всех резисторов заменить на сопряженные?

Заметим, что сопротивление цепи от напряжения батарейки не зависит: если напряжение увеличить в какое-то количество раз, то ток через нее увеличится в такое же количество раз, и их отношение останется прежним. А раз так, то напряжение батарейки можно выбрать любым. Удобно считать напряжение батарейки единичным. По лемме о сопротивлении цепи и лемме об операциях над хорошими числами получаем, что силы тока в исходной цепи – хорошие числа.

Заменим все сопротивления резисторов и силы тока на сопряженные. После такой замены ни одно правило Кирхгофа не нарушится. Например, для контура на рисунке 9

$$R_5 I_5 + R_9 I_9 - R_6 I_6 - R_7 I_7 = 0.$$

После замены на сопряженные получим

$$\begin{aligned} \bar{R}_5 \bar{I}_5 + \bar{R}_9 \bar{I}_9 - \bar{R}_6 \bar{I}_6 - \bar{R}_7 \bar{I}_7 &= \\ &= \overline{R_5 I_5 + R_9 I_9 - R_6 I_6 - R_7 I_7} = \\ &= \overline{R_5 I_5 + R_9 I_9 - R_6 I_6 - R_7 I_7} = \bar{0} = 0, \end{aligned}$$

т.е. правило Кирхгофа по-прежнему выполняется.

Все новые сопротивления тоже положительны, а значит, выполнена теорема существования и единственности. Поэтому числа, сопряженные к силам тока в исходной цепи, – это и есть настоящие силы тока в новой цепи. Какие-то силы тока через резисторы могли стать отрицательными – это означает лишь, что направление тока поменялось на противоположное. Но по теореме положительности сила тока через батарейку заведомо осталась положительной (т.е. по батарейке ток всегда течет от отрицательного полюса к положительному).

Раз ток через батарейку заменился на сопряженный,

то и сопротивление цепи заменилось на сопряженное. Мы доказали следующую лемму.

**Лемма о сопряжении.** *Рассмотрим электрическую цепь, в которой сопротивления всех резисторов – положительные хорошие числа, причем сопряженные к ним тоже положительные. Тогда если заменить сопротивления резисторов на сопряженные к ним, то сопротивление цепи также заменится на сопряженное.*

Именно это поможет нам доказать основную теорему этой статьи.

**Теорема о хороших числах.** *Пусть  $r = a + b\sqrt{2} > 0$  – хорошее число. Тогда из прямоугольников с отношением сторон  $r$  можно составить квадрат, если и только если число  $\bar{r} = a - b\sqrt{2}$  положительно.*

**Доказательство.** Мы уже показали выше, что при  $\bar{r} = a - b\sqrt{2} > 0$  сложить квадрат можно. Покажем, что если  $\bar{r} = a - b\sqrt{2} < 0$ , то сложить квадрат нельзя. Допустим, что можно. Растянув квадрат в  $a + b\sqrt{2}$  раз по горизонтали, получим прямоугольник с отношением сторон  $a + b\sqrt{2}$ , разрезанный на прямоугольники с отношением сторон  $(a + b\sqrt{2})^2$  и квадраты. Сопоставим этому разбиению электрическую цепь. Она состоит из резисторов сопротивлениями 1 и  $(a + b\sqrt{2})^2$ . Сопротивление цепи равно  $a + b\sqrt{2}$ . Применим лемму о сопряжении. Тогда возникнет электрическая цепь, в которой сопротивления резисторов равны 1 и  $(a - b\sqrt{2})^2$  – числа положительные, а общее сопротивление  $a - b\sqrt{2}$  – число отрицательное. Однако, сопротивление цепи всегда положительно. Полученное противоречие доказывает невозможность разрезания.

**Задача 7 (для исследования).** Дано хорошее число  $r$ . Какие прямоугольники можно сложить из прямоугольников с отношением сторон  $r$ ?

### Скованные одной дробью

А что же верно для произвольных  $r$ , не обязательно хороших? Дадим только ответ без полного доказательства. Его получили Ласкович, Ринн, Секереш и Фрайлинг в 1994 году.

**Теорема о разрезании квадрата на подобные прямоугольники.** *Для числа  $r > 0$  следующие три условия эквивалентны:*

1) *Квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон  $r$ .*

2) *Для некоторых положительных рациональных чисел  $c_1, \dots, c_n$  выполнено равенство*

$$c_1 r + \frac{1}{c_2 r + \frac{1}{c_3 r + \dots + \frac{1}{c_n r}}} = 1.$$

3) *Число  $r$  является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами, у которого все*

<sup>4</sup> О комплексных числах можно прочитать в статье С. Дориченко «Комплексные числа» в «Кванте» № 5 за 2008 год.

комплексные <sup>4</sup> корни имеют положительную действительную часть.

**Доказательство следствия 2)  $\Rightarrow$  1).** Цепная дробь из условия 2) дает алгоритм разрезания. Для начала возьмем некоторый квадрат. Проведем вертикальную линию так, чтобы она отсекала от квадрата прямоугольник с отношением горизонтальной стороны к вертикальной, равным  $c_1r$ . Останется прямоугольник с отношением сторон  $1 - c_1r$ . Отделим от него горизонтальным отрезком прямоугольник с отношением вертикальной стороны к горизонтальной, равным  $c_2r$ . Останется прямоугольник с отношением сторон  $\frac{1}{1 - c_1r} - c_2r$ . Продолжим этот процесс, чередуя вер-

тикальные и горизонтальные разрезы. В силу равенства в условии 2), на  $n$ -м шаге мы получим прямоугольник с отношением сторон  $c_n r$ . Тем самым, квадрат оказался разбит на прямоугольники с отношениями сторон  $c_1r, c_2r, c_3r, \dots, c_n r$ . Разрезав каждый из них на прямоугольники с отношением сторон  $r$ , мы построим нужное разбиение.

**Идея доказательства следствия 3)  $\Rightarrow$  2).** Покажем на примере, как по многочлену построить цепную дробь. Пусть  $r = 1 + \sqrt[3]{2}$ . Это корень многочлена  $f(x) = (x - 1)^3 - 2$ , удовлетворяющего условию 3) (проверьте!). Рассмотрим функцию

$$R(x) = \frac{f(-x) - f(x)}{f(-x) + f(x)} = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 3}.$$

Она равна 1 при  $x = 1 + \sqrt[3]{2}$ , так как это корень многочлена  $f(x)$ . Разложим функцию  $R(x)$  в цепную дробь, последовательно выделяя целую часть:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 3} = \frac{1}{3}x + \frac{2x}{3x^2 + 3} = \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2x}} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{\frac{3}{2}x + \frac{1}{\frac{2}{3}x}}. \end{aligned}$$

При  $x = 1 + \sqrt[3]{2}$  получаем равенство из условия 2).

Оказывается, для любого многочлена  $f(x)$ , удовлетворяющего условию 3), все коэффициенты такой цепной дроби будут положительны. Доказывать этого мы не будем.

**Задача 8.** Попробуйте сделать то же самое для положительного корня  $r$  многочлена  $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ . Нужно ли для этого этот корень находить? Нарисуйте разрезание квадрата на прямоугольники с отношением сторон, равным  $r$ .

**Доказательство следствия 1)  $\Rightarrow$  3) для хороших  $r$**  мы на самом деле уже проделали. Если квадрат разрезается на прямоугольники с отношением сторон  $r > 0$ , то по теореме о хороших числах получаем  $\bar{r} > 0$ . Тогда многочлен  $f(x) = (x - r)(x - \bar{r})$  удовлетворяет условию 3).

Доказательство следствий 1)  $\Rightarrow$  3)  $\Rightarrow$  2) для произвольных  $r$  выходит за рамки настоящей статьи. Оно

довольно объемно и требует серьезных навыков работы с комплексными числами. Отметим только, что это рассуждение идейно похоже на доказательство теоремы о хороших числах, но использует цепи переменного тока <sup>5</sup> (рис. 13).

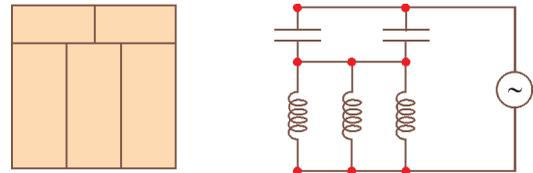


Рис. 13. Построение цепи переменного тока по разрезанию

**Задача 9.** Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, у каждого из которых длина хотя бы одной стороны – целое число. Доказать, что и у исходного прямоугольника длина хотя бы одной стороны – целое число. <sup>6</sup>

**Задача 10.** Пусть  $A$  и  $B$  – два прямоугольника. Из прямоугольников, равных  $A$ , сложили прямоугольник, подобный  $B$ . Докажите, что из прямоугольников, равных  $B$ , можно сложить прямоугольник, подобный  $A$ . <sup>7</sup>

**Задача 11.** Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа  $a, b, c, d$ , чтобы прямоугольник  $a \times b$  можно было разрезать на несколько прямоугольников  $c \times d$ . <sup>8</sup>

**Замечание.** В нашей предыдущей статье «Разрезания металлического прямоугольника» в «Кванте» №3 за 2011 год замечены следующие опечатки:

- В решении системы на странице 11 должно быть  $x_7 = 9/16$ .

- В определении электрической цепи на странице 12 нужно добавить условие, что граф остается связным после удаления любого ребра. В частности, это исключает ситуацию на рисунке 11 (с. 13), когда один контур проходит по ребру дважды.

Авторы благодарны за помощь НИУ Высшая школа экономики и Институту проблем передачи информации РАН, а также школьникам Саше Анохину, Алине Ибраевой и Лене Лычагиной за полезные замечания и предложения.

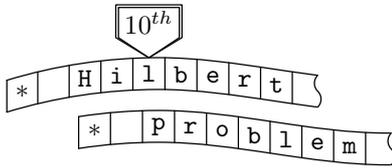
<sup>5</sup> M.Prasolov, M.Skopenkov. Tiling by rectangles and alternating current. J. Combin. Theory Ser. A **118:3** (2011), 920–937; <http://arxiv.org/abs/1002.1356>

<sup>6</sup> Это теорема де Брёйна. Вы можете найти доказательство в статье С. Табачникова и Д. Фукса «Невозможные замощения» в «Кванте» № 2 за 2011 год (с. 25, теорема 4).

<sup>7</sup> А.Шаповалов. XXVI Турнир городов; <http://turgor.ru/26/index.php>

<sup>8</sup> А.Колотов. Об одном разбиении прямоугольника. «Квант» №1 за 1973 год.





## Десятая проблема Гильберта

Ю. В. Матиясевич, Я. Абрамов, А. Я. Белов-Канель,  
И. А. Иванов-Погодаев, А. С. Малистов

В математике часто встречаются уравнения, обе части которых представляют собой многочлены с целыми коэффициентами, а решения требуется найти в целых числах. Такие уравнения называются *диофантовыми*.

На Втором Международном конгрессе математиков в Париже [1900] Давид Гильберт сделал свой знаменитый доклад «Математические проблемы», содержащий 23 проблемы или, точнее, 23 группы родственных проблем, которые 19-й век оставлял в наследие 20-му. Проблема под номером десять была посвящена диофантовым уравнениям.

### 10. Задача о разрешимости диофантова уравнения

*Пусть задано диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых рациональных числах.*

Под «способом», который предлагает найти Д. Гильберт, в настоящее время подразумевают «алгоритм». В начале века, когда проблемы формулировались, еще не было математически строгого *общего* понятия алгоритма. Отсутствие такого понятия не могло само по себе служить препятствием к положительному решению 10-й проблемы Гильберта, поскольку про *конкретные* алгоритмы всегда было ясно, что они действительно дают требуемый общий способ решения соответствующих проблем.

В 30-е годы в работах К. Геделя, А. Чрча, А.М. Тьюринга и других логиков было выработано строгое общее понятие алгоритма, которое дало принципиальную возможность устанавливать *алгоритмическую неразрешимость*, то есть доказывать невозможность алгоритма с требуемыми свойствами. Тогда же были найдены первые примеры алгоритмически неразрешимых проблем, сначала в самой математической логике, а затем и в других разделах математики.

Таким образом, теория алгоритмов создала необходимые предпосылки для попыток доказать неразрешимость 10-й проблемы Гильберта. Первые работы в этом направлении были опубликованы в начале 50-х годов, а в 1970 году исследования завершились «отрицательным решением» 10-й проблемы Гильберта, полученным Ю. В. Матиясевичем.

В настоящем цикле задач мы следуем пути доказательства Ю. В. Матиясевича.

## А. Диофантовы множества

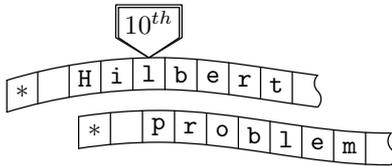
В этой задаче, решая уравнения, мы будем искать только целые неотрицательные решения.

Рассмотрим равенство вида

$$D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0,$$

где  $D$  — многочлен с целыми коэффициентами относительно переменных  $a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m$ . Будем считать, что переменные разбиты на две части: *параметры*  $a_1, \dots, a_n$  и неизвестные  $x_1, \dots, x_m$ . При фиксированных целых значениях параметров получаются конкретные диофантовы уравнения, составляющие семейство. (Заметим, коэффициенты у нас просто целые, а решения мы ищем целые неотрицательные). Например, если  $D(a_1, a_2, x) = a_1x^2 + a_2x$ , то в семейство диофантовых уравнений войдут уравнения  $x^2 = 0$ ,  $2x^2 + 6x = 0$ ,  $3x^2 - 17x = 0$  и т.п. В первом случае значения параметров выбраны  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ , во втором —  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 6$ , в третьем —  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = -17$ .

Семейство диофантовых уравнений  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0$  определяет некоторое множество  $M$ , состоящее из всех таких наборов значений параметров  $a_1, \dots, a_n$ , для которых существуют целые



неотрицательные значения неизвестных  $x_1, \dots, x_m$ , удовлетворяющие уравнению. В этом случае говорят, что множество  $M$  имеет *диофантово представление*. Число  $n$  называют *размерностью* множества. Множества, имеющие диофантовы представления, будем называть *диофантовыми*.

Множество чётных чисел диофантово: уравнение  $2x = a$  имеет целочисленное решение только при чётных значениях параметра  $a$ . Аналогично диофантовым является множество пар  $(a, b)$ , таких, что  $a$  — нечётное, а  $b$  — чётное, большее 2. Для доказательства достаточно рассмотреть представление  $2(2x + 1) = a^2(b^3 - 14)$ .

◆ **A1.** Установите диофантовость следующих множеств:

- a) множество всех положительных чётных чисел;
- b) множество всех нечётных чисел;
- c) множество всех чисел, являющихся квадратами;
- d) множество всех чисел, являющихся кубами.

◆ **A2.** Докажите, что система диофантовых уравнений эквивалентна некоторому диофантову уравнению (т. е. множества решений у них совпадают).

◆ **A3.** Докажите, что объединение и пересечение двух диофантовых множеств одинаковой размерности тоже диофантово.

◆ **A4.** Докажите, что если множество  $n$ -ок  $\mathfrak{M}$  диофантово, то множество  $m$ -ок  $(a_1, \dots, a_m)$  таких, что существуют  $a_{m+1}, \dots, a_n$ , что  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{M}$ , тоже диофантово.

В дальнейшем можно говорить не о диофантовости каких-либо множеств, а о диофантовости свойств и отношений. Например, можно говорить не о принадлежности к диофантову множеству чётных чисел, а о диофантовости свойства *быть чётным числом*. Аналогично, вместо того чтобы говорить о диофантовости множества с представлением  $(a_1 - a_2)^2 = x + 1$ , можно говорить о диофантовости отношения  $\neq$ . Формально, будем называть свойство  $P$  натуральных чисел диофантовым, если множество всех чисел, обладающих свойством  $P$ , диофантово. Аналогично, отношение  $R$  между  $n$  натуральными числами называется диофантовым, если диофантовым является множество  $n$ -ок (последовательностей из  $n$  элементов) натуральных чисел, находящихся в отношении  $R$ . Функцию  $a = F(b_1, \dots, b_k)$  будем называть диофантовой, если множество последовательностей из  $k + 1$  элемента  $[a, b_1, \dots, b_k]$ , удовлетворяющих равенству  $a = F(b_1, \dots, b_k)$ , является диофантовым.

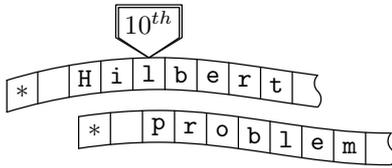
◆ **A5.** Докажите, что следующие отношения диофантовы:

- a) отношение «больше» ( $a > b$ );
- b) отношение «делимости» ( $a$  делит  $b$ ).
- c) Докажите, что диофантовым является множество троек чисел  $(a, b, c)$ , таких что  $a$  — остаток от деления  $b$  на  $c$  (**обозначение:**  $a = b \pmod{c}$ );
- d) Докажите, что диофантовым является множество троек чисел  $(a, b, c)$ , таких что  $a = \min\{b \pmod{c}, (c - b) \pmod{c}\}$  (**обозначение:**  $a = b \pmod{c}$ ) (Т.е. расстояние до ближайшего числа, делящегося на  $c$ );
- e) Докажите, что диофантовым является множество троек  $(a, b, c)$ , таких что  $a = \lfloor \frac{b}{c} \rfloor$ ;

◆ **A6.** Докажите, что отношение «взаимной простоты» а также функции НОК и НОД диофантовы.

◆ **A7.** Докажите, что диофантовым является:

- a) множество всех чисел, не являющихся квадратами;
- b) множество пар  $(a, b)$ , таких что  $a$  — не степень  $b$ .



## Уравнение Пелля

**Определение.** Уравнением Пелля называется уравнение вида  $x^2 - dy^2 = 1, d \in \mathbb{N}$ .

♦ **A8.** Уравнение Пелля.

а) Решение  $(x, y)$  назовем нетривиальным, если  $y \neq 0$ . Пусть  $d$  – квадрат. Докажите, что нет нетривиальных решений.

б) Пусть  $(u_1, v_1)$  и  $(u_2, v_2)$  – решения уравнения Пелля  $x^2 - dy^2 = 1$ . Докажите, что если  $u_3 + \sqrt{d}v_3 = (u_1 + \sqrt{d}v_1) \cdot (u_2 + \sqrt{d}v_2)$ , то  $(u_3, v_3)$  – также решение. В частности, если  $(x, y)$  – решение, то  $(x_n, y_n)$  – решение, где  $x_n + \sqrt{d}y_n = (x + \sqrt{d}y)^n$ .

в) Решение назовем минимальным, если оно нетривиально, и среди нетривиальных  $|x+y|$  минимально. Докажите, что любое решение – степень минимального.

Известно, что если  $d$  не квадрат, то существует нетривиальное решение. Это достаточно сложное утверждение, поэтому мы не приводим его доказательство и не включаем его в список задач. Доказательство см., например, в книге В. О. Бугаенко «Уравнение Пелля».

♦ **A9.** Специальный случай уравнения Пелля

а)  $d = k^2 - 1$ . Докажите, что  $(k, 1)$  – минимальное решение.

б)  $d = k^2 - 1, (x_1, y_1)$  – минимальное решение,  $(x_n, y_n) = (x_1, y_1)^n$ . Докажите, что  $y_n \equiv n \pmod{(k-1)}$ .

с) Другие виды уравнения Пелля. Решите уравнение  $x^2 - (\frac{b^2}{4} - 1)y^2 = 1$

## Диофантовость степени

Сейчас мы будем рассматривать решения специального семейства диофантовых уравнений, называемых уравнениями Пелля. Решения этих уравнений получаются из частного их решения с помощью последовательного многократного применения одного и того же преобразования плоскости.

Рассмотрим последовательность, заданную так:  $\alpha_0(b) = 0, \alpha_1(b) = 1, \alpha_{n+2}(b) = b\alpha_{n+1}(b) - \alpha_n(b)$ , где  $b \geq 2$ .

♦ **A10.** Докажите, что  $x^2 - bxy + y^2 = 1, x, y \geq 0$ , тогда и только тогда, когда

$$\text{либо } \begin{cases} x = \alpha_{m+1}(b), \\ y = \alpha_m(b), \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} x = \alpha_m(b), \\ y = \alpha_{m+1}(b), \end{cases}$$

для некоторого  $m$ .

♦ **A11.** Докажите, что  $\alpha_n(2) = n$ ;

♦ **A12.** Докажите, что  $\alpha_{k+\ell}(b) = \alpha_k(b) \cdot \alpha_{\ell+1}(b) - \alpha_{k-1}(b) \cdot \alpha_{\ell}(b)$ .

♦ **A13.** Докажите, что  $\alpha_n(b) \equiv \alpha_{n+4m}(b) \pmod{v}$ , где  $v = \alpha_{m+1}(b) - \alpha_{m-1}(b)$ ;

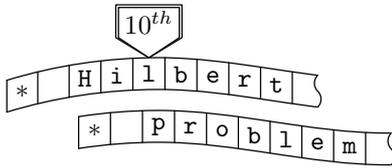
♦ **A14.** Докажите, что если  $b_1 \equiv b_2 \pmod{q}$ , то  $\alpha_n(b_1) \equiv \alpha_n(b_2) \pmod{q}$ .

♦ **A15.** Докажите, что наименьшим числом  $k$ , таким что при фиксированном  $n$

$$\alpha_n(w) \pmod{v} = \alpha_{n+k}(w) \pmod{v},$$

$$\text{где } w \equiv b \pmod{v}, \quad v = \alpha_{m+1}(b) - \alpha_{m-1}(b),$$

является  $2m$ .



◆ **A16.** Докажите, что если

$$w \equiv b \pmod{v}, \quad w \equiv 2 \pmod{u}, \quad \text{где } v > 2\alpha_k(b), \quad u > 2k,$$

то первые  $k$  членов последовательности

$$(\alpha_0(b), 0), \dots, (\alpha_n(b), n), \dots$$

совпадают с первыми  $k$  членами последовательности

$$\left(\alpha_0(w) \pmod{v}, \alpha_0(w) \pmod{u}\right), \dots, \left(\alpha_n(w) \pmod{v}, \alpha_n(w) \pmod{u}\right), \dots$$

◆ **A17.** Докажите, что если  $\alpha_m(b)$  делится на  $(\alpha_k(b))^2$ , то  $m$  делится на  $\alpha_k(b)$ .

◆ **A18.** Докажите, что если  $2\alpha_k(b) < u$ , то  $2k < u$ .

◆ **A19.** Докажите, что множество  $\{(a, b, c) \mid a = \alpha_c(b), b > 3\}$  диофантово.

◆ **A20.** Докажите, что  $(k - 1)^n \leq \alpha_{n+1}(k) \leq k^n$ ;

◆ **A21.** Докажите, что  $(1 + s)^n \geq 1 + ns$  при  $s \in \mathbb{R}, s > -1, n$  — целое неотрицательное;

◆ **A22.** Докажите, что  $b^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{c+1}(bn + 4)}{\alpha_{c+1}(n)}$ .

◆ **A23.** Докажите диофантовость множества  $\{(a, b, c) \mid a = b^c\}$ .

## В. Кодирование

Данное Кантором классическое доказательство счтности счтного объединения счтных множеств использует следующее линейное упорядочивание множества всех пар натуральных чисел:

$$\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 3 \rangle \dots$$

Заметим, что номер пары  $\langle a, b \rangle$  в указанной последовательности полиномиально выражается через  $a$  и  $b$ , а именно, он равен  $\mathbf{Cantor}(a, b) = ((a+b)^2 + 3a + b)/2$ . Соответственно, диофантовыми оказываются функции  $\mathbf{ElemA}(c)$  и  $\mathbf{ElemB}(c)$ , дающие по номеру пары ее первый и второй элементы:

$$\begin{aligned} a = \mathbf{ElemA}(c) &\iff \exists y: [(a + y)^2 + 3a + y = 2c]; \\ b = \mathbf{ElemB}(c) &\iff \exists x: [(x + b)^2 + 3x + b = 2c] \end{aligned}$$

Нумерацию пар легко обобщить на нумерацию троек, четвчрок и т.д. Можно, например, положить

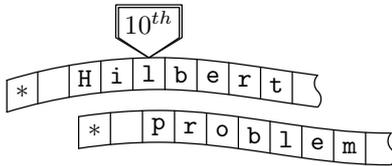
$$\mathbf{Cantor}_1(a_1) = a_1, \quad \mathbf{Cantor}_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) = \mathbf{Cantor}_n(a_1, \dots, a_{n-1}, \mathbf{Cantor}(a_n, a_{n+1}))$$

и называть число  $\mathbf{Cantor}_n(a_1, \dots, a_n)$  канторовым номером кортежа  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . Аналогично, функция  $\mathbf{Elem}_{n,m}(c)$ , дающая по числу  $c$ , рассматриваемому как номер  $n$ -ки натуральных чисел, значение ее  $m$ -ой компоненты, будет диофантовой:

$$a = \mathbf{Elem}_{n,m}(c) \iff \exists x_1 \dots x_{m-1} x_{m+1} \dots x_n: [2^{2^n} \mathbf{Cantor}_n(x_1, \dots, x_{m-1}, a, x_{m+1} \dots x_n) = 2^{2^n} c]$$

(появление множителя  $2^{2^n}$  связано с тем, что  $\mathbf{Cantor}_n$  не является полиномом с целыми коэффициентами).

Заметим однако, что введенная таким образом нумерация кортежей натуральных чисел обладает одним существенным недостатком: обратная функция  $\mathbf{Elem}_{n,m}(c)$  является диофантовой функцией одной переменной при любых фиксированных значениях  $n$  и  $m$ , но не видно пути установить диофантовость  $\mathbf{Elem}_{n,m}(c)$  как функции трех аргументов  $c, m, n$ . Для работы с кортежами, длина которых не фиксирована заранее, нам придется использовать другие методы.



### Позиционный код

Пусть  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  — последовательность натуральных чисел (кортеж). Выберем  $b > a_i$ , для всех  $i$ . Пусть

$$a = a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \dots + a_1 b^0.$$

Иначе говоря,  $a_1, \dots, a_n$  — это цифры в записи числа  $a$  в позиционной системе счисления с основанием  $b$ , и значит, кортеж  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  однозначно восстанавливается по тройке  $(a, b, n)$ . Тройку  $(a, b, n)$  будем называть *позиционным кодом* кортежа  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . Позиционным кодом пустого кортежа будет тройка  $(0, b, 0)$ . Заметим, что не каждая тройка является позиционным кодом какого-нибудь кортежа. Легко установить диофантовость отношения «*быть позиционным кодом*»:

$$\text{Code}(a, b, c) \iff \begin{cases} b \geq 2, \\ a < b^c. \end{cases}$$

♦ **В1.** Докажите диофантовость множества четверок  $(a, b, k, c)$ , таких что  $c$  равен  $k$ -му члену последовательности, заданной  $a$  и  $b$ .

♦ **В2.** а) Закодируйте последовательность  $c_i = \binom{i}{n} = C_i^n$  и докажите, что множество троек  $(c, m, n)$ , таких что  $c = \binom{m}{n} = C_m^n$ , диофантово.

б) Докажите, что

$$m! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m}{\binom{n}{m}}$$

и что множество чисел, являющихся факториалами, диофантово.

♦ **В3.** Докажите диофантовость множества простых чисел.

♦ **В4.** Докажите, что уравнение  $D(a, x_1, \dots, x_m) = 0$  имеет решение в неизвестных  $x_1, \dots, x_m$  тогда и только тогда, когда имеет решение в неизвестных  $x_0, x_1, \dots, x_m$  уравнение

$$a = (x_0 + 1)(1 - D(x_0, x_1, \dots, x_m)^2) - 1.$$

♦ **В5.** Докажите, что существует многочлен с целыми коэффициентами, положительные значения которого суть все простые числа.

Далее мы установим возможность объединять две последовательности в одну, сравнивать их поэлементно, проверять, кодируют ли две тройки чисел одну и ту же последовательность, — и все это при помощи решения соответствующего диофантова уравнения.

♦ **В6. (теорема Куммера)** а) Докажите, что число  $k$ , такое что  $n!$  делится на  $p^k$ , но не делится на  $p^{k+1}$ , равно

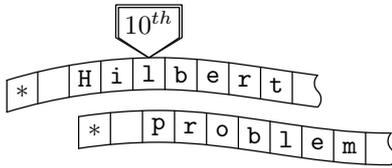
$$\left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n}{p^2} \right] + \left[ \frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

б) Докажите, что число  $l$ , такое что  $\binom{m+n}{n}$  делится на  $p^l$ , но не делится на  $p^{l+1}$ , равно количеству переносов из разряда в разряд при сложении чисел  $m$  и  $n$  в  $p$ -ичной системе счисления.

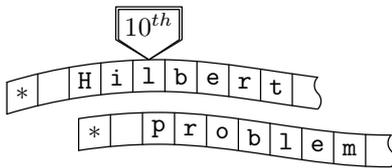
♦ **В7.** Установите диофантовость множества троек  $(a_1, a_2, p)$ , где  $p$  — простое, а пары  $(a_1, p)$  и  $(a_2, p)$  задают последовательности, такие что  $k$ -й элемент первой не превосходит  $k$ -го элемента второй для любого  $k$ .

**Подсказка.** Что будет, если сложить  $a_1$  и  $a_2 - a_1$ ?

♦ **В8.** Установите диофантовость множества четверок  $(a, p, n, e)$ , где  $p$  — простое, и тройка  $(a, p, n)$  задает последовательность, каждый элемент которой не превосходит числа  $e$ .



- ◆ **В9.** Докажите, что если  $(a_1, b_1, n)$  и  $(a_2, b_2, n)$  кодируют одну и ту же последовательность, причем  $b_1 < b_2$ , то  $a_1 \equiv a_2 \pmod{b_2 - b_1}$ .
- ◆ **В10.** Докажите, что если в условиях предыдущей задачи  $b_1^n < b_2 - b_1$ , то число  $a_1$  однозначно определяется по числам  $a_2, b_1, b_2, n$ .
- ◆ **В11.** Установите, диофантовость множества  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$ , таких что  $(a_1, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$  кодируют одну и ту же последовательность.
- ◆ **В12.** Докажите диофантовость множества четверок  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$ , таких что пары  $(a_1, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$  кодируют последовательности, причем  $k$ -й член первой не больше  $k$ -го члена второй для любого  $k$ .
- ◆ **В13.** Докажите диофантовость множества четверок  $(a, b, n, e)$ , где тройка  $(a, b, n)$  задает последовательность, все члены которой не превосходят числа  $e$ .
- ◆ **В14.** Докажите диофантовость множества восьмерок  $(A, B, a_1, b_1, n_1, a_2, b_2, n_2)$  таких, что пара  $(A, B)$  кодирует последовательность, полученную из последовательности, которую кодирует тройка  $(a_1, b_1, n_1)$ , дописыванием после нее последовательности, которую кодирует тройка  $(a_2, b_2, n_2)$ .
- ◆ **В15.** Покажите, как по кодам последовательностей  $p_1, \dots, p_n$  и  $q_1, \dots, q_m$  закодировать  $p_1 + q_1, p_1 + q_2, \dots, p_1 + q_m, p_2 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_2 + q_m, \dots, p_n + q_m$  и  $p_1 \cdot q_1, p_1 \cdot q_2, \dots, p_1 \cdot q_m, p_2 \cdot q_1, p_2 \cdot q_2, \dots, p_2 \cdot q_m, \dots, p_n \cdot q_m$ .



## Десятая проблема Гильберта

Ю. Матиясевич, Я. Абрамов, А. Белов-Канель,  
И. Иванов-Погодаев, А. Малистов, И. Нетай

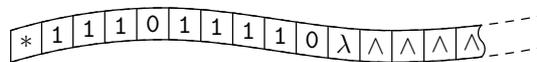
### С. Машины Тьюринга

Развитая теоретико-числовая техника даёт возможность приступить к доказательству отсутствия универсального *способа* решения диофантовых уравнений. Но сначала надо определиться, что мы будем понимать под этим «способом». Для этого необходимо уточнить, в каком случае мы считаем, что обладаем *методом* для решения какого-либо типа задач.

Основная идея любого такого уточнения состоит в следующем. Мы можем считать, что имеем метод для решения какого-либо типа задач, если мы можем находить решение любой задачи этого типа без приложения творческих усилий, как говорят, механически, с помощью компьютера.

С компьютером мы сталкиваемся не только в реальной жизни, но и в математике. Наша цель — формализовать понятие метода с помощью абстрактной машины, позволяющей решать все задачи данного типа автоматически.

Теперь нам предстоит разобраться, как устроена *машина Тьюринга*. Машина имеет память в виде ленты, разделенной на клетки. Лента имеет один конец, будем считать, что левый. Вправо лента является потенциально бесконечной. То есть, в отличие от реальных машин, машина Тьюринга всегда обладает достаточным количеством памяти. В то же время, любое конкретное вычисление использует лишь конечный отрезок ленты.



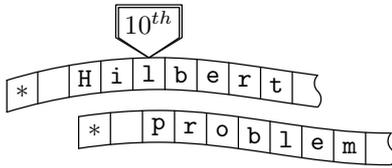
Каждая клетка может быть либо пустой, либо содержать один символ из некоторого конечного множества символов  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_w\}$ , называемого *алфавитом*. Разные машины имеют, вообще говоря, разные алфавиты. Один символ играет выделенную роль — им всегда будет помечена самая левая клетка и только она. В качестве такого маркера мы будем использовать символ «\*». Кроме того, удобно использовать специальный символ для обозначения пустой клетки, по традиции мы будем использовать для этой цели букву  $\lambda$ .

Машина снабжена специальным считывающим и пишущим устройством — *головкой*, которая в каждый момент дискретного времени обозревает одну из клеток ленты. Головка может перемещаться вдоль ленты налево и направо. В каждый момент времени головка находится в одном из конечного числа состояний. Будем обозначать эти состояния  $q_1, \dots, q_v$ . Вообще, «состояние машины» будет значить то же самое, что и «состояние головки». Одно из состояний объявляется *начальным*, у нас это всегда будет  $q_1$ . Кроме того, одно или несколько состояний объявляются *заключительными*.

Очередное действие машины полностью определяется состоянием, в котором она находится, и символом, который «видит» головка. За один шаг машина может изменить символ в клетке, переместить головку влево или вправо и перейти в другое состояние. При этом, все эти действия (изменить символ в клетке, переместить головку, перейти в другое состояние) машина делает *в зависимости* от текущего состояния головки. То есть, действия машины полностью определяются набором инструкций вида

$$\text{«состояние } q_i + \text{ символ } a_j \rightarrow \text{Left(Right, Stop)} + q_k + a_\ell \text{»}.$$

Такая инструкция означает следующее «если головка находится в состоянии  $q_i$  над клеткой в которой записан символ  $a_j$ , то машина производит следующие действия: 1) символ  $a_j$  меняется на  $a_\ell$ , 2)



головка сдвигается налево (направо или остается на месте), 3) состояние головки меняется на  $q_k$ ». Такие инструкции должны быть выписаны для всевозможных сочетаний символа  $a_j$  и состояния машины  $q_i$ . Весь набор таких инструкций называется *программой* машины.

Все машины, которые мы будем строить, будут иметь один и тот же алфавит  $\{*, 0, 1, 2, 3, \lambda\}$ .

Кроме того, будет два заключительных состояния  $q_2$  и  $q_3$  и мы будем интерпретировать  $q_2$  как ответ «ДА», а  $q_3$  как ответ «НЕТ». Клетки, содержащие символ  $\lambda$  будут играть роль дублеров пустых клеток, а именно: справа от клетки с символом « $\lambda$ » может находиться только клетка с символом « $\lambda$ » либо пустая клетка; для любого состояния  $q_i$ , у инструкций с левыми частями  $q_i\lambda$  и  $q_j\wedge$  будут совпадать правые части.

**Пример простейшей машины.** Машина LEFT с инструкциями

$$\begin{aligned} q_1* &\rightarrow *Sq_2 \\ q_10 &\rightarrow 0Lq_2 \\ q_11 &\rightarrow 1Lq_2 \\ q_12 &\rightarrow 2Lq_2 \\ q_13 &\rightarrow 3Lq_2 \\ q_1\lambda &\rightarrow \lambda Lq_2 \\ q_1\wedge &\rightarrow \lambda Lq_2 \end{aligned}$$

сдвигает головку на одну клетку влево, если конечно, головка не находилась на самой левой клетке, помеченной символом «\*».

Машина WRITE(0) с инструкциями

$$\begin{aligned} q_1* &\rightarrow *Sq_2 \\ q_10 &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_11 &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_12 &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_13 &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_1\lambda &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_1\wedge &\rightarrow 0Sq_2 \end{aligned}$$

вписывает в клетку, где находится головка, символ «0», если, конечно, это не самая левая клетка с маркером «\*». Ясно, что аналогично можно построить машины WRITE(1), WRITE(2), WRITE(3) инструкции которых получаются заменой всюду в правых частях символа «0» на «1», «2» и «3» соответственно.

Машина READ(0) с инструкциями

$$\begin{aligned} q_1* &\rightarrow *Sq_3 \\ q_10 &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_11 &\rightarrow 1Sq_3 \\ q_12 &\rightarrow 2Sq_3 \\ q_13 &\rightarrow 3Sq_3 \\ q_1\lambda &\rightarrow \lambda Sq_3 \\ q_1\wedge &\rightarrow \lambda Sq_3 \end{aligned}$$

распознает, записан ли в клетке, где находится головка, символ «0» или нет. В зависимости от этого она заканчивает работу в состоянии  $q_2$  или  $q_3$ . Аналогично можно построить машины READ(1), READ(2), READ(3), READ(\*).

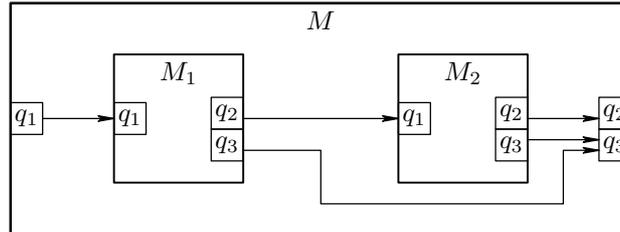
◆ **С0.** а) Постройте машину Тьюринга STOP, которая не сдвигая головки сразу переходит в заключительное состояние.

б) Постройте машину Тьюринга READNOT( $x$ ), которая распознает отсутствие символа « $x$ » в клетке.

**Два способа композиции машин.**

Первый способ построения по двум машинам Тьюринга  $M_1$  и  $M_2$  новой машины  $M$  состоит в следующем:

1. Во всех инструкциях машины  $M_1$  заключительное состояние  $q_2$  заменяется на  $q_{v+1}$ , где  $v$  – количество состояний машины  $M_1$ . (Заклучительные состояния могут стоять только в правых частях инструкций);
2. Во всех инструкциях машины  $M_2$  каждое незаключительное состояние  $q_i$  заменяется на  $q_{v+i}$ . (В частности,  $q_1$  заменяется на  $q_{v+1}$ )
3. Модифицированные инструкции обеих машин объединяются и образуют систему инструкций новой машины  $M$ .



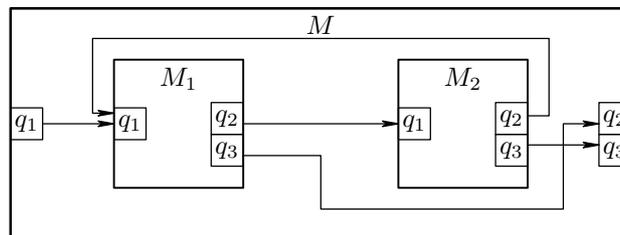
Действие машины  $M$ , построенной описанным выше способом, состоит в последовательном выполнении действий машин  $M_1$  и  $M_2$  при условии, что машина  $M_1$  заканчивает работу в состоянии  $q_2$ . Для обозначения машины  $M$  мы будем использовать одну из трех форм записи

$$M_1; M_2 \quad M_1 \text{ and } M_2 \quad \text{или} \quad \text{if } M_1 \text{ then } M_2.$$

Второй способ построения по двум машинам Тьюринга  $M_1$  и  $M_2$  новой машины  $M$  позволяет конструировать циклы типа FOR  $i=1$  TO  $N$  или WHILE с которыми вы встречались при программировании. Такие циклы встречаются и в математике. Например, чтобы вычислить функцию  $f(n) = 2^{2^n}$  нужно число 2 последовательно возвести в квадрат  $n$  раз.

Этот способ состоит в следующем:

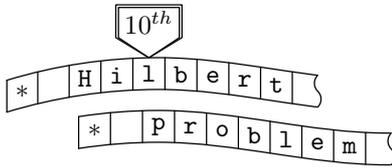
1. Во всех инструкциях машины  $M_1$  заключительное состояние  $q_2$  заменяется на  $q_{v+1}$ , где  $v$  – количество состояний машины  $M_1$ , а заключительное состояние  $q_3$  заменяется на  $q_2$ ;
2. Во всех инструкциях машины  $M_2$  каждое незаключительное состояние  $q_j$  заменяется на  $q_{v+i}$ , а заключительное состояние  $q_2$  заменяется на  $q_1$ ;
3. Модифицированные инструкции обеих машин объединяются и образуют систему инструкций новой машины  $M$ .



Действие машины  $M$ , построенной описанным выше способом, состоит в поочередном выполнении действий машин  $M_1$  и  $M_2$  до тех пор, пока одна из машин не перейдет в состояние  $q_3$ . Построенную таким образом машину мы будем обозначать посредством

$$\text{while } M_1 \text{ do } M_2 \text{ od.}$$

Введенные нами обозначения выглядят как некоторый примитивный язык программирования. (Следует отметить, однако, что каждая «программа» является на самом деле обозначением конкретной машины Тьюринга.) Однако, этот язык не столь примитивен, как кажется. Он позволяет эмулировать любой компьютер, с которым вы имели дело. Знаменитый тезис Черча гласит, что любой алгоритм



может быть реализован на машине Тьюринга. Это понятие адекватно формализует понятие механической работы. В дальнейшем под существованием алгоритмов мы понимаем существование машины Тьюринга. То есть, эти понятия отождествляются.

Машина

**STAR = while READNOT(\*) do LEFT od**

устанавливает головку на левый конец ленты (помеченный символом «\*»).

Машина

**VACANT = STAR; while READNOT( $\lambda$ ) do RIGHT od**

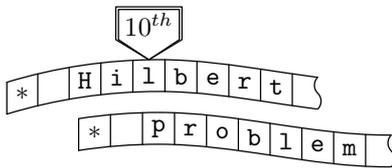
устанавливает головку на самую левую пустую клетку или ее дублера - клетку с символом « $\lambda$ »).

- ◆ **C1.** а) Постройте машину JUMP, передвигающую головку до ближайшей клетки с символом «0».
- б) Постройте серию машин Тьюринга FIND( $k$ ), устанавливающих головку на  $k$ -ый от левого края символ «0».

На ленте машины Тьюринга можно запоминать наборы (кортежи) чисел: для записи кортежа  $(a_1, \dots, a_n)$  используются символы 1, разделенные символами 0. Например, кортеж  $(3, 1, 2, 0, 2)$  записывается как \*0111010110011 $\lambda$ .... Таким образом, машина Тьюринга может получать на входе какой-то кортеж и осуществлять его преобразование.

- ◆ **C2.** Постройте машины Тьюринга, преобразующие кортеж  $(a_1, \dots, a_n)$  в кортеж:
  - а)  $(a_1, \dots, a_n, 0)$ ;
  - б)  $(a_1, \dots, a_n + 1)$ ;
- ◆ **C3.** а) Постройте машину Тьюринга, преобразующую кортеж  $(a_1, \dots, a_n)$  в кортеж  $(a_1, \dots, a_n - 1)$ , если  $a_n > 0$ , или останавливающуюся в состоянии  $q_3$ , если  $a_n = 0$ .
- б) Постройте машину Тьюринга, усекающую кортеж  $(a_1, \dots, a_n)$  до кортежа  $(a_1, \dots, a_{n-1})$ .
- ◆ **C4.** Постройте машины Тьюринга, преобразующие кортеж  $(a_1, \dots, a_n)$  в кортеж:
  - а)  $(a_1, \dots, a_n, a_k + a_l)$ , для заданных  $1 \leq k, l \leq n$ ;
  - б)  $(a_1, \dots, a_n, a_k \times a_l)$ , для заданных  $1 \leq k, l \leq n$ ;
- ◆ **C5.** Постройте машину NOTGREATER( $k, l$ ), сравнивающую элементы  $a_k$  и  $a_l$  кортежа  $(a_1, \dots, a_n)$  и останавливающуюся в состоянии  $q_2$  или  $q_3$ , в соответствии с тем, которое из неравенств  $a_k \leq a_l$  или  $a_k > a_l$  имеет место.
- ◆ **C6.** Постройте машины Тьюринга, преобразующие кортеж  $(a_1, \dots, a_n)$  в кортеж:
  - а)  $(a_1, \dots, a_n, b, c)$ , где  $(b, c)$  пара чисел, следующая за парой  $(a_{n-1}, a_n)$  в канторовой нумерации;
  - б)  $(a_1, \dots, a_n, b, c)$ , где  $(b, c)$  пара чисел, имеющая номер  $a_n$  в канторовой нумерации;
- ◆ **C7.** Пусть имеется уравнение  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_{m+1}) = 0$ . Постройте машину Тьюринга, которая по кортежу  $(a_1, \dots, a_n, y_0)$  проверяет, является ли  $y_0$  канторовым номером кортежа  $(x_1, \dots, x_{m+1})$ , дающего решение уравнения.
- ◆ **C8.** Пусть имеется уравнение  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_{m+1}) = 0$ . Постройте машину Тьюринга, получающую на входе кортеж  $(a_1, \dots, a_n)$  и заканчивающую свою работу в том и только том случае, когда уравнение  $D = 0$  разрешимо относительно  $x_1, \dots, x_{m+1}$ .

Будем называть множество  $\omega$ , состоящее из упорядоченных наборов из  $n$  натуральных чисел ( $n$ -ок) *полуразрешимым по Тьюрингу*, если существует машина Тьюринга  $M$ , которая начав работу над каноническим изображением кортежа  $(a_1, \dots, a_n)$  в состоянии  $q_1$  и головкой, установленной в левом конце ленты, окончит свою работу в том и только том случае, когда  $(a_1, \dots, a_n) \in \omega$ . (Однако может не быть никакого способа оценить время работы и распознать ситуацию, когда  $(a_1, \dots, a_n) \notin \omega$ ).



Итак, из результата задачи С7 следует, что всякое диофантово множество является полуразрешимым по Тьюрингу. Целью следующих задач будет доказательство обратного, то есть того что каждое полуразрешимое по Тьюрингу множество является диофантовым.

Пусть дана машина Тьюринга  $M$ , полуразрешающая некоторое множество  $\omega$ , состоящее из  $n$  натуральных чисел. Пусть  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_w\}$  — алфавит этой машины. На каждом шаге работы машины  $M$  заполнен только конечный отрезок ленты, скажем, длины  $l$ . Мы можем представить его кортежем  $(s_1, s_2, \dots, s_m, \dots, s_{l-1}, s_l)$ , где  $s_i$  — номер символа записанного в ячейке  $i$ .

Текущее состояние  $q_i$  машины и положение головки можно представлять кортежем такой же длины  $(0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0)$ , все элементы которого, кроме одного, равны нулю, единственный ненулевой элемент указывает положение головки и равен номеру состояния машины.

Тройку, состоящую из текущего содержимого ленты, состояния машины и положения головки, будем называть *конфигурацией*. Конфигурация определяется двумя кортежами  $(s_1, s_2, \dots, s_m, \dots, s_{l-1}, s_l)$  и  $(0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0)$ . Для представления кортежей мы будем использовать позиционную систему кодирования с каким либо фиксированным основанием  $\beta > v, w$ . *Кодом конфигурации* будем называть пару  $(p, t)$ , где  $p$  и  $t$  — шифры по основанию  $\beta$  указанных кортежей.

Итак, необходимо построить диофантово уравнение  $D(p, t, x_1, \dots, x_m) = 0$ , такое что, если  $(p, t)$  — код некоторой конфигурации, то уравнение разрешимо относительно  $x_1, \dots, x_m$  тогда и только тогда, когда машина  $M$  начав работу в этой конфигурации, остановится через конечное число шагов. Вопрос о разрешимости уравнения в случае, когда  $(p, t)$  не является кодом никакой конфигурации, нас не интересует.

