Иван Трајков
Скопје

I ДОКАЖУВАЊЕ НА УСЛОВНИ РАВЕНСТВА

Докажувањето на равенствата предизвикува интерес кај учениците од две причини; прво, учениците се самопроверуваат при што ученикот знае дали точно ја решил задачата или не, и второ, кај равенствата честопати се застапени повеќе сметковни операции што даваат можност за целосно увежбување на изучениот материјал.

За да се докаже едно равенство, најчесто се користи една од следните методи:

1. Се трансформираат посебно левата и посебно десната страна на равенството се додека не се добијат изрази исти од двете страни:

2. Се трансформира само едната страна на равенството (обично послoжената страна) се дотаму додека не се добие израз еднаков со изразот од другата страна.

3. Се врши ослободување од заградите, ако ги има, и се подредуваат членовите на изразот (се мисли на алгебарски израз) по степените на една од променливите што се зема за главна променлива, па, ако коефициентите пред еднаквите степени на таа променлива се соодветно еднакви, тогаш равенството е докажано.

Сите претходни укажувања може да се соединат во едно, а тоа е да се направи разлика од двете страни на равенството, па, ако таа разлика е еднаква на нула, тогаш равенството е докажано. Се користи, **ако** е $x = y$, тогаш $x-y = 0$ и, обратно, **ако** е $x-y = 0$, тогаш $x = y$, т.е. $(x-y = 0) \Leftrightarrow (x = y)$. Не ни е целта овде да разгледуваме општо равенство, туку да ги разгледуваме таканаречените **условни равенства**, коишто предизвикуваат посебен интерес кај учениците.

Тоа се равенства што се точни при некои дополнителни (еден или повеќе) услови.

Така на пример:

Докажи го равенството $x^2y^2+3 = (x^2+x+1)(y^2+y+1)$, ако е $x+y = 1$ (ќе го докажеме подоцна).

Начинот што ќе го изложиме овде може да се примени и при решавањето на други два вида задачи, имено: при скратувањето на алгебарските дропки и при делењето на полиномите. Препорачуваме најнапред да се примени начинот при скратувањето на алгебарските дропки.

На пример: Скрати ја дропката:

$$A = \frac{3x^2-x^2-x-1}{x-1}, \quad \text{ако е} \quad x \neq 1.$$

Ако дадената дропка е кратлива, тогаш броителот сигурно може да се разложи на множители од кои едниот е $x-1$, т.е. еднаков на именителот. Тоа пак значи дека броителот треба да го разложиме на множители како цел алгебарски израз, при што едниот множител е веќе познат (изразот $x-1$).

Значи, полиномот $3x^3-x^2-x-1$ е подреден по степените на променливата x при што членот $3x^3$ е со највисок степенов показател, па според тоа пред заграда ќе го изнесеме множителот $3x^2$ за да остане во заградата променливата $x-1$ што ни треба.

Во заградата треба да ни остане изразот $x-1$, но бидејќи множителот пред заградите е $3x^2$ јасно е дека во дадениот израз недостасува членот $-3x^2$. Тоа значи дека треба да го додадеме и да го одземеме тој член ($-3x^2+3x^2 = 0$), а тоа значи дека изразот не се менува, бидејќи сме додале нула.

Понатаму добиваме:

$$3x^3-x^2-x-1 = 3x^3-3x^2+3x^2-x^2-x-1 = 3x^2(x-1)+2x^2-x-1 =$$
$$= 3x^2(x-1)+2x(x-1)+2x-x-1 = 3x^2(x-1)+2x(x-1)+x-1 =$$
$$= (x-1)(3x^2+2x+1)$$

Според тоа, за изразот A добиваме:

$$A = \frac{3x^2-x^2-x-1}{x-1} = \frac{(x-1)(3x^2+2x+1)}{x-1} = 3x^2+2x+1 \text{ за } x \neq$$

За поцелосно усвојување ќе приведеме уште еден пример кој во суштина не се разликува многу од претходниот.

