

## VIII олимпијада

1. На една олимпијада биле дадени три задачи  $A, B$  и  $C$ . Дваесет и пет учесници на натпреварот решиле барем една задача. Учесниците кои ја решиле задачата  $B$ , а не ја решиле задачата  $A$ , биле два пати повеќе од оние кои ја решиле задачата  $C$ , а не ја решиле задачата  $A$ . Учесниците кои ја решиле само задачата  $A$ , биле за еден повеќе од оние кои покрај задачата  $A$ , решиле и уште некоја друга задача. Половина од учениците кои решиле една задача, ја решиле само задачата  $A$ . Колку ученици ја решиле само задачата  $B$ .

**Решение.** Нека  $x, y, z$  е бројот на ученици кои ја решиле само задачата  $A, B, C$  соодветно;  $t, u, v$  е бројот на ученици кои ги решиле само задачите  $A$  и  $B, B$  и  $C, A$  и  $C$ , соодветно, и нека  $w$  е бројот на ученици кои ги решиле сите три задачи. Имаме:

$$x + y + z + t + u + v + w = 25 \quad (1)$$

$$y + u = 2(z + u) \quad (2)$$

$$x - 1 = t + v + w \quad (3)$$

$$x + y + z = 2(y + z) \quad (4)$$

Јасно,  $x, y, z, t, u, v, w \in \mathbb{N}$ . Од (1) и (3) следува

$$2x + y + z + u = 26, \quad (5)$$

а од (2) и (4) се добива

$$y - 2z - u = 0 \quad (2')$$

$$-x + y + z = 0 \quad (4')$$

Сега од (5), (2') и (4') добиваме

$$z = 26 - 4y \quad (6)$$

$$u = y - 2(26 - 4y) = 9y - 52 \quad (7)$$

Бидејќи  $y, z$  и  $u$  се природни броеви, од (6) добиваме  $y \leq 6$ , а од (7) добиваме  $y \geq 6$ . Значи, ако постои решение, тогаш  $y = 6$ .

Решение постои, на пример:  $x = 8, y = 6, z = 2, t = 3, u = 2, v = 2, w = 2$ .

2. Нека  $a, b, c$  се должините на страните, а  $\alpha, \beta, \gamma$  се соодветните агли наспроти страните на триаголникот. Докажи дека, ако  $a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta)$ , тогаш триаголникот е рамнокрак.

**Решение.** Ако  $\alpha, \beta, \gamma$  се агли на триаголникот, тогаш

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}},$$

што значи дека даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$a\left(1 - \operatorname{tg}\alpha \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}\right) + b\left(1 - \operatorname{tg}\beta \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}\right) = 0.$$

Ако последното равенство го помножиме со  $\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \alpha \cos \beta$ , добиваме

$$a \cos \beta \left(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \alpha - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \alpha\right) + b \cos \alpha \left(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \beta - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \beta\right) = 0.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$\sin \frac{\alpha-\beta}{2} (a \cos \beta - b \cos \alpha) = 0.$$

Значи,  $\sin \frac{\alpha-\beta}{2} = 0$ , т.е.  $\alpha = \beta$ , па триаголникот е рамнокрак, или

$$a \cos \beta = b \cos \alpha.$$

Од синусната теорема имаме

$$a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

па ако ги quadriраме последните две равенства и ги собиреме добиваме

$$a^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = b^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta),$$

од што следува  $a = b$  т.е. триаголникот е рамнокрак.

3. Докажи дека збирот на растојанијата од центарот на сферата опишана околу правилен тетраедар до неговите темиња е помал од збирот на растојанијата од било која друга точка до темињата на тетраедарот.

**Решение.** Поставуваме координатен систем  $Oxyz$  така што врвовите на тетраедарот, за некој  $a > 0$  се точките  $A(-a, -a, -a)$ ,  $B(a, a, -a)$ ,  $C(a, -a, a)$  и  $D(-a, a, a)$ . (Лесно се проверува дека  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{DC}$ ). Збирот на растојанијата од точка  $(x, y, z)$  до темињата  $A, B, C, D$  е

$$f(x, y, z) = \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2 + (z+a)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z+a)^2} \\ + \sqrt{(x-a)^2 + (y+a)^2 + (z-a)^2} + \sqrt{(x+a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2}.$$

Од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина следува

$$f(x, y, z) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} [|x+a| + |y+a| + |z+a| + |x-a| + |y-a| + |z-a|]. \quad (1)$$

За да се докаже дека  $f(x, y, z) \geq 4\sqrt{3}a$ , заради симетријата на изразот на десната страна на (1) доволно е да се докаже дека

$$|x+a| + |x-a| \geq 2a.$$

Последното неравенство едноставно се проверува.

За  $x \geq a$  имаме  $|x+a| + |x-a| = x+a + x-a = 2x \geq 2a$ .