- ◆ **С9.** Пусть из конфигурации с кодом  $(p, t)$  машина  $M$  непосредственно переходит в конфигурацию с кодом  $[\text{NextP}(p, t), \text{NextT}(p, t)]$ . Докажите, что функции  $\text{NextP}$  и  $\text{NextT}$  диофантовы.
- ◆ **С10.** Пусть из конфигурации с кодом  $(p, t)$  машина  $M$  за  $k$  шагов переходит в конфигурацию с кодом  $[\text{AfterP}(p, t, k), \text{AfterT}(p, t, k)]$ . Докажите, что функции  $\text{AfterP}$  и  $\text{AfterT}$  диофантовы.
- ◆ **С11.** Постройте диофантово уравнение с параметрами  $a_1, \dots, a_n$ , разрешимое в тех и только тех случаях, когда данная машина Тьюринга  $M$ , начав работу на кортеже  $a_1, \dots, a_n$ , останавливается.

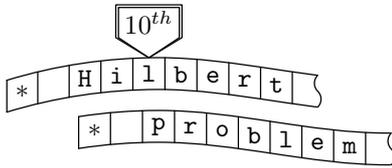
## Д. Универсальная машина Тьюринга

В информатике (Computer Science) вы встречались с операционными системами (Windows, Dos, Unix), позволяющими запускать произвольные исполняющие файлы (то есть работать с произвольными алгоритмами). При этом, операционная система сама является программой. В математике аналогичным понятием является понятие *универсального алгоритма*.

До сих пор мы конструировали свою машину Тьюринга для каждого алгоритма. Но можно поступить и по-другому: придумать язык, на котором описывается, что нужно сделать (алгоритм), и записать эту информацию с помощью какой-то кодировки на ленте машины Тьюринга. Работающая с этой лентой машина «разархивирует» с ленты алгоритм и реализует его. При этом, у данной машины своя фиксированная программа, которая не меняется от того, какой алгоритм записан на ленте. Такая машина называется *универсальной машиной Тьюринга*.

Ясно, что мы можем пронумеровать все алгоритмы (машины Тьюринга) и говорить о алгоритме (машине) с номером  $n$ .

- ◆ **D1. Кодировка.** Придумайте способ записи алгоритма (машины Тьюринга) на ленте.
- ◆ **D2.** Докажите, что существует машина Тьюринга, считывающая с ленты пару чисел  $(m, n)$  и выполняющая алгоритм с номером  $n$ , получающий на входе число  $m$ .



◆ **D3. Самоприменение алгоритма.** Докажите, что существует такая машина Тьюринга  $U$  которая на числе  $n$  работает также как  $n$ -ый алгоритм на числе  $n$ .

◆ **D4. Проблема останова.** а) Предположим, что существует универсальная машина Тьюринга,  $U(n, m)$  проверяющая, останавливается ли  $n$ -ая машина Тьюринга на числе  $m$ . Докажите, что тогда существует алгоритм  $V(n)$ , устанавливающий, останавливается или работает бесконечно  $n$ -ый алгоритм на числе  $n$ . Докажите также, что существует алгоритм  $T(n)$ , который останавливается, если  $V(n)$  работает бесконечно, и работает бесконечно если  $V(n)$  останавливается.

б) Пусть  $k$  – номер алгоритма  $T$ . Останавливается ли  $T(k)$ ?

## Е. Универсальные диофантовы уравнения

Рассмотрим семейство уравнений  $U(a_1, \dots, a_n, k_1, \dots, k_\ell, y_1, \dots, y_v) = 0$ . Будем выделять в нем две группы параметров: параметры-элементы  $a_1, \dots, a_n$  и параметры-коды  $k_1, \dots, k_\ell$ . Будем называть такое уравнение универсальным, если для любого диофантового уравнения с  $n$  параметрами:  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0$  можно так выбрать значения параметров кодов  $k_1(D), \dots, k_u(D)$ , что уравнение  $D = 0$  разрешимо относительно  $x_1, \dots, x_n$  при тех и только тех наборах параметров  $a_1, \dots, a_n$ , при которых разрешимо уравнение  $U(a_1, \dots, a_n, k_1(D), \dots, k_\ell(D), y_1, \dots, y_v) = 0$  относительно  $y_1, \dots, y_v$ . Можно сказать, каждое универсальное диофантово уравнение порождает кодирование диофантовых множеств *данной размерности*, и для данного уравнения  $D = 0$  этим кодом можно считать кортеж  $[k_1(D), \dots, k_\ell(D)]$ .

◆ **E1.** Покажите, что ценой увеличения количества неизвестных любое универсальное уравнение может быть преобразовано в уравнение с тем же количеством параметров-элементов, но всего с одним параметром-кодом.

◆ **E2.** Покажите, что если существует универсальное диофантово уравнение, кодирующее одномерные диофантовы множества (то есть, для  $n = 1$ ), то существует константа  $m$ , такая, что для любого  $n$  имеется универсальное диофантово уравнение с  $u = 1$  и  $v = m$ .

◆ **E3.** Придумайте способ кодировки уравнения и потенциального решения с помощью нескольких натуральных чисел, такой, что функция проверки, является ли данный кортеж решением данного уравнения, была диофантовой.

◆ **E4.** Постройте универсальное диофантово уравнение.

◆ **E5.** Постройте диофантово множество  $M$  с неддиофантовым дополнением (то есть такое, что дополнение  $\bar{M}$  до множества  $\mathbb{N}$  не является диофантовым).

◆ **E6.** Докажите, что множество кодов диофантовых уравнений без параметров, имеющих решения, является множеством из E5.

## Ф. Заключительная задача

◆ **F1.** Докажите, что нельзя построить машину Тьюринга, которая, начав работу над изображением числа  $k$ , останавливалась бы через конечное число шагов в состоянии  $q_2$  или  $q_3$  в соответствии с тем, разрешимо или неразрешимо диофантово уравнение с кодом  $k$ .

## Подсказки и решения задач пунктов А и В

◆ **А 1.** а)  $x = 2a$ ;

б)  $x^2 = (2a - 1)^2$ ;

в)  $x = a^2$ ;

г)  $x = a^3$ .

◆ **А 2.** Пусть система уравнений такова:  $D_1 = 0, \dots, D_n = 0$ . Она эквивалентна одному уравнению  $D_1^2 + \dots + D_n^2 = 0$ .

◆ **А 3.** Чтобы пересечь два диофантовых множества, объединим уравнения первого и второго в систему, которая, как мы знаем, эквивалентна одному уравнению. Чтобы объединить два множества, просто перемножим уравнения.

◆ **А 4.** Чтобы показать, что это множество диофантово, рассмотрим то же самое уравнение, но уже относительно параметров  $a_1, \dots, a_m$ .

◆ **А 5.** а)  $a - b = x + 1$ ;

б)  $a = bx$ ;

в)  $(a - b)^2 = c^2x, 0 \leq a < c$ ;

г) Воспользуемся предыдущими пунктами:  $a = \min\{x, y\}, x = b \operatorname{mod}(c), y = (c - b) \operatorname{mod}(c)$ . Реализуем минимум:  $a \leq x, a \leq y, (a - x)(a - y) = 0$ .

е)  $ac \leq b < (a + 1)c$ .

◆ **А 6.** Отношение взаимной простоты из алгоритма Евклида выражается уравнением  $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 1$ .  $a = (b, c)$ , если  $b = ax, c = ay, x$  и  $y$  взаимно просты. Чтобы получить НОК, воспользуемся тем, что умеем выразить НОД, и  $a \cdot b = (a, b) \cdot (a, b)$ .

◆ **А 7.** а)  $x^2 < a < (x + 1)^2$ .

◆ **А 8.** а)  $x^2 - n^2y^2 = 1$ . Тогда целые числа  $x + ny$  и  $x - ny$  равны, поэтому  $y = 0$ , поэтому  $x = \pm 1$ .

б) Получаем по определению  $u_3 = u_1u_2 + dv_1v_2, v_3 = u_1v_2 + u_2v_1$ . Подставим в уравнение:  $u_1^2u_2^2 + d^2v_1^2v_2^2 + 2du_1u_2v_1v_2 - du_1^2v_2^2 - du_2^2v_1^2 - 2du_1u_2v_1v_2 = u_2^2(u_1^2 - dv_1^2) - dv_1^2(u_2^2 - dv_2^2) = 0$ ;

в) Заметим, что на решение уравнения можно не только умножать, как в предыдущем пункте, но и делить. Это легко проверить. Если рассмотреть уравнение на всей плоскости, то мы получим гиперболу, где наши решения

– ец целые точки. Заметим, что умножение, а потому и деление на сохраняют порядок точек на гиперболе. Рассмотрим только правую ветку, только положительную часть, ибо можно считать переменные неотрицательными. Пусть есть решение, которое не степень минимального. Будем делить на минимальное. По предположению мы не получим тривиальное решение, тогда получим нетривиальное решение, по модулю меньшее, чем минимальное. Противоречие.

◆ **А 9.** а) Если увеличить 1, то и  $k$  увеличится, то есть не получится меньшее решение, а уменьшив единицу, мы получим лишь 0.

б) Получаем индукцией по  $n$ , ибо  $x_n \equiv 1 \pmod{k-1}$ .

с) Задача сводится к следующей за ней:  $1 = x^2 - (\frac{b^2}{4} - 1)y^2 = (x + \frac{b}{2}y)^2 - b(x + \frac{b}{2}y)y + y^2$

◆ **А 10.** Рассмотрим отображение  $(x, y) \mapsto (y, by - x)$ . Оно увеличивает сумму координат. Будем применять обратное отображение, которое также целочисленно. Поскольку решения целочисленны, бесконечно уменьшатся сумма модулей координат не может. Легко проверить, что, если она не уменьшается, то  $y = 0, x = 1$ , так что решение получается нашим преобразованием из тривиального.

◆ **А 11.** Это получается по индукции, ибо  $n + 2 = 2(n - 1) - n$ .

◆ **А 12.** Это проверяется индукцией по  $l$ . Для  $l = 0$  это тривиально следует из того, что  $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$ , для  $l = 1$  это следует из рекуррентного определения последовательности  $\alpha_i$ .

◆ **А 13.** Используется  $\alpha_{2m}(b) = \alpha_m(b)(\alpha_{m+1}(b) - \alpha_{m-1}(b)), \alpha_{4m-1}(b) = \alpha_{2m-1}(b)(\alpha_{2m}(b) - \alpha_{2m-2}(b))$  и то, что  $\alpha_{4m}(b)$  делится на  $\alpha_{2m}(b)$ .

◆ **А 14.** Проверяется индукцией из рекуррентного определения последовательности.

◆ **А 15.** Без комментариев

◆ **А 16.** Легко понять, что  $\alpha_n(b)(\text{amod } v) = \alpha_n(w)(\text{amod } v)$  и  $n(\text{amod } u) = \alpha_n(w)(\text{amod } u)$  (из задачи 14). Т.к. то, что стоит под  $\text{amod}$  в правых частях меньше, чем  $v$  и  $u$  соответственно (т.к. последовательность  $\alpha_n(b)$  возрастает), то  $\alpha_n(b) = \alpha_n(b)(\text{amod } v)$  и  $n = n(\text{amod } u)$ , откуда и следует утверждение задачи.

◆ **А 17.** Без комментариев

◆ **А 18.** Это равносильно тому, что просто  $\alpha_k(b) \geq k$ , то есть что  $\alpha_k(b)$  строго возрастает, что очевидно.

◆ **А 19.** Без комментариев.

◆ **A 20.** Индукция по  $n$ . При  $n = 0, 1$  верно. Пусть верно для  $n$ . Покажем для  $n + 1$ .  $\alpha_{n+1}(k) = k\alpha_n(k) - \text{alpha}_{n-1}(k) \leq k\alpha_n(k) \leq k^{n+1}$ .

$$\alpha_{n+1}(k) = k\alpha_n(k) - \text{alpha}_{n-1}(k) \geq (k-1)\alpha_n(k) + (\alpha_n(k) - \alpha_{n-1}(k)) \geq (k-1)\alpha_n(k) \geq (k-1)^n$$

◆ **A 21.** Индукция по  $n$ . Для 0 верно. Пусть верно для  $n$ . Проверим для  $n+1$ .  $(1+s)^{n+1} = (1+s)^n(1+s) \geq (1+ns)(1+s) = 1 + (n+1)s + ns^2 \geq 1 + (n+1)s$

$$\begin{aligned} \text{◆ A 22. } \frac{\alpha_{c+1}(bn+4)}{\alpha_{c+1}(n)} &\leq \frac{(bn+4)^c}{(n-1)^c} = b^c \left(\frac{bn+4}{n-1}\right)^c \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b^c; \\ \frac{\alpha_{c+1}(bn+4)}{\alpha_{c+1}(n)} &\geq \frac{(bn+3)^c}{n^c} = b^c \left(\frac{bn+3}{n}\right)^c \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b^c. \end{aligned}$$

$$\text{◆ B 1. } c = \left[ \frac{a}{b^{k-1}} \right] \pmod{b^k}$$

$$\text{◆ B 2. a) } b = 2^n, a = (2^n + 1)^n$$

b)

◆ **B 3.**  $p$  — простое тогда и только тогда, когда  $GCD(p, (p-1)!) = 1$

◆ **B 4.**  $(x_0 + 1)(1 - D(x_0, x_1, \dots, x_m)^2) - 1 \geq 0$  если и только если  $1 - D(x_0, x_1, \dots, x_m)^2 > 0$ , т.е.  $D(x_0, x_1, \dots, x_m) = 0$ . Поэтому  $a = (x_0 + 1)(1 - 0) - 1 = x_0$ .

◆ **B 5.** следует из двух предыдущих задач

◆ **B 6.** а) Первое слагаемое этой суммы равно числу множителей, делящихся на  $p$ , второе — на  $p^2$  и так далее.

$$\text{b) } \sum \left( \left[ \frac{m+n}{p^k} \right] - \left[ \frac{m}{p^k} \right] - \left[ \frac{n}{p^k} \right] \right) \text{ равна искомому числу.}$$

◆ **B 7.**  $\begin{pmatrix} x_n p^{n-1} + \dots + x_1 p + x_0 \\ y_n p^{n-1} + \dots + y_1 p + y_0 \end{pmatrix}$  делится на  $p$  если и только если существует  $i$ , такое что  $x_i < y_i$ .

$$\text{◆ B 8. } a < e \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1}$$

$$\text{◆ B 9. } (y_n b_1^{n-1} + \dots + y_1 b_1 + y_0) - (y_n b_2^{n-1} + \dots + y_1 b_2 + y_0) \equiv 0 \pmod{b_2 - b_1}$$

$$\text{◆ B 10. } a_1 = a_2 \pmod{b_2 - b_1} \text{ (ибо } a_1 < b_1^n < b_2 - b_1)$$

Будем считать, что, если для некоторой начальной пары из состояния машины Тьюринга и символа в клетке не указано, что делать, то она заполнена произвольным образом, для определённости остановка в состоянии  $q_2$ .

**C1a**

$q_1 0 \rightarrow 0Sq_2$   
 $q_1 1 \rightarrow 1Rq_1$   
 $q_1 2 \rightarrow 2Rq_1$   
 $q_1 3 \rightarrow 3Rq_1$   
 $q_1 \lambda \rightarrow \lambda Rq_1$   
 $q_1 \wedge \rightarrow \wedge Rq_1$

**C1b**

$q_i 1 \rightarrow 1Rq_i$   
 $q_i 2 \rightarrow 2Rq_i$   
 $q_i 3 \rightarrow 3Rq_i$   
 $q_i \lambda \rightarrow \lambda Rq_i$   
 $q_i \wedge \rightarrow \wedge Rq_i, 1 \leq i \leq k+2$   
 $q_1 0 \rightarrow 0Rq_4$   
 $q_j 0 \rightarrow 0Rq_{j+1}, 4 \leq j \leq k+2$   
 $q_{k+3} a \rightarrow aLq_2$

**C2a**

$q_1 a \rightarrow aRq_1, a \neq \lambda$   
 $q_1 \lambda \rightarrow 0Rq_4$   
 $q_4 b \rightarrow \lambda Sq_2$

**C2b**

$q_1 a \rightarrow aRq_1, a \neq \lambda$   
 $q_1 \lambda \rightarrow 1Rq_4$   
 $q_4 b \rightarrow \lambda Sq_2$

**C3a**

$q_1 a \rightarrow aRq_1, a \neq \lambda$   
 $q_1 \lambda \rightarrow \lambda Lq_4$   
 $q_4 0 \rightarrow 0Sq_3$   
 $q_4 1 \rightarrow \lambda Sq_2$

**C3b**

$q_1 a \rightarrow aRq_1, a \neq \lambda$   
 $q_1 \lambda \rightarrow \lambda Lq_4$   
 $q_4 b \rightarrow \lambda Lq_4, b \neq 0$   
 $q_4 0 \rightarrow \lambda Sq_2$

◆ **C4. (a)**

$q_1 b \rightarrow bRq_1, b \neq \lambda$   
 $q_1 \lambda \rightarrow 0Rq_2$   
 $q_2 c \rightarrow \lambda Sq_3$   
 $q_3 d \rightarrow dLq_3, d \neq *$   
 $q_3 * \rightarrow *Sr_1$

Удлиним на 1 кортеж и вернёмся на место

$r_i e \rightarrow eRr_i, 1 \leq i \leq k+2, e \neq 0$   
 $r_1 0 \rightarrow 0Rr_4$   
 $r_j 0 \rightarrow 0Rr_{j+1}, 4 \leq j \leq k+2$   
 $r_{k+3} f \rightarrow fLr_{k+4}$   
 $r_{k+4} 1 \rightarrow 2Rr_{k+5}$   
 $r_{k+5} g \rightarrow gRr_{k+5}, a \neq \lambda$   
 $r_{k+5} \lambda \rightarrow 1Rr_{k+6}$   
 $r_{k+6} h \rightarrow \lambda Sr_{k+7}$   
 $r_{k+7} i \rightarrow iLr_{k+7}, i \neq 2$   
 $r_{k+7} 2 \rightarrow 2Rr_{k+8}$   
 $r_{k+8} 1 \rightarrow 1Sr_{k+4}$   
 $r_{k+8} 0 \rightarrow 0Sr_{k+9}$   
 $r_{k+9} 2 \rightarrow 1Lr_{k+9}$   
 $r_{k+9} 1 \rightarrow 1Lr_{k+9}$   
 $r_{k+9} 0 \rightarrow 0Lr_{k+9}$   
 $r_{k+9} * \rightarrow *Ss_1$

дошли до  $k$ -ого нуля, далее начинаем копировать единички в конец.

идём до конца, ставим единичку,

не забывая про  $\lambda$

и идём

до последней двойки назад.

следующий перенос единички, если она есть, иначе

стирание двоек до \*

когда дойдём, перейдём к выполнению той же операции с  $a_i$

$s_i e \rightarrow eRs_i, 1 \leq i \leq l+2, e \neq 0$   
 $s_1 0 \rightarrow 0Rs_4$   
 $s_j 0 \rightarrow 0Rs_{j+1}, 4 \leq j \leq l+2$   
 $s_{l+3} f \rightarrow fLs_{l+4}$   
 $s_{l+4} 1 \rightarrow 2Rs_{l+5}$

дошли до  $l$ -ого нуля, далее начинаем копировать единички в конец.

$s_{l+5} g \rightarrow gRs_{l+5}, a \neq \lambda$   
 $s_{l+5} \lambda \rightarrow 1Rs_{l+6}$   
 $s_{l+6} h \rightarrow \lambda Ss_{l+7}$   
 $s_{l+7} i \rightarrow iLs_{l+7}, i \neq 2$   
 $s_{l+7} 2 \rightarrow 2Rs_{l+8}$   
 $s_{l+8} 1 \rightarrow 1Ss_{l+4}$   
 $s_{l+8} 0 \rightarrow 0Ss_{l+9}$   
 $s_{l+9} 2 \rightarrow 1Ls_{l+9}$   
 $s_{l+9} 1 \rightarrow 1Ls_{l+9}$

идём до конца, ставим единичку,

не забывая про  $\lambda$

и идём

до последней двойки назад.

следующий перенос единички, если она есть, иначе

стирание двоек до \*

$$s_{l+9}0 \rightarrow 0Ls_{l+9}$$

$$s_{l+9}* \rightarrow *Sq_2$$

ещё и закончили в начале ленты

(b)

$$q_1b \rightarrow bRq_1, b \neq \lambda$$

$$q_1\lambda \rightarrow 0Rq_2$$

$$q_2c \rightarrow \lambda Sq_3$$

$$q_3d \rightarrow dLq_3, d \neq *$$

$$q_3* \rightarrow *Sr_1$$

Удлиним на 1 кортеж и вернёмся на место

$$r_i e \rightarrow eRr_i, 1 \leq i \leq k+2, e \neq 0$$

$$r_1 0 \rightarrow 0Rr_4$$

$$r_j 0 \rightarrow 0Rr_{j+1}, 4 \leq j \leq k+2$$

$$r_{k+3} f \rightarrow fLr_{k+4}$$

$$r_{k+4} 1 \rightarrow 2Rr_{k+5}$$

$$r_{k+5} g \rightarrow gRr_{k+5}, g \neq \lambda$$

$$r_{k+5} \lambda \rightarrow 1Rr_{k+6}$$

$$r_{k+6} h \rightarrow \lambda Sr_{k+7}$$

$$r_{k+7} i \rightarrow iLr_{k+7}, i \neq 2$$

$$r_{k+7} 2 \rightarrow 2Rr_{k+8}$$

$$r_{k+8} 1 \rightarrow 1Sr_{k+4}$$

$$r_{k+8} 0 \rightarrow 0Sr_{k+9}$$

$$r_{k+9} 2 \rightarrow 1Lr_{k+9}$$

$$r_{k+9} 1 \rightarrow 1Lr_{k+9}$$

$$r_{k+9} 0 \rightarrow 0Lr_{k+9}$$

$$r_{k+9} * \rightarrow *S\tilde{q}_1$$

дошли до  $k$ -ого нуля, далее начинаем копировать единички в конец,

идём до конца, ставим единичку,

не забывая про  $\lambda$

и идём

до последней двойки назад.

следующий перенос единички, если она есть, иначе

стирание двоек до \*

Таким образом,  $a_k$  скопировано в конец, мы в начале.

$$\tilde{q}_1 b \rightarrow bR\tilde{q}_1, b \neq \lambda$$

$$\tilde{q}_1 \lambda \rightarrow 0R\tilde{q}_2$$

$$\tilde{q}_2 c \rightarrow \lambda S\tilde{q}_3$$

$$\tilde{q}_3 d \rightarrow dL\tilde{q}_3, d \neq *$$

$$\tilde{q}_3 * \rightarrow *Ss_1$$

Удлиним на 1 кортеж и вернёмся на место

$$s_i e \rightarrow eRs_i, 1 \leq i \leq l+2, e \neq 0$$

$$s_1 0 \rightarrow 0Rs_4$$

$$s_j 0 \rightarrow 0Rs_{j+1}, 4 \leq j \leq l+2$$

$$s_{l+3} f \rightarrow fLs_{l+4}$$

$$s_{l+4} 1 \rightarrow 2Rs_{l+5}$$

$$s_{l+5} g \rightarrow gRs_{l+5}, a \neq \lambda$$

$$s_{l+5} \lambda \rightarrow 1Rs_{l+6}$$

$$s_{l+6} h \rightarrow \lambda Ss_{l+7}$$

$$s_{l+7} i \rightarrow iLs_{l+7}, i \neq 2$$

$$s_{l+7} 2 \rightarrow 2Rs_{l+8}$$

$$s_{l+8} 1 \rightarrow 1Ss_{l+4}$$

$$s_{l+8} 0 \rightarrow 0Ss_{l+9}$$

$$s_{l+9} 2 \rightarrow 1Ls_{l+9}$$

$$s_{l+9} 1 \rightarrow 1Ls_{l+9}$$

$$s_{l+9} 0 \rightarrow 0Ls_{l+9}$$

$$s_{l+9} * \rightarrow *Sw_1$$

дошли до  $l$ -ого нуля, далее начинаем копировать единички в конец,

идём до конца, ставим единичку,

не забывая про  $\lambda$

и идём

до последней двойки назад.

следующий перенос единички, если она есть, иначе

стирание двоек до \*

Таким образом,  $a_l$  скопировано в конец после  $a_k$ . Остаётся перемножить два последних

$$w_1 b \rightarrow bRq_1, b \neq \lambda$$

$$w_1 \lambda \rightarrow 0Rw_2$$

$$w_2 c \rightarrow \lambda Lt_1$$

Удлиним на 1 кортеж и не вернёмся на место. Теперь начнётся умножение...

$$t_1 1 \rightarrow 1Lt_1$$

$$t_1 0 \rightarrow 0Lt_2$$

это мы ещё в предпоследнем числе

это число закончилось. найдём единичку, заменим на троечку, прибавим

$t_23 \rightarrow 3Lt_3$	к совсем последнему числу предпоследнее
$t_21 \rightarrow 3Lt_4$	мы ищем единичку в третьем с конца числе
$t_20 \rightarrow 0Ru_1$	либо нашли,
$t_4j \rightarrow jRt_4, j \neq 0$	либо не нашли
$t_40 \rightarrow 0Rt_5$	выбираемся из этого числа, чтобы копировать следующее в конец
$t_52 \rightarrow 2Rt_5$	выбрались. Займёмся копированием предпоследнего числа
$t_51 \rightarrow 2Rt_6$	если не дошли до очередной единички для переноса, идём к ней
$t_6j \rightarrow jRt_6, j \neq \lambda$	дошли и идём ставить в конец
$t_6\lambda \rightarrow 1Rt_7$	идём к концу.
$t_7j \rightarrow \lambda Lt_8$	пришли. Поставили,
$t_81 \rightarrow 1Lt_8$	не забыв про $\lambda$ . Теперь идём за следующей единицей.
$t_80 \rightarrow 0Lt_9$	это мы в том же числе
$t_91 \rightarrow 1Lt_9$	это мы перешли в копируемое число
$t_92 \rightarrow 2St_5$	мы уверенно движемся к месту копирования, но ещё не пришли
	отсюда мы начинаем опять искать единичку для копирования в
	предпоследнем числе
$t_50 \rightarrow 0Lt_{10}$	мы скопировали всё предпоследнее число.
$t_{10}2 \rightarrow 1Lt_{10}$	пусть опять предпоследнее будут написано единичками
$t_{10}0 \rightarrow 0Lt_2$	оно закончилось, и мы ищем следующую единичку в третьем с конца числе
$u_13 \rightarrow 2Ru_1$	наконец мы её не нашли, так что остаётся стереть лишнее. Начнём же!
$u_10 \rightarrow 2Ru_2$	закончилось третье с конца число.
$u_21 \rightarrow 2Ru_2$	не закончилось предпоследнее число
$u_20 \rightarrow 2Ru_3$	но вот и оно закончилось. Теперь надо двигать наше $a_k \cdot a_l$ , стирая
	двойки на своём пути
$u_3j \rightarrow jRu_3, j \neq \lambda$	двигаемся в конец
$u_3\lambda \rightarrow \lambda Lu_4$	дошли. Теперь наша цель – передвигать.
$u_41 \rightarrow \lambda Lu_5$	взяли единицу и потащили
$u_51 \rightarrow 1Lu_5$	...тащим...
$u_52 \rightarrow 1Lu_6$	притащили и поставили. Думаем, что делать...
$u_62 \rightarrow 2Ru_3$	опять хотим таскать единицы...
$u_6j \rightarrow jSv_1, j \neq 2$	перетаскивать больше нечего! Значит, дело сделано.
$v_1j \rightarrow jLv_1, j \neq *$	идём в начало ленты, чтобы закончить там
$v_1* \rightarrow *Sq_2$	программа завершена.

◆ **С9.** Мы начнём с моделирования одного шага машины Тьюринга. Пусть из конфигурации с кодом  $(p, t)$  рассматриваемая машина  $M$  переходит непосредственно в конфигурацию с кодом  $(NextP(p, t), NextT(p, t))$ . Проверим, что  $NextP$  и  $NextT$  – диофантовы функции.

Это утверждение нуждается в следующем уточнении. Мы определили функции  $NextP$  и  $NextT$  пока только в случае, когда  $(p, t)$  – код конфигурации, причём конфигурации с незаключительным состоянием. Положим

$$NextP(p, t) = 0,$$

$$NextT(p, t) = t$$

если  $(p, t)$  – код конфигурации с заключительным состоянием. Утверждение о диофантовости  $NextP$  и  $NextT$  следует понимать как существование диофантовых функций, ведущих себя описанным выше образом на кодах конфигураций и произвольным образом, если значения кодов отличны от кодов конфигураций.

Функции  $NextP$  и  $NextT$ , очевидно, должны зависеть от функций  $A, D, Q$ , задающих выбор инструкций машины  $M$ . Расширим эти функции, считая, что если  $q_i$  – заключительное состояние, то  $A(i, j) = j, D(i, j) = 5, Q(i, j) = 0$ .

Диофантовость функции  $NextT$  почти очевидна, поскольку каждый элемент кортежа с шифром  $NextT(p, t)$  однозначно определяется элементами с теми же номерами кортежей с шифрами  $p$  и  $t$ . А именно, определим функцию  $A$  следующим образом:

$$A(i, j) = \begin{cases} A(i, j), & \text{если } 0 < i \leq v, 0 \leq j \leq w \\ j & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(напомним, что  $v$  и  $w$  – это количества состояний и символов машины  $M$ ). Тогда  $Next$  можно определить эквивалентностью

$$t' = NextT(p, t) \Leftrightarrow \exists w t' = A[\beta](p, t, w),$$

где  $A[\beta]$  – расширение функции  $A$  на кортежи.

Диофантовость функции  $NextP$  менее очевидна, поскольку  $k$ -ый элемент кортежа с шифром  $NextP(p, t)$  однозначно определяется лишь элементами с номерами  $k - 1, k, k + 1$  кортежей с шифрами  $p$  и  $t$ . Функции расширять мы умеем на кортежи лишь поэлементно, однако эта трудность легко преодолима. Положим

$$p^R = p\beta, \quad p^L = p \operatorname{div} \beta$$

$$t^R = t\beta, \quad t^L = t \operatorname{div} \beta$$

Очевидно, что если  $t$  – шифр кортежа  $(s_1, \dots, s_m, \dots, s_l)$ , то  $t^R$  и  $t^L$  – шифры кортежей

$$(0, s_1, \dots, s_{m-1}, \dots, s_l)$$

и

$$(s_2, \dots, s_{m+1}, \dots, s_l, 0).$$

(в кортежах выделены  $m$ -ые элементы). Аналогично, если  $p$  – шифр кортежа  $(0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0)$ , то  $p^R$  и  $p^L$  – шифры кортежей

$$(0, \dots, 0, 0, i, \dots, 0)$$

$$(0, \dots, i, 0, 0, \dots)$$

, в которых ненулевой элемент сдвинут на одну позицию вправо или влево.

Каждый элемент кортежа с шифром  $NextP(p, t)$  определяется элементами с тем же номером кортежей с шифрами  $p^L, p, p^R, t^L, t, t^R$ . Эта же зависимость, очевидно, определяется функциями  $D$  и  $Q$ . Зададим её явно, введя функция  $DQ$  следующим образом:

$$DQ(i^L, i, i^R, j^L, j, j^R) = \begin{cases} Q(i^L, j^L), & \text{если } i^L > 0, i = i^R = 0 \text{ и } D(i^L, j^L) = L \\ Q(i, j), & \text{если } i^L = 0, i > 0, i > 0, i^R = 0 \text{ и } D(i, j) = S \\ Q(i^R, j^R), & \text{если } i^L = i = 0, i^R > 0 \text{ и } D(i^R, j^R) = R \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(к "противны случаям" относятся и случаи, когда какое-то из чисел  $i^L, i, i^R$  больше  $v$  или какое-то из чисел  $j^L, j, j^R$  больше  $w$ , ибо тогда  $Q$  и  $D$  не определены). Теперь мы можем указать диофантово представление для  $NextP$ :

$$p' = NextP(p, t) \Leftrightarrow \exists w DQ[b](pb, p, p \operatorname{div} b, tb, t, t \div b, w)$$

◆ **C10.** Функции  $NextP, NextT$  описывают один шаг работы рассматриваемой машины Тьюринга. Наша очередная цель – установить диофантовость трёхместных функций  $AfterP, AfterT$ , которые получаются как итерации функций  $NextP, NextT$ :

$$AfterP(0, p, t) = p$$

$$AfterT(0, p, t) = t$$

$$AfterP(k + 1, p, t) = NextP(k, AfterP(k, p, t), AfterT(k, p, t))$$

$$AfterT(k + 1, p, t) = NextT(k, AfterP(k, p, t), AfterT(k, p, t))$$

Ясно, что за  $k$  шагов машина из  $M$  из конфигурации  $(p, t)$  перешла в конфигурацию  $(p', t')$ , то  $p' = AfterP(k, p, t)$ ,  $t' = AfterT(k, p, t)$ .

Рассмотрим все промежуточные конфигурации

$$(p_0, t_0), \dots, (p_k, t_k),$$

где

$$(p_0, t_0) = (p, t)$$

$$(p_{i+1}, t_{i+1}) = (NextP(p_i, t_i), NextT(p_i, t_i))$$

$$(p', t') = (p_k, t_k).$$

Пусть  $l$  столь велико, что

$$p < \beta^{l-k-2}, \quad t < \beta^{l-2}$$

Это означает, что в конфигурации  $(p, t)$  не более чем  $l - k - 2$  первых клеток ленты заняты символами. За  $k$  шагов работы машина  $M$  сможет заполнить не более чем  $k$  новых клеток, и потому при  $i \in \{0, \dots, k\}$

$$p_i < \beta^{l-2}, \quad t_i < \beta^{l-2}$$

в частности,

$$p' < \beta^{l-2}, \quad t' < \beta^{l-2}$$

Построим две суперконфигурации  $(p_L, t_L)$ ,  $(p_R, t_R)$  при помощи конкатенации конфигураций  $(p_i, t_i)$  (напомним, что диофантовость конкатенации кортежей с равными основаниями была установлена):

$$(p_L, \beta, kl) = (p_0, \beta, l) + \dots + (p_{k-1}, \beta, l)$$

$$(t_L, \beta, kl) = (t_0, \beta, l) + \dots + (t_{k-1}, \beta, l)$$

$$(p_R, \beta, kl) = (p_1, \beta, l) + \dots + (p_k, \beta, l)$$

$$(t_R, \beta, kl) = (t_1, \beta, l) + \dots + (t_k, \beta, l)$$

Суперконфигурации  $(p_L, t_L)$  и  $(p_R, t_R)$  конфигурациями не являются, поскольку кортежи с шифрами  $p_L$  и  $p_R$  содержат по  $k$  ненулевых элементов, а кортежи с шифрами  $t_L$  и  $t_R$  соответствуют лентам, на которых  $k$  клеток помечено символом «\*».

Суперконфигурации соответствуют супермашине, лента которой разделена символами «\*» на  $k$  участков, на каждом из которых работает своя головка в соответствии с инструкциями исходной машины  $M$ . Вместо  $k$  шагов работы машины  $M$  мы можем рассмотреть один шаг работы супермашины, при котором каждая головка независимо от других выполняет соответствующую инструкцию.

Таким образом, суперконфигурация  $(p_R, t_R)$  однозначно определяется суперконфигурацией  $(p_L, t_L)$ ; более того, введённые функции  $NextP$  и  $NextT$  без какой-либо модификации описывают работу супермашины:

$$p_R = NextP(p_L, t_L), \quad t_R = NextT(p_L, t_L)$$

Рассмотрим также суперконфигурацию  $(p_M, t_M)$ , определяемую равенствами

$$(p_M, \beta, (k-1)l) = (p_1, \beta, l) + \dots + (p_{k-1}, \beta, l)$$

$$(t_M, \beta, (k-1)l) = (t_1, \beta, l) + \dots + (t_{k-1}, \beta, l)$$

Определения  $p_L, t_L$  можно переписать в новых обозначениях так:

$$(p_L, \beta, kl) = (p, \beta, l) + (p_M, \beta, (k-1)l)$$

$$(t_L, \beta, kl) = (t, \beta, l) + (t_M, \beta, (k-1)l)$$

$$(p_R, \beta, kl) = (p, \beta, (k-1)l) + (p', \beta, l)$$

$$(t_R, \beta, kl) = (t, \beta, (k-1)l) + (t', \beta, l)$$

Мы видели, что для любой конфигурации  $(p, t)$  и любого положительного  $k$  при любом  $l$  достаточно большом найдутся числа  $p_L, t_L, p_M, t_M, p_R, t_R, p', t'$ , удовлетворяющие вышеперечисленным условиям. Покажем теперь, что выбор этих чисел однозначно определяется по  $k, l, p, t$ .

Действительно, первые  $l$  элементов кортежей  $(p_L, \beta, kl)$  и  $(t_L, \beta, kl)$  определены однозначно. Функции  $NextP$  и  $NextT$  были определены эквивалентностями так, что первые  $m$  элементов кортежей с шифрами  $NextP(x, y)$ ,  $NextT(x, y)$  однозначно определяются первыми  $m+1$  элементами кортежей с шифрами  $x, y$ . Таким образом, первые  $l-1$  элементов кортежей с кодами  $(p_R, \beta, kl)$  и  $(t_R, \beta, kl)$  определены однозначно. Значит однозначно определены первые  $l-1$  элементы кортежей с кодами  $(p_M, \beta, (k-1)l)$ ,  $(t_M, \beta, (k-1)l)$ .

Мы видим, что однозначно определены первые  $2l-1$  элемента кортежей с кодами  $(p_L, \beta, kl)$ ,  $(t_L, \beta, kl)$ , следовательно, первые  $2l-2$  элемента кортежей с кодами  $(p_R, \beta, kl)$ ,  $(t_R, \beta, kl)$ , и первые  $2l-2$  элемента кортежей с кодами  $(p_M, \beta, (k-1)l)$ ,  $(t_M, \beta, (k-1)l)$ .

Повторив это рассуждение достаточное число раз, мы получим, что однозначно определены все элементы кортежей с кодами  $(p_L, \beta, kl)$ ,  $(t_L, \beta, kl)$ ,  $(p_M, \beta, (k-1)l)$ ,  $(t_M, \beta, (k-1)l)$  и все, кроме, быть может, самых последних, элементы кортежей с кодами  $(p_R, \beta, kl)$ ,  $(t_R, \beta, kl)$ ,  $(p', \beta, l)$ ,  $(t', \beta, l)$ . Но из вышеуказанных неравенств следует, что последние элементы кортежей с кодами  $(p', \beta, l)$ ,  $(t', \beta, l)$  равны нулю, и поэтому равны нулю и последние элементы кортежей с кодами  $(p_R, \beta, kl)$ ,  $(t_R, \beta, kl)$ .

Таким образом, мы установили, что система диофантовых условий для любой конфигурации и любого положительного  $k$  при любом  $l$  достаточно большом имеет относительно  $p_L, t_L, p_M, t_M, p_R, t_R, p', t'$  ровно одно решение, и в этом единственном решении  $p' = AfterP(k, p, t)$ ,  $t' = AfterT(k, p, t)$ . Отсюда мы немедленно получаем диофантовость функций  $AfterP$  и  $AfterT$ .

♦ **C11.** Для построения требуемого диофантова уравнения нам осталось сделать небольшой шаг. Пусть  $\omega_1, \dots, \omega_z$  — номера состояни машины  $M$ , объявленных заключительными. Тогда условие

$$\exists k, r \mid [\mathbf{Elem}(After(k, p, t) = \omega_1, \beta, r) \text{ или } \dots \text{ или } \mathbf{Elem}(After(k, p, t), \beta, r) = \omega_z]$$

Выполнено для конфигурации  $\langle p, t \rangle$  в том и только в том случае, когда, начав работу в этой конфигурации, машина остановится ровно через  $k$  шагов. Это условие является диофантовым и потому может быть преобразовано в искомое диофантово уравнение.

Полученное диофантово уравнение — еще не совсем то, что нам требуется для установления диофантовости множества  $\mathfrak{M}$ , полуразрешаемого рассматриваемой машиной  $M$  (параметры этого уравнения —  $p$  и  $t$ , а не  $a_1, \dots, a_n$ , как требуется в диофантовом представлении множества). Однако легко понять, что в начальной конфигурации  $p = 1$  (машина находится в состоянии  $q_1$ , а головка расположена в крайней левой клетке) и

$$\langle t, \beta, a \rangle = \langle \varkappa, \beta, 1 \rangle + \langle \mu, \beta, 1 \rangle + \langle \mathbf{Repeat}(\nu, \beta, a_1), \beta, a_1 \rangle + \dots + \langle \mu, \beta, 1 \rangle + \langle \mathbf{Repeat}(\nu, \beta, a_1), \beta, a_1 \rangle,$$

где  $a = a_1 + \dots + a_n + n + 1$  — количество непустых клеток на ленте,  $\varkappa, \mu$  и  $\nu$  — номера символов «\*», «0», и «1» в ленте из C10, т.е.  $a_\varkappa = *$ ,  $a_\mu = 1$ . Объединяя полученное нами диофантово уравнение и выписанную строчку с тем, что  $p = 1$ , и считая  $a_1, \dots, a_n$  параметрами, а все остальные переменные — неизвестными, мы получаем требуемое диофантово представление  $\mathfrak{M}$ .

♦ **Е3.** Пусть  $w$  — большое число (точное неравенство будет выписано ниже). С помощью *Equal* мы можем перейти от кодов с основаниями  $b$  и  $g$  к новым кодам  $(w, s, d, e, f)$  и  $(d, e, f, w, t)$  того же полинома  $C$  и того же потенциального решения. Рассмотрим число

$$(1 + aw + t)^{d-1} = (1 + aw^{d^0} + x_1 w^{d^1} + \dots + x_m w^{d^m})^{d-1} = \sum_{i_0 + \dots + i_m < d} \binom{d-1}{i_0 \dots i_m} a^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} w^{i_0 d^0 + \dots + i_m d^m}$$

Заметим, что в этой сумме все показатели степени у  $w$  различны, поэтому, если  $w$  достаточно велико, то эта формула является шифром по основанию  $w$  некоторого кортежа, содержащего все одночлены, составляющие  $C$ , но с другим коэффициентами. Чтобы подправить коэффициенты, умножим формулу на

$$s = \sum_{i_0 + \dots + i_m < d} i_0! \dots i_m! (d-1-i_0-\dots-i_m)! c_{i_0 \dots i_m} w^{d^{m+1}-i_0 d^0 - \dots - i_m d^m}$$

и сгруппируем вместе члены с одинаковыми степенями  $w$ :

$$(1 + aw + t)^{d-1} s = \sum_{k=0}^{2d^{m+1}-1} C_k w^k \quad (1)$$

Здесь  $C_k$  — некоторые выражения, содержащие  $C_{i_0 \dots i_m}$ ,  $a$ ,  $x_1, \dots, x_m$ . Нетрудно видеть, что

$$C_{d^{e+1} = \sum_{i_0 + \dots + i_m < d} \binom{d-1}{i_0 \dots i_m} i_0! \dots i_m! (d-1-i_0-\dots-i_m)! c_{i_0 \dots i_m} a^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} = (d-1)! C(a, x_1, \dots, x_m)}$$

Таким образом, если  $w$  превосходит  $C_0, \dots, C_{2d^{m+1}-1}$ , то

$$C(a, x_1, \dots, x_m) = \mathbf{Elem}((1 + aw + t)^{d-1} s, w, d^{e+1} + 1) / (d-1)!$$

Остаётся найти какую-нибудь явную нижнюю границу для  $w$ , гарантирующую справедливость последней формулы. Нетрудно проверить, что для этого достаточно потребовать, чтобы

$$w > (1 + a + h)^{d-1} c.$$

Определим теперь девятиместное соотношение

$Solution(a, b, c_L, c_R, d, e, f, g, h) \Leftrightarrow SCod(d, e, f, g, h) \wedge \exists s_L, s_R, t, w (w > (1+a+h)^{d-1} (c_L+c_R) \wedge Equal(c_L, b, d^{e+1}+1, s_L, w, d^{e+1}+1) \wedge Equal(c_R, b, d^{e+1}+1, s_R, w, d^{e+1}+1) \wedge Equal(h, g, d^e+1, t, w, d^e+1) \wedge Elem((1+aw+t)^{d-1} s_L, w, d^{e+1}+1) = Elem((1+aw+t)^{d-1} s_R, w, d^{e+1}+1))$ . Как следует из вышенаписанной формулы,  $ECode(b, c_L, c_R, d, e, f) \Rightarrow \exists g, h SCod(d, e, f, g, h) \wedge Solution(a, b, c_L, c_R, d, e, f, g, h) \Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_m D_{b, c_L, c_R, d, e, f}(a, x_1, \dots, x_m) = 0$ .

Отношение  $Solution(a, b, c_L, c_R, d, e, f, g, h)$ , введённое нами, очевидно является диофантовым, и мы можем построить диофантово уравнение

$$U(a, b, c_L, c_R, d, e, f, g, h, y_9, \dots, y_m) = 0,$$

задающее это отношение. Нетрудно понять, что отнеся  $g$  и  $h$  к неизвестным, мы получим требуемое универсальное уравнение.

Мы можем теперь построить для каждого  $n$  универсальный полином  $U_n$  с одним параметром-кодом и  $m$  неизвестными. Полином  $U_1$  мы определим равенством

$$U_1(a, k, y_1, \dots, y_m) = U^2(a, y_1, \dots, y_m) + (k - 2^{2^6} \text{Cantor}_6(y_1, \dots, y_6))^2.$$

Соответственно, если  $(b, c_L, c_R, e, d, f)$  — расширенный код некоторого уравнения  $D(a, x_1, \dots, x_m) = 0$ , то в новой кодировке кодом уравнения будет по определению число  $2^{2^6} \text{Cantor}_6(b, c_L, c_R, d, e, f)$ .

При таком определении каждое натуральное число оказывается кодом какого-нибудь уравнения. Этот «недостаток» легко можно устранить следующим образом. Ясно, что по каждому конкретному числу  $k$  можно узнать, представимо ли оно в виде (1), где  $(b, c_L, c_R, d, e, f)$  — расширенный код какого-либо уравнения. Если  $k$  не представимо в таком виде, то будем по определению считать число  $k$  кодом уравнения

$$U_1(a, k, x_1, \dots, x_m) = 0$$

с единственным параметром  $a$  и  $m$  неизвестными  $x_1, \dots, x_m$ . Очевидно, что, каковы бы ни были значения  $a$  и  $k$ , уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда решение имеет уравнение с кодом  $k$  независимо от того, является ли  $k$  кодом в первоначальном смысле (1) или кодом следующего за ним уравнения.

Для  $n > 1$  универсальный полином  $U_n$  определяется следующим образом:

$$U_n(a_1, \dots, a_n, k, y_1, \dots, y_m) = U_1(2^n \text{Cantor}_n(a_1, \dots, a_n, k, y_1, \dots, y_m))$$

Наконец определим универсальный полином  $U_n$  равенством

$$U_0(k, y_1, \dots, y_m) = U_1(0, k, y_1, \dots, y_m),$$

считая любой код уравнения на  $s$  также кодом уравнения без параметров  $D(0, x_1, \dots, x_m) = 0$ .

Универсальное диофантово уравнение позволяет нам легко построить пример диофантова множества с неддиофантовым дополнением. Существование таких множеств показывает, что мы не можем пополнить ни отрицанием, ни квантором всеобщности пополнить наш арсенал логических средств для построения диофантовых множеств (в данный момент это объединение, пересечение, квантор существования), ибо дополнение диофантова множества, определяемого уравнением  $D(a, x_1, \dots, x_m) = 0$  задаётся формулами

$$\neg \exists x_1, \dots, x_m D(a, x_1, \dots, x_m) = 0 \quad \text{и} \quad \forall x_1, \dots, x_m D(a, x_1, \dots, x_m) \neq 0.$$

Построение проводится по классической диагональной схеме. Рассмотрим универсальное диофантово уравнение  $U_1(p, q, y_1, \dots, y_m) = 0$  и поставим на место обоих параметров параметр-элемент  $a$ :  $U_1(a, a, y_1, \dots, y_m) = 0$ . Получившееся уравнение определяет некоторое диофантово множество  $\mathfrak{H}_1$  натуральных чисел. Проверим, что  $\overline{\mathfrak{H}_1}$  — дополнение  $\mathfrak{H}_1$  — не является диофантовым.

Множество  $\mathfrak{H}_1$  является несколько искусственным примером. Более интересным является множество  $\mathfrak{H}_0$ , определяемое уравнением

$$U_0(t, y_1, \dots, y_m) = 0.$$

Как видно из определения,  $\mathfrak{H}_0$  — множество кодов диофантового уравнения (без параметра), имеющих решения. В этой терминологии десятая проблема Гильберта — вопрос о способе распознавания принадлежности данного числа  $a$  к множеству  $\mathfrak{H}_0$ .