На пример, скрати ја дропката:

$$A = \frac{x^4-2x^3-3x^2+8x-4}{x^4-3x^2+2x}$$ за $x \neq 1$, а потоа на добиениот резултат најди ја бројната вредност за $x = -\frac{1}{2}$.

При решавањето на оваа задача нема да ја објаснуваме постапката на разложувањето како во претходната, туку тоа му го препуштаме на читателот.

$$A = \frac{x^4-2x^3-2x^2-x^2+4x+4x-4}{x^4-x^2-2x^2+2x} = \frac{x^3(x-2)-2x(x-2)-(x-2)^2}{x^2(x^2-1)-2x(x-)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x^3-2x-x+2)}{(x-1)[x^2(x+1)-2x]} = \frac{(x-2)[x(x^2-1)-2(x-1)]}{x(x-1)(x^2+x-2)} =$$

$$= \frac{(x-2)[(x-1)(x^2+x-2)]}{x(x-1)(x^2+x-2)} = \frac{x-2}{x}, \quad x \neq 1, \ x \neq -2$$

Во добиениот резултат заменуваме $x = -\frac{1}{2}$ и добиваме дека бројната вредност на изразот е 5. За увежбување препорачуваме читателот да состави повеќе такви примери, при што да помножи два или повеќе цели алгебарски изрази и добиениот производ да го земе за броител (именител), а еден или два од множителите за именител (броител) на алгебарската дропка.

Ако кај некоја задача како претходните две не ја постигнеме целта, т.е. не може да се разложи, не треба веднаш да заклучиме дека дропката не е кратлива (не се крати). Можно е да се се крати, но заедничкиот множител не е еднаков на именителот (броителот), а да е еден од неговите множители на кои евентуално може да се разложи.

На пример: Скрати ја дропката $A = \frac{2x^3+5x^2-8x+1}{x^4-x^3+x-1}$.

Именителот на дропката лесно се разложува на прости множители, т.е.

$$x^4-x^3+x-1 = x^3(x-1)+(x+1) =$$

$$= (x-1(x^3+1) = (x-1)(x+1)(x^2-x+1),$$

но броителот потешко се разложува на прости множители ако се имаат предвид досегашните наши предзнаења. Но со непосредна проверка се гледа дека за $x = 1$ броителот добива вредност нула, а за таа вредност и именителот добива исто така вредност нула. Значи, еден од множителите на броителот е $x-1$. Разложувањето на броителот на прости множители го добиваме со делење на полиномот $2x^3+5x^2-8x+1$ со биномот $x-1$, при што за количник го добиваме полиномот $2x^2-7x-1$, па понатаму имеме

$$A = \frac{(x-1)(2x^2+7x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)},$$

а скратувањето овде нема да го извршиме. (Зошто?).

Да нагласиме и тоа дека особена примена при разложувањето имаат формулите за скратено множење и за скратено делење.

Да разгледаме сега некои условни равенства и да ги примениме изложените начини при нивното докажување.

Најнапред ќе се вратиме на почетокот на поставената задача.

Задача 1. Докажи го равенството:

$$x^2y^2+3 = (x^2+x+1)(y^2+y+1) \quad \text{ако} \quad x+y = 1.$$

Го изравнуваме на нула даденото равенство, т.е. правиме разлика од два полинома, па ако докажеме дека при дадениот услов разликата е нула тогаш задачата сме ја решиле.

$$(x^2+x+1)(y^2+y+1)-x^2y^2-3 = 0.$$

Ја трансформираме левата страна на последното равенство, имајќи предвид дека x+y = 1. Добиваме:

$$\begin{aligned}
&(x^2+x+1)(y^2+y+1)-x^2y^2-3 = \\
&= x^2y^2+xy^2+y^2+x^2y+xy+y+x^2+x+1-x^2y^2-3 = \\
&= y^2(x+1)+xy(x+1)+(x+y)+x^2-2 = \\
&= y^2(x+1)+xy(x+1)+1+x^2-2 = \\
&= y^2(x+1)+xy(x+1)+x^2-1 = \\
&= y^2(x+1)+xy(x+1)+(x+1)(x-1) = \\
&= (x+1)(y^2+xy+x-1) = \\
&= (x+1)(y(x+y)+x-1) = \\
&= (x+1)(y+x-1) = \\
&= (x+1)((x+y)-1) = \\
&= (x+1)(1-1) = \\
&= (x+1)0 = 0.
\end{aligned}$$

Добиваме дека 0 = 0, со што тврдењето во задачата е докажано.