За  $x \leq -a$  имаме  $|x+a| + |x-a| = a+x + |x| - a = 2|x| \geq 2a$ .

За  $|x| \leq a$  имаме  $|x+a| + |x-a| = a-x + a+x = 2a \geq 2a$ .

Равенство важи ако и само ако  $x = y = z = 0$ , т.е. ако и само ако точката  $(x, y, z)$  е центар на опишаната сфера околу тетраедарот.

4. Нека  $n \in \mathbb{N}$  и  $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ , каде  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Докажи дека

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x.$$

**Решение.** Од  $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  следува  $\sin 2^k x \neq 0$  и затоа постојат и  $\operatorname{ctg} 2^k x$  и  $\operatorname{ctg} 2^{k-1} x$ . Според тоа, можеме да го користиме идентитетот

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Равенството ќе го докажеме со математичка индукција. За  $n = 1$ , тоа очигледно важи. Нека претпоставиме дека тоа важи за  $n = m$ , т.е.

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 6x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^m x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^m x.$$

Тогаш, за  $n = m + 1$  имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^m x} + \frac{1}{\sin 2^{m+1} x} &= (\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^m x) + (\operatorname{ctg} 2^m x - \operatorname{ctg} 2^{m+1} x) \\ &= \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^{m+1} x, \end{aligned}$$

што значи дека равенството важи и за  $n = m + 1$ . Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека равенството важи за секој  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Реши го системот равенки

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| x_2 + |a_1 - a_3| x_3 + |a_1 - a_4| x_4 &= 1 \\ |a_2 - a_1| x_1 + |a_2 - a_3| x_3 + |a_2 - a_4| x_4 &= 1 \\ |a_3 - a_1| x_1 + |a_3 - a_2| x_2 + |a_3 - a_4| x_4 &= 1 \\ |a_4 - a_1| x_1 + |a_4 - a_2| x_2 + |a_4 - a_3| x_4 &= 1 \end{aligned}$$

каде  $a_1, a_2, a_3, a_4$  се дадени реални броеви такви што  $a_i \neq a_j$ , за  $i \neq j$ .

**Решение.** Ако кои било два различни индекси  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  си ги заменат местата системот не го менува обликот. Затоа можеме да претпоставиме дека  $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ . Тогаш

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2)x_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (a_1 - a_4)x_4 &= 1 \\ (a_1 - a_2)x_1 + (a_2 - a_3)x_3 + (a_2 - a_4)x_4 &= 1 \\ (a_1 - a_3)x_1 + (a_2 - a_3)x_2 + (a_3 - a_4)x_4 &= 1 \\ (a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата, од третата ја одземеме втората и од четвртата равенка ја одземеме третата добиваме

$$(a_1 - a_2)(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0,$$

$$(a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0,$$

$$(a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0.$$

Дадениот систем е еквивалентен на системот:

$$x_1 = x_2 + x_3 + x_4,$$

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4,$$

$$(a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1.$$

Од првите три равенки добиваме  $x_2 = x_3 = 0$  и  $x_1 = x_4$ . Од последната равенка добиваме  $x_1 = \frac{1}{a_1 - a_4}$ .

6. Нека  $M, K, L$  се точки од страните  $AB, BC, CA$  од  $\triangle ABC$ , соодветно, такви што ниту една од нив не е негово теме. Докажи дека плоштината на барем еден од триаголниците  $AML, BKM, CLK$  не е поголема од  $\frac{1}{4}$  од плоштината на  $\triangle ABC$ .

**Решение.** Нека  $\overline{AM} : \overline{AB} = x$ ,  $\overline{BK} : \overline{BC} = y$ ,  $\overline{CL} : \overline{CA} = z$ . Тогаш,

$$\overline{AM} = x\overline{AB}, \overline{BM} = (1-x)\overline{AB},$$

$$\overline{BK} = y\overline{BC}, \overline{CK} = (1-y)\overline{BC},$$

$$\overline{CL} = z\overline{CA}, \overline{AL} = (1-z)\overline{CA},$$

и  $x, y, z \in (0, 1)$ , па затоа

$$\begin{aligned} P_{AML} \cdot P_{BKM} \cdot P_{CLK} &= \frac{1}{8} \overline{AB}^2 \overline{AC}^2 \overline{BC}^2 x(1-x)y(1-y)z(1-z) \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ &\leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \overline{AB}^2 \overline{AC}^2 \overline{BC}^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \left(\frac{P}{4}\right)^3 \end{aligned}$$

Значи,

$$\frac{4P_{AML}}{P} \cdot \frac{4P_{BKM}}{P} \cdot \frac{4P_{CLK}}{P} \leq 1$$

па затоа барем еден од множителите од левата страна не е поголем од 1.

Во доказот е користено неравенството

$$\lambda(1-\lambda) \leq \frac{1}{4} \text{ за } 0 < \lambda < 1.$$