Полином  $U_0$  был определён таким образом, что решение уравнения (7) сводится к решению уравнения при  $p = 0, q = t$ . Для того, чтобы доказать, что  $\overline{\mathfrak{H}_0}$  — дополнение  $\mathfrak{H}_0$  — не является диофантовым. Мы установим обратную связь, а именно, покажем, что решение уравнения при произвольных значениях параметров  $p$  и  $q$  сводится к решению уравнения (7) при подходящем значении  $t$ . Непосредственно в таком виде это утверждение очевидно, ибо при фиксированных значениях  $p$  и  $q$  можно взять в качестве  $t$  код уравнения (1), рассматриваемого как уравнение без параметров. Существенным для нас является то обстоятельство, что такой код может быть задан полиномом с целыми коэффициентами от  $p$  и  $q$ .

Итак, рассматриваем уравнение

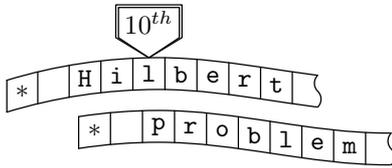
$$W_{p,q}(y_1, \dots, y_m) = 0,$$

получившееся подстановкой конкретных значений  $p$  и  $q$  из уравнения (1). Сначала мы построим расширенный код  $(b, c_L, c_R, d, e, f)$  этого уравнения. Понятно, что  $d$  и  $e$  а следовательно и  $f$  можно взять фиксированными не зависящими от  $p$  и  $q$ .

В итоге получаем следующую связь множеств:

$$a \in \mathfrak{H}_1 \Leftrightarrow K(a, a) \in \mathfrak{H}_0$$

, где  $K$  — полином с целыми коэффициентами. Если бы  $\overline{\mathfrak{H}_0}$  — дополнение первого было диофантовым, то таковым оказалось бы и дополнение второго, что не так, так что  $\overline{\mathfrak{H}_0}$  не диофантово.



# 10<sup>th</sup> Hilbert Problem

Yu. V. Matiyasevich, Ya. Abramov, A. Ya. Belov-Kanel,  
I. A. Ivanov-Pogodaev, A. S. Malistov

Equations both parts of which are polynomial functions with integer coefficients, and the solutions are to be expressed in integer numbers are quite common in mathematics.

In 1900 David Hilbert [1900] delivered his famous lecture entitled "Mathematische Probleme" before the Second International Congress of Mathematicians. This paper contains 23 problems, or, more precisely, 23 groups of related problems, that the nineteenth century left for the twentieth century to solve. Problem number ten is about Diophantine equations:

## 10. Determination of the solvability of a Diophantine equation

*Given a diophantine equation with any number of unknown quantities and with rational integral numerical coefficients: To devise a process according to which it can be determined by a finite number of operations whether the equation is solvable in rational integers.*

Today we read the words "devise a process" to mean "find an algorithm." When Hilbert's Problems were posed, there was no mathematically rigorous general notion of algorithm available. The lack of such a notion was not in itself an obstacle to a positive solution of Hilbert's Tenth Problem, because for any particular algorithm it was always clear that it actually gave the desired general method for solving the corresponding problem.

During the 1930's, Kurt Godel, Alonzo Church, Alan Turing, and other logicians provided a rigorous formulation of the notion of computability; this made it possible to establish algorithmic unsolvability, i.e., the impossibility of the existence of an algorithm with certain properties. Soon afterwards the first examples of algorithmically unsolvable problems were found, first in mathematical logic itself and then in other branches of mathematics.

Computability theory produced all the necessary tools for tackling the unsolvability of Hilbert's Tenth Problem. The first in a series of papers in this direction appeared at the beginning of the 1950's. The continuing effort culminated in a "negative solution" of Hilbert's Tenth Problem in 1970 by Yuri Matiyasevich.

We will follow that proof.

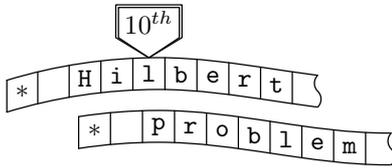
## A. Diophantine Sets

We will seek only nonnegative integer solutions of the equations in this problem.

Consider an equality  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0$ , where  $D$  is a polynomial with integer coefficients with respect to all the variables  $a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m$ . Suppose that the variables are separated into *parameters*  $a_1, \dots, a_n$  and *unknowns*  $x_1, \dots, x_m$ . Fixing values of the parameters results in the particular Diophantine equations that comprise the family. (Note: we consider *integer* parameters and coefficients and seek *nonnegative integer* solutions).

For example, consider  $D(a_1, a_2, x) = a_1x^2 + a_2x$ . The equations (for example)  $x^2 = 0$ ,  $2x^2 + 6x = 0$ ,  $3x^2 - 17x = 0$  are in the family. In the first case we choose  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ . In the second case we do  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 6$ , in the third case we do  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = -17$ .

The family of Diophantine equations  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0$  defines a set  $M$  consisting of the  $n$ -tuples  $(a_1, \dots, a_n)$  of values of the parameters  $a_1, \dots, a_n$  for which there are values of the unknowns  $x_1, \dots, x_m$  satisfying the equality  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0$ . The number  $n$  is called



the dimension of the set  $M$  and equivalence  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0$  is called a Diophantine representation of  $M$ . Sets having Diophantine representations are also called Diophantine.

The set of even numbers is Diophantine: the equation  $2x = a$  has an integer solution if and only if  $a$  is even. Also, consider the set of pairs  $(a, b)$  such that  $a$  is odd and  $b$  is even and  $b > 2$ . To prove that this set is Diophantine we should consider the representation  $2(2x + 1) = a^2(b^3 - 14)$ .

◆ **A1.** Prove that the following number sets are Diophantine:

- a) the set of even positive numbers;
- b) the set of odd numbers;
- c) the set of squares;
- d) the set of cubes.

◆ **A2.** Prove that any system of Diophantine equations are equivalent to some unique Diophantine equation. (i.e. the sets of solutions are the same.)

◆ **A3.** Prove that the union and intersection of two Diophantine sets of the same dimension is also Diophantine.

◆ **A4.** Suppose that the  $n$ -tuples set  $\mathfrak{M}$  are Diophantine. Consider the  $m$ -tuples set  $(a_1, \dots, a_m)$  such that there exist  $a_{m+1}, \dots, a_n$  with  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{M}$ . Prove that this  $m$ -tuples set  $(a_1, \dots, a_m)$  is Diophantine.

It is often more convenient to use, instead of the language of sets, an essentially equivalent language of properties and relations. For example, instead of saying that the set of even numbers is Diophantine, one can say that *the property is an even number* is Diophantine. Similarly, instead of considering the set with the representation  $(a_1 - a_2)^2 = x + 1$ , one can say that the relation  $\neq$  is Diophantine. More formally, we say that a property  $P$  of natural numbers is a Diophantine property if the set of numbers having this property is Diophantine. Correspondingly, an equivalence of the form  $P(a) \Leftrightarrow \exists x_1 \dots x_m [D(a, x_1, \dots, x_m) = 0]$  is called a Diophantine representation of property  $P$ .

Similarly, a relation  $R$  among  $n$  natural numbers is called a Diophantine relation if the set of all  $n$ -tuples for which the relation holds is Diophantine. Correspondingly, an equivalence of the form

$$R(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists x_1 \dots x_m [D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0]$$

is called a Diophantine representation of relation  $R$ .

At last, function  $a = F(b_1, \dots, b_k)$  is called a Diophantine function if the set of all  $k + 1$ -tuples  $[a, b_1, \dots, b_k]$  for which the equality  $a = F(b_1, \dots, b_k)$  holds is Diophantine.

◆ **A5.** Prove that the following relations are Diophantine: a) “greater” relation ( $a > b$ );

b) “divisibility” relation ( $a$  divide  $b$ ).

c) Consider the set of triples  $(a, b, c)$  such that  $a$  is a remainder of division  $b$  with  $c$ . (**notation:**  $\mathbf{a = b \pmod{c}}$ ) Prove that this set is Diophantine.

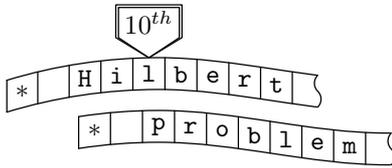
d) Consider the set of triples  $(a, b, c)$  such that  $a = \min\{b \pmod{c}, (c - b) \pmod{c}\}$  (**notation:**  $\mathbf{a = b \pmod{c}}$ ) (This is the distance to the nearest integer number dividing by  $c$ .)

e) Prove that the set of triples  $(a, b, c)$  such that  $a = \lfloor \frac{b}{c} \rfloor$  is Diophantine.

◆ **A6.** Prove that the “relative primality” relation and GCD and LCM functions are Diophantine.

◆ **A7.** Prove that the following sets are Diophantine:

- a) the set of all integer numbers which are not squares;
- b) the set of pairs  $(a, b)$  such that  $a$  is not power of  $b$ .



## Pell equation

**Definition.** Equation  $x^2 - dy^2 = 1, d \in \mathbb{N}$  is called *Pell Equation*.

◆ **A8.** *Pell Equation.*

a) Solution  $(x, y)$  is called *nontrivial*, if  $y \neq 0$ . Let  $d$  be a square. Prove that Pell equation has no nontrivial solution.

b) Let  $(u_1, v_1)$  and  $(u_2, v_2)$  be the solutions of the Pell equation  $x^2 - dy^2 = 1$ . So if  $u_3 + \sqrt{d}v_3 = (u_1 + \sqrt{d}v_1) \cdot (u_2 + \sqrt{d}v_2)$  then  $(u_3, v_3)$  is solution too. In particular, if  $(x, y)$  is a solution then  $(x_n, y_n)$  is solution with  $x_n + \sqrt{d}y_n = (x + \sqrt{d}y)^n$ .

c) The solution is called *minimal* if it is nontrivial and  $|x + y|$  is minimum. Prove that any solution is a minimal one in some degree.

It is known that for any  $d$  which is not a square some solution does exist. It is a hard problem so we do not include it into this list. You can find a proof e.g. in Bugayenko "Pell Equation"

◆ **A9.** *Special case of Pell equation.* a)  $d = k^2 - 1 \Rightarrow (k, 1)$  is a minimal solution.

b)  $d = k^2 - 1, (x_1, y_1)$  is a minimal solution,  $(x_n, y_n) = (x_1, y_1)^n$ . Prove that  $y_n \equiv n \pmod{k - 1}$ .

c) Another case of Pell equation. Find the solutions of  $x^2 - (\frac{b^2}{4} - 1)y^2 = 1$ .

Consider the following sequence:  $\alpha_0(b) = 0, \alpha_1(b) = 1, \alpha_{n+2}(b) = b\alpha_{n+1}(b) - \alpha_n(b), b \geq 2$ .

◆ **A10.** *Prove that  $x^2 - bxy + y^2 = 1, x, y \geq 0$ , if and only if*

$$\begin{cases} x = \alpha_{m+1}(b) \\ y = \alpha_m(b) \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x = \alpha_m(b) \\ y = \alpha_{m+1}(b) \end{cases}$$

for some integer  $m$ .

◆ **A11.** *Prove that  $\alpha_n(2) = n$ ;*

◆ **A12.** *Prove that  $\alpha_{k+l}(b) = \alpha_k(b) \cdot \alpha_{l+1}(b) - \alpha_{k-1}(b) \cdot \alpha_l(b)$ .*

◆ **A13.** *Prove that  $\alpha_n(b) \equiv \alpha_{n+4m}(b) \pmod{v}$ , where  $v = \alpha_{m+1}(b) - \alpha_{m-1}(b)$ ;*

◆ **A14.** *Suppose that  $b_1 \equiv b_2 \pmod{q}$ . Prove that  $\alpha_n(b_1) \equiv \alpha_n(b_2) \pmod{q}$ .*

◆ **A15.** *Prove that  $2m$  is the value of the number  $k$  such that for fixed  $n$  the following statement holds:  $\alpha_n(w) \pmod{v} = \alpha_{n+k}(w) \pmod{v}$ , where  $w \equiv b \pmod{v}, v = \alpha_{m+1}(b) - \alpha_{m-1}(b)$ .*

◆ **A16.** *Suppose that  $w \equiv b \pmod{v}, w \equiv 2 \pmod{u}$ , where  $v > 2\alpha_k(b), u > 2k$ . Prove that the first  $k$  elements of the sequence*

$$(\alpha_0(b), 0), \dots, (\alpha_n(b), n), \dots$$

are coincide with the first  $k$  elements of the sequence

$$\left( \alpha_0(w) \pmod{v}, \alpha_0(w) \pmod{u} \right), \dots, \left( \alpha_n(w) \pmod{v}, \alpha_n(w) \pmod{u} \right), \dots$$

◆ **A17.** *Suppose that  $(\alpha_k(b))^2$  divides  $\alpha_m(b)$ . Prove that  $\alpha_k(b)$  divides  $m$ .*

◆ **A18.** *Prove that  $2\alpha_k(b) < u \Rightarrow 2k < u$ .*

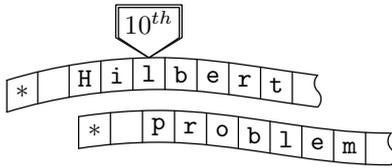
◆ **A19.** *Prove that the set  $\{(a, b, c) \mid a = \alpha_c(b), b > 3\}$  is Diophantine.*

◆ **A20.** *Prove that  $(k - 1)^n \leq \alpha_{n+1}(k) \leq k^n$ ;*

◆ **A21.** *Prove that  $(1 + s)^n \geq 1 + ns \quad s \in \mathbb{R}, s > -1, n$  — nonnegative integer.*

◆ **A22.** *Prove that  $b^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{c+1}(bn+4)}{\alpha_{c+1}(n)}$ .*

◆ **A23.** *Prove that the set  $\{(a, b, c) \mid a = b^c\}$  is Diophantine.*



## B. Coding

Consider the following regulation of the natural numbers pairs:

$$\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 3 \rangle \dots$$

Note that the number of the pair  $\langle a, b \rangle$  in this sequence can be represented in the polynomial form:  $\mathbf{Cantor}(a, b) = ((a + b)^2 + 3a + b)/2$ . The functions  $\mathbf{ElemA}(c)$  and  $\mathbf{ElemB}(c)$  which are represent the first and the second elements of the pair are also Diophantine:

$$\begin{aligned} a = \mathbf{ElemA}(c) &\iff \exists y: [(a + y)^2 + 3a + y = 2c]; \\ b = \mathbf{ElemB}(c) &\iff \exists x: [(x + b)^2 + 3x + b = 2c] \end{aligned}$$

This numeration can be easily generalized for triples, fours, etc. For example, we can assign:

$$\mathbf{Cantor}_1(a_1) = a_1, \mathbf{Cantor}_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) = \mathbf{Cantor}_n(a_1, \dots, a_n, \mathbf{Cantor}(a_n, a_{n+1}))$$

Further, the number  $\mathbf{Cantor}_n(a_1, \dots, a_n)$  is called *cantor number* of the tuple  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . Let  $c$  be the cantor number of the  $n$ -tuple. Suppose that  $\mathbf{Elem}_{n,m}(c)$  is the value of  $m$ -component of that  $n$ -tuple with number  $c$ . The function  $\mathbf{Elem}_{n,m}(c)$  is Diophantine:

$$a = \mathbf{Elem}_{n,m}(c) \iff \exists x_1 \dots x_{m-1} x_{m+1} \dots x_n: [2^{2^n} \mathbf{Cantor}_n(x_1, \dots, x_{m-1}, a, x_{m+1} \dots x_n) = 2^{2^n} c]$$

( $\mathbf{Cantor}_n$  is not a polynomial with integer coefficients so we add  $2^{2^n}$  factor.)

We should note that this numeration has one serious defect: if  $n$  and  $m$  are fixed then function  $\mathbf{Elem}_{n,m}(c)$  is Diophantine. However, it is hard to prove that three arguments function  $\mathbf{Elem}_{n,m}(c)$  is Diophantine. To deal with tuples with non fixed length we should use some different methods.

## Positional Code

Suppose that  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  is a sequence of integer numbers ( $n$ -tuple). Let us choose  $b > a_i$  for all  $i$ . Suppose that

$$a = a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \dots + a_1 b^0.$$

In other words,  $a_1, \dots, a_n$  are the digits in the positional notation of  $a$  with base  $b$ . So, using the triple  $(a, b, n)$  we can restore the  $n$ -tuple  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . The triple  $(a, b, n)$  is called *positional code* of the  $n$ -tuple  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .  $(0, b, 0)$  is the positional code of the empty tuple. Note that there are some triples which are not codes of any tuple. But, we can easily prove that the relation “to be positional code” is Diophantine:

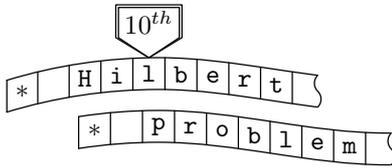
$$\mathbf{Code}(a, b, c) \iff \begin{cases} b \geq 2, \\ a < b^c. \end{cases}$$

◆ **B1.** Prove that the set of quadruples  $(a, b, k, c)$ , such that the pair  $(a, b)$  encode the sequence and  $c$  equals to the  $k$ -th member of this sequence.

◆ **B2.** a) Encode the sequence  $c_i = \binom{n}{i}$  and show that the set of triples  $(c, m, n)$ , such that  $c = \binom{m}{n}$ , is diophantine.

b) Prove that  $m! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m}{\binom{n}{m}}$  and that the set of numbers, that are factorials, is diophantine.

◆ **B3.** Prove that the set of prime numbers is diophantine.



◆ **B4.** Prove that equation  $D(a, x_1, \dots, x_m) = 0$  has a solution in variables of  $x_1, \dots, x_m$  if and only if then equation

$$a = (x_0 + 1)(1 - D(x_0, x_1, \dots, x_m)^2) - 1$$

has a solution in variables of  $x_0, x_1, \dots, x_m$ .

◆ **B5.** Prove that there exists such a polynomial with integer coefficients, such that the set of its positive values is the set of prime numbers.

Further we will get the skill to unite two sequence into one, to compare their corresponding elements, to check if two triples encode the same sequence, — and all this by solving the corresponding diophantine equation.

◆ **B6. (Kummer theorem)** a) Prove that the number  $k$ , such that  $n!$  divides on  $p^k$ , but doesn't divide on  $p^{k+1}$ , equals

$$\left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n}{p^2} \right] + \left[ \frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

b) Prove that the number  $l$ , such that  $\binom{m+n}{n}$  divides on  $p^l$ , but doesn't divide on  $p^{l+1}$ , is equal to the number of carries over the next columns in  $p$ -positional sistem of counterung, if we add together numbers  $m$  and  $n$

◆ **B7.** Consider the set of triples  $(a_1, a_2, p)$ , where  $p$  is prime and pairs  $(a_1, p)$  and  $(a_2, p)$  encode the sequences such that for any  $k$  the  $k$ -th element of the first sequence not greater than the  $k$ -th element of the second sequence. Prove that this set is diophantine.

**Prompt.** What will you get, if you add together  $a_1$  and  $a_2 - a_1$ ?

◆ **B8.** Consider the set of quadruples  $(a, p, n, e)$ , where  $p$  is prime and triple  $(a, p, n)$  encode the sequence, such that each element of this sequence not greater than  $e$ . Prove that this set is diophantine.

◆ **B9.** Let  $(a_1, b_1, n)$  and  $(a_2, b_2, n)$  encode the same sequence and  $b_1 < b_2$ . Prove that  $a_1 \equiv a_2 \pmod{b_2 - b_1}$ .

◆ **B10.** Let, in the proposes of the previous problem,  $b_1^n < b_2 - b_1$ . Prove that  $a_1$  is defined uniquely by the numbers  $a_2, b_1, b_2, n$ .

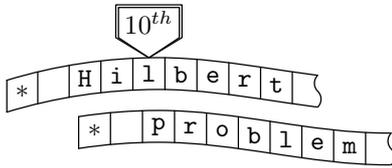
◆ **B11.** Prove that the set of quadruples  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$ , such that  $(a_1, b_1)$  and  $(a_2, b_2)$  encode the same sequence, is diophantine.

◆ **B12.** Consider the set of quadruples  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$ , such that pairs  $(a_1, b_1)$  and  $(a_2, b_2)$  encode the sequences and for any  $k$  the  $k$ -th member of the first sequence not greater than the  $k$ -th member of the second sequence. Prove that this set is diophantine.

◆ **B13.** Consider the set of quadruples  $(a, b, n, e)$ , where triple  $(a, b, n)$  encode the sequence, such that each element of this sequence not greater than  $e$ . Prove that this set is diophantine.

◆ **B14.** Consider the set of octoples  $(A, B, a_1, b_1, n_1, a_2, b_2, n_2)$ , such that the pair  $(A, B)$  encode the sequence, that can be constructed from the sequence, encodable by the triple  $(a_1, b_1, n_1)$ , by continuing it by the sequence, encodable by the triple  $(a_2, b_2, n_2)$ . Prove that this set is diophantine.

◆ **B15.** Show how to encode the sequences  $p_1 + q_1, p_1 + q_2, \dots, p_1 + q_m, p_2 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_2 + q_m, \dots, p_n + q_m$  and  $p_1 \cdot q_1, p_1 \cdot q_2, \dots, p_1 \cdot q_m, p_2 \cdot q_1, p_2 \cdot q_2, \dots, p_2 \cdot q_m, \dots, p_n \cdot q_m$  by using the codes of  $p_1, \dots, p_n$  and  $q_1, \dots, q_m$ .



## 10<sup>th</sup> Hilbert Problem

Yu. Matiyasevich, Ya. Abramov, A. Belov-Kanel,  
I. Ivanov-Pogodaev, A. Malistov, I. Netay

### C. Turing machines

The number-theoretic techniques developed in the previous chapters will permit us to tackle Hilbert’s Tenth Problem from the point of view of computability theory. But first we must clarify what is to be understood by the word “process” when Hilbert speaks of “a process according to which it can be determined by a finite number of operations whether the equation is solvable in rational integers”. There are many ways in which this needed clarification can be provided, but the fundamental idea is always the same. We are able to convince ourselves that we have a general method for solving problems of a particular kind if, by using this method, we can solve any individual problem of that kind without employing our creative abilities, that is, so to speak, mechanically.

We deal with computers not only in real life, but also in mathematics. Notion of abstract machine allows us to formalize idea of *general method* for some class of problems.

Now let us describe *Turing machines*. A Turing machine has memory in the form of a tape divided into cells. The tape has a single end: to make matters definite, we assume it to be on the left. To the right, the tape is potentially infinite. This means that, in contrast with actual physical computers, a computation by a Turing machine will never lead to an abnormal termination with the diagnostic “insufficient memory” On the other hand, any particular computation will require only finitely many cells.

Each cell will either be empty or will contain a single symbol from a finite set of symbols  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_w\}$  called an alphabet. Different machines may have different alphabets. One of the symbols will play a special role in that it will always mark the left-most cell and appear nowhere else. We use the symbol “\*” for this marker. In addition, we need a symbol to denote an empty cell, and we follow tradition in using the letter “^” for this purpose.

Symbols on the tape are read and written by a *head*, which at each moment of discrete time scans one of the cells. The head can move along the tape to the left and to the right.

At each moment, the machine is in one of finitely many states that, following tradition, we will denote by  $q_1, \dots, q_v$ . One of the states is declared to be initial, and we shall always suppose that this is  $q_1$ . In addition, one or more states are declared to be final.

The next action of a machine is totally determined by its current state and the symbol scanned by the head. In a single step, the machine can change the symbol in the cell, move the head one cell to the left or to the right, and pass into another state. The actions are defined by a set of instructions of the form:

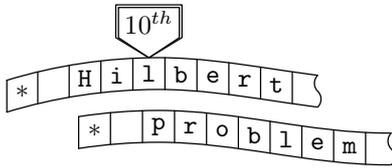
$$\langle\langle \text{state } q_i + \text{symbol } a_j \rightarrow \text{Left(Right, Stop)} + q_k + a_\ell \rangle\rangle.$$

This instruction means the the following «if  $q_i$  is the current state of the head which are situated in the cell with simbol  $a_j$ , then the machine do the following: 1. Symbol  $a_j$  must be changed for the symbol  $a_\ell$ ; 2. Head moves to the left (L), right (R) or stand (S); 3. Head changes its state for  $q_k$ ».

These instructions must be written for all possible combinations of symbol  $q_k$  and state  $q_i$ . The whole pack of these instructions is called *the program* of the machine.

All the machines that we are going to construct will have the same alphabet  $\{*, 0, 1, 2, 3, \lambda\}$ .

There will be two final states:  $q_2$  and  $q_3$  and we shall interpret reaching  $q_2$  as the answer «yes» and reaching  $q_3$  as the answer «no». The cells containing the symbol « $\lambda$ » will play the role of proxies for empty cells, in the following sense: only empty cells and cells containing the symbol  $\lambda$  may be situated to the right



of a cell containing the symbol  $\lambda$  and for any state  $q_i$  the instructions with left-hand sides  $q_i\lambda$  and  $q_i\wedge$  will have identical right-hand sides.

**Example of the simplest machine.** Machine LEFT with the following instructions

$$\begin{aligned} q_1* &\rightarrow *Sq_2 \\ q_10 &\rightarrow 0Lq_2 \\ q_11 &\rightarrow 1Lq_2 \\ q_12 &\rightarrow 2Lq_2 \\ q_13 &\rightarrow 3Lq_2 \\ q_1\lambda &\rightarrow \lambda Lq_2 \\ q_1\wedge &\rightarrow \lambda Lq_2 \end{aligned}$$

moves the head one cell to the left unless it was already scanning the leftmost cell marked by the symbol «\*».

Machine WRITE(0) with instructions

$$\begin{aligned} q_1* &\rightarrow *Sq_2 \\ q_10 &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_11 &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_12 &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_13 &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_1\lambda &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_1\wedge &\rightarrow 0Sq_2 \end{aligned}$$

writes the symbol «0» to the cell scanned by the head unless it is the leftmost cell containing the marker «\*». Similar actions are performed by the machines WRITE(1), WRITE(2), WRITE(3) and WRITE( $\lambda$ ) the instructions for which can be obtained from written instructions by replacing the symbol «0» in the right-hand sides of the instructions by «1», «2», «3» and « $\lambda$ » respectively.

Machine READ(0) with instructions

$$\begin{aligned} q_1* &\rightarrow *Sq_3 \\ q_10 &\rightarrow 0Sq_2 \\ q_11 &\rightarrow 1Sq_3 \\ q_12 &\rightarrow 2Sq_3 \\ q_13 &\rightarrow 3Sq_3 \\ q_1\lambda &\rightarrow \lambda Sq_3 \\ q_1\wedge &\rightarrow \lambda Sq_3 \end{aligned}$$

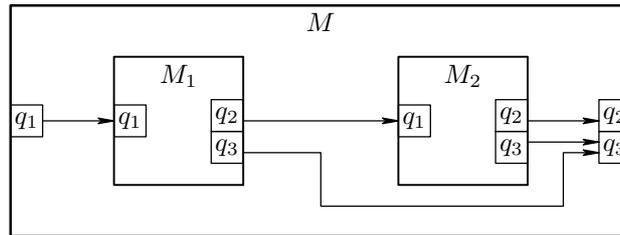
determines whether the cell scanned by the head contains the symbol «0» or not and then halts in state  $q_2$  or  $q_3$ , accordingly; by our convention these correspond respectively to “yes” or “no” answers. In a similar manner, machines READ(1), READ(2), READ(3), READ(\*) determine the presence of symbols «1», «2», «3», «\*».

- ◆ **C0.** a) Construct the machine STOP, which goes directly into the final state  $q_3$  from the state  $q_1$ .  
 b) Construct the machine READNOT( $x$ ) which recognizes the absence of the symbol  $x$  in the cell observed by the head.

## Composition of machines: two ways

The First method for constructing a new Turing machine  $M$  from two given machines  $M_1$  and  $M_2$  is as follows:

1. In all instructions of machine  $M_1$ , the final state  $q_2$  is replaced by  $q_{v+1}$  where  $v$  is the number of states of machine  $M_1$  (it should be recalled that final states can occur only in the right-hand sides of instructions).
2. In all instructions of machine  $M_2$  every non-final state  $q_i$  is replaced by  $q_{v+i}$  (in particular,  $q_1$  is replaced by  $q_{v+1}$ ).
3. The set of instructions of the new machine  $M$  consists of the instructions of both of the given machines, modified as described above.



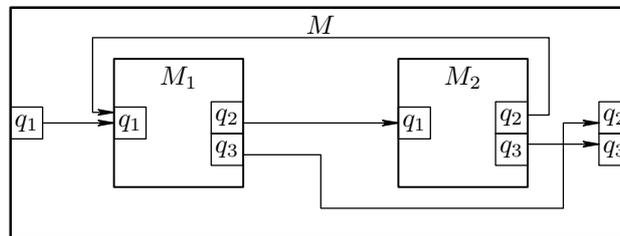
The action of machine  $M$  clearly consists of the consecutive execution of the actions of machines  $M_1$  and  $M_2$  as originally constituted, provided that machine  $M_1$  halted in state  $q_2$ . To denote machine  $M$ , we shall use any one of the three notations:

$$M_1; M_2 \quad M_1 \text{ and } M_2 \quad \text{или} \quad \text{if } M_1 \text{ then } M_2.$$

The second method for constructing a new Turing machine  $M$  from two given machines  $M_1$  and  $M_2$  allows us to construct cycles of the following types: FOR  $i=1$  TO  $N$  or WHILE. Such type cycles appears not only in programming but in mathematics as well. For example, in order to calculate function  $f(n) = 2^{2^n}$  the number 2 needs to be squared  $n$  times.

This method is as follows:

1. In all instructions of machine  $M_1$  the final state  $q_2$  is replaced by  $q_{v+1}$ , where  $v$  is the number of states of machine  $M_1$  and the final state  $q_3$  is replaced by  $q_2$ .
2. In all instructions of machine  $M_2$  every non-final state  $q_i$  is replaced by  $q_{v+i}$  and the final state  $q_2$  is replaced by  $q_1$ .
3. The set of instructions of the new machine  $M$  consists of the instructions of both of the given machines, modified as described above.



The action of this machine consists in performing in turn the actions of machines  $M_1$  and  $M_2$  as originally constituted until one of them enters the final state  $q_3$

The Turing machine constructed in this way will be denoted by

$$\text{while } M_1 \text{ do } M_2 \text{ od.}$$

The notation introduced above resembles a primitive programming language. (In fact, every such “program” denotes a particular Turing machine.) However, this language is not so stupid as it looks like. It is powerful enough to emulate any computer. Famous *Church thesis* claims that any algorithm can be realized on the Turing machine. The notion of Turing machine formalizes the notion of mechanical work in completely adequate way. In the sequel, we identify Turing machines and algorithms.

Machine

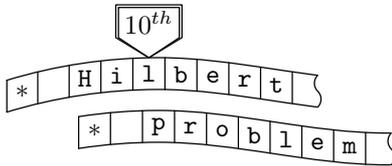
$$\text{STAR} = \text{while READNOT}(\ast) \text{ do LEFT od}$$

puts the head into the leftmost cell (marked by «\*»)

Machine

$$\text{VACANT} = \text{STAR}; \text{ while READNOT}(\lambda) \text{ do RIGHT od}$$

puts the head into the leftmost cell containing the symbol « $\lambda$ » if such exists; otherwise it puts the head into the leftmost empty cell.



- ◆ **C1.** a) Construct the machine JUMP, which moves the head to the right until the first cell containing the symbol «0»; is reached; if all cells containing «0» are to the left of the head, then the machine will never halt.
- b) Construct the sequence of machines FIND( $k$ ), which move head to the cell containing the symbol «0» with number  $k$  from the left.

We can store tuples of numbers on the tape of a Turing machine: for storing the tuple  $(a_1, \dots, a_n)$  we should use the symbols 1, separated by the symbols 0. For example, the tuple  $(3, 1, 2, 0, 2)$  can be written by the following way:  $*0111010110011\lambda \dots$ . So, Turing machine receive some tuple and make transformation with it.

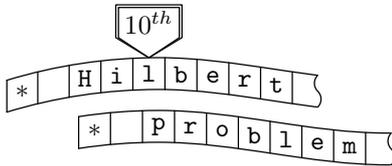
- ◆ **C2.** Construct the Turing machines for transforming the tuple  $(a_1, \dots, a_n)$  into the tuple:
  - a)  $(a_1, \dots, a_n, 0)$ ;
  - b)  $(a_1, \dots, a_n + 1)$ ;
- ◆ **C3.** a) Construct the Turing machine which transforms the tuple  $(a_1, \dots, a_n)$  into the tuple  $(a_1, \dots, a_{n-1})$ , (if  $a_n = 0$  then the machine must stop in the state  $q_3$ .)
- b) Construct the Turing machine which truncates the tuple  $(a_1, \dots, a_n)$ , yielding the tuple  $(a_1, \dots, a_{n-1})$ .
- ◆ **C4.** Construct the Turing machines which transforms the tuple  $(a_1, \dots, a_n)$  into the tuple:
  - a)  $(a_1, \dots, a_n, a_k + a_l)$ , for fixed  $1 \leq k, l \leq n$ ;
  - b)  $(a_1, \dots, a_n, a_k \times a_l)$ , for fixed  $1 \leq k, l \leq n$ ;
- ◆ **C5.** Construct the machine NOTGREATER( $k, l$ ) which compares the elements  $a_k$  и  $a_l$  of the tuple  $(a_1, \dots, a_n)$  and stops in state  $q_2$  or  $q_3$  depending on which of the two inequalities  $a_k \leq a_l$  or  $a_k > a_l$  holds.
- ◆ **C6.** Construct the machine which transform the tuple  $(a_1, \dots, a_n)$  into the tuple:
  - a)  $(a_1, \dots, a_n, b, c)$ , where  $(b, c)$  is the pair that follows immediately after the pair  $(a_{n-1}, a_n)$  in Cantor numeration;
  - b)  $(a_1, \dots, a_n, b, c)$ , where  $(b, c)$  is the pair with Cantor number  $a_n$ .
- ◆ **C7.** Consider the equation  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_{m+1}) = 0$ . Construct the Turing machine which uses the the tuple  $(a_1, \dots, a_n, y_0)$  and determines whether  $y_0$  is the Cantor number of the tuple  $(x_1, \dots, x_{m+1})$  that satisfy the equation.
- ◆ **C8.** Consider the equation  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_{m+1}) = 0$ . Construct the Turing machine that will eventually halt, beginning with a representation of the tuple  $(a_1, \dots, a_n)$  if and only if the equation is solvable in the unknowns  $x_1, \dots, x_{m+1}$ .

We shall say that a set  $\omega$  of  $n$ -tuples of natural numbers is *Turing semidecidable* if there is a Turing machine  $M$  that, beginning in state  $q_1$  with a tape containing the canonical representation of the tuple  $(a_1, \dots, a_n)$  and with its head scanning the leftmost cell on the tape, will eventually halt if and only if  $(a_1, \dots, a_n) \in \omega$ . In this case we say that  $M$  *semidecides*  $M$ . (However, there may be no way to estimate working time or recognize the situation  $(a_1, \dots, a_n) \notin \omega$ ).

Using the result C7 we prove that every Diophantine set is Turing semidecidable. The aim of the following problems is to establish the converse implication: every Turing semidecidable set is Diophantine.

Let  $M$  be a Turing machine that semidecides a set  $\omega$  consisting of  $n$ -tuples of natural numbers. Let  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_w\}$  be the alphabet of  $M$ . As the machine  $M$  carries out its operations, at each moment the symbols of  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_w\}$  occupy only a finite initial segment of the tape of length, say,  $l$ , and we can therefore represent the tape by the tuple  $(s_1, s_2, \dots, s_m, \dots, s_{l-1}, s_l)$  consisting of the subscripts of the symbols occurring in the cells.

The current state  $q_i$  and the position of the head can be represented by a tuple of the same length  $(0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0)$ , in which all elements but one are zero; the only non-zero element is equal to the subscript of the state, and its position corresponds to the position of the head.



The triple consisting of the current contents of the tape, the state, and the position of the head will be called the *configuration*. Clearly, tuples  $(s_1, s_2, \dots, s_m, \dots, s_{l-1}, s_l)$  and  $(0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0)$  uniquely determine the configuration. To represent these tuples, we shall use positional coding with a fixed base  $\beta$  that must be no less than 3 greater than  $v$  the number of states of machine  $M$  and greater than  $w$ , the number of symbols in the alphabet. The pair  $(p, t)$ , is called a *configuration code* if  $p$  and  $t$  are ciphers of the tuples above respectively, to the base  $\beta$ .

So, our first goal will be to construct a Diophantine equation  $D(p, t, x_1, \dots, x_m) = 0$ , such that if  $(p, t)$  is the code of a configuration, then the equation is solvable in  $x_1, \dots, x_m$  if and only if machine  $M$  beginning in this configuration, eventually halts. We shall not be concerned about whether or not the equation is solvable when  $(p, t)$  is not a configuration code.

- ◆ **C9.** Let machine  $M$  proceed directly from the configuration with code  $(p, t)$  to the configuration with code  $[\text{NextP}(p, t), \text{NextT}(p, t)]$ . Prove that the functions  $\text{NextP}$  and  $\text{NextT}$  is Diophantine.
- ◆ **C10.** Let machine  $M$  proceed in  $k$  steps from the configuration with code  $(p, t)$  to the configuration with code  $[\text{AfterP}(p, t, k), \text{AfterT}(p, t, k)]$ . Prove that the functions  $\text{AfterP}$  and  $\text{AfterT}$  is Diophantine.
- ◆ **C11.** Consider a Turing machine  $M$ . Construct an equation with parameters  $a_1, \dots, a_n$  which is decidable if and only if the  $M$  starts with the tuple  $a_1, \dots, a_n$  and halts.

## D. Universal Turing machine

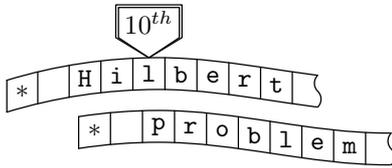
In computer science we have met with different operational systems such as Windows, Dos, Unix which allows to work with any algorithms. But operational system is also a program. In mathematics we have a similar term: *universal algorithm*. In previous problems we constructed special Turing machine for any new algorithm. But there is an another way. We can construct a new language for writing that Turing machine will do. Turing machine will read algorithm from the tape and follow it. This machine has the same program for different kind of algorithms on the tape. This machine is called the *universal Turing machine*. It is obvious that we can number all algorithms (Turing machines) and say something about Turing machine with number  $n$ .

- ◆ **D1. Coding.** Invent a method for writing an algorithm (Turing machine) on the tape.
- ◆ **D2.** Prove that there exists a Turing machine which read from its tape numbers  $n$  and  $m$  and follows the  $n$ -numbered algorithm which works with number  $m$ .
- ◆ **D3. Algorithm uses itself.** Prove that there exists a Turing machine which read number  $n$  and follows  $n$ -th algorithm which works with number  $n$ .
- ◆ **D4. Halting problem.** a) Assume that there exists a universal Turing machine  $U(m, n)$  which check that  $n$ -th Turing machine starts with number  $m$  and stops after several steps. Prove that exists a algorithm  $V(n)$  which show that  $n$ -th algorithm starts with  $n$  and stops. Prove that there exists an algorithm  $T(n)$  which and stops if and only if  $V(n)$  does not stop.  
b) Let  $k$  be the number of the algorithm  $T$ . Does  $T(k)$  stop?

## E. Universal Diophantine equations

Consider the set of equations  $U(a_1, \dots, a_n, k_1, \dots, k_\ell, y_1, \dots, y_v) = 0$ . Suppose that there are two groups of parameters: parameters-elements  $a_1, \dots, a_n$  and parameters-codes  $k_1, \dots, k_\ell$ .

Consider some Diophantine equation with  $n$  parameters  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0$ . Let us fix the parameters combinations such that this equation is decidable. Suppose that we can choose the values



of the codes  $k_1, \dots, k_\ell$  such that the equation  $U(a_1, \dots, a_n, k_1, \dots, k_\ell, y_1, \dots, y_v) = 0$  is decidable with the same parameters combinations. If we can choose the codes such way for any equation  $D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0$ , then the equation  $U(a_1, \dots, a_n, k_1, \dots, k_\ell, y_1, \dots, y_v) = 0$  is called *universal*. We can say that every universal equation provides *coding* of Diophantine equations with fixed dimension. We can consider the  $n$ -tuple  $[k_1(D), \dots, k_\ell(D)]$  as the code for the equation  $D = 0$ .

- ◆ **E1.** Consider a universal Diophantine equation. Suppose that we can increase the number of unknowns. Prove that we can transform the equation to the form with one code and the same number of parameters.
- ◆ **E2.** Suppose that there exists a universal Diophantine equation which is coding one-dimension Diophantine sets. ( $n = 1$ .) Prove that there exists a constant  $m$  such that for any  $n$  there exists an universal Diophantine equation with  $u = 1$  and  $v = m$ .
- ◆ **E3.** Invent the coding (several natural numbers) for equation and potential solution such that there exists a Diophantine function to determine that this is the solution for this equations.
- ◆ **E4.** Construct a universal Diophantine equation.
- ◆ **E5.** Construct a Diophantine set  $M$  such that  $\overline{M}$  is not Diophantine ( $\overline{M} \cap M = \emptyset$  and  $\overline{M} \cup M = \mathbb{N}$ ).
- ◆ **E6.** Consider the set  $M$  of decidable Diophantine equations without parameters. Prove that  $\overline{M}$  is not Diophantine.

## F. Final problem

- ◆ **F1.** Prove that there are no Turing machine that starts with number  $k$  and stops in the state  $q_2$  or  $q_3$  in compliance with that the Diophantine equation with number  $k$  decidable or not.

## Hints and solutions to the problems from sections A and B

◆ **A 1.** a)  $a - 2x = 0$

b)  $a - 2x - 1 = 0$

c)  $a - x^2 = 0$

d)  $a - x^3 = 0$

◆ **A 2.** 
$$\begin{cases} \mathfrak{D}_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \mathfrak{D}_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \iff \mathfrak{D}_1(x_1, \dots, x_n)^2 + \dots + \mathfrak{D}_m(x_1, \dots, x_n)^2 = 0$$

◆ **A 3.** If the sets  $\mathbb{A} = \{\mathfrak{F}(x_1, \dots, x_n) = 0\}$  and  $\mathbb{B} = \{\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_n) = 0\}$  then  $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\mathfrak{F}(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathfrak{G}(x_1, \dots, x_n) = 0\}$  and  $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{\mathfrak{F}(x_1, \dots, x_n)^2 + \mathfrak{G}(x_1, \dots, x_n)^2 = 0\}$ .

◆ **A 4.**

◆ **A 5.** a)  $a = b + x + 1$

b)  $a = b \cdot x$

c)  $a = c \cdot x + b$  and  $b < c$

d) 
$$\begin{cases} a = c \cdot x + b \\ b \leq c - b \\ a = c \cdot x - b \\ b < c - b \end{cases}$$

e)  $b = c \cdot a + x$  and  $x < c$

◆ **A 6.**  $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 1$  if and only if then  $a$  and  $b$  co-prime.

$a = kt, b = lt, GCD(k, l) = 1$  if and only if then  $t = GCD(a, b)$ .

$LCM(a, b) = \frac{ab}{GCD(a, b)}$

◆ **A 7.** a)  $x^2 < a < (x + 1)^2$

◆ **A 8.** a)  $d = k^2 \Rightarrow (x - ky)(x + ky) = 1 \Rightarrow x - dy = x + dy \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

b) Since  $u_3 - v_3\sqrt{d} = (u_1 - v_1\sqrt{d}) \cdot (u_2 - v_2\sqrt{d})$ , then  $u_3^2 - v_3^2d = (u_1^2 - v_1^2d)(u_2^2 - v_2^2d) = 1$

c)  $|x'| = \sqrt{1 + y'^2d} \Rightarrow |x'| + |y'| = \sqrt{1 + y'^2d} + |y'|$  is monotonic by  $|y'|$ . Let  $(x + y\sqrt{d})^n < x' + y'\sqrt{d} < (x + y\sqrt{d})^{n+1}$  ( $x > 0, y > 0, x' > 0, y' > 0$ ). Multiplying it by  $(x - y\sqrt{d})^n > 0$  we get  $1 < a + b\sqrt{d} < x + y\sqrt{d}$ , such that  $a^2 - b^2d = 1$ . Since  $0 < a + b\sqrt{d}$ , then  $a - b\sqrt{d} > 0$ . Since  $a - b\sqrt{d} < 1 < a + b\sqrt{d}$ , then  $b > 0$ . Since  $a - b\sqrt{d} > 0$ , then  $a > 0$ . So, since while  $|x| + |y|$  is increasing,  $|y|$  is increasing,  $|x| + |y|\sqrt{d}$  is increasing, then  $(x, y)$  is not a minimal solution.

◆ **A 9.** a) See the previous solution.

b) This statement (and that is  $x_n \equiv 1 \pmod{k-1}$ ) can be proved by induction on  $n$ .

c) It can be solved as the particular case of the next problem:  $1 = x^2 - (\frac{b^2}{4} - 1)y^2 = (x + \frac{b}{2}y)^2 - b(x + \frac{b}{2}y)y + y^2$

◆ **A 10.** Consider the minimal solution and prove that every other solution can be constructed as the iteration of

◆ **A 11.** This can be proved by induction of  $n$ .

◆ **A 12.** This can be proved by induction of  $l$ .

◆ **A 13.** This can be proved by using the previous problem (since  $\alpha_{km}(b)$  divides on  $\alpha_m(b)$ ,  $\alpha_{4m-1}(b) = \alpha_{2m-1}(b)(\alpha_{2m}(b) - \alpha_{2m-2}(b))$  and  $\alpha_{2m}(b) = \alpha_m(b)(\alpha_{m+1}(b) - \alpha_{m-1}(b))$ ).

◆ **A 14.** This can be proved by induction on  $n$ .

◆ **A 15.** No comments

◆ **A 16.** It is obvious that  $\alpha_n(b)(\text{amod } v) = \alpha_n(w)(\text{amod } v)$  and  $n(\text{amod } u) = \alpha_n(w)(\text{amod } u)$ . Therefore, since  $v > 2\alpha_k(b) > 2\alpha_n(b)$  and  $u > 2k > 2n$ , then we get the statement we need

◆ **A 17.** No comments

◆ **A 18.** The inequality  $k \leq \alpha_k(b)$  can be proved by induction on  $k$

◆ **A 19.** No comments

◆ **A 20.** This can be proved by induction on  $k$

◆ **A 21.** This can be proved by induction on  $n$

◆ **A 22.**  $\frac{(bn+4)^c}{(n-1)^c} \geq \frac{\alpha_{c+1}(bn+4)}{\alpha_{c+1}(n)} \geq \frac{(bn+3)^c}{n^c}$ . The left and right parts of this inequality tend to  $b^c$ .

◆ **A 23.** No comments

◆ **B 1.**  $c = \left[ \frac{a}{b^k-1} \right] \pmod{b^k}$

◆ **B 2.** a)  $b = 2^n$ ,  $a = (2^n + 1)^n$

b)

◆ **B 3.**  $p$  is prime if and only if then  $GCD(p, (p-1)!) = 1$

◆ **B 4.**  $(x_0 + 1)(1 - D(x_0, x_1, \dots, x_m)^2) - 1 \geq 0$  if and only if then  $1 - D(x_0, x_1, \dots, x_m)^2 > 0$ , i.e.  $D(x_0, x_1, \dots, x_m) = 0$ . So,  $a = (x_0 + 1)(1 - 0) - 1 = x_0$ .

◆ **B 5.** It follows from the two previous problems

◆ **B 6.** a) The first addendum in this sum equals to the number of the factors divisible by  $p$ , the second — by  $p^2$  etc.

b)  $\sum(\left[\frac{m+n}{p^k}\right] - \left[\frac{m}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^k}\right])$  is equal to the demanded number.

◆ **B 7.**  $\frac{(x_n p^{n-1} + \dots + x_1 p + x_0)}{(y_n p^{n-1} + \dots + y_1 p + y_0)}$  divides on  $p$  if and only if then there exists  $i$ , such that  $x_i < y_i$ .

◆ **B 8.**  $a < e \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1}$

◆ **B 9.**  $(y_n b_1^{n-1} + \dots + y_1 b_1 + y_0) - (y_n b_2^{n-1} + \dots + y_1 b_2 + y_0) \equiv 0 \pmod{b_2 - b_1}$   
(since  $b_1^k - b_2^k = (b_1 - b_2)(b_1^{k-1} + b_1^{k-2} b_2 + \dots + b_2^{k-1})$ )

◆ **B 10.**  $a_1 = a_2 \pmod{b_2 - b_1}$  (since  $a_1 < b_1^n < b_2 - b_1$ )



# Покрывтия клетчатymi фигурками. (Карлсон всегда живой-5 снова прилетел...)

И. Богданов, Г. Челноков

9 августа 2007 г.