Задачата може да биде решена и на друг начин, ако ја трансформираме десната страна на равенството имајќи го предвид $x+y=1$, се додека не ја добиеме левата страна. Но, тоа му го препуштаме на читателот.

Задача 2. Ако $a+b+c=0$ тогаш

$2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$. Докажи!

Доказ: Се ослободуваме од заградите и ја формираме разликата од двете страни на равенството, и добиваме:

$$2(a^4+b^4+c^4)-(a^2+b^2+c^2)^2=0 \quad \text{т.е.}$$

$$2a^4+2b^4+2c^4-a^4-b^4-c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=0,$$

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=0,$$

понатаму со извлекување пред заграда a^3, b^3 и c^3 соодветно, ќе добиеме:

$$a^3(a+b+c)-a^3b-a^3c+b^3(a+b+c)-ab^3-b^3c+c^3(a+b+c)-$$
$$-ac^3-bc^3-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=0.$$

Ако ги изоставиме членовите што го имаат множителот $a+b+c$, бидејќи се нули, а со другите собироци продолживме со разложувањето, добиваме:

$$-a^2b(a+b+c)+a^2b^2+a^2bc-ab^2(a+b+c)+a^2b^2+$$
$$+ab^2c-a^2c(a+b+c)+a^2bc+a^2c^2-ac^2(a+b+c)+a^2c^2+$$
$$+abc^2-b^2c(a+b+c)+ab^2c+b^2c^2-bc^2(a+b+c)+abc^2+$$
$$+b^2c^2-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2=0.$$

Ги изоставаме пак членовите што го содржат множителот $a+b+c$, па добиваме: $2a^2bc+2ab^2c+2abc^2=0$, односно $2abc(a+b+c)=0$. $0=0$. Значи, равенството е точно.

Задача 3. Ако $a+b+c=0$ и $a\neq b\neq c\neq 0$; $a\neq 0\neq b\neq,\ c\neq 0$, тогаш

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9. \text{ Докажи!}$$

Доказ: Ја трансформираме левата страна на равенството, и добиваме:

$$3+\frac{c^2-c(a+b)}{ab}+\frac{a^2-a(b+c)}{bc}+\frac{b^2-b(a+c)}{ac}=9.$$

Од условното равенство ги добиваме: $a+b=-c$, $b+c=-a$ и $a+c=-b$ и со замена во претходното равенство добиваме: $3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}=9$. Накрај, ако ја искористиме задача 2, добиваме $3+\frac{2\cdot 3abc}{abc}=9$, односно $9=9$.

Со што равенството е докажано.

Задача 4. Ако $abc=1$ и $ab+a+1\neq 0$, тогаш $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1$. Докажи!

Доказ: Од условот $abc=1$, следува дека нокој од броевите a, b, c не е нула, а тоа значи дека еден од тие броеви може да се изрази преку другите два.

Од $abc=1$ имаме $b=\frac{1}{ac}$ и го заменуваме во релацијата $ab+a+1\neq 0$, т.е. $a\frac{1}{ac}+a+1=\frac{1}{c}+a+1=\frac{1+ac+c}{c}\neq$ $\neq 0$ и бидејќи $c\neq 0$, тогаш $ac+c+1\neq 0$. Аналогно добиваме дека $bc+b+1\neq 0$. Тоа значи дека левата страна на равенството што треба да го докажеме е определена.

