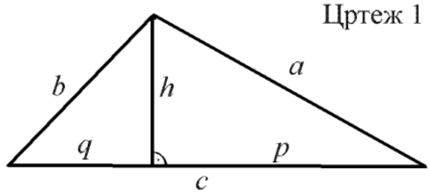
Даниела Василевска
ОУ Ѓорѓија Пулевски, Скопје

НЕМОЈТЕ ДА СЕ ИЗЛАЖЕТЕ, ХЕРОНОВАТА ФОРМУЛА ПОМАГА

Во нашите разгледувања ќе се осврнеме на еден пример во кој на прв поглед има грешка. Но, за таа цел ни е потребна таканаречената Херонова формула за пресметување на плоштина на триаголник, која најпрво ќе ја изведеме.

Да го разгледаме цртеж 1. Од Питагоровата теорема следува



Цртеж 1

$$h^2 = b^2 - q^2 = a^2 - p^2,$$

па затоа

$$p^2 - q^2 = a^2 - b^2$$

и како $p + q = c$ од последната формула добиваме

$$p - q = \frac{a^2 - b^2}{c}.$$

Според тоа,

$$2p = p + q + (p - q) = c + \frac{a^2 - b^2}{c} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{c},$$

па затоа

$$2pc = a^2 + c^2 - b^2. \tag{1}$$

Понатаму, од $2P = ch$ и повторно од Питагоровата теорема следува дека

$$16P^2 = 4c^2h^2 = 4c^2(a^2 - p^2) = 4c^2a^2 - 4c^2p^2,$$

и ако замениме од (1) добиваме

$$\begin{aligned} 16P^2 &= 4c^2a^2 - 4c^2p^2 = 4c^2a^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 \\ &= (2ca + a^2 + c^2 - b^2)(2ca - a^2 - c^2 + b^2) \\ &= [(a + c)^2 - b^2][b^2 - (c - a)^2] \\ &= (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b + c - a). \end{aligned} \tag{2}$$

Сега, а ко ја воведеме ознаката $a + b + c = 2s$, од последната формула добиваме

$$
\begin{aligned}
16P^2 &= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)\\
&= 2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)\\
&= 16s(s-a)(s-b)(s-c),
\end{aligned}
$$

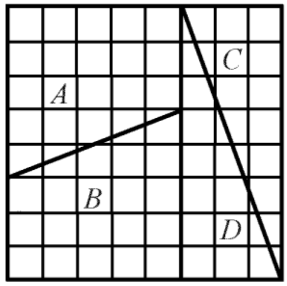
па затоа

$$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

т.е.

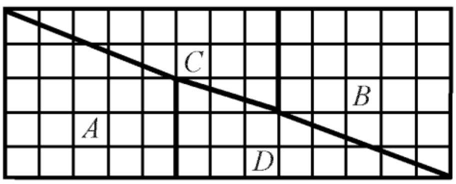
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (3)$$

и тоа е позната Херонова формула за плоштина на триаголник,



Цртеж 2

Сега, да го разгледаме квадратот со должина на страна 8, кој е прикажан на цртеж 2. Квадратот е поделен на два правоаголни триаголника C и D, чии катети се со должини 3 и 8, и на два правоаголни трапеза A и B, со основи 3 и 5 и висина 5. Понатаму, на цртеж 3 се прикажани деловите A, B, C и D на првобитниот квадрат, но така што тие се поинаку распоредени и формираат правоаголник со страни 5 и 13.



Цртеж 3

На прв поглед ништо чудно. Н, дали е тоа така? Внимавај! Квадратот има плоштина $8^2 = 64$, а се чини дека таа е еднаква на плоштината на правоаголникот која изнесува $13 \cdot 5 = 65$.

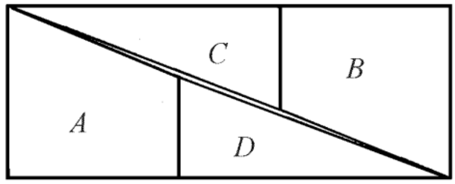
Како е тоа можно, кога $65 \neq 64$?

Нешто не е во ред! Дали нашите пресметки не се добри или пак лошо го гледаме цртежот 3.

Во случајот лошо го гледаме цртежот 3. Имено, ако цртежот 3 го цртаме во поголем размер и многу прецизно, ќе видиме дека во случајот на правоаголникот прикажан на овој цртеж не станува збор за дијагонала, туку на нејзино место се наоѓа паралелограм со страни

$$\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \text{ и } \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73},$$

кои зафаќаат многу мал остар агол. На цртеж 4, со значителна непрецизност, е прикажан овој паралелограм, за кој со помош на Хероновата формула ќе покажеме дека има плоштина 1, и тоа е оној вишок, всушност празнината која треба да се одземе од 65, па повторно ќе добиеме дека вкупната плоштина на ликовите A, B, C и D е еднаква на $65-1=64$.



Цртеж 4

Ако го искористиме равенството (2), добиваме

$$\begin{aligned}4P&=\sqrt{(2ca+a^2+c^2-b^2)(2ca-a^2-c^2+b^2)}\\&=\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2}\\&=\sqrt{4a^2c^2-a^4-b^4-c^4-2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2}\\&=\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}\end{aligned}$$

од каде следува дека формулата за плоштина на паралелограм со страни a и b, и дијагонала c е дадена со

$$2P=\tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}\,. \qquad (4)$$

Во случајот со нашиот паралелограм кој се јавува на цртеж 4 имаме

$$a=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}\,,\ b=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}\ \text{и}\ c=\sqrt{13^2+5^2}=\sqrt{194}\,,$$

и ако замениме во формулата (4), добиваме дека неговата плоштина е

$$\begin{aligned}2P&=\tfrac{1}{2}\sqrt{2(29\cdot 73+73\cdot 194+194\cdot 29)-(29^2+73^2+194^2)}\\&=\tfrac{1}{2}\sqrt{2(2117+14162+5626)-(841+5329+37636)}\\&=\tfrac{1}{2}\sqrt{2\cdot 21905-48806}\\&=\tfrac{1}{2}\sqrt{43810-43806}=\tfrac{1}{2}\cdot 2=1.\end{aligned}$$

Меѓу математичарите постои “шега” дека вистинската задача на геометријата е од лоши цртежи да извлекува точно заклучоци. Претходно разгледаниот пример, всушност е добра поука дека работите не смееме без размислување да ги прифаќаме онакви какви што ни изгледаат на прв поглед. Имено, за она што го гледаме, слушаме или чувствуваме со допир прво треба да размислиме, а потоа да искажуваме свое мислење.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