## 1 Обзор целей и используемая терминология.

Мы рассматриваем бесконечную в обе стороны клетчатую полосу ширины 1 (мы ее будем называть *клетчатой прямой*), а также клетчатую плоскость и клетчатое (т. е. разбитое стандартным образом на кубики) пространство. Те, кто знают, что такое  $n$ -мерное (клетчатое) пространство, могут рассматривать также и его. Однако, желающие могут ограничиться только клетчатыми прямой и плоскостью — для всех существенных вопросов их достаточно.

**Определение 1.** Фигурка есть произвольное конечное множество клеток (не обязательно связное!); очевидно, площадь фигурки — это количество ее клеток. Транслятом фигурки называется ее образ при параллельном переносе (на целый вектор). Семейство транслятов фигурки  $\mathcal{F}$ , фигурки которого содержат все клетки полосы (плоскости, ...) называется покрытием полосы (плоскости, ...) фигуркой  $\mathcal{F}$ .

Занумеровав клетки полосы, получаем, что ее можно отождествить с множеством  $\mathbb{Z}$  целых чисел. Аналогично, клетчатую плоскость можно отождествить с  $\mathbb{Z}^2$  и т. д. При этом транслятом одномерной фигурки  $\mathcal{F}$  (при сдвиге на  $t$ ) будет просто множество  $\mathcal{F} + t = \{x + t \mid x \in \mathcal{F}\}$ . Тогда покрытие  $\{\mathcal{F} + t_i\}$  задается множеством  $T = \{t_i\}$ . Можно сказать, что множество  $T$  задает покрытие, если  $\mathbb{Z} = T + \mathcal{F} (= \{t + f \mid t \in T, f \in \mathcal{F}\})$ . Если  $0 \in \mathcal{F}$ , то можно просто сказать, что  $T$  — это множество клеток, в которые попадает 0 при наших параллельных переносах.

Все сказанное практически дословно переносится на  $\mathbb{Z}^k$  (с заменой чисел на целочисленные векторы).

Данная серия посвящена следующему вопросу.

**Вопрос.** Дана фигурка  $\mathcal{F}$ . Насколько “экономным” может быть покрытие фигуркой  $\mathcal{F}$ ?

Первым делом, естественно, нужно определить, что такое “экономное” покрытие. Если отрезок  $[1, N]$  покрыт  $d$  транслятами  $n$ -клеточной фигурки  $\mathcal{F}$ , то *эффективностью* такого покрытия естественно назвать отношение  $N/(dn)$ . Для бесконечной полосы приходится перейти к пределу.

**Определение 2.** Рассмотрим множество  $S \subset \mathbb{Z}$ . Для произвольного отрезка  $[-N, N]$  обозначим  $S_N = S \cap [-N, N]$ . Если последовательность  $S_N/(2N)$  имеет предел  $\rho(S)$ , то назовем его плотностью множества  $S$ .

Пусть множество  $T$  задает покрытие полосы фигуркой  $\mathcal{F}$ ,  $|\mathcal{F}| = n$ . Неэффективностью покрытия будем называть число  $\rho(T)n$  (конечно, если оно существует).

Представим себе, что каждая клетка фигурки — это кирпич. Тогда при покрытии фигурками прямой на каждой клетке может лежать стопка из нескольких кирпичей. Неформально говоря, неэффективность — это средняя высота такой стопки, или, иначе говоря, среднее число слоев нашего покрытия.

**Упражнение на понимание.** Дайте строгое определение понятию “среднее число слоев” и докажите, что оно равно неэффективности.

Полезно понимать, что если множество  $S$  имеет плотность, то  $S + n$  также ее имеет, при этом  $\rho(S + n) = \rho(S)$ . Аналогичные определения вводятся и в  $\mathbb{Z}^k$ , только там, естественно, нужно брать пересечение множества с кубом  $[-N, N]^k$ .

В центре нашего внимания находятся следующие понятия.

**Определение 3.** Неэффективностью фигурки называется

$$\nu(\mathcal{F}) = \inf_{T: T+\mathcal{F}=\mathbb{Z}^k} |\mathcal{F}| \rho(T)$$

(инфимум берется по всем покрытиям фигуркой  $\mathcal{F}$ ). Обозначим

$$a_1(n) = \sup_{\mathcal{F} \subset \mathbb{Z}: |\mathcal{F}|=n} \nu(\mathcal{F}), \quad a_2(n) = \sup_{\mathcal{F} \subset \mathbb{Z}^2: |\mathcal{F}|=n} \nu(\mathcal{F}), \quad \dots$$

Таким образом, неэффективность фигурки — это “минимальная” неэффективность покрытия ею, а  $a_1(n)$  — максимальная неэффективность фигурки из  $n$  клеток на клетчатой прямой ( $a_2(n)$  — то же для плоскости и т. д.)

## 2 Разогрев.

2.1. Неэффективность любой фигурки площади 2 есть 1.

2.2. (i) Найдите неэффективность фигурки  $\blacksquare \blacksquare \square \blacksquare$ .

(ii) Оцените неэффективность фигурки  $\blacksquare \square \blacksquare \square \square \square \blacksquare \square \blacksquare$ ;

(iii) и  $\blacksquare \square \blacksquare \square \square \square \blacksquare \square \blacksquare \square \square \square \square \square \square \square \square \square \blacksquare \square \blacksquare \square \square \square \blacksquare \square \blacksquare$ ;

(iv) и  $\blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \square \square \square \square \blacksquare \blacksquare \square \square \blacksquare \blacksquare \square \square \blacksquare \square \blacksquare \square \square \square \square$ ;

(v) и еще что-нибудь.

2.3. Докажите, что  $a_1(n) \leq a_1(2n)$

2.4. Докажите, что эффективность фигурки равна 1 тогда и только тогда, когда она паркетна:

(i) на прямой;

(ii) на плоскости.

2.5. Рассматриваются фигурки площади 3 на прямой.

(i) Найдите такую фигурку неэффективности  $6/5$ .

(ii) Докажите, что неэффективность такой фигурки не больше  $6/5$ .

2.6. Пусть  $\mathcal{F}$  — фигурка из 4 клеток.

(i) Докажите, что  $\nu(\mathcal{F}) \leq 8/5$ .

(ii) Точна ли эта оценка?

(iii) Предъявите фигурку  $\mathcal{F}$  из 4 клеток с  $\nu(\mathcal{F}) \geq 3/2$ .

## 3 Основные результаты

3.1. На прямой дана фигурка с неэффективностью  $\alpha$ .

(i) Докажите, что есть покрытие с неэффективностью  $\alpha$ .

(ii) Докажите, что есть периодическое покрытие с такой же неэффективностью (поэтому  $\alpha$  рационально).

3.2. (i) Докажите, что  $a_1(n) = a_2(n)$ . (Так что теперь мы ее будем обозначать  $a(n)$ .)

(ii)  $\dots = a_3(n) = a_4(n) = \dots$

В дальнейшем результате предыдущей задачи можно пользоваться без доказательства.

3.3. Докажите, что  $a(n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**3.4.** (i) Пусть  $\aleph(n)$  — максимальная неэффективность покрытия полосы фигуркой из  $n$ , диаметр которой не превосходит  $2n$ . Докажите, что  $\aleph(n) \leq c \ln n$  для некоторой константы  $c$

(ii) Докажите аналогично утверждение для фигурок, диаметр которых не превосходит  $kn$  для фиксированной константы  $k$ .

(iii) Как видно из следующей задачи, логарифмическая оценка неэффективности верна для всех фигурок, без ограничения на диаметр. Можно ли для фигурок с ограниченным диаметром получить оценку лучше логарифмической? (Ответ авторам не известен!)

**3.5.** (i) Докажите, что  $a(n)/n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Авторам не известно решения, проще чем

(ii) Докажите, что  $a(n) \leq c \ln n$  для некоторой константы  $c$ .

**3.6.** Получите возможно лучшую нижнюю оценку на  $a(n)$ . Авторы думают, что умеют доказывать  $a(n) \geq c \ln n / \ln \ln n$  для некоторой константы  $c$ .

## 4 Открытые вопросы

*Избегнет ли моя голова  
ее огромного зоба,  
и если да — какую ценой,  
а если нет — почему?*

*М. Щербakov*

В этом разделе сейчас собраны дальнейшие вопросы, которые можно исследовать.

**4.1.** Правда ли, что  $a(n)$  неубывает?

**4.2.** Пусть  $b(\mathcal{F})$  — максимальная плотность набора непересекающихся фигурок. Получите какие-нибудь совместные оценки на  $\nu(\mathcal{F})$  и  $b(\mathcal{F})$ . Например, верно ли, что  $\nu(\mathcal{F})b(\mathcal{F}) \leq 1$ ?

Следующая задача может оказаться полезной при нахождении верхней оценки на  $\nu(\mathcal{F})$ .

**4.3.** Найдите (или оцените) максимальное  $k = k(n)$  такое, что из любой фигурки площади  $n$  можно вырезать паркетную фигурку площади  $k$ .

**4.4.** Какую паркетную фигурку наибольшей площади можно вырезать из фигурки площади  $n$ ?

**4.5.** Оценить не среднее, а *максимальное* число слоев в покрытии данной фигуркой.

# Покрывтия клетчатými фигурками. Решения.

## 2 Разогрев.

**2.1.** Пусть наша фигурка  $\mathcal{F}$  состоит из клеток с номерами 0 и  $n$ . Покроем все клетки с номерами, кратными  $n$ , транслятами фигурки на числа, кратные  $2n$ . Наложений при этом не образовалось. Таким же образом можно покрыть все клетки, номера которых дают фиксированный остаток при делении на  $n$ .

Поскольку каждая клетка покрыта ровно один раз, неэффективность равна единице. (См. решение 2.4.)

**2.2. (i)** Рассмотрим произвольный транслят в покрытии. Отсутствующая средняя клетка в нем покрыта каким-то другим транслятом; нетрудно понять, что эти два транслята пересекаются. Таким образом, каждый транслят покрытия пересекается с каким-то другим.

Если на клетке лежат  $k$  фигурок, то мы будем говорить, что *значимость* этой клетки равна  $1/k$ . *Значимостью* транслята покрытия назовем сумму значимостей его клеток. Тогда значимость каждого транслята не превосходит  $5/2$ .

Рассмотрим теперь любой отрезок длины  $n$ . Сумма значимостей фигурок, пересекающихся с этим отрезком, не меньше  $n$ , так как на клетке значимости  $1/k$  лежат  $k$  фигурок. Поэтому фигурок использовано не меньше  $\frac{2}{5}n$ , и неэффективность не может быть меньше  $\frac{6}{5}$ .

Двумя транслятами нашей фигурки легко покрыть отрезок длины 5. Замощая такими отрезками прямую, получаем покрытие неэффективности  $\frac{6}{5}$ .

**(ii)** Поскольку номера всех клеток фигурки четны, мы можем отдельно рассматривать покрытие четных клеток полоски. На этих клетках фигурка выглядит так:  $\blacksquare\blacksquare\blacksquare$ . Двумя такими фигурками легко покрыть отрезок длины 7, поэтому  $\nu(\mathcal{F}) \leq 4 \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$ .

Рассмотрим произвольное покрытие. Каждый его транслят пересекается с транслятом, содержащим его центральную клетку. Аналогично предыдущему пункту получаем, что значимость каждого транслята в покрытии не превосходит  $\frac{7}{2}$ , а значит, неэффективность не меньше  $\frac{4}{7/2} = \frac{8}{7}$ .

**(iii)** Поскольку эта фигурка состоит из двух экземпляров предыдущей, то любое покрытие этой фигуркой является также покрытием предыдущей. Неэффективности этих покрытий совпадают, поэтому  $\nu(\mathcal{F}) \geq \frac{8}{7}$ . С другой стороны, легко видеть, что множество  $T = 7\mathbb{Z} = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$  задает покрытие нашей фигуркой, и неэффективность этого покрытия равна как раз  $\frac{8}{7}$ .

**2.3.** Пусть фигурка  $\mathcal{F}$  такова, что  $\nu(\mathcal{F}) \geq a_1(n) - \varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим фигурку  $\mathcal{F}'$ , состоящую из двух непересекающихся транслятов фигурки  $\mathcal{F}$  (скажем,  $\mathcal{F}' = \mathcal{F} + \{0, d+1\}$ , где  $d$  — диаметр  $\mathcal{F}$ ). Тогда любое покрытие фигуркой  $\mathcal{F}'$  является также покрытием фигуркой  $\mathcal{F}$ , и их неэффективности совпадают. Значит, неэффективность любого покрытия фигуркой  $\mathcal{F}'$  также не меньше  $a_1(n) - \varepsilon$ , а значит  $\nu(\mathcal{F}') \geq a_1(n) - \varepsilon$  и поэтому  $a_1(2n) \geq a_1(n) - \varepsilon$ . В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  получаем требуемое неравенство  $a_1(2n) \geq a_1(n)$ .

**2.4. (i)** Если фигурка паркетна, то ее эффективность, очевидно, равна 1.

Пусть эффективность фигурки равна 1. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует покрытие неэффективности  $< 1 + \varepsilon$ . Если в нашем покрытии любой отрезок длины  $N$  содержит клетку, по-

крытую дважды, то его неэффективность не меньше  $1 + \frac{1}{N}$ ; следовательно, если  $\varepsilon < \frac{1}{N}$ , то найдется отрезок длины  $N$ , покрытый ровно один раз.

Пусть диаметр фигурки равен  $d$ . Выберем  $N > 2^d + d$ ,  $\varepsilon < 1/N$ . Пусть отрезок  $[1, N]$  покрыт ровно один раз.

Представим себе, что мы выкладываем на прямую трансляты нашего покрытия слева направо. Пусть в некоторый момент выложены уже все трансляты, у которых левые клетки лежат не правее числа  $n$ . Такое “полупокрытие” задается множеством  $T_n = T \cap (-\infty, n]$ . Рассмотрим множество  $Z_n = T_n + \mathcal{F}$  клеток, покрытых к этому моменту. Тогда, очевидно,  $(-\infty, n] \subseteq Z_n \subseteq (-\infty, n + d]$ . Итого, мы не знаем только того, как покрыт интервал  $(n, n + d]$ .

Назовем *хвостом* нашего полупокрытия узор, образуемый покрытыми клетками этого интервала. Формально, хвост — это множество  $H_n = \{d \mid n + d \in Z_n\} \subseteq (0, n]$ . Ясно, что различных хвостов может быть не больше, чем  $2^d$ .

Посмотрим на процесс выкладывания, начиная с того места, когда все клетки с неположительными номерами уже покрыты. Тогда среди первых  $2^d + 1$  хвостов найдутся два одинаковых — пусть это хвосты  $H_m$  и  $H_n$  ( $n < m$ ). Тогда назовем участок покрытия  $T(n, m) = T \cap (n, m]$  между ними *циклом*, соответствующим хвосту  $H_n$ . Ясно, что множество транслятов  $Z(n, m) = T(n, m) + \mathcal{F}$ , задаваемое  $T(n, m)$ , покрывает весь интервал  $(n, m]$ , кроме клеток хвоста  $H_n + n$ ; также оно покрывает второй хвост  $H_m + m$ . Кроме того, трансляты этого множества не пересекаются, ибо они лежат в отрезке  $[1, N]$ . Значит, если мы распространим этот цикл с периодом  $m - n$ , то полученное множество  $T' = T(n, m) + (m - n)\mathbb{Z}$  задаст паркет на всей прямой.

(ii) Рассмотрим дерево (связный граф без циклов), назовем произвольную его вершину корневой и ориентируем все ребра в направлении от этой вершины. Полученную конструкцию будем называть *ориентированным деревом*.

**Лемма 1 (Лемма Кёнига).** Если в ориентированном дереве число вершин бесконечно, а степень каждой вершины конечна, то существует бесконечный путь по стрелкам.

Доказательство оставлено читателю в качестве упражнения.

Рассмотрим произвольную фигурку  $F$  на плоскости. *Ростком* назовем множество транслятов, пересекающих некоторый квадрат с центром в начале координат, причем каждая клетка квадрата покрыта ровно 1 раз. Размер покрытого квадрата естественно называть *размером* ростка.

Заметим, что если для фигурки  $F$  существует росток размера  $N$ , то существуют и ростки размеров  $n$  при всех  $n < N$ .

Пусть неэффективность фигурки равна 1. Тогда существует покрытие этой фигуркой с неэффективностью  $< 1 + \frac{1}{N^2}$ . В этом покрытии есть квадрат размера  $N$ , все клетки которого покрыты ровно по 1 разу. Подходящим параллельным переносом можно сделать из покрытия этого квадрата росток.

Итак, если неэффективность фигурки равна 1, то есть ростки всех размеров; значит, ростков бесконечно много. Нарисуем ориентированный граф: вершины суть ростки, из ростка размера  $n$  в росток размера  $n + 2$  ведет стрелка, если множество транслятов первого ростка можно дополнить до множества транслятов второго. Будем считать, что пустое множество транслятов есть росток размера 0.

Тогда очевидно, что нарисовано именно ориентированное дерево, причем каждая вершина имеет конечную степень. По лемме Кёнига в нем есть бесконечный путь. Рассмотрим объединение всех ростков, соответствующих вершинам этого пути: возьмем трансляты ростка размера 2, добавим трансляты из ростка размера 4, добавим трансляты из ростка размера 6, и так далее. Поскольку любая клетка лежит во всех квадратах, начиная с некоторого, она будет покрыта ровно один раз. Паркет построен.

**2.5. (i)** См. задачу 2.2(i).

(ii) Пусть клетки нашей фигурки имеют номера 0,  $a$ ,  $a + b$ , то есть расстояния между клетками равны  $a$  и  $b$ . Если  $2a + b \equiv 1 \pmod{3}$ , то  $2b + a \equiv 2 \pmod{3}$ . Поэтому, поменяв в случае необходимости  $a$  и  $b$  местами, мы можем считать, что  $2a + b \not\equiv 1 \pmod{3}$ .

Если  $\gcd(a, b) = d > 1$ , то мы покроем все клетки с номерами, делящимися на  $d$ . Аналогичным образом покроятся все остальные остатки. Поэтому можно считать, что  $\gcd(a, b) = 1$ .

Положим фигурки на полосу с шагом  $2a + b$  (то есть, рассмотрим множество  $T_1 = (2a + b)\mathbb{Z} = \{\dots, -(4a + 2b), -(2a + b), 0, 2a + b, 4a + 2b, \dots\}$ ). Тогда покрытое множество  $Z_1 = T_1 + \mathcal{F}$  состоит из троек клеток  $\dots, \{0, a, 2a\} - (2a + b), \{0, a, 2a\}, \{0, a, 2a\} + (2a + b), \dots$ . Мы собираемся покрыть прямую несколькими экземплярами множества  $Z_1$ .

Рассмотрим клетки множества  $Z_1$ , дающие фиксированный остаток от деления на  $a$ . Поскольку  $a$  и  $2a + b$  взаимно просты, такие клетки есть; нетрудно видеть, что эти клетки группируются в тройки, идущие с периодом  $a(2a + b)$ . Сдвинем множество  $Z_1$  на  $3a, 6a, \dots$ , пока тройки не покроют все клетки этого (а значит, и любого) остатка.

Если  $2a + b \div 3$ , то мы получили паркет. Если же  $2a + b \equiv 2 \pmod{3}$ , то каждая тройка в последнем сдвиге пересекается с уже существующей по одной клетке. Поэтому в нашем остатке, на каждом периоде длины  $2a + b$  есть одно пересечение, и неэффективность равна  $\nu = \frac{2a + b + 1}{2a + b} = 1 + \frac{1}{2a + b}$ . Так как  $2a + b \equiv 2 \pmod{3}$ , то  $2a + b \geq 5$  и  $\nu \leq \frac{6}{5}$ , что и требовалось.

**2.6.** (i) Выбросим из нашей фигурки любую клетку, а оставшейся трехклеточной фигуркой покроем полосу с неэффективностью, не превосходящей  $\frac{6}{5}$ . Добавляя в каждую фигурку выброшенную клетку обратно, получаем неэффективность не больше  $\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$ .

(ii) Оценка предыдущего пункта может быть точна только тогда, когда любые три клетки фигурки  $\mathcal{F}$  образуют фигурку неэффективности ровно  $\frac{6}{5}$  (докажите!). Обращаясь к решению задачи 2.4(ii), видим, что в таких фигурках расстояния  $a$  и  $b$  между клетками должны иметь вид  $a = da', b = db'$  с  $2a' + b' = 5$  (или наоборот). Это уравнение имеет два решения  $(a', b') = (2, 1)$  и  $(a', b') = (1, 3)$ . Несложный перебор показывает, что фигурка, у которой все подфигурки имеют такой вид, единственна (естественно, с точностью до растяжения) — это фигурка  $\blacksquare\blacksquare\blacksquare$ . Но мы знаем, что ее неэффективность равна  $\frac{8}{7} < \frac{3}{2}$ . Значит, оценка неточна.

(iii) К сожалению, в условие этого пункта вкралась ошибка. Требуемой фигурки не существует.

Показать это можно так же, как и в предыдущем пункте. Если мы хотим, чтобы неэффективность была не меньше  $\frac{3}{2}$ , то неэффективность любой подфигурки должна быть не меньше  $\frac{9}{8}$ . Опять же, из решения 2.4(ii) получаем, что это возможно лишь при  $2a' + b' = 5$  или  $2a' + b' = 8$ . Таких фигурок две — упомянутая ранее и  $\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare$ . Но двумя последними фигурками можно покрыть отрезок длины 7, поэтому ее неэффективность не превосходит  $\frac{8}{7} < \frac{3}{2}$ .

## 3 Основные результаты

**3.1.** (i) Рассмотрим произвольное покрытие нашей фигуркой  $\mathcal{F}$ , задающееся множеством  $T$ . Мы считаем, что  $0 = \min \mathcal{F}$ , то есть самая левая клетка фигурки  $\mathcal{F}$  имеет номер 0. Обозначим диаметр фигурки через  $d + 1$  (таким образом,  $\max \mathcal{F} = d$ ). Мы используем терминологию, введенную в решении задачи 2.4.

Рассмотрим произвольный цикл между двумя совпадающими хвостами  $H_n$  и  $H_m$  ( $n < m$ ). Длиной этого цикла естественно назвать число  $n - m$ . Если мы распространим этот цикл с периодом  $n - m$ , то полученное множество  $T' = T(n, m) + (n - m)\mathbb{Z}$  задаст покрытие всей прямой. Неэффективность этого покрытия равна  $\frac{|T(n, m)|}{n - m} \cdot |\mathcal{F}|$ . Естественно поэтому назвать эту величину *неэффективностью* нашего цикла.

Заметим, что два цикла, соответствующие одному хвосту, можно соединить, получив опять цикл. Его длина будет равна сумме длин исходных циклов, а его неэффективность, очевидно, расположена (нестрого) между неэффективностями исходных циклов.

Ясно, что в наше покрытие существует хвост, встречающийся сколь угодно далеко справа, и хвост, встречающийся сколь угодно далеко влево. Тогда все покрытие, кроме конечного куска в середине, можно разбить на циклы, соответствующие этим хвостам. Пусть все эти циклы

в нашем покрытии имеет неэффективность  $\geq \beta$ . Тогда среднее число транслятов на каждом цикле не меньше  $\beta/n$ , а значит, и неэффективность нашего покрытия не меньше  $\beta$ .

Далее, неэффективность нашей фигурки равна  $\alpha$ . Поэтому, зафиксировав произвольное  $\varepsilon > 0$ , мы можем найти покрытие с неэффективностью  $< \alpha + \varepsilon$ , а в нем — цикл с неэффективностью  $< \alpha + \varepsilon$ . Более того, поскольку возможных хвостов конечное число, то существует такой хвост  $H$ , что для любого  $\varepsilon > 0$  существуют циклы с неэффективностью  $< \alpha + \varepsilon$ , соответствующие  $H$ .

Теперь нетрудно построить покрытие с неэффективностью  $\alpha$ . Рассмотрим произвольный цикл, начинающийся с хвоста  $H$ , неэффективности  $< \alpha + 1$ . Будем пристраивать к нему слева и справа одинаковые циклы неэффективности  $< \alpha + \frac{1}{2}$  до тех пор, когда неэффективность полученного цикла не станет  $< \alpha + \frac{1}{2}$ . Затем пристроим к полученному несколько циклов неэффективности  $< \alpha + \frac{1}{3}$  так, чтобы неэффективность полученного стала  $< \alpha + \frac{1}{3}$  и т. д. В конце концов получим требуемое покрытие неэффективности  $< \alpha + \frac{1}{n}$  для любого  $n$ , т. е. неэффективности  $\alpha$ .

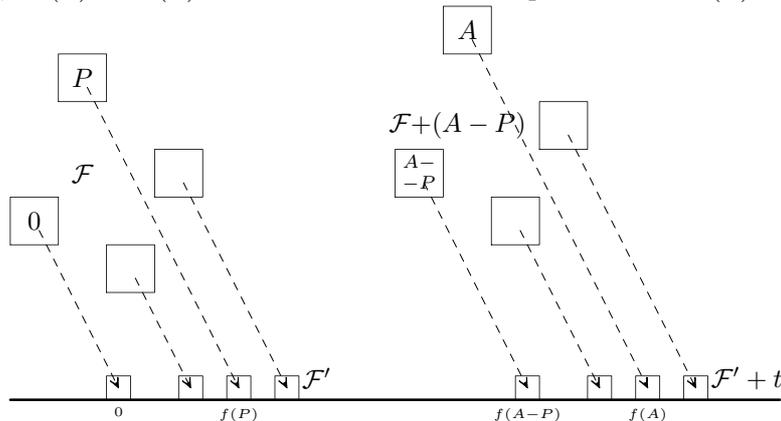
**(ii) Лемма.** Пусть для нашей фигурки существует цикл неэффективности  $\phi$ . Тогда также существует цикл длины  $\leq 2^d$  и неэффективности  $\leq \phi$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное покрытие нашей фигуркой, и рассмотрим в нем произвольный цикл длины  $n > 2^d$ . Пусть это цикл  $T(0, n]$ . Ясно, что все хвосты  $H_i$  при  $0 < i \leq n$  зависят только от цикла и не зависят от остальных элементов покрытия. Среди этих хвостов есть два одинаковых, скажем,  $H_p$  и  $H_q$ ,  $0 < p < q \leq n$ .

Тогда кусок  $T(0, p]$  вместе с куском  $T(q, n]$ , сдвинутым на  $q - p$  влево (то есть с куском  $T(q, n] - (q - p)$ ), образуют цикл длины  $n - (q - p)$ . Пусть неэффективность этого цикла равна  $\beta$ , а неэффективность цикла  $T(p, q]$  равна  $\gamma$ . Тогда неэффективность исходного цикла  $T(0, n]$  равна  $\frac{(q - p)\gamma + (n - (q - p))\beta}{n} \geq \min\{\beta, \gamma\}$ , то есть одно из чисел  $\beta, \gamma$  не превосходит  $\phi$ , и мы нашли цикл не большей эффективности и меньшей длины. Продолжая в то же духе, в конце мы получим цикл длины  $\leq 2^d$ .  $\square$

Теперь легко получить решение задачи. Рассмотрим все возможные циклы длины  $\leq 2^d$  — их конечное число. Пусть  $\nu$  — наименьшая неэффективность такого цикла. Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Из предыдущего пункта мы знаем, что существует цикл неэффективности  $< \alpha + \varepsilon$ . По лемме, существует также цикл не большей неэффективности и длины  $\leq 2^d$ , то есть  $\nu < \alpha + \varepsilon$ . В силу произвольности  $\varepsilon$ , получаем  $\nu \leq \alpha$ . Поскольку существует покрытие неэффективности  $\nu$ , имеем  $\nu \geq \alpha$ , поэтому  $\nu = \alpha$ , и мы нашли периодическое покрытие такой неэффективности.

**3.2. (i)** Поскольку любую фигурку на прямой можно также рассматривать как фигурку на плоскости,  $a_1(n) \leq a_2(n)$ . Осталось доказать неравенство  $a_2(n) \leq a_1(n)$ .



Рассмотрим фигурку  $\mathcal{F}$  на плоскости (мы считаем, что  $0 \in \mathcal{F}$ ). Пусть ее клетки соответствуют векторам  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Существуют такие целые взаимно простые  $a, b$ , что функция  $f(x, y) = ax + by$  принимает различные значения на всех наших векторах. Рассмотрим на прямой фигурку  $\mathcal{F}' = \{ax_i + by_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ . Тогда существует покрытие  $T'$  этой фигуркой неэффективности  $\nu \leq a_1(n)$ . Мы собираемся показать, что множество  $T = \{(x, y) \mid f(x, y) \in T'\}$  задает покрытие плоскости фигуркой  $\mathcal{F}$ , причем плотности множеств  $T$  и  $T'$  совпадают; отсюда будет

следовать, что совпадают и неэффективности этих покрытий, поэтому  $\nu(\mathcal{F}) \leq a_1(n)$ . Значит, и  $a_2(n) \leq a_1(n)$ .

Для первого утверждения, рассмотрим произвольную клетку  $A$  плоскости. Ее образ  $f(A)$  принадлежит некоторому трансляту фигурки  $\mathcal{F}'$ ; пусть это транслят  $\mathcal{F}' + t$ ,  $t \in T'$ . Тогда клетка  $f(A) - t$  принадлежит  $\mathcal{F}'$ , а значит, есть клетка  $P \in \mathcal{F}$  такая, что  $f(P) = f(A) - t$ . Рассмотрим клетку  $A - P$  (вычитание по координатам). Очевидно,  $f(A - P) = f(A) - f(P) = t \in T'$ , то есть  $A - P \in T$ , и клетка  $A$  принадлежит трансляту  $\mathcal{F} + (A - P)$  нашего покрытия; значит, множество  $T$  задает покрытие плоскости фигуркой  $\mathcal{F}$ .

Заметим, что покрытие  $T'$  можно считать периодическим. Пусть его период имеет длину  $d$ . Если период содержит  $q$  элементов, то  $\rho(T') = q/d$ . Рассмотрим большой квадрат со стороной  $N$  на плоскости. Легко понять, что в нем количество клеток  $A$  таких, что  $f(A)$  дает фиксированный остаток от деления на  $d$ , примерно равно  $N^2/d$  (более строго, оно расположено между  $(N - d)^2/d$  и  $(N + d)^2/d$ ). Тогда количество клеток этого квадрата, лежащих в множестве  $T$ , примерно равно  $qN^2/d$  (а точнее — равно  $qN^2/d + O(N)$ ), что и означает, что  $\rho(T) = q/d$ . Утверждение доказано.

(ii) Абсолютно аналогично.

**3.3.** См. задачу 3.6.

**3.4.** (i) Пусть  $d$  — диаметр фигурки,  $n$  — ее площадь, причем  $2n \geq d$ . Будем строить периодическое покрытие прямой с периодом  $d$ , добавляя по одному трансляту фигурки на период (то есть, за ход мы добавляем одну серию транслятов, отличающихся переносами на векторы, кратные  $d$ ).

Докажем, что мы всегда можем положить очередной транслят так, что количество непокрытых клеток уменьшится хотя бы вдвое. Пусть до нашего хода не покрыто  $x$  клеток. Рассмотрим все  $d$  возможных положений транслята на периоде. Каждая из непокрытых клеток остается непокрытой ровно при  $d - n$  положениях добавляемого транслята. Значит, при каком-то из положений добавляемого транслята непокрытыми остаются не более  $x \frac{d - n}{d} \leq \frac{x}{2}$  клеток.

Итак, каждым ходом мы можем уменьшать число непокрытых клеток хотя бы вдвое, значит, за  $\lceil \log_2 d \rceil + 1$  мы можем оставить непокрытыми меньше 1 клетки периода, то есть все клетки окажутся покрытыми. При этом, так как на  $d$  клеток периода приходится не больше  $\lceil \log_2 d \rceil + 1$  фигурок, то неэффективность не превосходит  $\frac{n(\lceil \log_2 d \rceil + 1)}{d} \leq \log_2 d + 1 \leq \log_2 2n + 1 = \log_2 n + 2$ .

(ii) Абсолютно аналогично получается оценка  $\nu \leq \log_{k/(k-1)} kn + 1$ .

**3.5.** (ii) Пусть  $d$  — диаметр фигурки,  $n$  — ее площадь. Выберем натуральное  $t > n$ , такое, что  $nt > d$ . Будем строить периодическое покрытие прямой с периодом  $nt$ , опять добавляя по одному трансляту фигурки на период.

Пусть перед ходом на периоде не покрыто еще более  $s > (n - 1)t$  клеток. Докажем, что тогда можно добавить транслят, накрывающий  $n$  ранее не покрытых клеток. Рассмотрим все положения транслята на периоде. Каждую из  $s$  непокрытых клеток накрывает  $n$  транслятов, значит, всего  $nt$  транслятов накрывают  $sn > (n - 1)nt$  клеток; поэтому какой-то из них накрывает больше  $n - 1$  клетки, то есть  $n$ .

Итого, пока непокрытыми остались больше  $(n - 1)t$  клеток, за один шаг можно уменьшить число непокрытых клеток на  $n$ . Значит, мы добьемся того, что непокрытыми останутся не больше  $(n - 1)t$  клеток, за  $\left\lceil \frac{t}{n} \right\rceil$  ходов.

Аналогично, пока остаются непокрытыми более  $qt$  клеток, существует транслят, накрывающий не меньше  $q + 1$  из них. Значит, не более чем еще через  $\left\lceil \frac{t}{n - 1} \right\rceil$  останется не более  $(n - 2)t$  непокрытых клеток, не более чем еще через  $\left\lceil \frac{t}{n - 2} \right\rceil$  шагов — не более  $(n - 3)t$  непокрытых, и т. д.

Действуя таким образом, мы покроем весь период не больше, чем  $\left\lceil \frac{t}{n} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{n-1} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{1} \right\rceil$  транслятами. Как известно,  $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} = \ln n + O(1)$  (это можно доказать, например, рассмотрением интеграла  $\int_1^n \frac{dx}{x}$ ). Поэтому  $\left\lceil \frac{t}{n} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{n-1} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{1} \right\rceil = (\ln n + O(1))t$ , то есть транслятами с суммарной площадью  $(\ln n + O(1))nt$  мы покрыли период длины  $nt$ . Таким образом, неэффективность этого покрытия есть  $\ln n + O(1)$ .

**3.6.** Мы собираемся предъявить на прямой серию фигурок  $\mathcal{F}_k$  площади

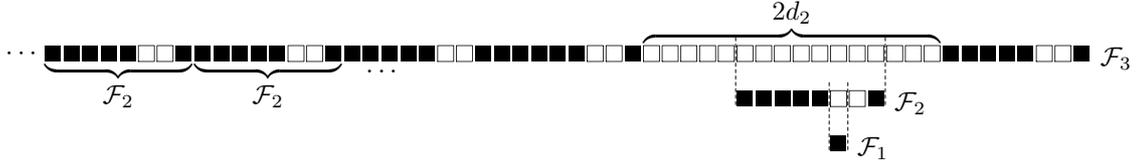
$$S_k = 2^{k-2}(k-1)!(k+1)!$$

и диаметра  $d_k = 2^{k-1}k!^2 = 2\frac{k}{k+1}S_k < 2S_k$ , причем  $\nu(\mathcal{F}_k) > \frac{k}{8}$ .

При  $k=1$   $\mathcal{F}_1$  — одноклеточная фигурка. Пусть  $k > 1$ , и фигурка  $\mathcal{F}_{k-1}$  площади  $S_{k-1}$  и диаметра  $d_{k-1}$  уже построена. Построим фигурку  $\mathcal{F}_k$  так. Расположим на прямой подряд  $2k^2 - 3$  транслят фигурки  $\mathcal{F}_{k-1}$ , а еще один транслят — на удалении  $2d_{k-1}$  от них. Итого, мы получили фигурку площади  $2(k^2 - 1)S_{k-1} = S_k$  и диаметра  $d_{k-1} \cdot 2k^2 = d_k$ .

Рассмотрим покрытие фигуркой  $\mathcal{F}_k$ . Выберем любой отрезок  $I$  длины  $4d_k$ ; мы утверждаем, что он содержит хотя бы  $k$  транслятов покрытия. Ясно, что транслят покрытия, содержащий среднюю клетку  $I$ , отстоит от границ отрезка хотя бы на  $d_k$ . Можно считать, что этот транслят есть  $\mathcal{F}_k$ .

Рассмотрим “дырку” в  $\mathcal{F}_k$  размера  $2d_{k-1}$ . Ее средняя клетка (скажем, левая из двух) принадлежит некоторому трансляту  $\mathcal{F}_k + t_k$  в нашем покрытии. Нетрудно понять, что тогда  $\mathcal{F}_k + t_k$  содержит транслят фигурки  $\mathcal{F}_{k-1}$ , целиком лежащий в нашей “дырке”. Поскольку  $\mathcal{F}_k$  состоит из транслятов фигурки  $\mathcal{F}_{k-1}$ , мы можем рассматривать наше покрытие как покрытие фигуркой  $\mathcal{F}_{k-1}$ . Тогда внутри дырки в выбранном трансляте  $\mathcal{F}_{k-1}$  мы найдем транслят фигурки  $\mathcal{F}_{k-2}$  и так далее. Очевидно, все выбранные трансляты принадлежат разным транслятам исходного покрытия (так как каждый лежит в “дырке” предыдущего). Значит, “дырка” в нашей  $\mathcal{F}_k$  пересекается хотя бы с  $k-1$  транслятом исходного покрытия; все эти трансляты лежат в нашем отрезке.



Мы получили, что любой отрезок длины  $4d_k$  содержит хотя бы  $k$  наших фигурок, поэтому неэффективность разбиения не меньше  $\frac{kS_k}{4d_k} > \frac{k}{8}$ .

Итак, мы построили фигурку  $\mathcal{F}_k$  площади  $S_k = 2^{k-2}(k-1)!(k+1)!$  и неэффективности  $\nu(\mathcal{F}_k) \geq \frac{k}{8}$ . Теперь для любого  $n > e^{100}$  выберем  $k = \left\lceil \frac{\ln n}{3 \ln \ln n} \right\rceil - 1$ . Оценим  $(k+1)!$ . Мы знаем, что  $(k+1)! \leq (k+1)^k = e^{k \ln(k+1)}$ . Далее,  $k \ln(k+1) \leq k \ln \ln n < \frac{1}{3} \ln n$ , поэтому  $(k+1)! < e^{(\ln n)/3} = \sqrt[3]{n}$ . Наконец, получаем  $S_k = 2^{k-2}(k-1)!(k+1)! \leq (k+1)!^3 \leq (\sqrt[3]{n})^3 = n$ , то есть площадь  $\mathcal{F}_k$  не превосходит  $n$ . С другой стороны,  $\nu(\mathcal{F}_k) \geq \frac{k}{8} \geq \frac{\ln n}{48 \ln \ln n}$ .

**Замечание.** Оценки в последнем параграфе не слишком грубы, поскольку  $S_k \geq (k+1)! \geq (k/2)^{k/2} \geq e^{k \ln k}$ , и из  $k \ln k \geq \frac{\ln n}{6 \ln \ln n} \frac{\ln \ln n}{2} \geq \frac{\ln n}{12}$  следует  $S_k \geq \sqrt[12]{n}$ .

# Coverings by the cell figures. (Terminator-3 is back at Sorrento. . .)

I. Bogdanov, G. Chelnokov

9th August 2007

## 1 The aims review and the notation.

We consider the *cellular line*, which is an infinite strip divided into the square cells (this strip is one cell wide). In some problems we also consider the cellular plane and the cellular space (that is, the space divided in a standard way into the unit cubes). If you want, you also can work in a cell  $n$ -dimensional space. Nevertheless, it is sufficient to consider only cell line and cell plane for all essential problems.

**Definition 1.** A figure is any finite set of cells (this set is not supposed to be connected!). Clearly, the area of a figure is a number of its cells. Any translation of a figure (by the vector with integer coordinates) is called a translate of this figure. Let  $\mathcal{F}$  be a figure. A family of translates of a figure  $\mathcal{F}$  is called an  $\mathcal{F}$ -covering of a line (plane, etc.), if each cell of this line (plane, etc.) is covered by at least one of these translates.

Enumerating all the cells of a cellular line, we identify it with the set  $\mathbb{Z}$  of integer numbers. Similarly, we identify the cellular plane with  $\mathbb{Z}^2$  and so on. This way, the translate of a one-dimensional figure  $\mathcal{F}$  by the number  $t$  is a figure  $\mathcal{F} + t = \{x + t \mid x \in \mathcal{F}\}$ , and the covering  $\{\mathcal{F} + t_i\}$  is determined by the set  $T = \{t_i\}$ . Thus, we say that  $T$  determines a covering if  $\mathbb{Z} = T + \mathcal{F} (= \{t + f \mid t \in T, f \in \mathcal{F}\})$ . If  $0 \in \mathcal{F}$ , then we can simply say that  $T$  is a set of cells which are covered by the images of 0 under the parallel translations considered.

All these notions can be introduced for the  $\mathbb{Z}^k$  (with replacing numbers by the integral vectors).

This problem is devoted to the following **Question**. Given a figure  $\mathcal{F}$ . How to find (or to approach) the “most efficient” covering of a line by  $\mathcal{F}$ ?

First, we should give a strict definition of the “efficiency” of a covering. Suppose that a segment  $[1, N]$  is covered by  $d$  translates of a figure  $\mathcal{F}$  having the area  $n$ . Then it is natural to define the *efficiency* of this covering as  $N/(dn)$ . For an infinite strip, we have to tend to the limit.

**Definition 2.** Consider a set  $S \subset \mathbb{Z}$ . For an arbitrary  $N$ , introduce the set  $S_N = S \cap [-N, N]$ . If a sequence  $S_N/(2N)$  has a limit  $\rho(S)$ , then we call this limit the *density* of the set  $S$ .

Now suppose that a set  $T$  determines the covering by a figure  $\mathcal{F}$ ,  $|\mathcal{F}| = n$ . Then we define the *non-efficiency* of this covering as  $\rho(T)n$  (of course, if it exists).

Imagine now that each cell of each translate is a brick. If a cellular line is covered by these translate, then there appears a column of bricks on each cell. Informally speaking, the non-efficiency average height of such a column, or the average number of layers in our covering.

**Exercise for an understanding.** Give the strict definition of the notion of “average number of layers” and prove that it coincides with the non-efficiency.

It is very useful to understand that the sets  $S$  and  $S + n$  have or have not the density simultaneously; moreover, in the former case  $\nu(S + n) = \nu(S)$ . Actually, analogous definitions are introduced for  $\mathbb{Z}^k$ ; in this case, one should of course take the intersection of the set  $S$  with the cube  $[-N, N]^k$ .

Now, we introduce the main notions in our problem.

**Definition 3.** A non-efficiency of a figure is the limit

$$\nu(\mathcal{F}) = \inf_{T: T+\mathcal{F}=\mathbb{Z}^k} |\mathcal{F}| \rho(T),$$

where the infimum is taken over all possible coverings by the figure  $\mathcal{F}$ . Introduce also

$$a_1(n) = \sup_{\mathcal{F} \subset \mathbb{Z}: |\mathcal{F}|=n} \nu(\mathcal{F}), \quad a_2(n) = \sup_{\mathcal{F} \subset \mathbb{Z}^2: |\mathcal{F}|=n} \nu(\mathcal{F}), \quad \dots$$

Thus, the non-efficiency of the figure is a “minimal” non-efficiency of a covering by this figure;  $a_1(n)$  is a “maximal” non-efficiency of the figure consisting of  $n$  cells on a cellular line ( $a_2(n)$  is a similar notion for the cellular plane, and so on).

## 2 Introductory problems.

**2.1.** The non-efficiency of each figure of area 2 is 1.

- 2.2.** (i) Find the non-efficiency of the figure  $\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare$ ;  
(ii) Estimate the non-efficiency of the figure  $\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare$ ;  
(iii) and  $\blacksquare$ ;  
(iv) and even  $\blacksquare$ ;  
(v) find another figure for the training if you wish.

**2.3.** Prove that  $a_1(n) \leq a_1(2n)$

- 2.4.** Prove that the non-efficiency of a figure is 1, if and only if there is a tiling by this figure  
(i) on the line;  
(ii) in the plane.

**2.5.** Consider the figures of area 3 in the cellular line.

- (i) Find such a figure of non-efficiency  $6/5$ .  
(ii) Prove that the non-efficiency of any figure of the area 3 is not more than  $6/5$ .

**2.6.** Let  $\mathcal{F}$  be a figure of area 4.

- (i) Prove that  $\nu(\mathcal{F}) \leq 8/5$ .  
(ii) Determine whether this estimate is sharp.  
(iii) Present an example of a figure  $\mathcal{F}$  having the area 4 and non-efficiency  $\nu(\mathcal{F}) \geq 3/2$ .

## 3 The main results

**3.1.** On the line, given a figure of non-efficiency  $\alpha$ .

- (i) Prove that there exists a covering with the non-efficiency  $\alpha$ .  
(ii) Prove that there exists even a periodic covering with the same non-efficiency (and therefore  $\alpha$  is a rational number).

**3.2.**

- (i) Prove that  $a_1(n) = a_2(n)$ . (Hence, in the following text we denote it by  $a(n)$ .)  
(ii)  $\dots = a_3(n) = a_4(n) = \dots$

In the following, you can use the latter result without the proof if necessary.

**3.3.** Prove that  $a(n) \rightarrow \infty$  as  $n \rightarrow \infty$ .

**3.4.** (i) Denote by  $\aleph(n)$  the maximal possible non-efficiency of the figure having area  $n$  and diameter  $\leq 2n$ . Prove that  $\aleph(n) \leq c \ln n$  for some constant  $c$

- (ii) Prove the similar result for the figures of diameter  $\leq kn$  ( $k > 1$  is an arbitrary constant).  
(iii) It follows from the next problem that there exists even a common constant  $c$  for all values of  $k$ . Is it possible to achieve the better result for a fixed  $k$ ? (The authors do not know the answer!)

**3.5.** (i) Prove that  $a(n)/n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . *The authors do not know the solution which is simpler than the one for the following:*

(ii) Prove that  $a(n) \leq c \ln n$  for some constant  $c$ .

**3.6.** Find as best as possible lower bound for  $a(n)$ . It seems to the authors that they know the estimate of the form  $a(n) \geq c \ln n / \ln \ln n$  for some constant  $c$ .

## 4 Open questions

*Will my head succeed in running away  
from the wave's enormous throat?  
And if it does, what will be the price?  
But if it doesn't, why so?*

*M. Scherbakov,  
transl. by L. Schulz*

Here, the questions for the further investigation are presented.

**4.1.** Is it true that the sequence  $a(n)$  is non-decreasing?

**4.2.** Given a figure  $\mathcal{F}$ , let  $b(\mathcal{F})$  be the maximal possible density of the family of non-intersecting translates of this figure. Try to find some joint estimates for  $a(\mathcal{F})$  and  $b(\mathcal{F})$ . For instance, it is interesting whether it is true that  $a(\mathcal{F})b(\mathcal{F}) \leq 1$  for every figure  $\mathcal{F}$ .

The next question may help to find some upper bounds for  $\nu(\mathcal{F})$ .

**4.3.** For any  $n$ , find (or estimate) the maximal  $k = k(n)$  such that it is possible to cut a tile with area  $k$  from any figure with area  $n$ . (A figure is a *tile* if there exists a tiling by tyhe translates of this figure.)

**4.4.** Try to estimate the *maximal* (instead of an average one!) number of layers in an optimal (by this parameter) covering by the figure given.

# Coverings by cell figures. Solutions.

## 2 Introductory problems

**2.1.** Suppose that our figure consists of cells with number 0 and  $n$ . Cover all cells of  $n\mathbb{Z}$  with translates  $\{2kn, (2k+1)n\}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

All the subsets  $n\mathbb{Z} + m$   $m \in [1; n-1]$  can be covered by the same way. Since each cell is covered exactly once, the non-efficiency of this covering is 1.

**2.2.** (i) Consider an arbitrary covering and an arbitrary translate  $F_1$  in it, we can assume that its cells are 0,1,3. The cell with number 2 is covered by some translate  $F_2$ , obviously,  $F_1$  and  $F_2$  must overlap. So, each translate overlaps with some other one in the covering.

If a cell is covered  $k$  times, we say that the *significance* of this cell is  $1/k$ . Next, define the *significance* of a translate in a covering as the sum of the significances of all its cells.

So, the significance of any translate does not exceed  $\frac{5}{2}$  (since the significance of at least one of its cells does not exceed  $1/2$ ). On the other hand, the total sum of significances of the translates covering some segment of length  $n$  is at least  $n$ , since a cell with significance  $1/k$  is covered  $k$  times.

Thus, we need at least  $\frac{2}{5}n$  translates to cover a segment of length  $n$ , and the non-efficiency is at least  $\frac{6}{5}$ .

One can cover a segment of length 5 by two translates of our figure; tiling the line by these segments, one obtains the covering of non-efficiency  $\frac{6}{5}$ .

(ii) Since all the cells of our figure have even numbers, the coverings of the sets of even and odd numbers can be considered independently. On each of these sets our figure looks like  $\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare$ .

Consider an arbitrary covering. Each translate  $\mathcal{F}_1$  overlaps with the translate covering the middle cell of  $\mathcal{F}_1$ . So, introducing the significance as above, one can prove that non-efficiency is at least  $\frac{8}{7}$ .

One can easily cover a segment of length 7 by two translates; this allows one to construct the covering of non-efficiency  $\frac{8}{7}$ .

(iii) This figure consists of two translates of the previous one, so any covering with our figure can also be considered as the covering by that one. The non-efficiencies of these coverings coincide, hence our figure has the non-efficiency at least  $\frac{8}{7}$ .

On the other hand, the set  $T = 7\mathbb{Z} = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$  gives an example of the covering with non-efficiency  $\frac{8}{7}$ .

**2.3.** For an arbitrary  $\varepsilon > 0$ , consider a figure  $\mathcal{F}$  such that  $\nu(\mathcal{F}) \geq a_1(n) - \varepsilon$ . Take a figure  $\mathcal{F}'$  consisting of two disjoint translates of  $\mathcal{F}$  (e. g.  $\mathcal{F}' = \mathcal{F} + \{0, d+1\}$ , where  $d$  is the diameter of  $\mathcal{F}$ ).

Then any covering by  $\mathcal{F}'$  is a covering by  $\mathcal{F}$  as well; these coverings have equal non-efficiencies. So, the non-efficiency of any covering by  $\mathcal{F}'$  is at least  $a_1(n) - \varepsilon$ , hence  $\nu(\mathcal{F}') \geq a_1(n) - \varepsilon$ . Therefore  $a_1(2n) \geq a_1(n) - \varepsilon$ ; since  $\varepsilon$  can be arbitrarily small, we get  $a_1(2n) \geq a_1(n)$ .

**2.4.** (i) If we can tile a line with a figure, then its non-efficiency is obviously 1.

Suppose that the non-efficiency of a figure is 1. Then for any  $\varepsilon > 0$ , there exists a covering having non-efficiency less than  $1 + \varepsilon$ . If any segment of length  $N$  in this covering contains a cell which is covered twice, then the non-efficiency of this covering is at least  $1 + \frac{1}{N}$ . Therefore, if  $\varepsilon < \frac{1}{N}$ , then there exists a segment of length  $N$  which is covered only once.

Denote by  $d$  the diameter of the figure. Choose  $N > 2^d + d$  and  $\varepsilon < 1/N$ . We can assume that the segment  $[1, N]$  is covered exactly once.

Assume that we put the translates of our covering on the line one by one from the left to the right. Consider a step when all the translates whose leftmost cells have the numbers  $\leq n$  has been already placed. This “semicovering” is determined by the set  $T_n = T \cap (-\infty, n]$ . Consider the set  $Z_n = T_n + \mathcal{F}$  of all cells that have been already covered up to this moment. Clearly,  $(-\infty, n] \subseteq Z_n \subseteq (-\infty, n + d]$ . Hence, the situations is determined only by the pattern of covered cells in interval  $(n, n + d]$ .

Such a pattern will be referred to as a *tail*. Formally, a *tail* is a set  $H_n = \{d \mid n + d \in Z_n\} \subseteq (0, n]$ .

Consider the tails  $H_0, \dots, H_{2^d}$ . There can be only  $2^d$  different tails, hence two equal ones are found. Denote them by  $H_m$  and  $H_n$  ( $n < m$ ).

In this situation, we call the part  $T(n, m] = T \cap (n, m]$  of our covering a *cycle*, corresponding to the tail  $H_n$ .

Obviously, the union of translates  $Z(n, m] = T(n, m] + \mathcal{F}$ , determined by the set  $T(n, m]$  covers exactly the set  $(n, m] \setminus (H_n + n) \cap (H_m + m)$ . Also, the translates of this set are disjoint, since they belong to  $[1, N]$ . So, copying this cycle with the period  $m - n$ , one gets the tiling  $T' = T(n, m] + (n - m)\mathbb{Z}$ .

(ii) Consider a tree (i. e. a connected graph without cycles). Say that one of its vertices is a *root*. For each edge, introduce its orientation in the direction from the root. Such a construction will be referred to as the *oriented tree*.

**Lemma (König).** Suppose that in an oriented tree, the number of vertices is infinite, while each of them has a finite degree. Then there exists an infinite path from the root vertex.

The proof is left to the reader as an exercise.

Consider an arbitrary figure  $\mathcal{F}$  on the plane. The set of translates intersecting some square with the center in the origin is called a *sprout* (of a tiling), if each cell of the square is covered exactly once. The side length of this square is the *size* of the sprout.

Obviously, if there exists a sprout of size  $N$ , then there exist sprouts of all smaller sizes.

Suppose that the non-efficiency of the figure is 1. Then there exists a covering by this figure of non-efficiency less than  $1 + \frac{1}{N^2}$ . This covering contains a  $N \times N$  square which is covered exactly once. Moving this square to the origin, one obtains a sprout of size  $N$ . Hence, there exist the sprouts of all sizes. Hence, there are infinitely many sprouts. We say that the empty set is a sprout of size 0.

Consider the following graph. Its vertices are all the sprouts, and the sprout of size  $n$  is connected with the sprout of size  $n + 2$  if the latter can be obtained from the former by adding some translates. Obviously, this graph is an oriented tree. One can easily prove that each vertex has a finite degree. Hence, by the König's lemma, there exists an infinite path.

Consider a union of all sprouts of this path: take all the translates in a sprout of size 2, add to them all the translates of the next sprout, and so on. Each cell belongs to all but finite number of squares, hence it will be covered exactly once. Thus, we have constructed a tiling.

**2.5.** (i) See problem 2.2(i)

(ii) Let figure consist of cells 0,  $a$  and  $a + b$  (i. e. the distances between the cells are  $a$  and  $b$ ). If  $2a + b \equiv 1 \pmod{3}$ , then  $2b + a \equiv 2 \pmod{3}$ . In this case, we can interchange the variables. Hence, we can assume that  $2a + b \not\equiv 1 \pmod{3}$ .

If  $\gcd(a, b) = d > 1$ , then we will cover only the cells with the numbers divisible by  $d$ . All other residues can be covered in the same way. Hence, we can assume that  $\gcd(a, b) = 1$ .

Put translates on the line with the step  $2a + b$  (that is, consider the set  $T_1 = (2a + b)\mathbb{Z} = \{\dots, -(4a + 2b), -(2a + b), 0, 2a + b, 4a + 2b, \dots\}$ ). Then the covered set of cells  $Z_1 = T_1 + \mathcal{F}$  consists of triples  $\dots, \{0, a, 2a\} - (2a + b), \{0, a, 2a\}, \{0, a, 2a\} + (2a + b), \dots$ . We will cover the line by some copies of  $Z_1$ .

Consider all cells of the set  $Z_1$  which have one fixed residue modulo  $a$ . Since  $a$  and  $2a + b$  are coprime, such cells exist for each residue; one can easily prove that they form some triples on the distance  $a(2a + b)$  one from another. Shift  $Z_1$  by  $3a, 6a, \dots$ , until they cover all the cells of this residue (and hence of all residues).

If  $2a+b \equiv 3 \pmod{3}$ , then we get a tiling. In other case,  $2a+b \equiv 2 \pmod{3}$ , and in the last translation, each triple intersects an original triple by one cell. Hence, in the cells of our residue, on each period of length  $2a+b$  there is exactly one cell which is covered twice. Hence, the non-efficiency is  $\nu = \frac{2a+b+1}{2a+b} = 1 + \frac{1}{2a+b}$ . Since  $2a+b \equiv 2 \pmod{3}$ , we have  $2a+b \geq 5$  and  $\nu \leq \frac{6}{5}$ , QED.

**2.6. (i)** Delete an arbitrary cell from our figure, and then cover the line by the remaining three-cell figure with the non-efficiency  $\leq \frac{6}{5}$ . Adding the thrown cell, we will obtain the covering of non-efficiency not greater than  $\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$ .

**(ii)** The estimate can be sharp only if every 3 cells of our figure form the figure of non-efficiency  $\frac{6}{5}$  (prove it!). Looking at the solution of 2.5(ii), we get that in each such figure, the distances between its cells have the form  $a = da'$ ,  $b = db'$  with  $2a' + b' = 5$  (or vice versa). This equation has two positive solutions  $(a', b') = (2, 1)$  and  $(a', b') = (1, 3)$ . There is only one figure (with respect to stretching) with all subfigures having this form —  $\blacksquare\blacksquare\blacksquare$ . From 2.2(ii) we see that its non-efficiency is  $\frac{8}{7} < \frac{3}{2}$ . Hence, the estimate is not sharp.

**(iii)** Unfortunately, the statement of this problem is wrong. There is no such figure.

One can show this by the same way as in previous problem. If a figure has the non-efficiency  $\geq \frac{3}{2}$ , then the non-efficiency of each subfigure should be at least  $\frac{3}{8}$ . In the same notation, it is possible only for  $2a' + b' = 5$  or  $2a' + b' = 8$ . There are two types of such figure — one mentioned above, and  $\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare$ . One can cover the segment of length 7 by two translates of the latter figure; hence its non-efficiency is not greater than  $\frac{8}{7} < \frac{3}{2}$ .

### 3 Main results

**3.1. (i)** Let a set  $T$  determine the covering by a figure  $\mathcal{F}$ . We can assume that  $0 = \min \mathcal{F}$  (i. e. the leftmost cell of  $\mathcal{F}$  has a number 0). Denote the diameter of  $\mathcal{F}$  by  $d$  (thus,  $\max \mathcal{F} = d$ ). We will use the notation introduced in 2.4.

Consider an arbitrary cycle between the identical tails  $H_n$  and  $H_m$  ( $n < m$ ). Naturally, the number  $n - m$  is called the *length* of this cycle. Spreading the copies of this cycle periodically with the period length  $n - m$ , we clearly get the set  $T' = T(n, m) + (n - m)\mathbb{Z}$  defining the covering. The non-efficiency of this covering is  $\frac{|T(n, m)|}{n - m} \cdot |\mathcal{F}|$ . Thus, it is natural to define the *non-efficiency* of our cycle by this formula.

If there are two cycles corresponding to the same tail, then we can join them together to obtain a new cycle. Obviously, its length is the sum of the length, while its non-efficiency lies (non-strictly) between the non-efficiencies of the original cycles.

In our covering, there exists a tail occurring infinitely many times on the positive ray, as well as the tail occurring infinitely many times on the negative ray. Then we can split the covering into three parts: the cycles on negative ray, the cycles on the positive ray, and a finite part in the middle. Suppose that all these cycles have non-efficiency  $\geq \beta$ . Then the average number of translates on each cycle is not less than  $\beta/n$ , therefore the non-efficiency of our covering is not less than  $\beta$ .

Recall that  $\nu(\mathcal{F}) = \alpha$ . So, for every  $\varepsilon > 0$ , there exists a covering of non-efficiency  $< \alpha + \varepsilon$ , and this covering contains a cycle of non-efficiency  $< \alpha + \varepsilon$ . Moreover, since there exists only finite number of possible tails, there exists a tail  $H$  such that for every  $\varepsilon > 0$  there exists a cycle corresponding to  $H$  with non-efficiency  $< \alpha + \varepsilon$ .

Now, it is easy to construct a covering with non-efficiency  $\alpha$ . Take a cycle corresponding to  $H$  with non-efficiency  $< \alpha + 1$ . Let us join it with cycles of non-efficiency  $< \alpha + \frac{1}{2}$ ; if we join sufficiently many such cycles, then the non-efficiency of the resulting cycle will be less than  $\alpha + \frac{1}{2}$  (we add cycles from both sides of the original one). Analogously, joining to it some cycles of non-efficiency  $< \alpha + \frac{1}{3}$ , we obtain a cycle with non-efficiency  $< \alpha + \frac{1}{3}$ , and so on. Finally, we will obtain the covering of non-efficiency  $< \alpha + \frac{1}{n}$  for all  $n$ ; then this non-efficiency will be exactly  $\alpha$ .

**(ii) Lemma.** Suppose that there exists a cycle of non-efficiency  $\phi$ . Then there also exists a cycle with length  $\leq 2^d$  and non-efficiency  $\leq \phi$ .

**Proof.** Consider an arbitrary covering, and an arbitrary cycle of length  $n > 2^d$  in it. we can assume that this cycle is  $T(0, n]$ . Clearly, all the tails  $H_i$  ( $0 < i \leq n$ ) depend only on this cycle, but not on the other elements of  $T$ . Among these tails, there are two identical ones, say  $H_p = H_q$ ,  $0 < p < q \leq n$ .

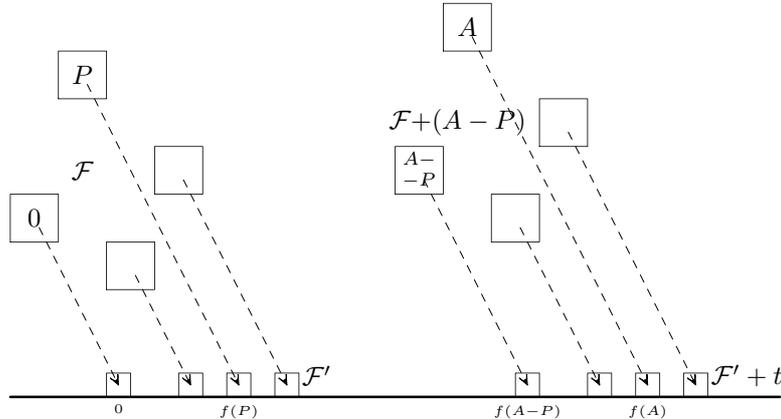
Join a piece  $T(0, p]$  together with  $T(q, n]$  shifted by  $q - p$  to the left (that is, we consider the set  $T(0, p] \cup (T(q, n] - (q - p))$ ); the joint piece is a cycle of length  $n - (q - p)$ . Denote the non-efficiencies of this cycle and of the cycle  $T(p, q]$  by  $\beta$  and  $\gamma$ , respectively. Then the non-efficiency of the original cycle  $T(0, n]$  is  $\frac{(q - p)\gamma + (n - (q - p))\beta}{n} \geq \min\{\beta, \gamma\}$ , and thus one of the numbers  $\beta, \gamma$  is not greater than  $\phi$ . Therefore, we get the cycle of the smaller length and of the non-efficiency not exceeding  $\phi$ . Repeating this procedure, we finally get the cycle of length  $\leq 2^d$ , as required.  $\square$

It is easy now to finish the solution. Consider all possible cycles of the length  $\leq 2^d$ ; there is only finite number of them. Let  $\nu$  be the smallest non-efficiency of such cycle. Take an arbitrary  $\varepsilon > 0$ . From the aforementioned, we get that there is a cycle of non-efficiency  $< \alpha + \varepsilon$ . Applying the Lemma, we find also the cycle of not greater non-efficiency, while its length is not greater than  $2^d$ . Hence,  $\nu < \alpha + \varepsilon$  for every  $\varepsilon > 0$  and therefore  $\nu \leq \alpha$ . Since there exists a covering of non-efficiency  $\nu$ , we should have  $\nu \geq \alpha$ , so  $\nu = \alpha$ , and we have found the covering having non-efficiency  $\alpha$ .

**3.2. (i)** Each figure on the line can be considered also as a figure on the plane; hence,  $a_1(n) \leq a_2(n)$ . Thus, it is sufficient to prove that  $a_2(n) \leq a_1(n)$ .

Consider a figure  $\mathcal{F}$  on the plane (we assume that  $0 \in \mathcal{F}$ ). Let the coordinate vectors of its cells be  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . There exist coprime  $a$  and  $b$  such that the function  $f(x, y) = ax + by$  attains distinct values on all these vectors.

Consider a figure  $\mathcal{F}' = \{ax_i + by_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  on the line. Then there exists a covering  $T'$  by this figure with the non-efficiency  $\nu \leq a_1(n)$ . We claim that the set  $T = \{(x, y) \mid f(x, y) \in T'\}$  defines the covering by  $\mathcal{F}$ , and the density of  $T$  is the same as that of  $T'$ . From these facts, it follows that the non-efficiencies of these coverings are identical, hence  $\nu(\mathcal{F}) \leq a_1(n)$  and therefore  $a_2(n) \leq a_1(n)$ .



To prove the first statement, consider an arbitrary cell  $A$  on the plane. Its image  $f(A)$  belongs to some translate  $\mathcal{F}' + t$  with  $t \in T'$ . Then the cell  $f(A) - t$  belongs to  $\mathcal{F}'$ , therefore there exists a cell  $P \in \mathcal{F}$  such that  $f(P) = f(A) - t$ . Then consider the cell  $A - P$  (the subtraction is componentwise). Clearly,  $f(A - P) = f(A) - f(P) = t \in T'$ , hence  $A - P \in T$ , and the cell  $A$  belongs to the translate  $\mathcal{F} + (A - P)$ . We have proved that  $A \in \mathcal{F} + T$ , hence  $T$  defines the covering.

Recall that we can assume  $T'$  to be periodic. Let  $d$  be the length of the period. If this period contains  $q$  elements, then  $\rho(T') = q/d$ . Take a large square with the side length  $N$ . It is easy to show that the number of cells  $A$  such that  $f(A)$  has a fixed residue modulo  $d$  is approximately  $N^2/d$  (to be precise, this number lies between  $(N - d)^2/d$  and  $(N + d)^2/d$ ). Then the number of cells belonging to  $T$  in this square is approximately  $qN^2/d$  (more precisely, it is  $qN^2/d + O(N)$ ); this means that  $\rho(T) = q/d$ , as desired.

**(ii)** Completely analogous.

**3.3.** See problem 3.6.

**3.4. (i)** Denote the diameter and the area of the figure by  $d$  and  $n$ , respectively ( $2n \geq d$ ). We will construct a periodic covering with the period length  $d$ ; on each step, we will add one

translate to each period (i. e., in fact we will add a series of translates which can be obtained one from another by the translations on vectors divisible by  $d$ ).

We claim that by one step, we can reduce the number of the uncovered cells  $x$  on a period to at most half. Consider all  $d$  possible positions of the translate on a period. Each of the uncovered cells remains uncovered for exactly  $d - n$  positions. So, the average number of the cells remaining uncovered is  $x \frac{d-n}{d}$ , hence for one of them the number of these cells is at most  $x \frac{d-n}{d} \leq \frac{x}{2}$ .

Hence, we can reduce the number of the uncovered cells to at most half; hence, after not more than  $\lceil \log_2 d \rceil + 1$  there will be less than one uncovered cell on a period; hence, all the cells will be covered. Moreover, for  $d$  cells of a period, there are not more than  $\lceil \log_2 d \rceil + 1$  translates, and hence the non-efficiency is not more than  $\frac{n(\lceil \log_2 d \rceil + 1)}{d} \leq \log_2 d + 1 \leq \log_2 2n + 1 = \log_2 n + 2$ .

(ii) Analogously, we obtain the estimate  $\nu \leq \log_{k/(k-1)} kn + 1$ .

**3.5.** (ii) Again, denote the diameter and the area of the figure by  $d$  and  $n$ , respectively ( $2n \geq d$ ). Choose an integer  $t > n$  such that  $nt > d$ . We will construct a periodic covering with the period length  $nt$ ; as in the previous problem, on each step, we will add one translate to each period.

Suppose that on some step, there are  $s > (n-1)t$  uncovered cells on the period. We claim that we can add a translate which does not intersect any previous translate. Actually, consider all possible positions of a translate on the period. each of  $s$  uncovered cells is covered by  $n$  of these translates; hence, all  $nt$  translates cover  $sn > (n-1)nt$  uncovered cells; hence, one of these translates contains  $> n-1$  uncovered cells, as required.

So, while there are  $> (n-1)t$  uncovered cells, we can decrease their number by  $n$  on each step. Hence, after  $\left\lceil \frac{t}{n} \right\rceil$  steps we will get the situation with  $\leq (n-1)t$  uncovered cells on the period.

By analogous reasons, while there are  $> qt$  uncovered cells, there always exists a translate which covers at least  $q+1$  of them. Applying this, we achieve  $\leq (n-2)t$  uncovered cells after not more than  $\left\lceil \frac{t}{n-1} \right\rceil$  additional steps,  $\leq (n-3)t$  cells after not  $\left\lceil \frac{t}{n-2} \right\rceil$  steps and so on. Proceeding in this

way, we cover the whole period by not more than  $\left\lceil \frac{t}{n} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{n-1} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{1} \right\rceil$  translates. It

is known that  $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} = \ln n + O(1)$  (for instance, one can prove it using the integral  $\int_1^n \frac{dx}{x}$ ).

Hence,  $\left\lceil \frac{t}{n} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{n-1} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{1} \right\rceil = (\ln n + O(1))t$ , and we have covered the period of length  $nt$  by translates with the total area  $(\ln n + O(1))nt$ . Thus, the non-efficiency of this covering is  $\ln n + O(1)$ .

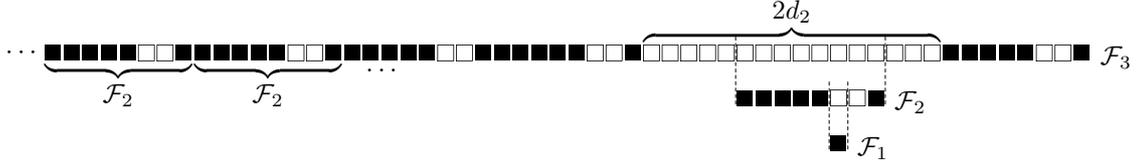
**3.6.** We present the series of figures  $\mathcal{F}_k$  having the area  $S_k = 2^{k-2}(k-1)!(k+1)!$  and diameter  $d_k = 2^{k-1}k!^2 = 2 \frac{k}{k+1} S_k < 2S_k$ , while  $\nu(\mathcal{F}_k) > \frac{k}{8}$ .

For  $k=1$ , let  $\mathcal{F}_1$  be a cell. Suppose that  $k > 1$ , and the figure  $\mathcal{F}_{k-1}$  of area  $S_{k-1}$  and diameter  $d_{k-1}$  is already constructed. We construct  $\mathcal{F}_k$  as follows. Put on the line in a row  $2k^2 - 3$  translates of  $\mathcal{F}_{k-1}$ , and put one more its translate on the distance of  $2d_{k-1}$  from them. Then, the constructed figure  $\mathcal{F}_k$  has an area  $2(k^2 - 1)S_{k-1} = S_k$  and diameter  $d_{k-1} \cdot 2k^2 = d_k$ .

Consider a tiling by a figure  $\mathcal{F}_k$ . Choose any interval  $I$  of length  $4d_k$ ; we claim that it contains at least  $k$  translates of our covering. Clearly, the translate containing the middle cell of  $I$  lies in  $I$ , and the distance between this translate and the border of  $I$  is at least  $d_{k-1}$ . We can assume that this translate is  $\mathcal{F}_k$  itself.

Consider a ‘‘hole’’ in  $\mathcal{F}_k$  of size  $2d_{k-1}$ . Its middle cell is covered by some translate  $\mathcal{F}_k + t_k$  in our covering. It is easy to show that  $\mathcal{F}_k + t_k$  contains a translate of  $\mathcal{F}_{k-1}$  lying in our ‘‘hole’’. Since  $\mathcal{F}_k$  consists of some translates of  $\mathcal{F}_{k-1}$ , we can consider our covering as the covering by the translates of  $\mathcal{F}_{k-1}$ . Then, inside a ‘‘hole’’ in the chosen translate of  $\mathcal{F}_{k-1}$ , one can find a translate of  $\mathcal{F}_{k-2}$ , and so on. Obviously, all the translates chosen are contained in  $k$  distinct translates of  $\mathcal{F}_k$  (since each translate lies inside a hole in the pervious one).

Thus, the “hole” in our  $\mathcal{F}_k$  intersects with  $k-1$  other translates in our covering. All these translates are contained in  $I$ .



Hence, each interval with length  $4d_k$  contains at least  $k$  figures, hence the non-efficiency of  $\mathcal{F}_k$  is at least  $\frac{kS_k}{4d_k} > \frac{k}{8}$ .

Hence, we have constructed the figure  $\mathcal{F}_k$  of area  $S_k = 2^{k-2}(k-1)!(k+1)!$  and non-efficiency  $\geq \nu(\mathcal{F}_k) \geq \frac{k}{8}$ . Now, for every  $n > e^{100}$  choose  $k = \left\lfloor \frac{\ln n}{3 \ln \ln n} \right\rfloor - 1$ . Let us estimate  $(k+1)!$ . First,  $(k+1)! \leq (k+1)^k = e^{k \ln(k+1)}$ . Furthermore,  $k \ln(k+1) \leq k \ln \ln n < \frac{1}{3} \ln n$ , hence  $(k+1)! < e^{(\ln n)/3} = \sqrt[3]{n}$ . Finally, we get  $S_k = 2^{k-2}(k-1)!(k+1)! \leq (k+1)!^3 \leq (\sqrt[3]{n})^3 = n$ , so the area of  $\mathcal{F}_k$  does not exceed  $n$ . From the other hand,  $\nu(\mathcal{F}_k) \geq \frac{k}{8} \geq \frac{\ln n}{48 \ln \ln n}$ .

**Note.** The estimates in the last paragraph are **not** too raw. Actually,  $S_k \geq (k+1)! \geq (k/2)^{k/2} \geq e^{k \ln k}$ , hence from  $k \ln k \geq \frac{\ln n}{6 \ln \ln n} \frac{\ln \ln n}{2} \geq \frac{\ln n}{12}$  it follows that  $S_k \geq \sqrt[12]{n}$ .



# НЕВЫПУКЛЫЕ ГРАФЫ НА СФЕРЕ И НА ПЛОСКОСТИ

ПАНИНА Г.Ю.

Задачу представляют К. Кохась, К. Куюмжиян и Г. Панина

Совсем недавно стало ясно, что иногда вместо привычных выпуклых объектов оказывается полезным рассматривать объекты, которые *максимально невыпуклы*. Например, вкладывать в плоскость планарные графы так, чтобы области разбиения меньше всего походили на выпуклые многоугольники.

При этом успешно решается ряд на первый взгляд разрозненных проблем (задачи Коннелли о плотницкой линейке, А. Д. Александрова о единственности выпуклых поверхностей, о построении алгоритма линейного вложения в плоскость данного планарного графа).

И остается много нерешенных задач разного уровня сложности. Например, задача №17 является очень сложной — любой прогресс в этом направлении был бы очень интересен.

Вот самая знаменитая задача.

**Задача о плотницкой линейке.** Ее сформулировал в 1970 году замечательный геометр, автор многих работ по теории жесткости Р. Коннелли.

*Плотницкая линейка* — это ломаная на плоскости с конечным числом звеньев и без самопересечений. Смотреть на нее нужно как на т. наз. *шарнирный механизм* — жесткие планки, скрепленные между собой шарнирами.

*Изотопией* плотницкой линейки называется непрерывное движение ее звеньев по плоскости, в процессе которого не появляется самопересечений и сохраняются длины звеньев (а углы между соседними звеньями могут меняться как угодно).

*Всякую ли плотницкую линейку можно превратить изотопией (в плоскости стола) в прямолинейную?* (см. рис. 1)

Хотя задача о плотницкой линейке внешне похожа на олимпиадную, у нее нет элементарного решения (недаром она стояла открытой 30 лет).

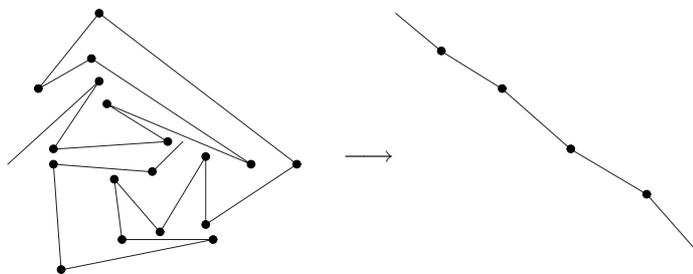


Рис. 1. Распрямление плотницкой линейки

(1) Задача о плотницкой линейке в трехмерном пространстве.

Всякую ли ломаную (без самопересечений) в трехмерном пространстве можно распрямить, избежав самопересечений в процессе распрямления?

(Вероятно, Вы быстро найдете решение, однако строгое доказательство может потребовать дополнительных знаний.)

**Многоугольники на плоскости и на сфере.** *Большим кругом* на сфере называется пересечение сферы с плоскостью, проходящей через ее центр.

Многоугольник — это замкнутая ломаная без самопересечений (ее звенья — отрезки на плоскости или отрезки больших кругов на сфере) и ограниченная часть плоскости (или сферы), ограниченная этой ломаной.

Многоугольник не обязан быть выпуклым. Некоторые его углы могут оказаться больше  $\pi$  — их мы называем невыпуклыми. Те углы, которые меньше  $\pi$ , называются выпуклыми.

(2) Существует ли на плоскости многоугольник, у которого ровно два выпуклых угла?

(3) (Простая, но очень важная задача. Пригодится в дальнейшем.) Приведите пример четырехугольника на сфере, у которого ровно 2 выпуклых угла.

**Невыпуклые графы.** Граф на плоскости или на сфере называется *невыпуклым*, если

- все ребра — отрезки прямых, если граф нарисован на плоскости, и отрезки больших кругов, если граф нарисован на сфере;
- ребра графа не пересекаются;
- (условие невыпуклости) у каждой вершины графа найдется примыкающий к ней угол, больший  $\pi$  (см. рис. 2);
- вершины графа лежат в общем положении.

Граф называется *трехвалентным*, если из каждой его вершины выходит ровно 3 ребра.

(4) Приведите пример трехвалентного невыпуклого графа на плоскости.

(5) Существует ли невыпуклый граф на сфере радиуса 1, у которого длины всех ребер меньше  $1/10$  и площадь каждой из областей разбиения меньше  $1/10$ ?

**Максимальные невыпуклые графы.** Граф на плоскости называется *максимальным невыпуклым*, если к нему невозможно добавить ребро (не добавляя новых вершин), сохранив при этом свойство невыпуклости.

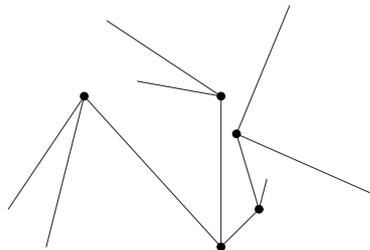


Рис. 2. Фрагмент невыпуклого графа

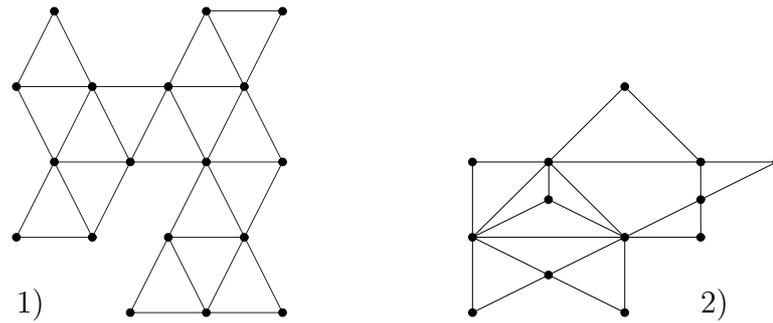


Рис. 3.

- (6) Приведите пример максимального невыпуклого графа с 12 вершинами на плоскости. Вершины не должны лежать в выпуклом положении (т. е. не должны являться вершинами некоторого выпуклого 12-угольника).
- (7) Докажите, что для максимального невыпуклого графа на плоскости выполнены два условия:
1. Имеется замкнутая ломаная, состоящая из ребер графа, ограничивающая некоторый выпуклый многоугольник  $M$ . Все ребра и вершины графа лежат в этом многоугольнике.
  2. Ребра графа разбивают  $M$  на многоугольники, у каждого из которых ровно 3 выпуклых угла.

**Формула Эйлера.** Для связного графа на плоскости или на сфере верна формула Эйлера:

$$V - E + F = 2,$$

где  $V$  — число вершин графа,  $E$  — число ребер,  $F$  — число областей разбиения (для графов на плоскости неограниченная область разбиения тоже учитывается).

- (8) Пусть  $\Gamma$  — максимальный невыпуклый граф на плоскости. Докажите, что

$$E = 2V - 3.$$

- (9) Приведите пример невыпуклого графа на сфере такого, что
- а)  $E = 2V - 2$
  - б)  $E = 2V + 2007$
- (10) а) Можно ли граф 1 (см. рис. 3) перерисовать на плоскости в невыпуклом виде? (“Перерисовать” означает построить граф с другими вершинами и, возможно, с другими длинами ребер, но сохранив соответствие вершин и ребер.)
- б) Можно ли граф 1 (см. рис. 3) перерисовать на плоскости в невыпуклом виде так, чтобы неограниченная область разбиения была бы дополнением треугольника?
- в) Можно ли граф 2 (см. рис. 3) перерисовать на плоскости в невыпуклом виде?

## ЗАДАЧИ, ПРЕДЛОЖЕННЫЕ ПОСЛЕ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ФИНИША

**Трехвалентные невыпуклые графы.** Невыпуклый трехвалентный граф допускает правильную раскраску, если каждое его ребро можно покрасить в красный или синий цвет так, что у каждой вершины раскраска выглядит одним из двух следующих способов, см. рис. 4 (два крайних ребра окрашены в один цвет, а ребро посередине — в другой).

- (11) Существует ли трехвалентный невыпуклый граф на плоскости, допускающий правильную раскраску?
- (12) Существует ли трехвалентный невыпуклый граф на сфере, допускающий правильную раскраску
- хоть какой-нибудь (без дополнительных ограничений)?
  - длины ребер которого меньше  $\pi$ ?
  - длины ребер которого меньше  $\pi/100$ ?
- (13) Пусть  $\Gamma$  — некоторый трехвалентный невыпуклый граф на сфере, допускающий правильную раскраску. Поставим в соответствие каждой области разбиения  $\alpha$  число  $n(\alpha)$ , обозначающее число перемен цвета ребер при обходе области  $\alpha$  по периметру (например, для области на рис. 6  $n(\alpha) = 4$ ). Будем считать, что равенство  $n(\alpha) = 0$  не выполнено ни для какой области разбиения.
- (Шутка) Может ли для какой-то области разбиения для графа  $\Gamma$  выполняться  $n(\alpha) = 2007$  ?
  - (Отнюдь не шутка) Может ли для какой-то области разбиения выполняться  $n(\alpha) = 2$  ?
- (14) Пусть  $\Gamma$  — трехвалентный невыпуклый граф на сфере, допускающий правильную раскраску. Пусть  $N(\Gamma)$  — число областей разбиения таких, что  $n(\alpha) = 2$ . Покажите, что  $N(\Gamma) \geq 4$ .

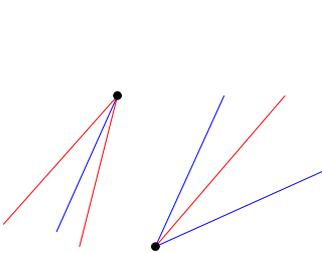


Рис. 4. Правильная раскраска

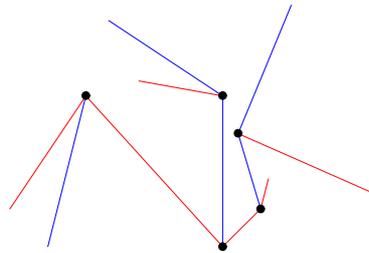


Рис. 5. Фрагмент графа с правильной раскраской

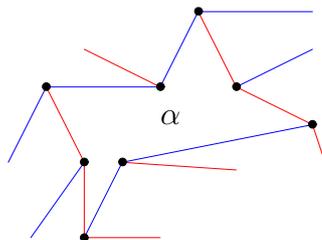


Рис. 6.

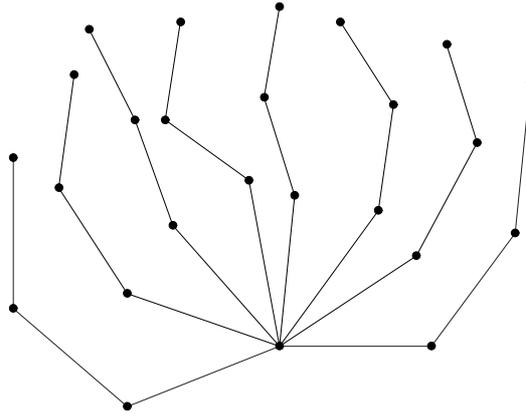


Рис. 7.

- (15) Приведите пример правильно раскрашенного трехвалентного невыпуклого графа на сфере, длины ребер которого меньше  $\pi$  и для которого  $N(\Gamma) = 4, 6, 8, 10 \dots$
- (16) Приведите пример правильно раскрашенного трехвалентного невыпуклого графа на сфере, длины ребер которого меньше  $\pi$ , и для которого  $N(\Gamma) = 5$ .
- (17) Имеется конечный набор точек на сфере. При каких условиях он является множеством вершин некоторого невыпуклого трехвалентного графа на сфере, допускающего правильную раскраску? (Найдите хотя бы какое-нибудь нетривиальное необходимое или достаточное условие.)

**Неизотопные шарнирные механизмы.** Предположим, что один и тот же граф нарисован на плоскости (или на сфере) двумя разными способами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , но так, что длины соответствующих ребер одинаковы. Это надо представлять себе так: взяли шарнирный механизм, соответствующий данному графу, и уложили его на плоскость (или на сферу) двумя разными способами.

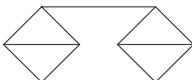
Будем говорить, что положение шарнирного механизма  $\Gamma_1$  *изотопно* положению  $\Gamma_2$ , если  $\Gamma_1$  можно перевести (не покидая плоскости или сферы) в положение  $\Gamma_2$ , избежав при этом самопересечений.

- (18) Приведите пример шарнирного механизма с двумя неизотопными положениями.
- (19) Суперкрасивый пример (E. Demain)  
Подобрав подходящие длины ребер, перерисуйте паука (см. рис. 7) на плоскости двумя неизотопными способами. При этом у паука все ноги должны быть одинаковыми (все части ног до колен должны иметь одинаковую длину, все части ног от колена до ступни должны иметь одинаковую длину, и все ступни тоже должны быть равны).
- (20) Найдите два неизотопных расположения на сфере четырех больших полу-кругов. (Иными словами, шарнирный механизм у нас такой: у него 8 вершин, разбитые на 4 пары, каждая пара соединена ребром длины  $\pi$ .)

# НЕВЫПУКЛЫЕ ГРАФЫ НА СФЕРЕ И НА ПЛОСКОСТИ РЕШЕНИЯ

ПАНИНА Г.Ю.

- (1) Задача о плотницкой линейке в трехмерном пространстве.  
Нет, не всякую. Если ломаная завязана узлом, а ее “концы” достаточно длинные, то нельзя (см. рис. 1).
- (2) Нет, не существует, так как всякий многоугольник на плоскости содержится в выпуклой оболочке своих выпуклых вершин.
- (3) А для сферы предыдущее рассуждение не проходит, так как для сферических многоугольников нет понятия “выпуклая оболочка”. Пример (см. рис. 2) можно построить так. Возьмем две противоположные точки на сфере и соединим двумя разными большими полукругами. Получится многоугольник с двумя вершинами и двумя сторонами. Такой многоугольник можно сделать сколь угодно узким (это пригодится в дальнейшем). Переломив нужным образом его стороны, получим четырехугольник с двумя выпуклыми углами. При этом исходные положения двух вершин меняются — многоугольник удлиняется.

- (4) Например  .

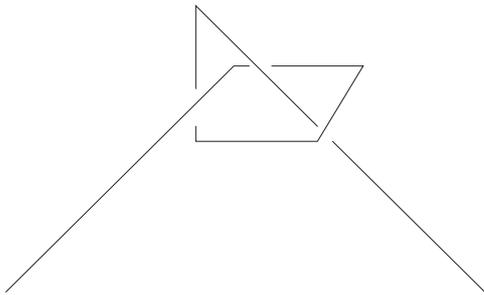


Рис. 1.

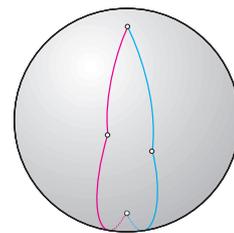


Рис. 2.

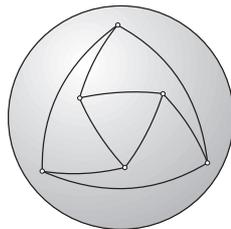


Рис. 3.

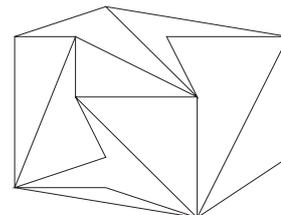


Рис. 4.

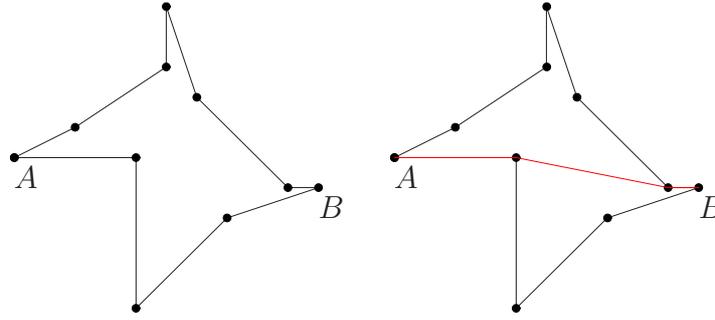


Рис. 5.

- (5) Разместим на сфере два непересекающихся экземпляра графа с рис. 3. Изменим полученный граф, добавив к нему две новые вершины и одно новое ребро, сохранив при этом свойство невыпуклости (см. рис. 9).

Применив эту процедуру много раз, можно измельчить исходное разбиение.

- (6) Чтобы построить требуемый рисунок, поместим произвольным образом на плоскость 12 точек (не в выпуклом положении) и будем добавлять ребра, сохраняя свойство невыпуклости. Рано или поздно новое ребро будет добавлено невозможно, что означает, что мы получили максимальный граф. Например, так был получен граф на рис. 4.

- (7) Докажем свойство 1.

Предположим противное. Рассмотрим выпуклую оболочку  $C$  множества всех вершин графа и ее сторону, не являющуюся ребром графа. Ее можно добавить к исходному графу в качестве нового ребра, не создав при этом самопересечений и не нарушив невыпуклости. Получили противоречие максимальнойности.

Докажем свойство 2.

Пусть в некотором многоугольнике  $K$  больше трех выпуклых углов. Рассмотрим две несоседние выпуклые вершины  $K$  (т. е. такие, которые разделены другими выпуклыми вершинами на границе  $K$ ). Обозначим их через  $A$  и  $B$ . Рассмотрим кратчайший путь, лежащий внутри многоугольника  $K$ , соединяющий вершины  $A$  и  $B$ . Этот путь — некоторая ломаная, обязательно содержащая отрезок, не лежащий на границе  $K$  (см. рис. 5). Его можно добавить к исходному графу в качестве нового ребра, не создав при этом самопересечений и не нарушив невыпуклости.

Противоречие максимальнойности.

- (8) Воспользуемся предыдущей задачей.

Пусть в нашем графе  $V$  вершин и  $E$  ребер. Тогда (по формуле Эйлера) число областей разбиения  $F$  равно  $2 - V + E$ . Подсчитаем общее число выпуклых углов  $C$  для всех областей двумя способами.

С одной стороны, каждая ограниченная область дает ровно 3 выпуклых угла. Следовательно,  $C = 3(F - 1) = 3(1 - V + E)$ .

С другой стороны, при каждой вершине есть только один невыпуклый угол, а число всех углов равно  $2E$ . Следовательно,  $C = 2E - V$ .

Комбинируя эти два равенства, получаем требуемое.

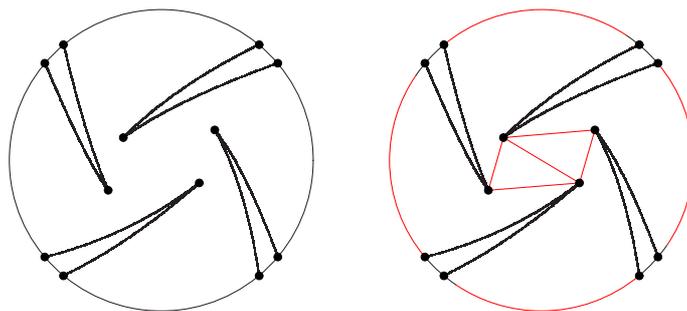


Рис. 6.

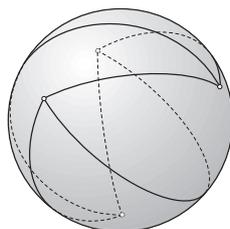


Рис. 7.

- (9) Аналогичное утверждение для максимальных невыпуклых графов на сфере неверно, так как на сфере существуют сферические многоугольники с ровно двумя выпуклыми углами (см. задачу 2). Поэтому вычисление из предыдущей задачи меняется, и значением выражения  $E - 2V$  можно управлять, варьируя число многоугольников с ровно двумя выпуклыми углами.

На практике это выглядит так. Расположим на сфере  $D$  четырехугольников из задачи 6 (на рис. 6 показано расположение четырех четырехугольников). Добавим ребра так, чтобы полученный граф оказался максимальным невыпуклым. Подсчет вершин и ребер дает  $E = 2V + D - 6$ .

- (10) (а) Можно. Надо взять выпуклый 18-угольник и провести в нем соответствующие диагонали.

(б) Можно. Этот граф получается из полного графа с тремя вершинами (говоря по-простому, из треугольника) последовательным применением процедуры следующего типа: к графу добавляется новая вершина и соединяется ребрами с некоторыми двумя старыми вершинами. Эту операцию можно применять, сохраняя свойство невыпуклости. Надо начать с треугольника и добавлять каждый раз новую вершину внутрь него.

(в) Нельзя. Этот граф содержит в качестве подграфа полный граф с четырьмя вершинами (т. е. граф с четырьмя вершинами, каждые две из которых соединены ребром), а такой граф невозможно нарисовать на плоскости невыпуклым образом (см. задачу 8).

- (11) Нет. Это следует из рассуждений, аналогичных решению задачи 14.

- (12) Да.

а) См. рисунок 7.

б) На рис. 8 изображены верхняя и нижняя полусферы.

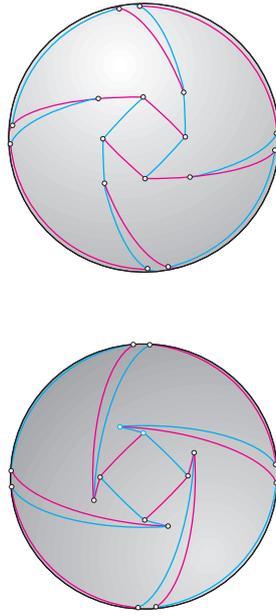


Рис. 8.

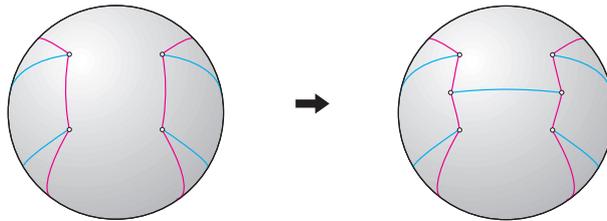


Рис. 9.

в) Опишем следующую процедуру “измельчения”. Если две точки, лежащие на ребрах красного цвета, можно соединить отрезком, избежав пересечений с графом, то можно чуть переломить эти ребра и добавить новое ребро синего цвета (см. рис. 9) Аналогичным образом можно вставлять красные ребра, соединяющие синие точки.

Применяя эту процедуру многократно, можно измельчить граф из предыдущего пункта. (Забавно, что граф на рис. 7 так измельчить не удастся).

(13) а) Нет, так как число  $n(\alpha)$  должно быть четным.

б) Заметим, что выпуклые вершины области — это в точности те вершины, в которых происходит перемена цвета. Поэтому на плоскости это невозможно, так как не существует плоских многоугольников с ровно двумя выпуклыми углами. А на сфере возможно. Например, графы на рис. 10 допускают правильную раскраску и дают по 8 многоугольников, у которых число перемен цвета равно 2. В левой части эти многоугольники — двуугольники. Приемом из задачи 6 их можно превратить в четырехугольники в правой части рисунка.

(14) Пусть в нашем графе  $V$  вершин и  $E$  ребер. Из трехвалентности графа следует, что  $E = 3V/2$ . Из формулы Эйлера следует, что число областей разбиения  $F = 2 - V + E = 2 + V/2$ .

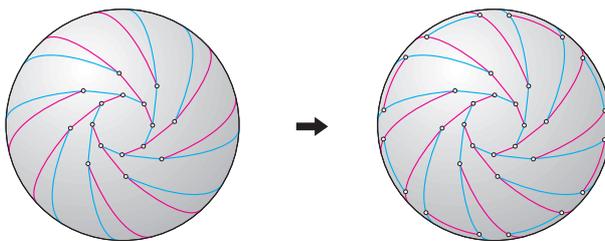


Рис. 10. Показана только верхняя полусфера; нижняя выглядит аналогично.

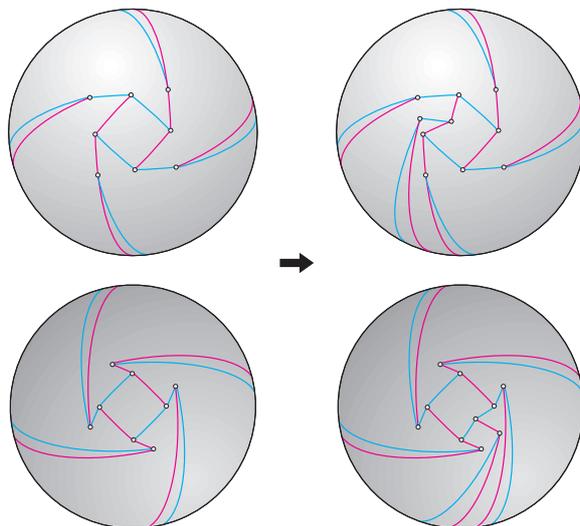


Рис. 11.

Вычислим общее число  $H$  перемен цвета по всем областям разбиения. Каждая область дает либо две перемены цвета, либо не меньше четырех. Следовательно,  $H \geq 2N(\Gamma) + 4(F - N(\Gamma)) = 4F - 2N$ . Следовательно,  $N \geq 2F - H/2$ .

С другой стороны, при каждой вершине во всех прилегающих к ней областях, вместе взятых, происходят ровно две перемены цвета. Это дает  $H = 2V$ .

Комбинируя это равенство и последнее неравенство, получаем  $N \geq 2F - H/2 = 4 + V - V = 4$ .

- (15) Решение напоминает решение задачи 9. Поместим на сфере  $N(\Gamma)$  штук четырехугольников с двумя выпуклыми углами и дополним до трехвалентного графа (см. рис. 10). Полученный граф допускает правильную раскраску (а при нечетном числе четырехугольников — нет, поэтому следующий пункт сложнее).
- (16) На рис. 11 изображены верхняя и нижняя полусферы.
- (17) \* Эта задача сложная и пока не решена. Любой прогресс в ее решении очень интересует лично автора серии задач (Панину Г. Ю.).



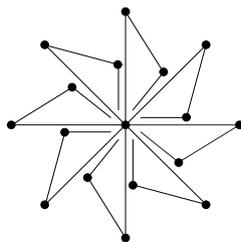


Рис. 12.

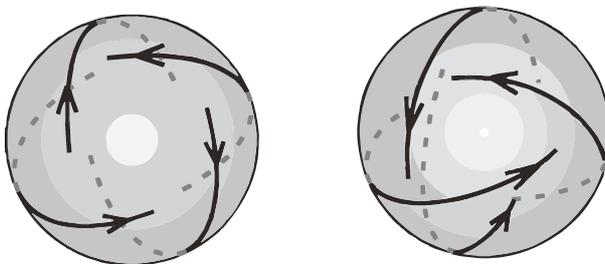


Рис. 13.

- (20) Для каждого из положений (см. рис. 13) построим граф с 4 вершинами по следующему правилу. Вершины графа соответствуют большим полуокругам. Две вершины (скажем, 1 и 2) соединены ребром тогда и только тогда, когда какой-нибудь из соответствующих полуокругов (скажем, полуокруг 1) можно продолжить так, что его продолжение вначале пересекает полуокруг 2 (а уже после него — все остальные). Осталось заметить, что
- два приведенных положения дают разные графы,
  - изотопные положения дают один и тот же граф.

P.S. Стоит посетить следующие сайты — там много и забавного, и серьезного.

<http://theory.csail.mit.edu/~edemaine/linkage/animations/>

<http://www.ams.org/featurecolumn/archive/links1.html>

<http://www.arxiv.org/abs/math/0612672>

Скоро выйдет интересная книга:

<http://www.cambridge.org/catalogue/catalogue.asp?isbn=0521857570>

# POINTED GRAPHS IN THE SPHERE AND IN THE PLANE

GAIANE PANINA

Presented by K. Kokhas, K. Kujumdjan, and G. Panina

As it was recently discovered, sometimes it makes sense to consider objects that are *as non-convex as possible*. For instance, to embed planar graphs in the plane such that the tiles do not look like convex polygons.

This helps to solve a series of problems which seemed to be independent: A. D. Alexandrov's problem on uniqueness of convex surfaces, carpenter's rule problem, some algorithmic problems on graphs embeddings...

Many problems are still to be solved. For instance, the problem N 17. Any progress in this direction would be of a great interest.

Here is the most popular problem.

**Carpenter's rule problem.** It was formulated in 1970 by the leading authority in the rigidity theory R. Connelly.

A *carpenter's rule* is a non-crossing broken line in the plane with a finite number of edges. It should be considered as a so-called *linkage or a bar-and-join mechanism*, i.e., a collection of rigid bars (line segments) that are hinged together at the endpoints (vertices) so that they can rotate with respect to one another.

An *isotopy* of a carpenter's rule is its continuous movement in the plane which avoids self-intersections and preserves the edges lengths.

*Is each carpenter's rule straightable in the plane (the self-intersections should be avoided during the straightening)?* (See Fig. 1)

Although the carpenter's rule problem looks like an olympiad one, it has no elementary solution (the problem has been open for 30 years).

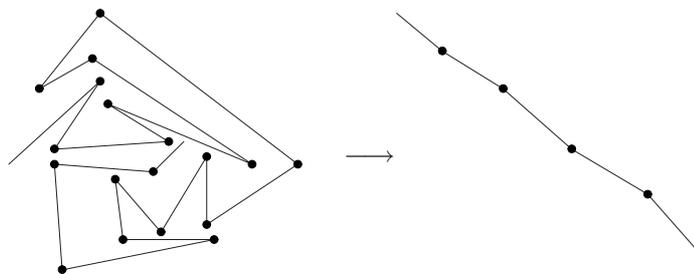


Figure 1. Straightening of a carpenter's rule

- (1) Carpenter's rule problem in the 3-dimensional space.  
 Is each non-crossing broken line straighttable in  $\mathbb{R}^3$ ?  
 (Mostly probably you will find a solution, but a detailed proof would need some advanced knowledge.)

**Polygons in the plane and in the sphere.** A *great semicircle* in the sphere is the intersection of the sphere with a plane passing through its center.

A polygon is a non-crossing closed broken line (its edges are line segments in the plane or the segments of great circles in the sphere) taken together with a bounded part of the plane (or the sphere) bounded by the broken line.

A polygon can be non-convex. Some of its angles can be greater than  $\pi$ . Such angles are called non-convex. The angles smaller than  $\pi$  are called convex.

- (2) Does there exist a polygon in the plane with exactly two convex angles?  
 (3) (A simple but a very important problem. To be used in the sequel.) Draw a 4-gon in the sphere with exactly two convex angles.

**Pointed graphs.** A graph in the plane or in the sphere is called *pointed* if

- all its edges are line segments (for a graph in the plane) and segments of great circles (for a graph in the sphere);
- it is non-crossing (its edges have no intersections);
- (pointed property) every vertex is incident to an angle greater than  $\pi$  ( Fig. 2.);
- its vertices are in generic position.

A graph is called *trivalent* if each its vertex has exactly three adjacent edges.

- (4) Draw a pointed trivalent graph in the plane.  
 (5) Does there exist a pointed graph in the sphere of radius 1 such that the area of each tile is smaller than  $1/10$  and all its edges are shorter than  $1/10$ ?

**Maximal pointed graphs.** A graph in the plane or in the sphere is called *maximal pointed* if it is impossible to add a new edge (without adding new vertices) preserving the pointed property.

- (6) Draw a maximal pointed graph with 12 vertices in the plane. The vertices must not lie in convex position (i.e. they shouldn't serve as vertices of some convex polygon).  
 (7) Prove the following two properties of a maximal pointed graph in the plane.
  1. There is a closed broken line consisting of some edges of the graph and bounding a convex polygon  $M$ . All vertices of the graph lie in  $M$ .
  2. Each of the bounded tiles has exactly 3 convex angles.

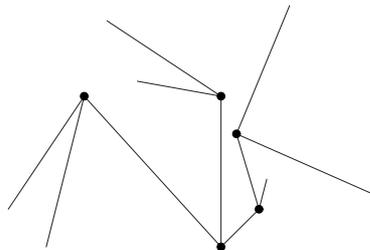


Figure 2. Part of a pointed graph

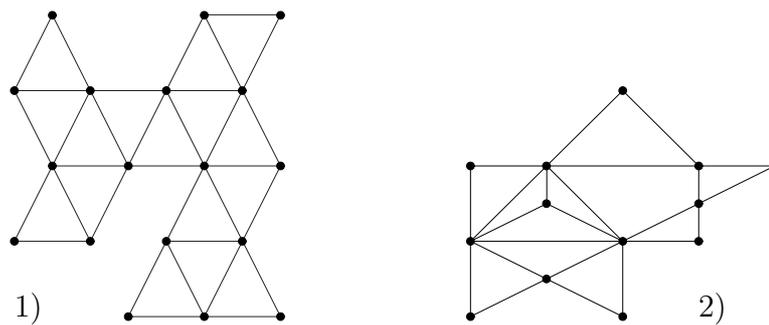


Figure 3.

**Euler formula.** For a connected graph in the plane or in the sphere, we have

$$V - E + F = 2.$$

Here  $V$  is the number of vertices,  $E$  is the number of edges,  $F$  is the number of tiles (for a graph in the plane, the unbounded tile is also taken into account).

(8) Let  $\Gamma$  be a maximal pointed graph in the plane. Prove that

$$E = 2V - 3.$$

(9) Draw an example of a pointed graph in the sphere such that

a)  $E = 2V - 2$ .

b)  $E = 2V + 2007$ .

(10) a) Can the graph 1 (Fig. 3) be redrawn in the plane as a pointed graph? ("To redraw" means to construct another graph with another vertices (and possibly with another edge lengths), but preserving the vertices-edges correspondence.

b) Can the graph 1 (Fig. 3) be redrawn in the plane as a pointed graph such that the unbounded tile is a complement of a triangle?

c) Can the graph 2 (Fig. 3) be redrawn in the plane as a pointed graph?

PROBLEMS PRESENTED AFTER SEMIFINAL

**Trivalent pointed graphs.** A pointed trivalent graph *admits a proper coloring* if each its edge can be colored either red or blue such that at each of its vertices the graph looks like as is depicted in Fig. 2 (two side edges are of the same color, whereas the middle edge is of the other color).

(11) Does there exist a properly colored trivalent pointed graph in the plane?

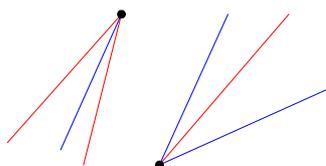


Figure 4. Proper coloring

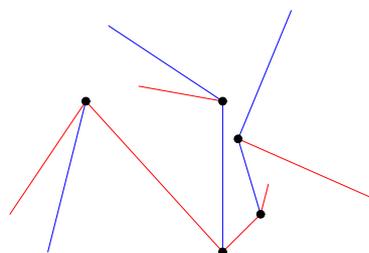


Figure 5. Part of a properly colored graph

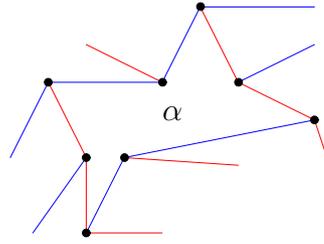


Figure 6.

- (12) Does there exist a trivalent properly colored pointed graph in the sphere?
- without additional restrictions?
  - whose edges are shorter than  $\pi$ ?
  - whose edges are shorter than  $\pi/100$ ?
- (13) Let  $\Gamma$  be a trivalent properly colored pointed graph in the sphere. For a tile  $\alpha$  denote by  $n(\alpha)$  the number of color changes when going along the boundary of  $\alpha$  (for instance, for the tile in Fig. 6, we have  $n(\alpha) = 4$ ).
- We consider such graphs that  $n(\alpha) = 0$  holds for no tile.
- (A joke) Does there exist a graph and a tile such that  $n(\alpha) = 2007$ ?
  - (Not a joke at all) Does there exist a graph and a tile such that  $n(\alpha) = 2$ ?
- (14) Let  $\Gamma$  be a trivalent pointed graph in the sphere with a proper coloring. Let  $N(\Gamma)$  be the number of tiles such that  $n(\alpha) = 2$ .
- Prove that  $N(\Gamma) \geq 4$ .
- (15) Draw a trivalent properly colored pointed graph in the sphere such that its edges are shorter than  $\pi$  and  $N(\Gamma) = 4, 6, 8, 10, \dots$
- (16) Draw a trivalent properly colored pointed graph in the sphere such that its edges are shorter than  $\pi$  and  $N(\Gamma) = 5$ .
- (17) Given a finite set of points in the sphere, under what condition it is the set of vertices of some trivalent pointed properly colored graph?
- (Try to find a non-trivial necessary or sufficient condition)

**Non-isotopic linkages.** Let a graph be represented by a linkage (a bar-and-join mechanism) in the plane or in the sphere in two different ways  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ .

We say that the position  $\Gamma_1$  is *isotopic* to  $\Gamma_2$  if  $\Gamma_1$  can be pulled to the position  $\Gamma_2$  without self-intersections. The edges lengths must not change during such a movement.

- (18) Draw a linkage with two non-isotopic positions.
- (19) A cool example (E. Demain)
- Redraw the graph (Fig. 7) in the plane in two non-isotopic ways. The spider must have equal legs. (I.e., the upper parts of the legs must be of the same length, the parts from knees to the feet must be of the same length as well, and the feet must be equal.)
- (20) Find two non-isotopic positions of four great semicircles in the sphere. (In other words, the spherical linkage in question consists of 4 disconnected bars of length  $\pi$ .)

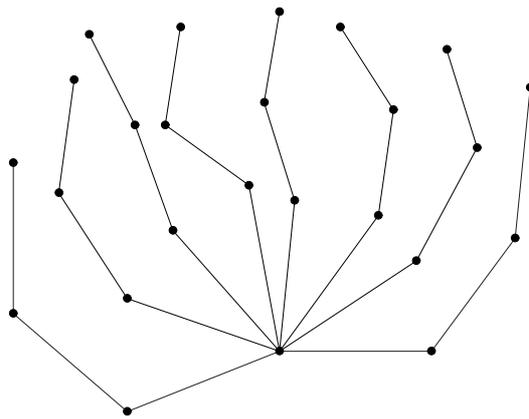
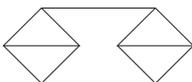


Figure 7.

# POINTED GRAPHS IN THE SPHERE AND IN THE PLANE SOLUTIONS

GAIANE PANINA

- (1) Not every. If a rule is knotted and its ends are sufficiently long, it is not straightable (Fig. 1).
- (2) No, it doesn't, because a polygon is contained in the convex hull of its vertices.
- (3) The above argument for the sphere is wrong since there is no convex hull for spherical polygons. An example (Fig. 2) can be constructed as follows. Take two antipodal points on the sphere and connect them by two different great semicircles. We get a polygon with two vertices and two edges. Such a polygon can be arbitrary narrow (this fact will be used later). Breaking somewhat its edges, we get a 4-gon with 2 convex angles. Note that the positions of the original two vertices change and the polygon gets longer.

(4) For instance, .

- (5) Place on the sphere two examples of the graph from Fig. 3. The result can be altered in the following way. Add two new vertices and a new edge as is depicted in Fig. 9. The pointed property is preserved.  
Repeat this trick sufficiently many times and get the required.
- (6) To construct such a graph, put 12 points in the plane (in a non-convex position). Start adding edges maintaining the pointed property. Sooner or later

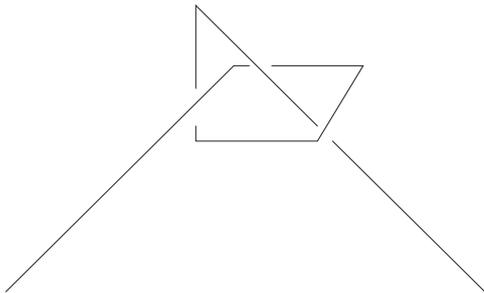


Figure 1.

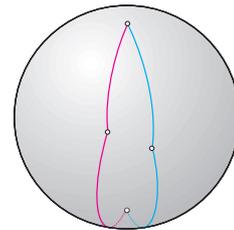


Figure 2.

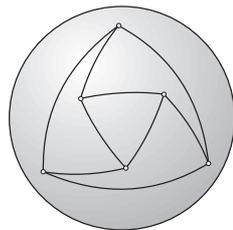


Figure 3.

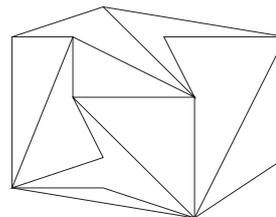


Figure 4.

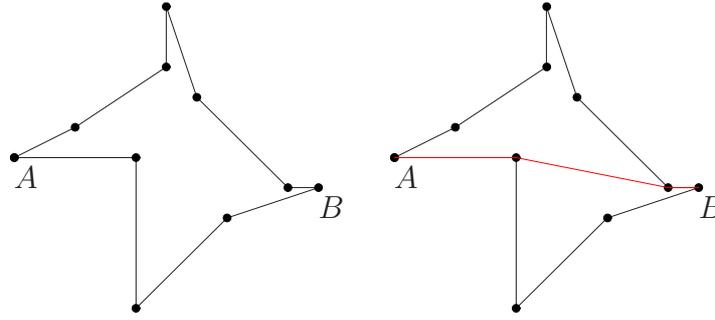


Figure 5.

this becomes impossible. This means that we get a maximal pointed graph. For instance, see Fig. 4.

(7) Prove 1.

Suppose the contrary. Consider the convex hull  $C$  of the set of all vertices of the graph and an edge of  $C$  which is not an edge of the graph. It can be added to the graph preserving the pointed property. A contradiction to maximality.

Prove 2.

Let some tile  $K$  have more than 3 convex angles. Take two convex vertices such that they are disjoint on the boundary of  $K$  by some other convex vertices. Denote them by  $A$  and  $B$ . Take the shortest path from  $A$  to  $B$  lying in the polygon  $K$ . It is a broken line containing some segment which doesn't lie on the boundary of  $K$  (Fig. 5). It can be added to the graph preserving the pointed property. A contradiction.

(8) Use the previous problem.

Let  $V$  be the number of vertices of the graph and  $E$  be the number of its edges. The Euler formula yields that the number of tiles  $F = 2 - V + E$ . Count the total number  $C$  of convex angles (for all the tiles) in two different ways.

On the one hand, each bounded tile gives exactly 3 convex angles. Therefore  $C = 3(F - 1) = 3(1 - V + E)$ .

On the other hand, each vertex gives one non-convex angle. The total number of angles (both convex and non-convex) equals  $2E$ . Therefore  $C = 2E - V$ .

Combining these equalities, we get the required.

(9) This statement for the sphere is wrong since there exist spherical polygons with just two convex angles (see Problem 2). The number of such exceptional polygons rules the value of the expression  $E - 2V$ .

It looks like this. Place on the sphere  $D$  disjoint 4-gons from the problem 2 (Fig. 6 depicts four 4-gons). Add edges to get a maximal pointed graph. The vertices-edges count shows that  $E = 2V + D - 6$ .

(10) (a) Yes. Take a convex 18-gon and draw necessary diagonals.

(b) Yes. A required graph can be obtained from a complete graph with 3 vertices (vividly speaking, from a triangle) by a consecutive applying of the following operation. Each time we add to the graph a new vertex and connect it with edges to two old vertices. This operation can be applied preserving the pointed property. One should start with a triangle and add new vertices on it.

(c) No. This graph contains (as a subgraph) a complete graph with 4 vertices (i.e., a graph with 4 vertices such that each pair is connected by an edge). It is impossible to draw such a graph in the plane (see Problem 8).

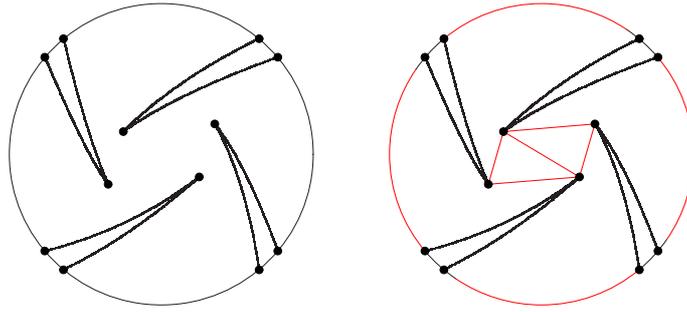


Figure 6.

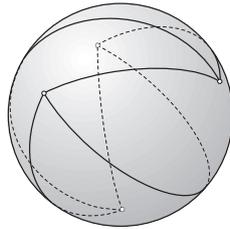


Figure 7.

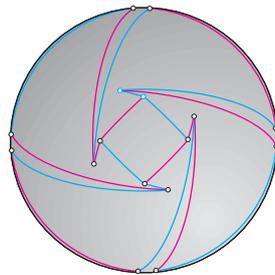
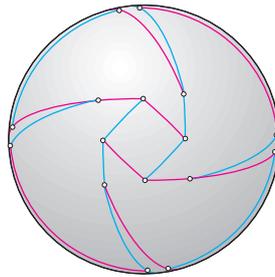


Figure 8.

(11) No. The reasons are similar to those of solution 14.

(12) Yes.

a) See Fig. 7.

b) Fig. 8 depicts the upper and lower hemispheres.

c) Describe the following refining operation. Suppose two points lying on red edges can be connected by a segment avoiding intersections with edges of the graph. Break somewhat the edges and add a new blue edge as is shown in Fig. 9. Analogously, red edges connecting blue points can be added.

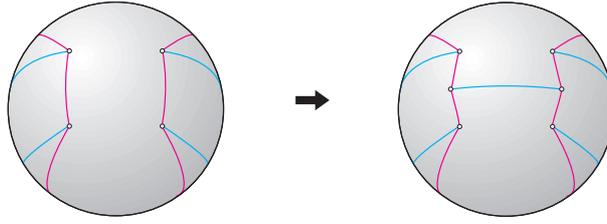


Figure 9.

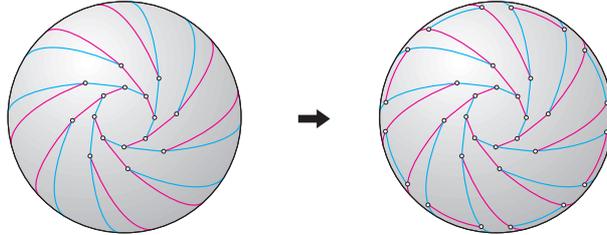


Figure 10. Depicted is the upper hemisphere. The lower one looks similarly.

Iterative repetition of this operation allows to refine the graph from the previous item. It is remarkable that the graph from Fig. 7 is not refinable in this way.

- (13) a) No. The number  $n(\alpha)$  should be even.  
 b) Note that the convex vertices of the tile are exactly those points where the color changes. Therefore, such polygons in the plane do not exist, for there are no polygons in the plane with exactly 2 convex angles. But this is possible for the sphere. For instance, the graphs in Fig. 10 are properly colored. Each of them gives 8 polygons with 2 color changes. For the graph on the left these polygons are di-gons. The trick from Problem 6 turns them to 4-gons (the graph on the right).
- (14) Let  $V$  be the number of vertices,  $E$  be the number of edges. Trivalence of the graph implies that  $E = 3V/2$ . Euler formula implies that  $F = 2 - V + E = 2 + V/2$ .  
 Count the total number of color changes  $H$  taken over all the tiles. Every tile gives either 2 changes or a number greater or equal than 4. Therefore,  $H \geq 2N(\Gamma) + 4(F - N(\Gamma)) = 4F - 2N$ . This yields  $N \geq 2F - H/2$ .  
 On the other hand, the three tiles adjacent to a vertex give exactly two color changes. This gives  $H = 2V$ .  
 Combining this equality and the latter inequality, we arrive at  $N \geq 2F - H/2 = 4 + V - V = 4$ .
- (15) The solution is similar to that of Problem 9. Place on the sphere  $N(\Gamma)$  disjoint 4-gons with two convex angles. Add necessary edges to get a trivalent graph (see Fig. 10). The graph obtained admits proper coloring. Note that for odd number of 4-gons the graph obtained has no proper coloring, so the next problem is more difficult.
- (16) Fig. 11 depicts the upper and the lower hemispheres.
- (17) \* This is an unsolved problem. Any progress is of a great interest for the author of the problems Gaiane Panina.

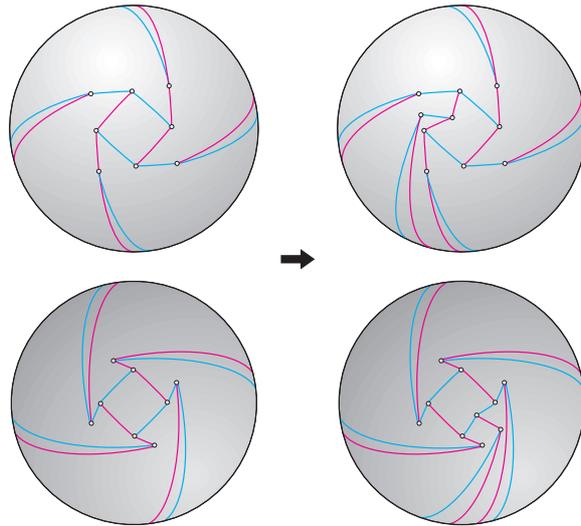


Figure 11.

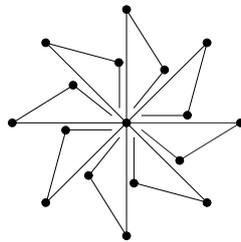


Figure 12.

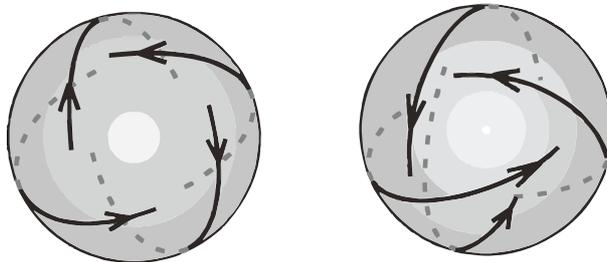


Figure 13.

- (18) Or, say,   
 (19) See Fig. 12  
 (20) See Fig. 13

For every position of semicircles in Fig. 13 construct a graph in the following way. The vertices of the graph correspond to the great semicircles. Two vertices (say, 1 and 2) are connected by an edge if and only if one of the corresponding semicircles (say, 1) can be prolonged such that the prolongation meets first the semicircle 2 (and only after that it meets all the other semicircles). It remains to observe that

- the two positions give different graphs,
- isotopic positions have the same graphs.

P.S. It is worthy to visit the following web sites both for fun and for work.

<http://theory.csail.mit.edu/~edemaine/linkage/animations/>

<http://www.ams.org/featurecolumn/archive/links1.html>

<http://www.arxiv.org/abs/math/0612672>

An interesting book to appear:

<http://www.cambridge.org/catalogue/catalogue.asp?isbn=0521857570>



# КВАДРАТИЧНЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ

А. Белов-Канель, П. Козлов и А. Скопенков

*Понял ты или нет,  
Отчего мы жили так странно две тысячи лет?  
Б. Гребенщиков, Вавилон.*

## Введение.

**Теорема Гаусса.** *Калькулятор (вычисляющий числа с абсолютной точностью) имеет кнопки*

$$1, +, -, \times, : \text{ и } \sqrt{\phantom{x}}$$

*(и неограниченную память). На этом калькуляторе можно вычислить число  $\cos \frac{2\pi}{n}$  тогда и только тогда, когда  $n = 2^\alpha p_1 \dots p_l$ , где  $p_1, \dots, p_l$  — различные простые числа вида  $2^{2^s} + 1$ .*

(Переформулировка теоремы Гаусса в терминах построений циркулем и линейкой правильных многоугольников приводится в отступлении и не используется в остальном тексте. История этой знаменитой теоремы приводится в [Gi]. *Невозможность* в этой теореме не была явно доказана Гауссом [Ga], однако второе доказательство невозможности в настоящей заметке можно принять за рассуждение Гаусса.)

В этой заметке предлагается набросок *элементарного доказательства приведенной теоремы*. Оно не использует терминов 'группа Галуа' (даже термина 'группа') и 'поле' (доказательство невозможности использует квадратичные расширения только *множества рациональных чисел*). Несмотря на отсутствие *терминов, идеи* приводимых доказательств — *группируй и властвуй* или *объединяй и властвуй* — являются отправной точкой для теории Галуа (см. философское отступление).

Приводимое доказательство известно в математическом фольклоре, однако авторам не удалось найти его в явном виде в литературе.

(Элементарное доказательство *возможности* для  $n = 17$  приводится в [Ch, Gi, Po, PS, Ko]. Для общего случая оно намечено в [Ga, Gi], где ясности мешает построение общей теории вместо доказательства конкретного результата.) Относительно простое доказательство *невозможности* в [Vi, гл. 5] использует понятие 'расширения поля'. Это доказательство, наряду с элементарным, изложено в настоящей заметке, при этом необходимые термины не вводятся немотивированно впрок, а естественно появляются в процессе размышления над проблемой. Элементарное изложение идеи другого неэлементарного доказательства невозможности см. в [Ki]. Первое приводимое доказательство невозможности в теореме Гаусса является алгебраическим выражением этой идеи.)

Приводимые доказательства возможности и невозможности независимы друг от друга, что отражено и в нумерации задач. В этих доказательствах используется определение построимости из второго отступления и эквивалентность теоремы Гаусса аналогичной теореме для *комплексного* калькулятора (задача D).

Доказательства представлены в виде циклов задач. Решение задач потребует от многих читателей усилий (впрочем, опытный математик, не знакомый с теорией Галуа, с легкостью восстановит решения по приведенным указаниям или даже без них). Однако эти усилия будут сполна оправданы тем, что вслед за великими математиками в процессе изучения интересной проблемы читатель познакомится с некоторыми основными идеями алгебры. Надеюсь, это поможет читателю совершить собственные настолько же полезные открытия (не обязательно в математике)!

Если условие задачи является утверждением, то в задаче требуется это утверждение доказать.

Эта заметка представлялась П. Дергачом и авторами в виде цикла задач на Летней Конференции Турнира Городов в августе 2007 (до промежуточного финиша предлагалось первое отступление и доказательство построимости, а после — доказательство непостроимости). Сокращенный английский перевод (выполненный П. Дергачом и А. Скопенковым) доступен на [www.mscme.ru/circles/oim/materials/constreng.pdf](http://www.mscme.ru/circles/oim/materials/constreng.pdf).

Благодарим Э. Б. Винберга, М. Н. Вялого, А. С. Голованова, П. А. Дергача, А. И. Ефимова, А. А. Казначеева, В. В. Прасолова и Г. Челнокова за полезные обсуждения.

### Философское отступление.

Изложение доказательства теоремы Гаусса на языке 'групп Галуа' делает его менее доступным. Более того, мне кажется, что именно с доказательств, подобных приведенным здесь (а не с терминов), полезно начинать изучение теории Галуа.

*'При изложении материала нужно ориентироваться на объекты, которые основательнее всего укореняются в человеческой памяти. Это — отнюдь не системы аксиом и не логические приемы в доказательстве теорем. Изящное решение красивой задачи, формулировка которой ясна и доступна, имеет больше шансов удержаться в памяти студента, нежели абстрактная теория. Скажем больше, именно по такому решению, при наличии некоторой математической культуры, студент впоследствии сможет восстановить теоретический материал. Обратное же, как показывает опыт, практически невозможно'* [Ко, предисловие].

Мне кажется, такой стиль изложения не только сделает материал более доступным, но позволит сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус и стиль с тем, чтобы разумно выбирать проблемы для исследования, а также ясно излагать собственные открытия, не скрывая ошибки (или известности полученного результата) за чрезмерным формализмом. К сожалению, такое (бессознательное) сокрытие ошибки часто происходит с молодыми математиками, воспитанные на чрезмерно формальных курсах (происходило и с автором этих строк; к счастью, почти все мои ошибки исправлялись *перед* публикациями).

Приводимые порой в качестве приложений теории Галуа доказательства теоремы Гаусса и другие результаты о разрешимости уравнений в радикалах неубедительны для мотивировки этой теории (как и приложение к решению уравнений степени не выше четырех неубедительно для мотивировки общей теории разрешимости уравнений произвольной степени в радикалах). Действительно, теорема Гаусса имеет элементарное доказательство, не использующее 'групп Галуа'. Теорема Руффини-Абеля о неразрешимости в радикалах *общего* алгебраического уравнения степени 5 и выше (как и достаточность условия Кронекера неразрешимости в радикалах *конкретного* уравнения простой степени) также имеет алгебраическое доказательство, не использующее 'групп Галуа' [Ко, Pt] (и *топологическое* доказательство [Al]). В терминах теории Галуа формулируется общий критерий разрешимости *конкретного* алгебраического уравнения в радикалах, но этот критерий не дает настоящего решения проблемы разрешимости, а лишь сводит ее к трудной задаче вычисления группы Галуа уравнения.

(Возможно, именно поэтому работы Галуа были забыты на 20 лет после их выхода — пока не появилось важных задач, при решении которых уже трудно обойтись без теории Галуа. Конечно, приведенная гипотеза нуждается в серьезной проверке.)

Однако теория Галуа выходит далеко за рамки проблемы разрешимости уравнений в радикалах. Ее популяризации послужит дальнейшая публикация интересных теорем, формулируемых без понятий теории Галуа, но при попытках доказать которые она естественно возникает. Примеры таких теорем мне сообщили А. Я. Белов, С. М. Львовский и Г. Р. Челноков (к сожалению, в доступной мне начальной учебной литературе по теории Галуа мне не удалось найти такие теоремы, формулировка которых не была бы скрыта под

толщей обозначений и терминов).

**Отступление: связь с построениями циркулем и линейкой.**

**А.** Используя отрезки длины  $a$ ,  $b$  и  $c$ , можно построить циркулем и линейкой отрезки длины  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $ab/c$ ,  $\sqrt{ab}$ .

Вещественное число называется *квадратичной иррациональностью*, или *построимым*, если его можно получить на нашем калькуляторе (т.е. получить из 1 при помощи сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня из положительного числа). Например, числа

$$1 + \sqrt{2}, \quad \sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2\sqrt{3}}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \quad \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \cos 3^\circ$$

построимы. Про последние два числа это не совсем очевидно.

**В.** Любое построимое число построимо циркулем и линейкой (далее слова 'циркулем и линейкой' опускаются).

Этот простой (вытекающий из А) результат был известен еще древним грекам. Он показывает, что из *выразимости* в теореме Гаусса вытекает *построимость* соответствующих  $n$ -угольников.

**С\*.** *Основная теорема теории геометрических построений.* Обратное тоже верно.

Этот несложный результат [Pr, Ko] (доказанный лишь в 19-м веке) показывает, что из *невыразимости* в теореме Гаусса вытекает *непостроимость* соответствующих  $n$ -угольников.

Для его доказательства рассмотрите все возможные случаи появления новых объектов (точек, прямых, окружностей). Покажите, что координаты всех построенных точек и коэффициенты уравнений всех проведенных прямых и окружностей являются квадратичными иррациональностями. См. детали в [Ko, Pr].

**Д.** Если комплексное число комплексно построимо (определение аналогично, только квадратные корни извлекаются из произвольных уже выраженных чисел и можно брать любое значение квадратного корня), то его вещественная и мнимая части (вещественно) построимы.

Указание. Если  $\sqrt{a + bi} = u + vi$ , то  $u, v$  выражаются через квадратные радикалы через  $a$  и  $b$ .

**Е.** Если правильный  $mn$ -угольник построим, то и правильный  $m$ -угольник построим.

**Ф.** Правильные 3-угольник и 5-угольник построимы.

**Г.** Правильный 120-угольник построим. Или, эквивалентно, угол  $3^\circ$  построим.

Указание. Если не получается, то см. далее.

**Н.** Если правильный  $n$ -угольник построим, то и правильный  $2n$ -угольник построим.

Указание. Получается делением угла пополам или применением формулы половинного угла.

**И.** Пусть правильные  $m$ - и  $n$ -угольники построимы, причем  $GCD(m, n) = 1$ . Тогда правильный  $mn$ -угольник построим.

Указание. Так как  $GCD(m, n) = 1$ , то существуют целые  $a, b$  такие, что  $am + bn = 1$ .

**Доказательство возможности в теореме Гаусса.**

Нетрудно доказать возможность в теореме Гаусса для  $n \leq 16$ .

*Доказательство возможности в теореме Гаусса для  $n = 5$ .* Видимо, приводимый способ сложнее придуманного Вами. Зато из него будет видно, что делать в общем случае.

Достаточно выразить число  $e = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ . Сразу это сделать трудно, поэтому сначала построим некоторые многочлены от  $e$ . Мы знаем, что  $e + e^2 + e^3 + e^4 = -1$ . Легко проверить, что  $(e + e^4)(e^2 + e^3) = e + e^2 + e^3 + e^4 = -1$ . Обозначим  $A_0 := e + e^4$  и  $A_1 := e^2 + e^3$ . Тогда по теореме Виета числа  $A_0$  и  $A_1$  являются корнями уравнения  $t^2 + t - 1 = 0$ . Поэтому можно выразить  $A_0$  (и  $A_1$ ). Поскольку  $e \cdot e^4 = 1$ , то по теореме Виета числа  $e$  и  $e^4$  являются корнями уравнения  $t^2 - A_0 t + 1 = 0$ . Поэтому можно выразить  $e$  (и  $e^4$ ).

1. Если число  $2^m + 1$  простое, то  $m$  — степень двойки.

*Идея доказательства построимости в теореме Гаусса.* Достаточно выразить число  $e = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  для простого  $n = 2^m + 1$  (тогда  $m$  обязано быть степенью двойки).

Сначала хорошо бы разбить сумму

$$e + e^2 + \dots + e^{n-1} = -1$$

на два слагаемых  $A_0$  и  $A_1$ , *произведение* которых построимо (иными словами, *сгруппировать* хитрым образом корни уравнения  $1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1} = 0$ ). Тогда  $A_0$  и  $A_1$  построимы по теореме Виета. Затем хорошо бы разбить сумму  $A_0$  на два слагаемых  $A_0 = A_{00} + A_{01}$ , произведение которых построимо, и аналогично разбить  $A_1 = A_{10} + A_{11}$ . И так далее, пока не построим  $A_{0\dots 0} = e$ .

Однако придумать нужные группировки корней уравнения  $1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1} = 0$  совершенно нетривиально и возможно не для всех  $n$ . Как это можно придумать, описано в [Ка]. Здесь я приведу лишь ответ, который очень прост.

*Теорема о первообразном корне.* Для любого простого  $p$  существует число  $g$ , для которого остатки от деления на  $p$  чисел  $g^1, g^2, g^3, \dots, g^{p-1} = 1$  различны.

Как строить нужные группировки, видно из задач 3а, 4а и 5а ниже.

2. *Доказательство теоремы о первообразном корне.* Пусть  $p$  простое и  $a$  не делится на  $p$ .

(а)  $p - 1$  делится на наименьшее  $k > 0$ , для которого  $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ .

Указание: используйте малую теорему Ферма.

(б) Для любых целых  $n$  и  $a$  сравнение  $x^n \equiv a \pmod{p}$  имеет не более  $n$  решений.

(в) Если  $p - 1$  делится на  $d$ , то сравнение  $x^d \equiv 1 \pmod{p}$  имеет ровно  $d$  решений.

(г) Докажите теорему о первообразном корне для  $p = 2^m + 1$ . (Только этот частный случай нужен для теоремы Гаусса.)

(е)\* Докажите теорему о первообразном корне для  $p = 2^m \cdot 3^n + 1$ .

(ф)\* Докажите теорему о первообразном корне для *произвольного* простого  $p$ .

(г)\* Верно ли, что число 3 является первообразным корнем по модулю любого простого числа вида  $p = 2^m + 1$ ?

Начиная с этого момента  $p = 2^m + 1 \geq 5$  — простое число и  $g$  — (любой) первообразный корень по модулю  $p$ .

3. (а) Положим

$$A_0 := e^{g^2} + e^{g^4} + e^{g^6} + \dots + e^{g^{2^m}} \quad \text{и} \quad A_1 := e^{g^1} + e^{g^3} + e^{g^5} + \dots + e^{g^{2^m-1}}.$$

Докажите, что  $A_0 A_1 = -\frac{p-1}{4}$ . (Следующие задачи являются подсказками.)

(б)  $g^k + g^l \equiv 0 \pmod{p}$  тогда и только тогда, когда  $k - l \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p-1}$ .

(в)  $A_0 A_1 = \sum_{s=1}^{2^m} e^s \alpha(s)$ , где  $\alpha(s)$  равно числу решений  $(k, l)$  (в вычетах по модулю  $p-1$ )

сравнения  $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv s \pmod{p}$ .

(д)  $\alpha(s) = \alpha(gs)$ .

(е)  $\alpha(s)$  не зависит от  $s = 1, \dots, 2^m$ .

4. (а) Положим

$$A_{00} := e^{g^4} + e^{g^8} + e^{g^{12}} + \dots + e^{g^{2^m}} \quad \text{и} \quad A_{01} := e^{g^2} + e^{g^6} + e^{g^{10}} + \dots + e^{g^{2^m-2}}.$$

Докажите, что  $A_{00}A_{01} = sA_0 + tA_1$  для некоторых целых чисел  $s$  и  $t$  ( $s + t = \frac{p-1}{8}$ ). (Следующая задача является подсказкой.)

(б) Сравнение  $g^{4k} + g^{4l+2} \equiv 1 \pmod{p}$  имеет столько же решений  $(k, l)$  (в вычетах по модулю  $p-1$ ), сколько сравнение  $g^{4k} + g^{4l+2} \equiv g^2 \pmod{p}$ .

(с) Положим

$$A_{10} := e^{g^1} + e^{g^5} + e^{g^9} + \dots + e^{g^{2^m-3}} \quad \text{и} \quad A_{11} := e^{g^3} + e^{g^7} + e^{g^{11}} + \dots + e^{g^{2^m-1}}.$$

Докажите, что  $A_{10}A_{11} = uA_0 + vA_1$  для некоторых целых чисел  $u$  и  $v$  ( $u + v = \frac{p-1}{8}$ ).

(д) Закончите доказательство возможности в теореме Гаусса.

5. Найдите явно выражение через квадратные радикалы числа

(а)  $A_0$  из задачи 3а.    (б)  $\cos \frac{2\pi}{17}$ .    (с)\*  $\cos \frac{2\pi}{257}$ .    (д)\*  $\cos \frac{2\pi}{65537}$ .

При помощи приведенного метода и компьютера эту задачу можно решить быстро, несмотря на следующую историю [Li]. "Один слишком навязчивый аспирант довел своего руководителя до того, что тот сказал ему: "Идите и разработайте построение правильного многоугольника с 65 537 сторонами". Аспирант удалился, чтобы вернуться через 20 лет с соответствующим построением (которое хранится в архивах в Геттингене)."

*Замечание.* Построимость можно доказывать по тому же плану без использования комплексных чисел. Указание к случаю правильного 17-угольника. Положим  $a_k = \cos(2\pi k/17)$ . Тогда  $a_k = a_{17-k}$ ,  $2a_k a_l = a_{k+l} + a_{k-l}$  и  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = -1/2$ . Сначала выразите  $a_1 + a_2 + a_4 + a_8$  и  $a_3 + a_5 + a_6 + a_7$ . Затем выразите  $a_1 + a_4$ ,  $a_2 + a_8$ ,  $a_3 + a_5$  и  $a_6 + a_7$ . Наконец, выразите  $a_1$ .

### Указания и решения к некоторым задачам о построимости.

*Указание к 1.* Если  $n$  нечётно, то  $2^{kn} + 1$  делится на  $2^k + 1$ .

*Указание к 2б.* Докажем более общее утверждение: *многочлен степени  $n$  над  $\mathbb{Z}_p$  не может иметь более  $n$  корней в  $\mathbb{Z}_p$ .* Здесь многочленом называется набор его коэффициентов, а не функция.

Пусть многочлен  $P(x)$  степени  $n$  имеет в  $\mathbb{Z}_p$  различные корни  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ . Представьте его в виде

$$P(x) = b_n(x - x_1) \dots (x - x_n) + b_{n-1}(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + \dots + b_1(x - x_1) + b_0$$

(*'интерполяция Ньютона'*). Последовательно подставляя в сравнение  $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$  вычеты  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ , получим  $b_0 \equiv b_1 \equiv \dots \equiv b_{n-1} \equiv b_n \equiv 0 \pmod{p}$ .

То же самое решение можно записать и так. Пусть  $P$  — многочлен. Тогда многочлен  $P - P(a)$  делится на  $x - a$ , т.е.  $P - P(a) = (x - a)Q$  для некоторого многочлена  $Q$  с  $\deg Q < \deg P$ . Поэтому если  $P(a) = 0$ , то  $P = (x - a)Q$  для некоторого многочлена  $Q$  степени меньше  $\deg P$ . Теперь требуемое в задаче утверждение доказывается индукцией по степени многочлена  $P$ .

*Первое указание к 2с.* Заметьте, что многочлен  $x^{p-1} - 1$  над  $\mathbb{Z}_p$  имеет ровно  $p-1$  корень и делится на  $x^d - 1$ . Докажите, что если многочлен степени  $a$  имеет ровно  $a$  корней и делится на многочлен степени  $b$ , то этот многочлен степени  $b$  имеет ровно  $b$  корней.

*Второе указание к 2с.* Если  $p = kd$ , то для любого  $a$  сравнение  $y^k \equiv a \pmod{p}$  имеет не более  $k$  решений.

*Указание к 2d.* Если первообразного корня нет, то по 2а сравнение  $x^{2^m-1} \equiv 1 \pmod{p}$  имеет  $p-1 = 2^m > 2^{m-1}$  решений.

*Указание к 2ef.* Аналогично 2d.

*Замечание к 2f.* Из существования первообразного корня легко вывести, что для  $p-1 = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$  первообразных корней ровно  $(p-1)(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_k}) = \varphi(p-1)$ .

*Указание к 3с.* Раскройте скобки и сгруппируйте равные слагаемые.

*Указание к 3d.* Если  $(a, b)$  — решение сравнения  $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv s \pmod{p}$ , то  $(b+1, a)$  — решение сравнения  $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv gs \pmod{p}$ . Если  $(a, b)$  — решение сравнения  $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv gs \pmod{p}$ , то  $(b, a-1)$  — решение сравнения  $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv s \pmod{p}$ .

*Указание к 5с.* (Написано с использованием текста И. Лукьянца и В. Соколова.) Положим

$$\overline{i_0 \dots i_x} := i_0 2^0 + \dots + i_x 2^x \quad \text{и} \quad A_{i_0 \dots i_x} := \sum_{s=0}^{2^m-s} e^{g^{\overline{i_0 \dots i_x} + s 2^{x+1}}}.$$

Тогда  $A_{i_0 \dots i_x 0} + A_{i_0 \dots i_x 1} = A_{i_0 \dots i_x}$ . При  $x < m$  имеем

$$A_{i_0 \dots i_x 0} A_{i_0 \dots i_x 1} = \sum_{s=0}^{2^m} \alpha(s) e^s = \sum_{(j_0 \dots j_x)} b_{j_0 \dots j_x} A_{j_0 \dots j_x} \quad \text{для некоторых} \quad b_{j_0 \dots j_x} \in \mathbb{Z}.$$

Здесь в первом равенстве  $\alpha(s)$  равно числу решений  $(k, l)$  (в вычетах по модулю  $p-1$ ) сравнения

$$g^{\overline{i_0 \dots i_x} + k 2^{x+1}} + g^{\overline{i_0 \dots i_x} + l 2^{x+1} + 2^x} \equiv s \pmod{p}.$$

По 3b  $\alpha(0) = 0$  при  $x < m$ . Аналогично 3с  $\alpha(s) = \alpha(sg^{2^x})$ . Отсюда вытекает второе равенство.

### Доказательство невозможности в теореме Гаусса.

Перед доказательствами теоремы Гаусса некоторые из его идеи демонстрируются по одной и на простейших примерах (задачи 1, 2с и 3). Эти примеры, впрочем, дают решение классических задач древности об удвоении куба и трисекции угла, ждавших своего решения 2000 лет. Первое доказательство невозможности в теореме Гаусса намечено в задачах 2ab и 4–7. Внешне другие (но по сути такие же) доказательства намечены в задачах 8–11 (используя 4, но не используя 6) и 13–16. Второе доказательство наиболее близко к идеям самого Гаусса. Задачи 17, 18 и 19 приводятся для общего развития. По поводу невыразимости через вещественные корни произвольной целой степени см. [Va].

**1.** Не существует рациональных чисел  $a, b, c, d$ , для которых  ${}^3\sqrt{2} =$

$$(a) a + \sqrt{b}; \quad (b) a - \sqrt{b}; \quad (c) \frac{1}{a + \sqrt{b}}; \quad (d) a + \sqrt{b} + \sqrt{c}; \quad (e) a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{bc};$$

$$(f) a + \sqrt{b + \sqrt{c}}; \quad (g) a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}.$$

**2.** (а) Оторвем у (комплексного аналога) калькулятора из теоремы Гаусса кнопку ‘:’, но разрешим использовать все рациональные числа. Тогда множество чисел, которые можно реализовать на калькуляторе, не изменится.

(б) Число  $A$  построимо тогда и только тогда, когда существуют такие положительные  $r \in \mathbb{Z}$  и  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ , что

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \dots \subset Q_{r-1} \subset Q_r \supset A, \quad \text{где} \quad a_k \in Q_k, \quad \sqrt{a_k} \notin Q_k,$$

$$Q_{k+1} = Q_k[\sqrt{a_k}] := \{\alpha + \beta\sqrt{a_k} \mid \alpha, \beta \in Q_k\} \quad \text{для любого } k = 1, \dots, r-1.$$

Такая последовательность называется *цепочкой квадратичных расширений* (это единый термин, термин 'квадратичное расширение' мы не используем).

(с)  $\sqrt[3]{2}$  нестроимо. (Значит, удвоение куба циркулем и линейкой невозможно.)

**3.** (а) Число  $\cos(2\pi/9)$  является корнем уравнения  $8x^3 - 6x + 1 = 0$ .

(б) Не существует рациональных чисел  $a$  и  $b$ , для которых  $\cos(2\pi/9) = a + \sqrt{b}$ .

(с) Число  $\cos(2\pi/9)$  не построимо (значит, трисекция угла  $\pi/3$  циркулем и линейкой невозможна и правильный 9-угольник не построим).

(д) Корни кубического уравнения с рациональными коэффициентами построимы тогда и только тогда, когда один из них рационален.

**4.** *Лемма о сопряжении.* В обозначениях задачи 2b положим  $a = a_k$  и определим отображение сопряжения  $\bar{\cdot} : Q_k[\sqrt{a}] \rightarrow Q_k[\sqrt{a}]$  формулой  $\overline{x + y\sqrt{a}} = x - y\sqrt{a}$ . Тогда

(а) Это определение корректно.

(б)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$  и  $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z = x + 0\sqrt{a} \in Q_{k-1}$ .

(с) Если  $z \in Q_k[\sqrt{a}]$  — корень многочлена  $P$  с рациональными коэффициентами, то  $P(\bar{z}) = 0$ .

(Сравните с леммой о комплексных корнях многочлена с вещественными коэффициентами.)

**5.** (а) Многочлен  $\Phi(x) := x^{12} + x^{11} + \dots + x + 1$  неприводим над  $\mathbb{Q}$ .

Указание: если не получается, то используйте лемму Гаусса и признак Эйзенштейна (см. ниже).

(б) Если  $e = \cos(2\pi/13) + i \sin(2\pi/13)$  построимо, то существует такая цепочка  $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_k \subset Q_{k+1}$  квадратичных расширений, что  $\Phi$  приводим над  $Q_{k+1}$  и неприводим над  $Q_k$ .

(с) Если  $\Phi$  делится на многочлен  $P$  с коэффициентами в  $Q_{k+1}$ , то  $\Phi$  делится на сопряженный (относительно  $Q_k$ ) многочлен  $\bar{P}$ .

(д) Если многочлен  $\bar{R}$  с коэффициентами из  $Q_{k+1}$  неприводим, то сопряженный (относительно  $Q_k$ ) многочлен  $R$  неприводим.

(е) Разложение многочлена  $\Phi(x)$  над  $Q_{k+1}$  на неприводимые над  $Q_{k+1}$  множители состоит из двух сопряженных (относительно  $Q_k$ ) множителей.

(ф) Для каждого из этих множителей существует цепочка, аналогичная (б), но, возможно, с другим  $k$ .

(г) Число  $\cos(2\pi/13)$  не построимо.

**6.** (а) *Лемма Гаусса.* Если многочлен с целыми коэффициентами неприводим над  $\mathbb{Z}$ , то он неприводим и над  $\mathbb{Q}$  [Pr].

(б) *Признак Эйзенштейна.* Пусть  $p$  простое. Если для многочлена с целыми коэффициентами старший коэффициент не делится на  $p$ , остальные делятся на  $p$ , а свободный член не делится на  $p^2$ , то этот многочлен неприводим над  $\mathbb{Z}$  [Pr].

**7.** (а) Минимальная степень многочлена, корнем которого является данное построимое число, является степенью двойки.

(б) Число  $\cos(2\pi/n)$  не построимо для  $n$  простого,  $n \neq 2^m + 1$ .

(с) Многочлен  $\Phi(x) = 1 + x^{17} + x^{34} + x^{51} + \dots + x^{272}$  неприводим над  $\mathbb{Q}$ .

Указание: используйте лемму Гаусса и признак Эйзенштейна.

(д) Число  $\cos(2\pi/289)$  не построимо.

(е) Докажите невозможность в теореме Гаусса.

### Другие доказательства невозможности в теореме Гаусса.

**8.** Число  $\cos(2\pi/7)$  не построимо (значит, правильный 7-угольник не построим).

**9.** Пусть  $n = 4k + 3$  простое. Обозначим  $f_s = e^s + e^{-s}$ . Назовем *рангом* квадратичной иррациональности наименьшую длину минимальной цепочки из 2b.

(а) Для любого  $k$  число  $f_1^k + f_2^k + \dots + f_{(p-1)/2}^k$  рационально.

(б) После раскрытия скобок и приведения подобных в выражении  $(x - f_1)(x - f_2) \dots (x - f_{(p-1)/2})$  получается многочлен с рациональными коэффициентами.

(с) Ранги чисел  $e, e^2, \dots, e^{p-1}$  одинаковы.

(d) Ранги чисел  $f_1, \dots, f_{(p-1)/2}$  одинаковы.

(е) Число  $\cos(2\pi/n)$  не построимо

**10.** Обозначим  $e = \cos(2\pi/13) + i \sin(2\pi/13)$ ,  $g = 2$  — первообразный корень по модулю 13,

$$A_0 = e^{g^0} + e^{g^3} + e^{g^6} + e^{g^9}, \quad A_1 = e^{g^1} + e^{g^4} + e^{g^7} + e^{g^{10}} \quad \text{и} \quad A_2 = e^{g^2} + e^{g^5} + e^{g^8} + e^{g^{11}}.$$

$$(a) \quad A_0^2 = 4 + A_1 + 2A_2, \quad A_1^2 = 4 + A_2 + 2A_0 \quad \text{и} \quad A_2^2 = 4 + A_0 + 2A_1.$$

(б) Числа  $A_0, A_1, A_2$  являются корнями неприводимого кубического уравнения с рациональными коэффициентами.

(с) Числа  $A_0, A_1, A_2$  имеют одинаковый ранг.

(d) Число  $\cos(2\pi/13)$  не построимо.

**11.** Число  $\cos(2\pi/p)$  не построимо для

(а)  $p = 3 \cdot 2^k + 1$  простого.

(б)  $p$  простого,  $p \neq 2^m + 1$ .

(с)  $p = 289$ .

(d) числа  $p$ , не являющегося произведением степени двойки и различных простых чисел вида  $2^m + 1$ .

Идея еще одного доказательства невозможности в теореме Гаусса выражается понятиями *поля* и *размерности поля*.

**13.** *Поле* (числовым) называется подмножество множества  $\mathbb{C}$  комплексных чисел, замкнутое относительно сложения, вычитания, умножения и деления.

(а) Следующие множества являются полями:  $\mathbb{Q}$ , множество построимых чисел, множество вещественных чисел,  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\alpha + \beta\sqrt{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ , каждое  $Q_k$  в цепочке квадратичных расширений и

$$\mathbb{Q}[e] := \{\alpha_0 + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \alpha_3 e^3 + \dots + \alpha_{12} e^{12} \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}\}, \quad \text{где} \quad e = \cos \frac{2\pi}{13} + i \sin \frac{2\pi}{13}.$$

(б) Любое поле содержит поле  $\mathbb{Q}$ .

(с) Любое поле, содержащее  $\sqrt{2}$ , содержит  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ .

(d) Любое поле, содержащее  $e$ , содержит  $\mathbb{Q}[e]$ .

**14.** *Размерностью*  $\dim F$  поля  $F$  называется наименьшее  $k$ , для которого существуют такие

$$b_2, b_3, \dots, b_k \in F, \quad \text{что} \quad F = \{\alpha_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \dots + \alpha_k b_k \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}\},$$

если такое  $k$  существует.

(а)  $\dim \mathbb{Q} = 1$ .

(б)  $\dim \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = 2$ .

(с) В цепочке квадратичных расширений  $\dim Q_k = 2 \dim Q_{k-1}$  при  $k \geq 1$ .

(d) В цепочке квадратичных расширений  $\dim Q_k = 2^{k-1}$ .

(е)\* Если  $G \subset F$  — поля, то  $\dim F$  делится на  $\dim G$ .

15. (a)  $\dim \mathbb{Q}[\cos \frac{2\pi}{13} + i \sin \frac{2\pi}{13}] \leq 12$ .

(b) Если  $\dim \mathbb{Q}[\cos \frac{2\pi}{13} + i \sin \frac{2\pi}{13}] < 12$ , то  $P(e) = 0$  для некоторого многочлена  $P$  с рациональными коэффициентами степени меньше 12.

(c) Выведите из предыдущих пунктов, что число  $\cos(2\pi/13)$  не построимо.

16. (a)  $\dim \mathbb{Q}[\cos \frac{2\pi}{289} + i \sin \frac{2\pi}{289}] = 272$ .

(b) Выведите из предыдущих пунктов, что число  $\cos(2\pi/289)$  не построимо.

(c) Докажите невозможность в теореме Гаусса.

17. (a) Многочлены  $P$  и  $Q$  с рациональными коэффициентами имеют общий корень,  $\deg P = 3$ ,  $\deg Q = 2$ . Докажите, что многочлен  $P$  имеет рациональный корень.

(b) То же с заменой рациональных коэффициентов и корня на коэффициенты и корень из произвольного поля.

(c) Если все корни неприводимого многочлена нечетной степени с рациональными коэффициентами построимы, то один из них рационален.

(d)\* Корни многочлена 4-ой степени с рациональными коэффициентами построимы тогда и только тогда, когда его *кубическая резольвента*  $[Ko, Pr]$  имеет рациональный корень.

18. Любое построимое число является алгебраическим, т.е. корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами. (Из этого и доказанной в 1883 г. Линдеманом трансцендентности числа  $\pi$ , влекущей трансцендентность числа  $\sqrt{\pi}$ , вытекает, что задача о квадратуре круга неразрешима циркулем и линейкой.)

19. (a) (Г. Челноков) Лешин калькулятор получается из комплексного гауссова добавлением кнопки извлечения кубического корня из комплексных чисел (которая дает все три значения корня). Гришин калькулятор получается из комплексного гауссова добавлением кнопки нахождения по комплексному числу  $a$  всех трех комплексных корней уравнения  $a = \frac{3x - 4x^3}{1 - 3x^2}$ . Будет ли множество 'Лешиных' чисел совпадать с множеством 'Гришиных'?

(b) (Г. Челноков) Неприводимый над  $\mathbb{Q}$  многочлен раскладывается над  $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$  ровно на четыре множителя. Докажите, что степень этого многочлена делится на 8.

### Указания и решения к некоторым задачам о невозможности.

Указание к 1с. Домножьте на сопряженное.

Указание к 2а. Индукция по количеству операций калькулятора, необходимых для получения числа, с применением домножения на сопряженное.

Указание к 2б. Это несложное следствие задачи 2а.

Решение 2с. Предположим, что  $\sqrt[3]{2}$  построимо. Тогда существует такая цепочка квадратичных расширений

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \dots \subset Q_{r-1} \subset Q_r, \quad \text{что} \quad \sqrt[3]{2} \in Q_r \setminus Q_{r-1}.$$

Поскольку  $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ , то  $r \geq 2$ . Значит,

$$\sqrt[3]{2} = \alpha + \beta\sqrt{a}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta, a \in Q_{r-1}, \quad \sqrt{a} \notin Q_{r-1} \quad \text{и} \quad \beta \neq 0.$$

Отсюда

$$2 = (\sqrt[3]{2})^3 = (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2a) + (3\alpha^2\beta + \beta^3a)\sqrt{a} = u + v\sqrt{a}.$$

Поскольку  $2 \in \mathbb{Q} \subset Q_{r-1}$ , то  $2 - u \in Q_{r-1}$ . Так как

$$v\sqrt{a} = 2 - u \quad \text{и} \quad v \in Q_{r-1}, \quad \text{то} \quad 0 = v = 3\alpha^2\beta + \beta^3a.$$

Так как  $3\alpha^2 + \beta^2 a > 0$ , получаем  $\beta = 0$  — противоречие!

*Указание к 3a.* Выразите  $\cos 3\alpha$  через  $\cos \alpha$ .

*Указание к 3b.* Если  $\cos(2\pi/9) = a + \sqrt{b}$ , то число  $a - \sqrt{b}$  тоже является корнем уравнения  $8x^3 - 6x + 1 = 0$ . Тогда по теореме Виета третий корень равен  $-(a + \sqrt{b}) - (a - \sqrt{b}) = -2a \in \mathbb{Q}$ .

*Решение 3c.* Следует из 3a и 3d.

*Доказательство теоремы 3d о кубических уравнениях для уравнений, все три корня которых вещественны (этот частный случай достаточен для непостроимости правильного 9-угольника).* Часть 'тогда' очевидна. Чтобы доказать часть 'только тогда', предположим, что хотя бы один из корней построим. Для каждого из построимых корней  $z$  рассмотрим минимальную цепочку расширений

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \dots \subset Q_{r-1} \subset Q_r, \quad \text{для которой } z_1 \in Q_r \setminus Q_{r-1}.$$

Возьмем корень  $z = z_1$  с наименьшей длиной минимальной цепочки  $l$ .

Если уравнение не имеет рациональных корней, то  $l \geq 2$ . Значит,

$$z_1 = \alpha + \beta\sqrt{a}, \quad \text{где } \alpha, \beta \in Q_{l-1}, \quad \sqrt{a} \notin Q_{l-1} \quad \text{и} \quad \beta \neq 0.$$

Тогда число  $\bar{z}_1 = \alpha - \beta\sqrt{a}$  также является корнем рассматриваемого уравнения (по лемме о сопряжении). Поскольку  $\beta \neq 0$ , то  $\alpha - \beta\sqrt{a} \neq \alpha + \beta\sqrt{a}$ , т. е.  $\bar{z}_1 \neq z_1$ . Обозначим  $z_2 := \bar{z}_1$ . Из первой формулы Виета для нашего уравнения находим:

$$z_1 + z_2 + z_3 = (\alpha + \beta\sqrt{a}) + (\alpha - \beta\sqrt{a}) + z_3 = 2\alpha + z_3 \in \mathbb{Q}, \quad \text{поэтому } z_3 \in Q_{l-1}.$$

Следовательно, для корня  $z_3$  существует цепочка меньшей длины, чем для  $z_1$ . Противоречие.  $\square$

*Указание к 5a.* Примените признак Эйзенштейна к многочлену  $((x+1)^{13} - 1)/x$  и лемму Гаусса.

*Решение 5b.* Рассмотрим цепочку квадратичных расширений  $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_{r-1} \subset Q_r \supset e$ . Заметим, что многочлен  $\Phi$  приводим над  $Q_r$  (поскольку имеет корень  $e$ ). Поэтому существует  $l$ , для которого многочлен  $\Phi$  приводим над  $Q_{l+1}$ . Обозначим через  $k$  наименьшее такое  $l$ . Из пункта 5a следует, что  $k \geq 1$ . Теперь легко видеть, что цепочка  $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_k \subset Q_{k+1}$  искомая.

*Указание к 5c.* Сопрягите относительно  $Q_k$  равенство  $\Phi(x) = P(x)R(x)$ .

*Указание к 5d.* Достаточно доказать, что если многочлен  $P$  с коэффициентами в  $Q_{k+1}$  делит  $\Phi$ , то  $P$  и  $\bar{P}$  взаимно просты. Для этого покажите, что  $\text{НОД}(P, \bar{P})$  имеет коэффициенты из  $Q_k$  и воспользуйтесь неприводимостью многочлена  $\Phi$  в  $Q_k$ .

*Решение 5e.* Аналогично решению 5b.

*Указание к 5f.* Докажите, что указанное в пункте 5d разложение многочлена  $\Phi(x)$  состоит ровно из двух множителей (воспользуйтесь тем, что если коэффициенты многочлена  $P$  лежат в  $Q_{k+1}$ , то коэффициенты многочлена  $P\bar{P}$  лежат в  $Q_k$ ). То же самое будет верно и для разложения получившихся множителей и т.д. Исходя из этого получите, что степень многочлена  $\Phi(x)$  должна быть степенью двойки.

*Указание к 5g.* Аналогично 5f.

*Указание к 6b.* Предположите противное и воспользуйтесь методом неопределённых коэффициентов.

*Указание к 7a.* Примените признак Эйзенштейна к многочлену  $\Phi(x+1)$  и лемму Гаусса.

*Указание к 7b.* Аналогично решению задачи 5 докажите, что если число  $\cos \frac{2\pi}{289}$  построимо, то степень многочлена  $\Phi(x)$  должна быть степенью двойки. А это неверно.

*Решение 8.* Рассмотрим комплексное число  $e = \cos(2\pi/7) + i \sin(2\pi/7)$ . Так как  $e \neq 1$ , то число  $e$  удовлетворяет уравнению 6-ой степени  $e^6 + e^5 + e^4 + e^3 + e^2 + e + 1 = 0$ . Разделим обе части уравнения на  $e^3$ . Положим

$$f := e + e^{-1}, \quad \text{тогда} \quad e^2 + e^{-2} = f^2 - 2 \quad \text{и} \quad e^3 + e^{-3} = f(e^2 + e^{-2} - 1).$$

Получим кубическое уравнение

$$f(f^2 - 3) + (f^2 - 2) + f + 1 = 0, \quad \text{то есть} \quad f^3 + f^2 - 2f - 1 = 0.$$

Кандидаты на рациональные корни этого уравнения  $f = \pm 1$  отвергаются проверкой. Согласно теореме 3д о кубических уравнениях число  $f = e + e^{-1}$  не построимо. Поэтому и  $e$  не построимо (поясните).

*Указание к 9a.* Индукция по  $k$ .

*Указание к 9b.* Следует из пункта 9a и из того, что любой симметрический многочлен от переменных  $f_1, f_2, \dots, f_{(p-1)/2}$  рационально выражается через многочлены вида  $f_1^k + f_2^k + \dots + f_{(p-1)/2}^k$ .

*Решение 9c.* Так как для любых  $s, t \in \{1, 2, \dots, p-1\}$  существует такое  $k$ , что  $e^s = (e^t)^k$ , то ранги чисел  $e, e^2, \dots, e^{p-1}$  одинаковы.

*Решение 9d.* Так как  $e^s + e^{-s}$  рационально выражается через  $e + e^{-1}$ , то для любых  $s, t \in \{1, 2, \dots, p-1\}$  число  $e^s + e^{-s}$  рационально выражается через  $e^t + e^{-t}$  (аналогично приведенному решению задачи 8). Поэтому ранги чисел  $f_1, \dots, f_{(p-1)/2}$  одинаковы.

(Заметим, что  $rk(e + e^{-1}) = rke - 1$ .)

*Решение 9e.* Пусть  $r := rk f_s$ . Значит, для некоторой цепочки квадратичных расширений

$$f_s = \alpha_s + \beta_s \sqrt{a}, \quad \text{где} \quad \alpha_s, \beta_s, a \in Q_{r-1}, \quad \sqrt{a} \notin Q_{r-1} \quad \text{и} \quad \beta_s \neq 0.$$

Тогда число  $\bar{f}_s = \alpha_s - \beta_s \sqrt{a}$  также является корнем рассматриваемого многочлена (по лемме о сопряжении). Поскольку

$$\beta_s \neq 0, \quad \text{то} \quad \alpha_s - \beta_s \sqrt{a} \neq \alpha_s + \beta_s \sqrt{a}, \quad \text{т. е.} \quad \bar{f}_s \neq f_s.$$

Итак, корни  $f_1, \dots, f_{(p-1)/2}$  разбиваются на пары сопряженных. Значит,  $(p-1)/2$  четно — противоречие.

Другое окончание решения. Числа  $f_1, \dots, f_{(p-1)/2}$  являются корнями многочлена с рациональными коэффициентами. Так как  $p = 4k + 3$ , то по задаче 17с одно из них  $f_s$  является рациональным. Но тогда  $e^s$  является корнем квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. Значит, многочлен  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{p-1}$  приводим над  $\mathbb{Q}$  — противоречие. (Видимо, достаточное здесь отсутствие делителей степени 2 у многочлена  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{p-1}$  можно доказать проще.)

*Решение 10a.* Докажем первую формулу (остальные доказываются аналогично). Заметим, что  $g^6 = -1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} A_0^2 &= ((e^{g^0} + e^{-g^0}) + (e^{g^3} + e^{-g^3}))^2 = \\ &= 2 + e^{g^1} + e^{-g^1} + 2 + e^{g^4} + e^{-g^4} + 2(e^{g^0} + e^{g^6})(e^{g^3} + e^{g^9}) = 4 + A_1 + 2A_2. \end{aligned}$$

(\*)

Последнее равенство верно, поскольку

$$(e^{g^0} + e^{g^6})(e^{g^3} + e^{g^9}) = e^{g^0+g^3} + e^{g^3+g^6} + e^{g^6+g^9} + e^{g^9+g^0} = e^{g^0+g^3} A_0 \stackrel{(*)}{=} e^{g^8} A_0 = A_2.$$

(Равенства  $(*)$  выполнены, поскольку  $g = 2$ .)

*Указание к 10b.* Докажите, что  $A_0 + A_1 + A_2$ ,  $A_0^2 + A_1^2 + A_2^2$ ,  $A_0^3 + A_1^3 + A_2^3$  рациональны.

*Указание к 10с.* Пользуясь пунктом 10а и тем, что  $A_0 + A_1 + A_2 = -1$ , докажите, что любое  $A_i$  рационально выражается через любое  $A_j$ .

*Указание к 10d.* Решение получается из пунктов 10b и 10с аналогично решению задачи 9е.

Вот идея другого решения, не использующего пункт 10с. Пусть число  $A_0$  имеет ранг  $r$ . Сопряжём его относительно  $Q_{r-1}$ . Полученное число будет одним из чисел  $A_i$  (поясните). Теперь легко понять, что числа  $A_i$  разбиваются на пары сопряжённых, т.е. их чётное число, что неверно.

*Указание к 11а.* Аналогично задаче 10.

*Указание к 11b.* Предположите, что для  $p = 2^k r + 1$  число  $\cos \frac{2\pi}{p}$  построимо (где  $r > 1$  — нечетное число). Выведите из этого, что числа

$$A_i = e^{g^i} + e^{g^{r+i}} + \dots + e^{g^{(2^k-1)r+i}}, \quad 0 \leq i \leq r-1$$

имеют одинаковый ранг и являются корнями многочлена степени  $r$  с рациональными коэффициентами.

*Указание к 11с.* Рассмотрите числа

$$A_0 = e^{g^0} + e^{g^{17}} + \dots + e^{g^{272}}, \quad A_1 = e^{g^1} + e^{g^{18}} + \dots + e^{g^{273}}, \quad A_{16} = e^{g^{16}} + e^{g^{33}} + \dots + e^{g^{288}}.$$

*Указание к 12.* Решение аналогично решению задачи 5.

*Указание к 14с.* Докажите, что

$$Q_k = \{\alpha_1 + \alpha_2 b \mid \alpha_1, \alpha_2 \in Q_{k-1}\} \quad \text{для любого } b \in Q_k - Q_{k-1}.$$

*Указание к 14d.* Следует из 14а и 14с.

*Указание к 14е.* Размерностью  $\dim(F : G)$  поля  $F$  над полем  $G$  называется наименьшее  $k$ , для которого существуют такие

$$b_1, b_2, \dots, b_k \in F, \quad \text{что } F = \{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \dots + \alpha_k b_k \mid \alpha_i \in G\},$$

если такое  $k$  существует. Докажите, что  $\dim F = \dim G \dim(F : G)$ .

*Указание к 15b.* Докажем, что существуют такие рациональные  $a_0, a_1, \dots, a_{12}$ , не все равные 0, что

$$a_0 + a_1 e + \dots + a_{11} e^{11} = 0. \quad (*)$$

По определению размерности существуют такие  $b_1, \dots, b_{11} \in \mathbb{Q}[\cos \frac{2\pi}{13} + i \sin \frac{2\pi}{13}]$  и  $\alpha_{kl} \in \mathbb{Q}$ , что

$$e^{j-1} = \alpha_{j,1} b_1 + \alpha_{j,2} b_2 + \dots + \alpha_{j,11} b_{11} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, 12.$$

Подставьте эти значения  $e^i$  в (\*). Теперь приравняйте к 0 коэффициенты при  $b_1, \dots, b_{11}$ . Наконец, докажите, что полученная система уравнений имеет нетривиальное рациональное решение.

*Указание к 16а.* Решение аналогично решению задач 15ab. Воспользуйтесь неприводимостью многочлена  $\Phi(x) = 1 + x^{17} + x^{34} + x^{51} + \dots + x^{272}$ .

*Указание к 17а.* Пусть  $a=a_1$  и  $b=b_1$  — построимые числа, а  $P$  и  $Q$  — многочлены с рациональными коэффициентами минимальной степени, корнями которых являются соответственно  $a$  и  $b$ . Пусть  $a_2, \dots, a_m$  — все остальные комплексные корни многочлена  $P$ , а  $b_2, \dots, b_n$  — все остальные комплексные корни многочлена  $Q$ . Заметим, что

$a + b$  — корень многочлена  $P(x - b_1) \dots P(x - b_n)$ ,

$a - b$  — корень многочлена  $P(x + b_1) \dots P(x + b_n)$ ,

$ab$  — корень многочлена  $P(\frac{x}{b_1}) \dots P(\frac{x}{b_n})$ ,

$\frac{a}{b}$  — корень многочлена  $P(xb_1) \dots P(xb_n)$ ,

$\sqrt{a}$  — корень многочлена  $P(x^2)$ .

Осталось доказать следующее вспомогательное утверждение.

*Лемма.* Пусть  $R(x, y)$  — многочлен от двух переменных с рациональными коэффициентами, а  $b_1, b_2, \dots, b_n$  — все комплексные корни многочлена  $Q$  с рациональными коэффициентами. Тогда многочлен от одной переменной  $R(x, b_1)R(x, b_2) \dots R(x, b_n)$  также имеет рациональные коэффициенты.

*Решение задачи 17b* аналогично решению задач 5bc.

### Литература

[Al] В. Б.Алексеев, Теорема Абеля. (М: Наука, 1976)

[Ch] Н. Н. Чеботарев, Основы теории Галуа, 1934.

[Ga] К. Ф. Гаусс, Арифметические исследования.

[Gi] С. Гиндикин, Дебют Гаусса, Квант, 1972 N1.

[Ka] А. Я. Канель, готовится.

[Ki] А. А. Кириллов, О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма, Квант, 1977 N7 или 1994 N6.

[Ko] В. А. Колосов, Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики (М: Гелиос, 2001).

[Li] Дж. Литлвуд, Математическая смесь.

[Po] М. М. Постников, Теория Галуа.

[Pr] В. В. Прасолов, Многочлены (М: МЦНМО, 1999, 2001, 2003)

[PS] В. В. Прасолов и Ю. П. Соловьев, Эллиптические функции и алгебраические уравнения (М.: Факториал, 1997).

[Va] Б. Л. Ван дер Варден, Алгебра.

[Vi] Э. Б. Винберг, Алгебра многочленов, Просвещение, 1980.

# QUADRATIC IRRATIONALALS

A. Belov-Kanel, P. Kozlov and A. Skopenkov

*abridged translation from Russian by P. Dergach and A. Skopenkov*

## Introduction.

In this note we sketch an elementary proof of the following result concerning constructibility of regular polygons.

**The Gauss Theorem.** *A calculator (calculating with absolute precision) has operations*

$$1, +, -, \times, : \text{ and } \sqrt{\quad}$$

*(and infinite memory). If*

$$n = 2^\alpha p_1 \dots p_l,$$

*where  $p_1, \dots, p_l$  are distinct primes of the form  $2^{2^s} + 1$ , then the number  $\cos \frac{2\pi}{n}$  is calculable at this calculator.*

In order to make the above Gauss Theorem (and the main idea of the Galois theory) less accessible, they are usually explained in terms of 'fields extensions' and 'Galois groups'. The proof sketched below is elementary and does not use these terms (it does not even use the term 'group'!). However, the idea presented is one of the main ideas of the Galois theory ('*group and rule*', or '*unite and rule*'). The proof of the constructibility is implicitly contained in the Gauss papers and is explicitly known in (at least USSR math circles) folklore.

Steps of the proof are presented as problems marked with bold numbers. If the statement of a problem is an assertion, then the problem is to prove this assertion.

## Constructions by compass and ruler.

**A.** Using segments of length  $a$  and  $b$  construct (from now on: by means of compass and ruler) segments of length  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $ab/c$ ,  $\sqrt{ab}$ .

A real number is called a *quadratic irrationality* or *calculable*, if we can calculate this number using our calculator. For example, the numbers

$$1 + \sqrt{2}, \quad {}^4\sqrt{2} = \sqrt{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2\sqrt{3}}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \quad \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \quad \text{and} \quad \cos 3^\circ$$

are calculable. This is not evident for the last two numbers.

**B.** Every calculable number is constructible.

This result is a corollary of A. It shows that if the number  $\cos \frac{2\pi}{n}$  is *calculable* then the regular  $n$ -gon is *constructible*.

**C\*.** *Main theorem of the theory of geometric constructions.* Every constructible number is calculable.

From this result it follows that if we cannot calculate the number  $\cos \frac{2\pi}{n}$ , then we cannot construct the regular  $n$ -gon.

**D.** If a complex number  $z$  is *complex-calculable* (the definition is analogous with only one distinction: the calculator gives *two* square roots of a complex number), then the real part and the imaginary part of  $z$  are calculable.

**E.** If the regular  $mn$ -gon is constructible, then the regular  $m$ -gon is constructible.

**F.** The regular triangle and the regular pentagon are constructible. Or, equivalently,  $\cos \frac{2\pi}{3}$  and  $\cos \frac{2\pi}{5}$  are calculable.

**G.** The regular 120-gon is constructible. Or, equivalently, the angle  $3^\circ$  is constructible. The following problems are hints.

**H.** If the regular  $n$ -gon is constructible, then the regular  $2n$ -gon is constructible.

**I.** If the regular  $n$ -gon and  $m$ -gon are constructible and  $GCD(m, n) = 1$ , then the regular  $mn$ -gon is constructible.

*Hint to problem C.* Consider all possible cases of construction of new objects (points, lines, circles) and prove that the coordinates of all the constructed points and the coefficients of equations of all the constructed lines and circles are quadratic irrationals.

*Hint to problem D.* If  $\sqrt{a + bi} = u + vi$ , then  $u, v$  are expressed by quadratic radicals of  $a$  and  $b$ .

*Hint to problem H.* Bisect the angle or apply the half angle formula.

*Hint to problem I.* Since  $GCD(m, n) = 1$ , it follows that there exist integers  $a, b$  such that  $am + bn = 1$ .

### The constructibility in the Gauss theorem.

It is not difficult to prove the constructibility in the Gauss theorem for  $n \leq 16$ .

*Proof of the constructibility in the Gauss theorem for  $n = 5$ .* It suffices to calculate the number  $e = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ . We shall construct some functions of  $e$ . We know that  $e + e^2 + e^3 + e^4 = -1$ . It is easy to see that  $(e + e^4)(e^2 + e^3) = e + e^2 + e^3 + e^4 = -1$ . Denote  $A_0 := e + e^4$  and  $A_1 := e^2 + e^3$ . Then  $A_0$  and  $A_1$  are roots of the equation  $t^2 + t - 1 = 0$  by the Vieta theorem. Hence these numbers are calculable. Since  $e \cdot e^4 = 1$ , the numbers  $e$  and  $e^4$  are roots of the equation  $t^2 - A_0t + 1 = 0$  by the Vieta theorem. Therefore we can calculate  $e$  (and  $e^4$ ).

1. If  $2^m + 1$  is a prime then  $m$  is a power of 2.

*Idea of proof of the constructibility in the Gauss theorem.* It suffices to prove the Gauss Theorem for  $n = 2^m + 1$  a prime (then  $m$  is necessarily a power of 2). It suffices to calculate

$$e = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

First it would be good to split the sum

$$e + e^2 + \dots + e^{n-1} = -1$$

into two summands  $A_0$  and  $A_1$  whose *product* is calculable (or, in other words, to *group* the roots of the equation

$$1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1} = 0$$

in a clever way). Then  $A_0$  and  $A_1$  would be calculable by the Vieta Theorem.

Next it would be good to split the sum  $A_0$  into two summands  $A_{00}$  and  $A_{01}$  whose product is calculable, and analogously split  $A_1 = A_{10} + A_{11}$ . And so on, until we calculate  $A_{0\dots 0} = e$ .

It is however quite non-trivial to find the necessary splittings.

*Primitive Root Theorem.* For each prime  $p = 2^m + 1$  there exists an integer  $g$  such that the residues modulo  $p$  of  $g^1, g^2, g^3, \dots, g^{2^m}$  are distinct.

Construction of necessary splittings is given in problems 3a, 4a and 5a below.

**2. Proof of the Primitive Root Theorem.** Suppose that  $p$  is a prime and  $a$  is not divisible by  $p$ .

(a) Suppose that  $k$  is the smallest positive integer such that  $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ . Then  $p-1$  is divisible by  $k$ . (Use the Fermat Little Theorem.)

(b) For every integers  $n$  and  $a$  the congruence  $x^n \equiv a \pmod{p}$  has at most  $n$  solutions.

(c) If  $p-1$  is divisible by  $d$  then the congruence  $x^d \equiv 1 \pmod{p}$  has exactly  $d$  solutions.

(d) Prove the Primitive Root Theorem for  $p = 2^m + 1$ . (Only this case is necessary for the Gauss theorem.)

(e)\* Prove the Primitive Root Theorem for  $p = 2^m \cdot 3^n + 1$ .

(f)\* Prove the Primitive Root Theorem for *arbitrary* prime  $p$ .

(g)\* Is it true that 3 is a primitive root modulo  $p$  for every prime of the form  $p = 2^m + 1$ ?

From now on let  $g$  be a primitive root modulo a prime  $p = 2^m + 1$ .

**3.** (a) Set

$$A_0 := e^{g^2} + e^{g^4} + e^{g^6} + \cdots + e^{g^{2^m}} \quad \text{and} \quad A_1 := e^{g^1} + e^{g^3} + e^{g^5} + \cdots + e^{g^{2^m-1}}.$$

Prove that  $A_0 A_1 = -\frac{p-1}{4}$ .

The following problems are hints.

(b)  $g^k + g^l \equiv 0 \pmod{p}$  iff  $k - l \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p-1}$ .

(c) We have

$$A_0 A_1 = \sum_{s=1}^{2^m} e^s \alpha(s),$$

where  $\alpha(s)$  is the number of solutions  $(k, l)$  (in residues modulo  $p-1$ ) of the congruence

$$g^{2k} + g^{2l+1} \equiv s \pmod{p}.$$

(d)  $\alpha(s) = \alpha(gs)$ .

(e)  $\alpha(s)$  does not depend on  $s$ .

**4.** (a) Set

$$A_{00} := e^{g^4} + e^{g^8} + e^{g^{12}} + \cdots + e^{g^{2^m}} \quad \text{and}$$

$$A_{01} := e^{g^2} + e^{g^6} + e^{g^{10}} + \cdots + e^{g^{2^m-2}}.$$

Prove that  $A_{00} A_{01} = s A_0 + t A_1$  for certain integers  $s$  and  $t$  (in fact,  $s + t = \frac{p-1}{8}$ ).

(b) (hint) The congruence

$$g^{4k} + g^{4l+2} \equiv s \pmod{p}$$

has the same number of solutions  $(k, l)$  (in residues modulo  $p-1$ ) as the congruence

$$g^{4k} + g^{4l+2} \equiv s g^2 \pmod{p}.$$

We have  $g^a + g^b \equiv 0 \pmod{p}$  if and only if  $a - b \equiv 2^{m-1} \pmod{p-1}$ .

**5.** (a) Set

$$A_{10} := e^{g^1} + e^{g^5} + e^{g^9} + \cdots + e^{g^{2^m-3}} \quad \text{and}$$

$$A_{11} := e^{g^3} + e^{g^7} + e^{g^{11}} + \cdots + e^{g^{2^m-1}}.$$

Prove that  $A_{10} A_{11} = u A_0 + v A_1$  for certain integers  $u$  and  $v$  (in fact,  $u + v = \frac{p-1}{8}$ ).

(b)  $\cos \frac{2\pi}{17}$  is calculable.

(c) Complete the proof of possibility in the Gauss theorem.

6. Find an explicit expression involving square roots for

(a)  $\cos \frac{2\pi}{17}$ .      (b)\*  $\cos \frac{2\pi}{257}$ .      (c)\*  $\cos \frac{2\pi}{65537}$ .

Using the above method and computer, this problem is easily solvable (in spite of the story from *J. Littlewood, Mathematical Miscellany*).

*Remark.* There is another proof of constructibility, like the previous one, but without use of complex numbers. For example, consider the regular 17-gon. Set  $a_k = \cos(2\pi k/17)$ . Then  $a_k = a_{17-k}$ ,  $2a_k a_l = a_{k+l} + a_{k-l}$  and  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = -1/2$ . First calculate  $a_1 + a_2 + a_4 + a_8$  and  $a_3 + a_5 + a_6 + a_7$ . Then calculate  $a_1 + a_4$ ,  $a_2 + a_8$ ,  $a_3 + a_5$  and  $a_6 + a_7$ . Finally calculate  $a_1$ .

### Hints and solutions to some problems concerning constructibility.

*Hint to problem 1.* If  $n$  is odd, then  $2^{kn} + 1$  is divisible by  $2^k + 1$ .

*Hint to problem 2b.* Let us prove the following more general statement: a polynomial of degree  $n$  cannot have more than  $n$  roots in  $\mathbb{Z}_p$ . Here by a polynomial we mean the collection of coefficients but not the function.

Assume that a polynomial  $P(x)$  of degree  $n$  has in  $\mathbb{Z}_p$  different roots  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ . Represent  $P(x)$  as

$$P(x) = b_n(x - x_1) \dots (x - x_n) + b_{n-1}(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + \dots + b_1(x - x_1) + b_0$$

(‘the Newton interpolation’). Put in the congruence  $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$  residues  $x = x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  in this order. We obtain  $b_0 \equiv b_1 \equiv \dots \equiv b_{n-1} \equiv b_n \equiv 0 \pmod{p}$ .

The same solution can be presented in the following way. Let  $P$  be a polynomial. Then polynomial  $P - P(a)$  is divisible by  $x - a$ , i.e.  $P - P(a) = (x - a)Q$  for some polynomial  $Q$  such that  $\deg Q < \deg P$ . Since  $P(a) = 0$ , it follows that  $P = (x - a)Q$  for some polynomial  $Q$  of degree less than  $\deg P$ . Now the required statement can be proved by induction on the degree of the polynomial  $P$ .

*Hint to problem 2c.* Obviously, polynomial  $x^{p-1} - 1$  in  $\mathbb{Z}_p$  has exactly  $p - 1$  roots and is divisible by  $x^d - 1$ . Prove that if a polynomial of degree  $a$  have  $a$  roots and is divisible by a polynomial of degree  $b$ , then the polynomial of degree  $b$  has exactly  $b$  roots.

*Hint to problem 2d.* If there are no primitive roots, then by problem 2a the congruence  $x^{2^{m-1}} \equiv 1 \pmod{p}$  has  $p - 1 = 2^m > 2^{m-1}$  solutions.

*Hint to problem 2ef.* Similar to 2d.

*Remark to problem 2f.* It is easy to deduce from the existence of a primitive root that for  $p - 1 = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$  the number of primitive roots is  $(p - 1)(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_k}) = \varphi(p - 1)$ .

*Hint to problem 3c.* Open the parenthesis and group the equal elements of the sum.

*Hint to problem 3d.* If  $(k, l)$  is a solution of the congruence  $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv s \pmod{p}$ , then  $(l, k + 1)$  is a solution of the congruence  $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv gs \pmod{p}$ .

If  $(k, l)$  is a solution of the congruence  $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv gs \pmod{p}$ , then  $(l - 1, k)$  is a solution of the congruence  $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv s \pmod{p}$ .

### Proof of the impossibility in the Gauss theorem.

Before the proofs of the the Gauss theorem some of their ideas are demonstrated one by one on the easiest examples (problems 1, 2c and 3). However, these examples give the solution of

classical antique problems of the doubling of a cube and the trisection of an angle, which were awaiting for their solutions nearly 2000 years. The first proof of the impossibility in the Gauss theorem is sketched in problems 2ab, 4-7. Seemingly different (but in essence the same) proofs are sketched in problems 8-11 (we use 4, but not use 6), 12 and 13-16. The second proof is the most close to ideas of Gauss.

**1.** There are no rational numbers  $a, b, c, d$  such that  $\sqrt[3]{2} =$

- (a)  $a + \sqrt{b}$ ; (b)  $a - \sqrt{b}$ ; (c)  $\frac{1}{a + \sqrt{b}}$ ; (d)  $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ; (e)  $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{bc}$ ;  
 (f)  $a + \sqrt{b + \sqrt{c}}$ ; (g)  $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ .

**2.** (a) Delete the button ‘:’ from (the complex analogue of) the calculator defined in the Gauss theorem, but allow to use all rational numbers. Then the set of numbers realizable using the new calculator will remain the same.

(b) Number  $A$  is constructible if and only if there are positive  $r \in \mathbb{Z}$  and  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$  such that

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \dots \subset Q_r \subset Q_{r+1} \supset A, \quad \text{where } a_k \in Q_k, \quad \sqrt{a_k} \notin Q_k,$$

$$Q_{k+1} = Q_k[\sqrt{a_k}] := \{\alpha + \beta\sqrt{a_k} \mid \alpha, \beta \in Q_k\} \quad \text{for each } k = 1, \dots, r-1.$$

Such a sequence is called *a sequence of quadratic extensions* (this term is considered as one word, we do not use the term ‘quadratic extension’ alone).

(c)  $\sqrt[3]{2}$  is not constructible. (Hence the doubling of a cube by ruler and compass is impossible.)

**3.** (a) Number  $\cos(2\pi/9)$  is a root of the cubic equation  $8x^3 - 6x + 1 = 0$ .

(b) There are no rational numbers  $a$  and  $b$  such that  $\cos(2\pi/9) = a + \sqrt{b}$ .

(c) Number  $\cos(2\pi/9)$  is not constructible (hence the trisection of angle  $\pi/3$  by ruler and compass is impossible and the regular 9-angled polygon is not constructible).

(d) The roots of a cubic equation with rational coefficients are constructible if and only if one of these roots is rational.

**4.** *Conjugation lemma.* Using the notation of 2b define the conjugation map  $\bar{\cdot} : Q_k[\sqrt{a}] \rightarrow Q_k[\sqrt{a}]$  by the following formula:  $\overline{x + y\sqrt{a}} = x - y\sqrt{a}$ . Then

(a) This map is well-defined.

(b)  $\overline{\overline{z + w}} = z + w$ ,  $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$  and  $\overline{\overline{z}} = z \Leftrightarrow z = x + 0\sqrt{a} \in Q_{k-1}$ .

(c) If  $z \in Q_k[\sqrt{a}]$  is a root of a polynomial  $P$  with rational coefficients, then  $P(\overline{z}) = 0$ . (Compare with the lemma on complex roots of polynomials with real coefficients.)

**5.** (a) Prove that polynomial  $\Phi(x) := x^{12} + x^{11} + \dots + x + 1$  is irreducible over  $\mathbb{Q}$ .

Hint: if you have difficulties use the Gauss lemma and the Eisenstein criterion (see below).

(b) If number  $e = \cos(2\pi/13) + i \sin(2\pi/13)$  is constructible, then there exists a sequence  $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_k \subset Q_{k+1}$  of quadratic extensions such that  $\Phi(x)$  is reducible over  $Q_{k+1}$  and is irreducible over  $Q_k$ .

(c) If  $\Phi$  is divisible by polynomial  $P$  with coefficients in  $Q_{k+1}$ , then  $\Phi$  is divisible by conjugate (relatively to  $Q_k$ ) polynomial  $\overline{P}$ .

(d) The decomposition of polynomial  $\Phi(x)$  over  $Q_{k+1}$  into irreducible factors is divided into pairs of conjugate (relatively to  $Q_k$ ) factors.

(e) For each of these factors there exists a sequence analogous to (b) but possibly has another  $n$ .

(f) Number  $\cos(2\pi/13)$  is not constructible.

(g) Number  $\cos(2\pi/p)$  is not constructible for  $p$  a prime,  $p \neq 2^m + 1$ .

**6.** (a) *The Gauss lemma.* If a polynomial with integer coefficients is irreducible over  $\mathbb{Z}$ , then it is irreducible over  $\mathbb{Q}$  [Pr].

(b) *The Eisenstein criterion.* Let  $p$  be a prime. If the leading coefficient of a polynomial with integer coefficients is not divisible by  $p$ , other coefficients are divisible by  $p$  and the constant term is not divisible by  $p^2$ , then this polynomial is irreducible over  $\mathbb{Z}$  [Pr].

**7.** (a) Polynomial  $\Phi(x) = 1 + x^{17} + x^{34} + x^{51} + \dots + x^{272}$  is irreducible over  $\mathbb{Q}$ .

Hint: use the Gauss lemma and the Eisenstein criterion.

(b) Number  $\cos(2\pi/289)$  is not constructible.

(c) Prove the impossibility in the Gauss theorem.

**8.** Number  $\cos(2\pi/7)$  is not constructible (hence the regular heptagon is not constructible).

**9.** Let  $n = 4k + 3$  be a prime. Denote  $f_s = e^s + e^{-s}$ . The least length of a minimal sequence from problem 2b is called a *rank* of  $\alpha$ .

(a) For each  $k$  number  $f_1^k + f_2^k + \dots + f_{(p-1)/2}^k$  is rational.

(b) After opening the parenthesis and grouping the equal elements in the equation  $(x - f_1)(x - f_2) \dots (x - f_{(p-1)/2})$  we obtain a polynomial with rational coefficients.

(c) Ranks of numbers  $e, e^2, \dots, e^{p-1}$  are equal.

(d) Ranks of numbers  $f_1, \dots, f_{(p-1)/2}$  are equal.

(e) Number  $\cos(2\pi/n)$  is not constructible.

**10.** Denote  $e = \cos(2\pi/13) + i \sin(2\pi/13)$ ,  $g = 2$  is a primitive root modulo 13,

$$A_0 = e^{g^0} + e^{g^3} + e^{g^6} + e^{g^9}, \quad A_1 = e^{g^1} + e^{g^4} + e^{g^7} + e^{g^{10}} \quad \text{and} \quad A_2 = e^{g^2} + e^{g^5} + e^{g^8} + e^{g^{11}}.$$

$$(a) \quad A_0^2 = 4 + A_1 + 2A_2, \quad A_1^2 = 4 + A_2 + 2A_0 \quad \text{and} \quad A_2^2 = 4 + A_0 + 2A_1.$$

(b) Numbers  $A_0, A_1, A_2$  are roots of an irreducible cubic equation with rational coefficients.

(c) Numbers  $A_0, A_1, A_2$  have the same rank.

(d) Number  $\cos(2\pi/13)$  is not constructible.

**11.** Number  $\cos(2\pi/p)$  is not constructible for

(a)  $p = 3 \cdot 2^k + 1$  a prime.

(b)  $p$  a prime,  $p \neq 2^m + 1$ .

(c)  $p = 289$ .

(d) number  $p$  that is not a product of a power of 2 and distinct prime numbers of the form  $2^m + 1$ .

**12.** Consider polynomial with given constructible number as a root. Prove that the minimal degree of such a polynomial is a power of two. Then prove the impossibility in the Gauss theorem.

The idea of another proof of the impossibility in the Gauss theorem is expressed by the notions of a *field* and *the dimension of a field*.

**13.** Consider a subset of the set  $\mathbb{C}$  of complex numbers. This subset is called a *(numerical) field* if it is closed under addition, subtraction, multiplication and division.

(a) The following sets are fields:  $\mathbb{Q}$ , the set of constructible numbers, the set of real numbers,  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\alpha + \beta\sqrt{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ , each  $\mathbb{Q}_k$  in a sequence of quadratic extensions and

$$\mathbb{Q}[e] := \{\alpha_0 + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \alpha_3 e^3 + \dots + \alpha_{12} e^{12} \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}\}, \quad \text{where} \quad e = \cos \frac{2\pi}{13} + i \sin \frac{2\pi}{13}.$$

- (b) Any field contains field  $\mathbb{Q}$ .  
 (c) Any field that contains  $\sqrt{2}$  should contain  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ .  
 (d) Any field that contains  $e$  should contain  $\mathbb{Q}[e]$ .

**14.** The dimension  $\dim F$  of a field  $F$  is the least  $k$  for which there exist

$$b_2, b_3, \dots, b_k \in F, \quad \text{such that} \quad F = \{\alpha_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \dots + \alpha_k b_k \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}\},$$

if such  $k$  exists.

- (a)  $\dim \mathbb{Q} = 1$ .  
 (b)  $\dim \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = 2$ .  
 (c) In a sequence of quadratic extensions  $\dim Q_k = 2 \dim Q_{k-1}$  for  $k \geq 1$ .  
 (d) In a sequence of quadratic extensions  $\dim Q_k = 2^{k-1}$ .  
 (e) If  $G \subset F$  are fields, then  $\dim F$  is divisible by  $\dim G$ .

**15.** (a)  $\dim \mathbb{Q}[\cos \frac{2\pi}{13} + i \sin \frac{2\pi}{13}] \leq 12$ .

(b) If  $\dim \mathbb{Q}[\cos \frac{2\pi}{13} + i \sin \frac{2\pi}{13}] < 12$ , then  $P(e) = 0$  for some polynomial  $P$  with rational coefficients, where the degree of  $P$  is less than 12.

(c) Use the previous assertions to prove that number  $\cos(2\pi/13)$  is not constructible.

**16.** (a)  $\dim \mathbb{Q}[\cos \frac{2\pi}{289} + i \sin \frac{2\pi}{289}] = 272$ .

(b) Use the previous assertions to prove that number  $\cos(2\pi/289)$  is not constructible.

(c) Prove the impossibility in the Gauss theorem.

**17.** (a) Any constructible number is algebraic, i.e. it is a root of a polynomial with rational coefficients. (This fact together with the transcendence of  $\sqrt{\pi}$  implies the impossibility of squaring the circle by compass and ruler. The transcendence of  $\sqrt{\pi}$  is an implication of the transcendence of  $\pi$  that is proved by Lindemann in 1883.)

(b) Let  $P$  be a polynomial with constructible roots. If  $P$  has rational coefficients and has an odd degree, then one of its roots is rational.

(c)\* The roots of a polynomial of degree 4 with rational coefficients are constructible if and only if the *resolution cubic equation* [Ko, Pr] has a rational root.

### Hints and solutions to some problems concerning impossibility.

*Hint to problem 1c.* Multiply by conjugate.

*Hint to problem 2a.* Induction on the number of operations of the calculator, which are necessary to construct given number; use multiplication by conjugate.

*Hint to problem 2b.* It is a simple corollary of problem 2a.

*Solution of problem 2c.* Suppose that  $\sqrt[3]{2}$  is constructible. Then there exists a sequence of quadratic extensions

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \dots \subset Q_{r-1} \subset Q_r \quad \text{such that} \quad \sqrt[3]{2} \in Q_r \setminus Q_{r-1}.$$

Since  $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ , it follows that  $r \geq 2$ . Then

$$\sqrt[3]{2} = \alpha + \beta\sqrt{a}, \quad \text{where} \quad \alpha, \beta, a \in Q_{r-1}, \quad \sqrt{a} \notin Q_{r-1} \quad \text{and} \quad \beta \neq 0.$$

Then

$$2 = (\sqrt[3]{2})^3 = (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2a) + (3\alpha^2\beta + \beta^3a)\sqrt{a} = u + v\sqrt{a}.$$

Since  $2 \in \mathbb{Q} \subset Q_{r-1}$ , it follows that  $2 - u \in Q_{r-1}$ . From

$$v\sqrt{a} = 2 - u \quad \text{and} \quad v \in Q_{r-1} \quad \text{we obtain} \quad 0 = v = 3\alpha^2\beta + \beta^3a.$$

Since  $3\alpha^2 + \beta^2a > 0$ , it follows that  $\beta = 0$ . A contradiction.

*Hint to problem 3a.* Express  $\cos 3\alpha$  by  $\cos \alpha$ .

*Hint to problem 3b.* If  $\cos(2\pi/9) = a + \sqrt{b}$ , then  $a - \sqrt{b}$  is also a root of equation  $8x^3 - 6x + 1 = 0$ . Hence by the by the Vieta theorem the third root is equal to  $-(a + \sqrt{b}) - (a - \sqrt{b}) = -2a \in \mathbb{Q}$ .

*Solution of problem 3c.* It is a corollary of 3a and 3d.

*Proof of the theorem 3d for cubic equations all whose three roots are real (this case is sufficient to the impossibility of construction of regular 9-angled polygon).* The part 'if' is obvious. Let us prove the 'only if' part. Suppose the contrary, i.e. that at least one of the roots is constructible. For each constructible root  $z$  consider the minimal sequence of quadratic extensions

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \dots \subset Q_{r-1} \subset Q_r, \quad \text{for which} \quad z_1 \in Q_r \setminus Q_{r-1}.$$

Consider the root  $z = z_1$  with the least length  $l$  of minimal sequence.

Since the equation has no rational roots, it follows that  $l \geq 2$ . Hence,

$$z_1 = \alpha + \beta\sqrt{a}, \quad \text{where} \quad \alpha, \beta, a \in Q_{l-1}, \quad \sqrt{a} \notin Q_{r-1} \quad \text{and} \quad \beta \neq 0.$$

Hence number  $\bar{z}_1 = \alpha - \beta\sqrt{a}$  is also a root of the considered equation (by the Conjugation lemma). Since  $\beta \neq 0$ , it follows that  $\alpha - \beta\sqrt{a} \neq \alpha + \beta\sqrt{a}$ , i. e.  $\bar{z}_1 \neq z_1$ . Denote  $z_2 := \bar{z}_1$ . By the Vieta formula for our equation we have:

$$z_1 + z_2 + z_3 = (\alpha + \beta\sqrt{a}) + (\alpha - \beta\sqrt{a}) + z_3 = 2\alpha + z_3 \in \mathbb{Q}, \quad \text{hence} \quad z_3 \in Q_{l-1}.$$

Therefore for the root  $z_3$  there exists a sequence of quadratic extensions whose length is less than that for the root  $z_1$ . A contradiction.  $\square$

*Hint to problem 5a.* Apply the Eisenstein criterion to  $((x+1)^{13} - 1)/x$  and the Gauss lemma.

*Solution of problem 5b.* Consider a sequence of quadratic extensions  $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_{r-1} \subset Q_r \supset e$ . Notice that polynomial  $\Phi$  is reducible over  $Q_r$  (because  $\Phi$  has  $e$  as a root). Hence there exists  $l$  for which polynomial  $\Phi$  is reducible over  $Q_{l+1}$ . Let  $k$  be the minimal such  $l$ . From problem 5a it follows that  $k \geq 1$ . Now it is easy to see that the sequence  $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_k \subset Q_{k+1}$  is the required.

*Hint to problem 5c.* Conjugate relatively to  $Q_k$  the equation  $\Phi(x) = P(x)R(x)$ .

*Hint to problem 5d.* It is sufficient to prove that if the polynomial  $P$  with coefficients in  $Q_{k+1}$  divides  $\Phi$ , then  $P$  and  $\bar{P}$  are relatively prime. For this prove that  $GCD(P, \bar{P})$  has the coefficients in  $Q_k$  and use the irreducibility of polynomial  $\Phi$  in  $Q_k$ .

*Solution of problem 5e.* Analogously to problem 5b.

*Hint to problem 5f.* Prove that the decomposition of polynomial  $\Phi(x)$  constructed in problem 5d has exactly two factors (use the fact that if the coefficients of polynomial  $P$  are in  $Q_{k+1}$ , then the coefficients of polynomial  $P\bar{P}$  are in  $Q_k$ ). The same is true also for decompositions of new factors and so on. Using this prove that the degree of polynomial  $\Phi(x)$  should be a power of two.

*Hint to problem 5g.* Analogously to problem 5f.

*Hint to problem 6b.* Suppose the contrary and apply indefinite coefficient method.

*Hint to problem 7a.* Apply the Eisenstein criterion to  $\Phi(x+1)$  and the Gauss lemma.

*Hint to problem 7b.* Analogously to problem 5 prove that if number  $\cos \frac{2\pi}{289}$  is constructible, then the degree of polynomial  $\Phi(x)$  should be a power of two. A contradiction.

*Solution of problem 8.* Consider complex number  $e = \cos(2\pi/7) + i \sin(2\pi/7)$ . Since  $e \neq 1$ , it follows that number  $e$  is a root of an equation  $e^6 + e^5 + e^4 + e^3 + e^2 + e + 1 = 0$ . Let us divide both parts of the equation by  $e^3$ . Denote

$$f := e + e^{-1}, \quad \text{then} \quad e^2 + e^{-2} = f^2 - 2 \quad \text{and} \quad e^3 + e^{-3} = f(e^2 + e^{-2} - 1).$$

We have a cubic equation

$$f(f^2 - 3) + (f^2 - 2) + f + 1 = 0, \quad \text{i.e.} \quad f^3 + f^2 - 2f - 1 = 0.$$

The candidates for rational roots of this equation  $f = \pm 1$  are easily rejected. Using theorem 3d on cubic equations one can observe that number  $f = e + e^{-1}$  is not constructible. Hence  $e$  is not constructible (explain why).

*Hint to problem 9a.* Induction on  $k$ .

*Hint to problem 9b.* It is a corollary of problem 9a and the fact that every symmetric polynomial of variables  $f_1, f_2, \dots, f_{(p-1)/2}$  is rationally expressed via polynomials of type  $f_1^k + f_2^k + \dots + f_{(p-1)/2}^k$ .

*Solution of problem 9c.* Since for each  $s, t \in \{1, 2, \dots, p-1\}$  there exists  $k$  such that  $e^s = (e^t)^k$ , it follows that ranks of numbers  $e, e^2, \dots, e^{p-1}$  are the same.

*Solution of problem 9d.* Since  $e^s + e^{-s}$  is rationally expressed via  $e + e^{-1}$ , it follows that for each  $s, t \in \{1, 2, \dots, p-1\}$  number  $e^s + e^{-s}$  is rationally expressed via  $e^t + e^{-t}$  (Analogously to problem 8). Hence ranks of numbers  $f_1, \dots, f_{(p-1)/2}$  are the same.

(Observe that  $rk(e + e^{-1}) = rke - 1$ .)

*Solution of problem 9e.* Let  $r := rk f_s$ . Hence for some sequence of quadratic extensions

$$f_s = \alpha_s + \beta_s \sqrt{a}, \quad \text{where} \quad \alpha_s, \beta_s, a \in Q_{r-1}, \quad \sqrt{a} \notin Q_{r-1} \quad \text{and} \quad \beta_s \neq 0.$$

Hence number  $\bar{f}_s = \alpha_s - \beta_s \sqrt{a}$  is also a root of considered polynomial (by the Conjugation lemma). Since

$$\beta_s \neq 0, \quad \text{it follows that} \quad \alpha_s - \beta_s \sqrt{a} \neq \alpha_s + \beta_s \sqrt{a}, \quad \text{i. e.} \quad \bar{f}_s \neq f_s.$$

So roots  $f_1, \dots, f_{(p-1)/2}$  are split into pairs of conjugates. Hence number  $(p-1)/2$  is even. A contradiction.

*Solution of problem 10a.* We prove the first formula (the others are proved analogously). Notice that  $g^6 = -1$ . Hence

$$\begin{aligned} A_0^2 &= ((e^{g^0} + e^{-g^0}) + (e^{g^3} + e^{-g^3}))^2 \stackrel{(*)}{=} \\ &= 2 + e^{g^1} + e^{-g^1} + 2 + e^{g^4} + e^{-g^4} + 2(e^{g^0} + e^{g^6})(e^{g^3} + e^{g^9}) = 4 + A_1 + 2A_2. \end{aligned}$$

The last equation holds because

$$(e^{g^0} + e^{g^6})(e^{g^3} + e^{g^9}) = e^{g^0+g^3} + e^{g^3+g^6} + e^{g^6+g^9} + e^{g^9+g^0} = e^{g^0+g^3} A_0 \stackrel{(*)}{=} e^{g^8} A_0 = A_2.$$

(Equations marked with  $(*)$  hold because  $g = 2$ .)

*Hint to problem 10b.* Prove that  $A_0 + A_1 + A_2$ ,  $A_0^2 + A_1^2 + A_2^2$ ,  $A_0^3 + A_1^3 + A_2^3$  are rational.

*Hint to problem 10c.* Using problem 10a and  $A_0 + A_1 + A_2 = -1$  prove that  $A_i$  is rationally expressed via each  $A_j$ .

*Hint to problem 10d.* Solution is obtained from problems 10b and 10c analogously to problem 9e.

There is another solution that does not use 10c. Suppose that number  $A_0$  has rank  $r$ . Conjugate  $A_0$  relatively to  $Q_{r-1}$ . The obtained number will be one of the numbers  $A_i$  (explain why). Now one can observe that  $A_i$ 's are split into pairs of conjugates. Hence the number of  $A_i$ 's is even. A contradiction.

*Hint to problem 11a.* Analogously to problem 10.

*Hint to problem 11b.* Suppose that for  $p = 2^k r + 1$  the number  $\cos \frac{2\pi}{p}$  is constructible (where  $r > 1$  is odd). Deduce that numbers

$$A_i = e^{g^i} + e^{g^{r+i}} + \dots + e^{g^{(2^k-1)r+i}}, \quad 0 \leq i \leq r-1$$

have the same rank and are the roots of polynomial with rational coefficients and degree  $r$ .

*Hint to problem 11c.* Consider numbers

$$A_0 = e^{g^0} + e^{g^{17}} + \dots + e^{g^{272}}, \quad A_1 = e^{g^1} + e^{g^{18}} + \dots + e^{g^{273}}, \quad A_{16} = e^{g^{16}} + e^{g^{33}} + \dots + e^{g^{288}}.$$

*Hint to problem 12.* Analogously to problem 5.

*Hint to problem 14c.* Prove that

$$Q_k = \{\alpha_1 + \alpha_2 b \mid \alpha_1, \alpha_2 \in Q_{k-1}\} \quad \text{for each } b \in Q_k - Q_{k-1}.$$

*Hint to problem 14d.* It is a corollary of problems 14a and 14c.

*Hint to problem 14e.* The minimal  $k$  for which there exist

$$b_1, b_2, \dots, b_k \in F \quad \text{such that} \quad F = \{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \dots + \alpha_k b_k \mid \alpha_i \in G\},$$

if such  $k$  exists, is called the dimension  $\dim(F : G)$  of the field  $F$  over the field  $G$ . Prove that  $\dim F = \dim G \dim(F : G)$ .

*Hint to problem 15b.* Prove that there exist rational numbers  $a_0, a_1, \dots, a_{12}$ , not all equal to 0 and such that

$$a_0 + a_1 e + \dots + a_{11} e^{11} = 0. \quad (*)$$

By definition of dimension there exist  $b_1, \dots, b_{11} \in \mathbb{Q}[\cos \frac{2\pi}{13} + i \sin \frac{2\pi}{13}]$  and  $\alpha_{kl} \in \mathbb{Q}$  such that

$$e^{j-1} = \alpha_{j,1} b_1 + \alpha_{j,2} b_2 + \dots + \alpha_{j,11} b_{11} \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, 12.$$

Substitute these expressions for  $e^i$  to (\*). Then consider equations stating that coefficients of  $b_1, \dots, b_{11}$  are zeroes. Finally prove that the obtained system of equations has a nonzero rational solution.

*Hint to problem 16a.* Analogously to problems 15ab. Use the irreducibility of polynomial  $\Phi(x) = 1 + x^{17} + x^{34} + x^{51} + \dots + x^{272}$ .

*Hint to problem 17a.* Let  $a=a_1$  and  $b=b_1$  be constructible numbers,  $P$  and  $Q$  polynomials with rational coefficients of minimal degree such that  $a$  and  $b$  are their roots, respectively. Let  $a_2, \dots, a_m$  be all other complex roots of  $P$  and  $b_2, \dots, b_n$  all other complex roots of  $Q$ . Notice that

$a + b$  is a root of polynomial  $P(x - b_1) \dots P(x - b_n)$ ,

$a - b$  is a root of polynomial  $P(x + b_1) \dots P(x + b_n)$ ,

$ab$  is a root of polynomial  $P(\frac{x}{b_1}) \dots P(\frac{x}{b_n})$ ,

$\frac{a}{b}$  is a root of polynomial  $P(xb_1) \dots P(xb_n)$ ,

$\sqrt{a}$  is a root of polynomial  $P(x^2)$ .

Now it suffices to prove the lemma.

*Lemma.* Let  $R(x, y)$  be a polynomial in two variables with rational coefficients,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  are all complex roots of polynomial  $Q$  with rational coefficients. Then a polynomial  $R(x, b_1)R(x, b_2) \dots R(x, b_n)$  with one variable also has rational coefficients.

*Solution of problem 17b.* Analogously to problems 5bc.



# Купила мама коника

А.Заславский, А.Акопян

Задачи, приведенные в п.1, на первый взгляд кажутся мало связанными друг с другом. Объединяет их то, что, несмотря на вполне элементарные формулировки, элементарными методами они решаются с большим трудом. При этом можно получить весьма изящные решения, рассмотрев подходящую вспомогательную кривую второго порядка или *коник* (т.е. эллипс, гиперболу или параболу). Часть теорем, описывающих нужные свойства коник, приводятся в этом разделе, остальные будут приведены в п.2.

**Определение 1.** *Эллипсом* называется множество точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости — *фокусов* эллипса — постоянна.

**Определение 2.** *Гиперболой* называется множество точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости — *фокусов* гиперболы — постоянен. Гипербола состоит из двух ветвей, неограниченно приближающихся к двум прямым, которые называются *асимптотами* гиперболы. Гипербола, асимптоты которой перпендикулярны, называется *равносторонней*.

**Определение 3.** *Параболой* называется множество точек, равноудаленных от фиксированной точки и прямой — *фокуса* и *директрисы* параболы. Прямая, проходящая через фокус и перпендикулярная директрисе параболы называется ее *осью*.

**Определение 4.** Точки  $P$  и  $Q$  называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника  $ABC$ , если прямые  $AP$  и  $AQ$ ,  $BP$  и  $BQ$ ,  $CP$  и  $CQ$  симметричны относительно биссектрис соответствующих углов треугольника.

**Определение 5.** Прямая, соединяющая середины диагоналей четырехугольника, называется *прямой Гаусса*.

## 1 Задачи

*Рядовой Иванов!  
Возьмите лом и  
подметите плац.*

1. Даны четыре прямых общего положения.

а) Доказать, что описанные окружности четырех треугольников, образованных каждыми тремя из этих прямых проходят через одну точку (*точка Миккеля*).

б) Доказать, что ортоцентры этих треугольников лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой Гаусса образованного данными прямыми четырехугольника. (Эта прямая называется *прямой Обера*.)

с) (**Л.Емельянов**) Рассмотрим три прямые, отличные от данных и соединяющие точки их пересечения. Доказать, что окружность, проходящая через середины сторон образованного ими треугольника, проходит через точку Миккеля данных четырех прямых, а центр описанной окружности этого треугольника лежит на их прямой Обера.

2. Дан треугольник  $ABC$  и две точки  $P, Q$ . Прямые  $AP$  и  $AQ$  пересекают  $BC$  в точках  $A_1, A_2$ . Точки  $B_1, B_2, C_1, C_2$  определяются аналогично. (Треугольник  $A_1B_1C_1$  называется *чевианным треугольником* точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ .)

$A_3$  — точка пересечения прямых  $AA_1$  и  $B_2C_2$ ;  $A_4$  — точка пересечения  $AA_2$  и  $B_1C_1$ ;  $B_3, C_3, B_4, C_4$  определены аналогично. Доказать, что прямые  $A_1A_4, A_2A_3, B_1B_4, B_2B_3, C_1C_4, C_2C_3$  пересекаются в одной точке.

**Дополнительный вопрос.** Какая точка получится если в качестве  $P$  и  $Q$  взять:

- а) центр тяжести и точку Жергонна (точку пересечения прямых, соединяющих вершины и точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью);
- б) центр тяжести и ортоцентр;
- с) две диаметрально противоположные точки описанной около треугольника  $ABC$  окружности.

3. Докажите **оптическое свойство** параболы: прямая, касающаяся параболы с фокусом  $F$  в точке  $X$ , образует равные углы с прямой  $XF$  и осью параболы.

4. Докажите, что точка, симметричная фокусу параболы относительно касательной, лежит на директрисе параболы.

5. Найдите ГМТ — проекций фокуса параболы на касательные к ней.

**Теорема 1.** Если парабола касается сторон треугольника, то ее фокус лежит на описанной окружности, а директриса проходит через ортоцентр.

**Теорема 2.** Через любые пять точек общего положения проходит единственная коника.

**Теорема 3.** Для любых пяти прямых общего положения существует единственная касающаяся их коника.

**Теорема 4.** Все коники проективно эквивалентны. В частности, любую конику можно проективным преобразованием перевести в окружность. Эта теорема позволяет определить полярное соответствие относительно любой коники и сформулировать принцип двойственности.

6. Точки  $X$  и  $X'$ ,  $Y$  и  $Y'$  изогонально сопряжены относительно треугольника  $ABC$ . Прямые  $XU$  и  $X'Y'$  пересекаются в точке  $U$ ;  $XY'$  и  $X'Y$  — в точке  $V$ . Доказать, что  $U$  и  $V$  также изогонально сопряжены относительно  $ABC$ .

7. Треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  центрально симметричны. Через точки  $A', B', C'$  проведены три параллельные прямые. Доказать, что точки их пересечения соответственно с  $BC, CA, AB$  лежат на одной прямой.

8. Каждая из трех окружностей лежит вне двух других. К каждому двум из этих окружностей проведены общие внутренние касательные. Доказать, что главные диагонали образованного ими шестиугольника пересекаются в одной точке.

9. Точка  $T$  равноудалена от противоположных сторон выпуклого четырехугольника. Доказать, что  $T$  лежит на прямой Гаусса тогда и только тогда, когда четырехугольник является либо вписанным, либо описанным, либо трапецией.

10. Внутри угла с вершиной  $O$  лежат точки  $A$  и  $B$ . Биллиардный шар может попасть из  $A$  в  $B$  отразившись от одной стороны угла в точке  $X$  или от другой в точке  $Y$ .  $C, Z$  — середины отрезков  $AB, XY$ .

а) Доказать, что если угол  $O$  прямой, то прямая  $CZ$  проходит через  $O$ .

б) Доказать, что если угол  $O$  не прямой, то  $CZ$  проходит через  $O$  тогда и только тогда, когда длины ломаных  $AXB$  и  $A'YB$  равны.

11. (**Теорема Дроз-Фарни**) Через ортоцентр треугольника  $ABC$  проведены две перпендикулярные прямые. Доказать, что середины отрезков, отсекаемых этими прямыми на сторонах треугольника, лежат на одной прямой.

12. (**Л.Емельянов**) Дан треугольник  $ABC$ .  $AA_1, BB_1$  — его высоты;  $C^*$  — точка на прямой  $A_1B_1$ . Произвольная прямая, проходящая через  $C^*$ , пересекает  $BC$  и  $AC$

в точках  $A'$  и  $B'$ .  $P$  — точка пересечения  $AA'$  и  $BB'$ ;  $C'$  — точка пересечения  $AB$  и  $CP$ . Доказать, что описанные окружности всех треугольников  $A'B'C'$  проходят через одну точку.

13. Дан треугольник  $ABC$ .  $A_1, A_2$  — основания высоты и биссектрисы, опущенных на сторону  $BC$ ;  $A_3, A_4$  точки касания этой стороны с вписанной и невписанной окружностями треугольника. Точки  $B_1, \dots, B_4, C_1, \dots, C_4$  определены аналогично.

а) Доказать, что прямые  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$  пересекаются в одной точке.

б) Доказать, что описанные окружности треугольников  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, A_4B_4C_4$  проходят через одну точку.

14. Дан треугольник  $ABC$  и прямая, проходящая через центр  $O$  его описанной окружности. Доказать, что педальные окружности всех точек этой прямой проходят через одну точку. (*Педальным треугольником и педальной окружностью точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  называются треугольник, образованный проекциями  $P$  на прямые  $AB, BC, CA$ , и его описанная окружность.*)

15. Два треугольника подобны, противоположно ориентированы и имеют общий ортоцентр. Доказать, что они перспективны (т.е. прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в одной точке).

## 2 Теоремы о кониках или подметаем плац метлой

**Теорема 5. (Паскаль)** Шесть точек лежат на одной конике тогда и только тогда, когда точки пересечения противоположных сторон образованного ими шестиугольника лежат на одной прямой.

**Теорема 6. (Брианшон)** Шесть прямых касаются одной коники тогда и только тогда, когда главные диагонали образованного ими шестиугольника пересекаются в одной точке.

**Теорема 7.** Геометрическим местом центров коник, вписанных в данный четырехугольник, является его прямая Гаусса.

**Теорема 8.** Пусть даны четыре точки  $A, B, C, D$ . Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $X$ ;  $AC$  и  $BD$  — в точке  $Y$ ;  $AD$  и  $BC$  — в точке  $Z$ . Тогда поляры любой точки  $P$ , отличной от  $X, Y, Z$ , относительно всех коник, проходящих через  $A, B, C, D$ , пересекаются в одной точке. Если каждая из точек  $A, B, C, D$  является ортоцентром треугольника, образованного тремя остальными, то эта точка изогонально сопряжена  $P$  относительно треугольника  $XYZ$ .

**Теорема 9.** Пусть дан треугольник и прямая, не проходящая через его вершины. Образом этой прямой при изогональном сопряжении является описанная около треугольника коника.

**Теорема 10.** Пусть даны два треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ . Прямые  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  пересекаются в точке  $C'$ ,  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$  — в точке  $A'$ ,  $C_1A_1$  и  $C_2A_2$  — в точке  $B'$ . Если треугольник  $A'B'C'$  перспективен обоим треугольникам  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  с центрами перспективы  $D_1, D_2$ , то точки  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$  лежат на одной конике.

**Теорема 11. (О четырех кониках)** Пусть каждые две из трех коник пересекаются в четырех точках. Шесть из двенадцати точек пересечения (по две для каждой пары коник) лежат на одной конике тогда и только тогда, когда общие хорды коник, проходящие через остальные точки, пересекаются в одной точке.

**Теорема 12.** Директриса параболы является ГМТ, касательные из которых к параболе перпендикулярны.

**Теорема 13.** Коника, описанная около треугольника является равносторонней гиперболой тогда и только тогда, когда она проходит через ортоцентр.

**Теорема 14.** Геометрическим местом центров равносторонних гипербол, описанных около треугольника, является его окружность Эйлера.

**Теорема 15.** Педальная и чевианная окружность точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  проходят через центр равносторонней гиперболы  $ABCP$ .

## 3 Литература

А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.

# Купила мама коника

А.Заславский, А.Акопян

## Указания к решениям задач

1. По теореме 3 существует единственная парабола, касающаяся данных прямых. По теореме 1 ее фокус является точкой Миккеля, а директриса — прямой Обера четырехугольника. Применяв теперь теорему, двойственную к теореме 10, к четырем данным прямым, бесконечно удаленной прямой и средним линиям треугольника, образованного тремя диагональными прямыми, получаем, что средние линии касаются той же параболы, откуда следует последнее утверждение задачи.

2. Рассмотрим конику  $ABCPQ$ . Полюс относительно нее прямой  $PQ$  является искомой точкой. Для доказательства достаточно проективным преобразованием перевести конику в окружность, так чтобы точки  $P, Q$  перешли в диаметрально противоположные.

**Ответ на дополнительный вопрос:**

- а) центр вписанной окружности;
- б) точка Лемуана, изогонально сопряженная центру тяжести;
- в) бесконечно удаленная точка, направление на которую перпендикулярно  $PQ$ .

3. Пусть  $X'$  — проекция  $X$  на директрису. Предположим, что биссектриса угла  $FXX'$  не совпадает с касательной. Тогда она вторично пересекает параболу в некоторой точке  $Y$ , и  $FY = YY'$ , где  $Y'$  — проекция  $Y$  на директрису. Но треугольники  $FXY$  и  $X'XY$  равны, поскольку  $FX = XX'$ ,  $\angle FXY = \angle X'XY$ , значит  $FY = YX'$  — противоречие, так как  $YY' < YX'$ .

4. Используя обозначения предыдущей задачи, сразу получаем, что точки  $F$  и  $X'$  симметричны относительно касательной.

5. Так как ГМТ, симметричных фокусу относительно касательных, — директриса параболы, ГМТ проекций — прямая, параллельная директрисе и расположенная вдвое ближе к фокусу, т.е. касательная к параболе в ее вершине.

6. Рассмотрим пучок коник, проходящих через центры вписанной и невписанных окружностей треугольника  $ABC$ . По теореме 8 полярны точки  $X$  относительно всех коник этого пучка проходят через  $X'$ . Рассмотрим конику, относительно которой полярной  $X$  будет прямая  $X'Y'$ . Полярна  $Y'$  относительно этой коники проходит через  $X$  и, значит, совпадает с прямой  $XU$ . Так как  $U$  — точка пересечения поляр точек  $X$  и  $Y'$ , полярной  $U$  будет прямая  $XU'$ , проходящая через  $V$ . Аналогично найдем конику, относительно которой полярной  $U$  будет прямая  $X'Y'$ . Следовательно, по теореме 8  $V$  — точка, изогонально сопряженная  $U$ .

7. По теореме Брианшона существует коника, вписанная в оба треугольника. Пусть некоторая прямая, проходящая через  $A'$ , пересекает  $BC$  в точке  $P$ , а параллельная ей прямая, проходящая через  $B'$ , пересекает  $AC$  в точке  $Q$ . Применяв теорему Брианшона к шестиугольнику  $A'XQPYB'$ , где  $X, Y$  — бесконечно удаленные точки прямых  $AC, BC$ , получим, что прямая  $PQ$  также касается этой коники, откуда и следует утверждение задачи.

8. Так как точки пересечения общих внешних касательных к окружностям лежат на одной прямой, утверждение задачи является частным случаем теоремы, двойственной к теореме о четырех кониках.

9. По теореме 7 точка  $T$  является центром вписанной в четырехугольник коники. Так как противоположные стороны четырехугольника равноудалены от  $T$ , они либо параллельны, либо симметричны относительно одной из осей коники. Если обе пары противоположных сторон симметричны относительно одной и той же оси, то в четырехугольник можно вписать окружность. Если же оси симметрии различны, то биссектрисы углов между противоположными сторонами четырехугольника перпендикулярны, что равносильно его вписанности.

10. Это переформулировка предыдущей задачи для четырехугольника, образованного прямыми  $AX$ ,  $BX$ ,  $AU$ ,  $BU$ .

11. По теоремам 1, 12 две прямые проходящие через ортоцентр и стороны треугольника касаются одной параболы. Середины высекаемых на сторонах отрезков являются центрами окружностей, описанных около соответствующих прямоугольных треугольников, и значит, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку между ортоцентром и фокусом этой параболы.

12. Прежде всего надо доказать, что геометрическим местом точек  $P$  будет коника описанная около треугольника. Для этого достаточно проективным преобразованием перевести треугольник  $ABC$  в равнобедренный прямоугольный, а  $C^*$  — в бесконечную точку прямой, перпендикулярной его гипотенузе.

Теперь, так как полученная коника проходит через ортоцентр треугольника, она является равносторонней гиперболой и по теореме 15 все окружности  $A'B'C'$  проходят через ее центр.

13. При изогональном сопряжении ортоцентр треугольника переходит в центр описанной окружности, центр вписанной окружности в себя, а точки Жергонна и Нагеля в центры гомотетии вписанной и описанной окружности, т.е. изогональные образы всех этих точек лежат на одной прямой, проходящей через  $O$ . По теореме 9 сами точки лежат на равносторонней гиперболы и утверждение задачи следует из утверждения предыдущей.

14. Педальные окружности изогонально сопряженных точек совпадают, поэтому утверждение задачи следует из теорем 9, 15.

15. Подобие, переводящее один из данных треугольников в другой, является композицией гомотетии с центром в их общем ортоцентре  $H$  и симметрии относительно проходящей через  $H$  прямой  $l$ . Рассмотрим две равносторонние гиперболы с асимптотами, параллельными  $l$ , описанные около треугольников. Они пересекаются в  $H$ , двух бесконечных точках и какой-то четвертой точке  $P$ , которая, следовательно, является действительной. Наше подобие переводит одну гиперболу в другую, причем три из их общих точек переходят в себя. Этим же свойством обладает центральная проекция одной гиперболы на другую из точки  $P$ , а поскольку проективное соответствие между кониками однозначно определяется образами трех точек,  $P$  является центром перспективы треугольников.

# Auxiliary conics

A.Zaslavsky, A.Akopjan

It seems that the problems of p.1 are not coherent. They are associated by the difficulty of elementary solution. But all these problems have nice solutions using the properties of some auxiliary conics. Some theorems describing these properties are cited in p.1, the other will be given in p.2

**Definition 1.** *Ellipse* is the locus of points  $P$  such that the sum  $PF_1 + PF_2$  of distances from  $P$  to two fixed points — *the foci* of ellipse — is the constant.

**Definition 2.** *Hyperbola* is the locus of points  $P$  such that the modulus of difference  $|PF_1 - PF_2|$  from  $P$  to two fixed points — *the foci* of hyperbola — is the constant. Hyperbola has two branches approaching in infinity to two lines — *the asymptotes* of hyperbola. The hyperbola with perpendicular asymptotes is called *equilateral*.

**Definition 3.** *Parabola* is the locus of points  $P$  such that the distances from  $P$  to the fixed point  $F$  and the fixed line  $l$  — *the focus* and *the directrix* of parabola — are equal. The perpendicular from  $F$  to  $l$  is called *the axis* of parabola.

**Definition 4.** The points  $P$  and  $Q$  are *isogonally conjugated* with respect to the triangle  $ABC$ , if the lines  $AP$  and  $AQ$ ,  $BP$  and  $BQ$ ,  $CP$  and  $CQ$  are symmetric with respect to the bisectors of the respective angles.

**Definition 5.** Let the quadrilateral be given. The line passing through the midpoints of its diagonals is called *the Gauss line*.

## 1 The problems

1. Let four general lines be given.

a) Prove that the circumcircles of four triangles formed by these lines have the common point (*the Michel point*).

b) Prove that the orthocenters of these triangles lie on the line perpendicular to the Gauss line of given quadrilateral. (This line is called *the Aubert line*.)

c) (**L.Emelyanov**) Let three lines distinct from given and passing through their common points be considered. Prove that the nine point circle of the triangle formed by these lines passes through the Michel point of given quadrilateral and the circumcenter of this triangle lies on the Aubert line.

2. Given the triangle  $ABC$  and two points  $P, Q$ . The lines  $AP$  and  $AQ$  intersect  $BC$  in the points  $A_1, A_2$  respectively. The points  $B_1, B_2, C_1, C_2$  are defined similarly. (The triangle  $A_1B_1C_1$  is called *the cevian triangle* of  $P$  with respect to the triangle  $ABC$ .)  $A_3$  — is the common point of  $AA_1$  and  $B_2C_2$ ;  $A_4$  — the common point of  $AA_2$  and  $B_1C_1$ ;  $B_3, C_3, B_4, C_4$  are defined similarly. Prove that the lines  $A_1A_4, A_2A_3, B_1B_4, B_2B_3, C_1C_4, C_2C_3$  are concurrent.

**Addition.** What is the common point of these lines when  $P$  and  $Q$  are:

a) the centroid and the Gergonne point (the common point of the lines passing through the vertex and the touching points of opposite sidelines with the incircle);

b) the centroid and the orthocenter;

c) two diametral points of the circumcircle.

3. Prove **the optical property** of the parabola: the tangent in point  $X$  to the parabola with the focus  $F$  forms the equal angles with  $XF$  and the axis of parabola.

4. Prove that the reflection of focus in the tangent lies on the directrix of the parabola.
5. Find the locus of projections of the focus to the tangents of the parabola.

**Theorem 1.** If the sidelines of the triangle touche the parabola then the circumcircle pass through the focus and the orthocenter lies on the directrix.

**Theorem 2.** There exists the single conic passing through five given general points.

**Theorem 3.** There exists the single conic touching five given general lines.

**Theorem 4.** All conics are projectively equivalent. In part any conic can be projectively transformed to the circle. This allows to define the polarity with respect to any conic and to formulate the duality principle.

6. The points  $X$  and  $X'$ ,  $Y$  and  $Y'$  are isogonally conjugated with respect to the triangle  $ABC$ .  $U$ ,  $V$  are the common points of  $XY$  and  $X'Y'$ ,  $XY'$  and  $X'Y$ . Prove that  $U$  and  $V$  are isogonally conjugated with respect to  $ABC$ .

7. The triangles  $ABC$  and  $A'B'C'$  are centrosymmetric. Three parallel lines pass through  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Prove that their common points with  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  respectively are collinear.

8. Each of three circles lies outside two other. The hexagon formed by their common internal tangents is considered. Prove that its main diagonals concur.

9. The distances from the point  $T$  to the opposite sidelines of the convex quadrilateral are equal. Prove that  $T$  lies on the Gauss line iff the quadrilateral is inscribed, circumscribed or the trapezoid.

10. The points  $A$ ,  $B$  are inside the angle with vertex  $O$ . The billiards ball can come from  $A$  to  $B$  after the reflection from one side of the angle in the point  $X$  or after the reflection from the other side in the point  $Y$ . The points  $C$ ,  $Z$  are the midpoints of  $AB$ ,  $XY$  respectively.

a)  $\angle O = 90^\circ$ . Prove that the line  $CZ$  pass through  $O$ .

b)  $\angle O \neq 90^\circ$ . Prove that  $CZ$  pass through  $O$  iff lengths of path  $AXB$  and  $AYB$  are equal.

11. (**The Droz-Farny theorem**) Two perpendicular lines pass through the orthocenter of the triangle  $ABC$ . Prove that the midpoints of segments striked by these lines in the sidelines of  $ABC$  are collinear.

12. (**L.Emelyanov**)  $AA_1$ ,  $BB_1$  are the altitudes of the triangle  $ABC$ ;  $C^*$  is the point on the line  $A_1B_1$ . Any line passing through  $C^*$  intersect  $BC$  and  $AC$  in the points  $A'$  and  $B'$  respectively.  $P$  is the common point of  $AA'$  and  $BB'$ ;  $C'$  the common point of  $AB$  and  $CP$ . Prove that all circumcircles of the triangles  $A'B'C'$  have the common point.

13.  $AA_1$ ,  $AA_2$  are the altitude and the bisector of the triangle  $ABC$ ;  $A_3$ ,  $A_4$  are the touching points of  $BC$  with the incircle and the excircle. The points  $B_1, \dots, B_4$ ,  $C_1, \dots, C_4$  are defined similarly.

a) Prove that the lines  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$  concur.

b) Prove that the circumcircles of the triangles  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$ ,  $A_3B_3C_3$ ,  $A_4B_4C_4$  have the common point.

14. Given the triangle  $ABC$  and the line passing through its circumcenter  $O$ . Prove that the pedal circles of all points on this line have the common point. (The triangle formed by the projections of the point  $P$  to the lines  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  and its circumcircle are called *the pedal triangle* and *the pedal circle* of the point  $P$  with respect the triangle  $ABC$ .)

15. Two triangles are similar, oppositely oriented and their orthocenters coincide. Prove that they are perspective.

## 2 The properties of conics

**Theorem 5. (Pascal)** Six points lie on the conic iff the common points of opposite sidelines of respective hexagon are collinear.

**Theorem 6. (Brianchon)** Six lines touche the conic iff the main diagonals of respective hexagon concur.

**Theorem 7.** The Gauss line of the quadrilateral is the locus of the centers of inscribed conics.

**Theorem 8.** Let four points  $A, B, C, D$  be given.  $X, Y, Z$  are the common points of  $AB$  and  $CD$ ,  $AC$  and  $BD$ ,  $AD$  and  $BC$  respectively.  $P$  is any point distinct from  $X, Y, Z$ . Then all polars of  $P$  with respect to the conics passing through  $A, B, C, D$  have the common point. In part if  $A, B, C, D$  are orthocentric then this point is isogonally conjugated to  $P$  with respect the triangle  $XYZ$ .

**Theorem 9.** Let the line  $l$  don't pass through the points  $A, B, C$ . Then the the isogonal image of  $l$  with respect to the triangle  $ABC$  is the circumconic of  $ABC$ .

**Theorem 10.** Let two triangles  $A_1B_1C_1$  and  $A_2B_2C_2$  be given.  $C', A', B'$  are the common points of  $A_1B_1$  and  $A_2B_2$ ,  $B_1C_1$  and  $B_2C_2$ ,  $C_1A_1$  and  $C_2A_2$  respectively. If the triangle  $A'B'C'$  is perspective to both triangles  $A_1B_1C_1$  and  $A_2B_2C_2$  with perspective centers  $D_1, D_2$ , then the points  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$  lie on the conic.

**Theorem 11. (Four conics theorem)** Let each two from three conics have four common points. Six common points (two for each pair of conics) lie on the conic iff three common chords passing through another six points concur.

**Theorem 12.** The tangents from the point  $P$  to the parabola are perpendicular iff  $P$  lies on the directrix.

**Theorem 13.** The circumconic of the triangle is the equilaterale hyperbola iff it pass through the orthocenter.

**Theorem 14.** The nine points circle of the triangle is the locus of centers of equilateral circumhiperbolaes.

**Theorem 15.** The pedal and the cevian circles of the point  $P$  with repect to the triangle  $ABC$  pass through the center of equilateral hyperbola  $ABCP$ .

## 3 References

A.V.Akopjan, A.A.Zaslavsky. The properties of conics. AMS, ???.

# Auxiliary conics

A.Zaslavsky, A.Akopjan

## Solutions

1. Using the theorem 3 for four given lines and infinity line we receive that there exists the single parabola touching the given lines. By the theorem 1 its focus is the Michel point of the quadrilateral and the directrix is its Aubert line. Also we can apply the dual theorem 10 to four given lines, the infinity line and three medial lines of the diagonal triangle. It results that the medial lines touch the same parabola, so we receive the proof of p.c).

2. Let the conic  $ABCPQ$  be considered. The pole of  $PQ$  with respect to this conic is the sought point. This follows from the p.c) of the addition and the theorem 4.

### Addition

a) the incenter;

b) the Lemoine point isogonally conjugated to the centroid;

c) the infinite point with the direction perpendicular to  $PQ$ .

3. Let  $X'$  be the projection of  $X$  to the directrix. Suppose that the bisector of angle  $FXX'$  don't coincide with the tangent. Then it intersects the parabola in some point  $Y$  distinct from  $X$  and  $FY = YY'$ , where  $Y'$  is the projection of  $Y$  to the directrix. As  $FX = XX'$ ,  $\angle FXY = \angle X'XY$  the triangles  $FXY$  and  $X'XY$  are congruent, so  $FY = YX'$ . But  $YY' < YX'$  — contradiction.

4. Using the notations of previous problem we receive that  $F$  and  $X'$  are symmetric with respect to the tangent.

5. Using the result of previous problem we receive that the sought locus is the tangent to the parabola in its vertex.

6. Let the pencil of conics passing through the incenter and the excenters of  $ABC$  be considered. By the theorem 8 all polars of  $X$  with respect to the conics of this pencil pass through  $X'$ . Let  $\mathcal{C}$  be such conic that the polar of  $X$  with respect to  $\mathcal{C}$  coincide with  $X'Y'$ . Then the polar of  $Y'$  pass through  $X$ , and so coincide with  $XY$ . As  $U$  is the common point of polars of  $X$  and  $Y'$ ,  $XY'$  is the polar of  $U$ . So the polar of  $U$  pass through  $V$ . Similarly we can find such conic that the polar of  $U$  coincide with  $X'Y$ . By the theorem 8  $V$  is isogonally conjugated to  $U$ .

7. By the Brianchon theorem the given triangles have an inscribed conic. Let some line passing through  $A'$  intersect  $BC$  in the point  $P$ , and the parallel line passing through  $B'$  intersect  $AC$  in the point  $Q$ . Using the Brianchon theorem for the hexagon  $A'XQPYB'$  where  $X, Y$  are the infinite points of  $AC$  and  $BC$  respectively, we obtain that the line  $PQ$  also touches this conic. This follows the sought assertion.

8. The common points of common external tangents are collinear. So we can use the dual four conics theorem.

9. By the theorem 7  $T$  is the center of some inscribed conic. As the distances from  $T$  to opposite sidelines are equal, these sidelines are parallel or symmetric with respect to some axis of this conic. If the both pairs of opposite sidelines are symmetric with respect to the same axis then there exists the circle inscribed to given quadrilateral. If the symmetry axis are distinct then the bisectors of two angles formed by the opposite sidelines are perpendicular and so the quadrilateral is cyclic.

10. This is the reformulation of previous problem for the quadrilateral formed by the lines  $AX, BX, AY, BY$ .

11. By the theorems 1, 12 there exists a parabola with focus  $F$  touching the sidelines of the triangle and two perpendicular lines passing through its orthocenter  $H$ . The midpoints of stiked segments are the circumcenters of respective rectangular triangles, so they lie in medial perpendicular to  $HF$ .

12. If the triangle  $ABC$  is rectangular and isosceles ( $AC = BC$ ) and  $C^*$  is the infinite point perpendicular to  $AB$  then the locus of points  $P$  is the circumcenter of  $ABC$ . Using respective projective transformation we obtain that in general case the locus of  $P$  is the circumconic.

Now as this conic pass through the orthocenter it is the equilateral hyperbola and by theorem 15 all circles  $A'B'C'$  pass through its center.

13. The orthocenter, the incenter the Gergonne point and the Nagel point are isogonally conjugated to the circumcenter, the incenter and two homothety centers of the incircle and the circumcircle respectively. So the isogonal images of four points lie on the line passing through  $O$ . By the theorem 9 these points lie on the equilateral circumhyperbola and we can use the assertion of previous problem.

14. The pedal circles of two isogonal points coincide. So the assertion of problem follows from the theorems 9, 15.

15. The similarity  $\mathcal{F}$  transforming one of given triangles to the other is the composition of reflection in some line  $l$  passing through common orthocenter  $H$  and homothety with center  $H$ . Let  $\Gamma$  be an equilateral circumhyperbola of given triangle  $ABC$  such that one of its asymptotes is parallel to  $l$ . Similarly  $\Gamma'$  is the equilateral hyperbola of second triangle  $A'B'C'$  with the same directions of asymptotes.  $\Gamma$  and  $\Gamma'$  have three real common points:  $H$ , and two infinite points. So their fourth common point  $P$  is also real.  $\mathcal{F}$  define projective transformation from  $\Gamma$  to  $\Gamma'$  such that three common points of hyperbolaes leave fixed. The single transformation with this property is the projection from fourth common point  $P$ . So  $P$  is the perspective center of given triangles.