Од условот $abc=1$ имаме $c=\frac{1}{ab}$ и ако оваа вредност за c ја замениме во равенството, ќе добиеме

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{b\cdot\frac{1}{ab}+b+1}+\frac{\frac{1}{ab}}{a\cdot\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}+1}=1,$$ па со средување се добива $\frac{ab+a+1}{ab+a+1}=1$. Значи, равенството при тие услови е точно.

Задача 5. Докажи дека важи равенството

$ayz+bxz+cxy=\frac{-3abc}{a+b+c}$, ако $x+u+z\neq 0$ и

$x^2+xy+xz=a$ (1); $y^2+xy+yz=b$ (2); $z^2+xz+yz=c$ (3).

Доказ: Ако равенството (1) го помножиме со yz, равенството (2) со xz и равенството (3) со xy, па добиените равенства ги собереме добиваме:

$ayz+bxz+cxy=3xyz(x+y+z)$ ..... (*).

Од условните равенства (1), (2) и (3) наоѓаме:

$$x = \frac{a}{x+y+z}, \quad y = \frac{b}{x+y+z} \text{ и } z = \frac{c}{x+y+z}.$$

Ги помножуваме последните три равенства и добиваме
$$xyz = \frac{abc}{(x+y+z)^3}.$$

Добиената вредност за xyz ја заменуваме во равенството (*) и добиваме

$$ayz+byz+cxy = 3\cdot\frac{abc}{(x+y+z)^3}(x+y+z) = \frac{3abc}{(x+y+z)^2}.$$

Но, $x+y+z = \dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ од каде $(x+y+z)^2 = a+b+c$,

па тогаш $ayz+bxz+cxy = \dfrac{3abc}{a+b+c}$, при што $a+b+c \neq 0$.

Задача 6. Ако $x^2+x+1 = 0$, тогаш $x^{23}+\frac{1}{x^{23}} = -1$.

Докажи!

Доказ: Од $x^2+xH = 0$ следува дека $x \neq 0$ и $x+1+\frac{1}{x} = 0$, т.е. $x+\frac{1}{x} = -1$. Двете страни на равенството $x^2+x+1 = 0$ ги множиме со x, па добиваме $x^3+x^2+x = 0$.

Од овие равенства следува дека $x^3 = 1$. Во тој случај имаме:

$$x^{23} + \frac{}{x^{23}} = (x^3)^7; \quad x^2 + \frac{1}{(x^3)^7x^2} = (1)^7; \quad x^2 + \frac{1}{(1)^7\ x^2} =$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = (-1)^2-2 = -1$$

На крајот да потцртаме дека изложениот начин за докажување равенства при дадени услови може да се користи при докази дали еден полином е делив со друг, при што доволно е да го разложиме дадениот полином на множители од кои едниот е познат. Значи, тие задачи не се разликуваат по ништо од скратувањето на алгебарските дропки. Бидејќи за доказот на условните равенства го применуваме истиот начин како и кај скратувањето на дропките, тоа значи, изнесените начини може да се применат и на видоизменети задачи. На пример, задачата 2 а) што ја решивме на повеќе начини (три), може да се трансформира и вака: да се докаже дека полиномот

$a^3+b^3+c^3-3abc$ е делив со полиномот $a+b+c$, или да се скрати дропката:

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}.$$

Истото се однесува и на другите задачи со исклучок на оние што имаат повеќе од едно условно равенство.

Вежби:

1. Скрати ја дропката:

а) $\dfrac{a^3+2a^2-3}{a^3-3a^2+3a-1}$; **б)** $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}$;

а) $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

2. Ако $10a^2 = 10b^2+c^2$, тогаш $(7a-3b+2c)(7a-3b-2c)= = (3a-7b)^2$. Докажи!

3. Ако барем два од броевите a, b и c се спротивни, тогаш важи равенството $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$. Докажи!

4. Ако $x+\dfrac{1}{x}=2$, тогаш $x^4+\dfrac{1}{x^4}=2$. Докажи!

5. Ако $x^2+x+1=0$, тогаш

$x^{14}+\dfrac{1}{x^{14}}=-1$. Докажи!

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус