

Neke primjene funkcija pod i strop

IVANA KUZMANOVIĆ*

Sažetak. U radu su navedena neka svojstva funkcija pod i strop, te je ilustrirana njihova primjena.

Ključne riječi: cjelobrojne funkcije, funkcije pod i strop

Some applications of floor and ceiling functions

Abstract. In this paper some properties of floor and ceiling functions are given, and their application is illustrated.

Key words: integer functions, floor and ceiling functions

Osnovna svojstva funkcija pod i strop

Funkcija $\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ koja realnom broju x pridružuje najveći cijeli broj koji nije veći od x naziva se funkcija pod (eng. *floor*) ili najveće cijelo. Tako je primjerice $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Slično, funkcija $\lceil \cdot \rceil: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ koja realnom broju x pridružuje najmanji cijeli broj koji nije manji od x naziva se funkcija strop (eng. *ceiling*) ili najmanje cijelo. Tako je primjerice $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 4 \rceil = 4$, $\lceil -\pi \rceil = -3$.

Iz definicije je očigledno

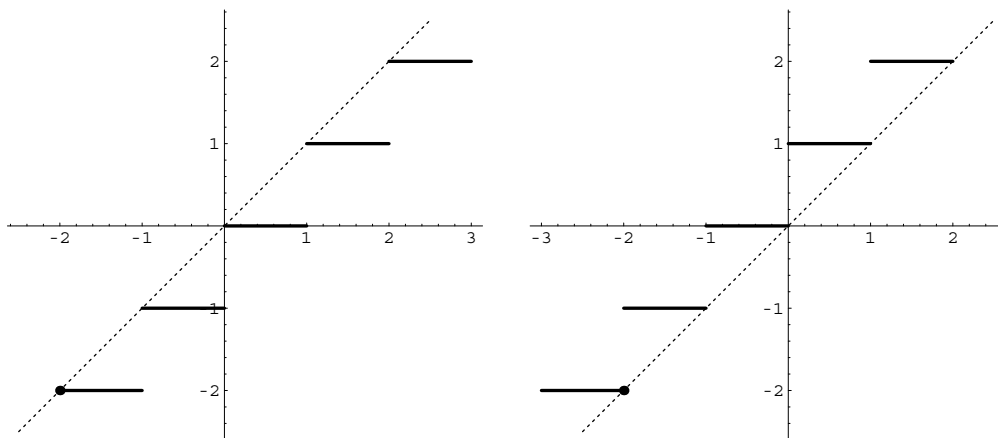
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \text{ i } x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ i } \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil.$$

Dakako, za cjelobrojne argumente vrijednosti tih dviju funkcija su jednake

$$\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z} \iff \lceil x \rceil = x.$$

*Odjel za matematiku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, e-mail: ikuzmano@mathos.hr



Slika 1. Grafovi funkcija pod i strop

Funkcije pod i strop možemo vrlo lako izraziti jednu pomoću druge koristeći jednakosti

$$\begin{aligned} [x] &= -[-x] \\ [x] &= -[-x] \end{aligned}$$

Neka je n cijeli i x realan broj. Iz definicija funkcija pod i strop izravno slijedi

$$\begin{aligned} [x] = n &\iff n \leq x < n + 1 \\ [x] = n &\iff x - 1 < n \leq x \\ [x] = n &\iff n - 1 < x \leq n \\ [x] = n &\iff x \leq n < x + 1 \end{aligned}$$

Također vrijedi i

$$\begin{aligned} [x + n] &= [x] + n \\ [x + n] &= [x] + n \end{aligned}$$

što slijedi iz nejednakosti

$$\begin{aligned} [x] + n &\leq x + n < [x] + n + 1 \\ [x] + n - 1 &< x + n \leq [x] + n \end{aligned}$$

i cjelobrojnosti od $[x] + n$ i $[x] + n$.

Međutim, ovakvo svojstvo ne vrijedi za množenje, tj. općenito je $[nx] \neq n[x]$. Primjerice, ako je $n = 2$ i $x = \frac{1}{2}$, tada je $[nx] = [1] = 1$, ali $n[x] = 2[\frac{1}{2}] = 0$.

Također, općenito za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $[x+y] \neq [x] + [y]$. Primjerice, za $x = 0.3$ i $y = 0.7$ je $[x+y] = 1$, dok je $[x] + [y] = 0$.

Neke primjene funkcija pod i strop

Primjer 1. Broj cijelih brojeva u intervalu $[x, y)$. Za cijeli broj n je $n \in [x, y)$ ako i samo ako je $x \leq n < y$, a kako je

$$x \leq n \Leftrightarrow [x] \leq n \quad i \quad n < y \Leftrightarrow n < [y]$$

to ako i samo ako je $[x] \leq n < [y]$, pa cijelih brojeva u intervalu $[x, y)$ ima $[y] - [x]$.

Primjer 2. Broj znamenaka u binarnom zapisu. Cijeli broj n ima m znamenaka u binarnom zapisu ako i samo ako je

$$2^{m-1} \leq n < 2^m,$$

a to je ako i samo ako je

$$m - 1 \leq \log_2 n < m,$$

što je ako i samo ako je

$$m - 1 = \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Dakle, cijeli broj n u binarnom zapisu ima $m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ znamenaka.

Osim ovih jednostavnih primjena, sljedeća lema i teorem dat će nam čitav spektar problema teorije brojeva koji se učinkovito rješavaju primjenom funkcije pod.

Lema 1. Neka su $n, k \in \mathbb{N}$. Tada je broj svih višekratnika $v \leq n$ broja k jednak $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

Dokaz. Neka je $n = qk + r$, gdje su $q, r \in \mathbb{N}_0$ i $r < k$. Tada su traženi višekratnici broja k : $k, 2k, 3k, \dots, qk$, tj. ukupno ih ima q . S druge strane je

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{qk + r}{k} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{k} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{k} \right\rfloor = q,$$

čime je tvrdnja leme dokazana. □

Primjer 3. Odrediti broj višekratnika od 7 među brojevima

$$567, 568, 569, \dots, 1233, 1234.$$

Rješenje: Višekratnika od 7 manjih ili jednakih 1234 ima

$$\left\lfloor \frac{1234}{7} \right\rfloor = 176.$$

Od tog broja treba oduzeti broj višekratnika od 7 manjih od 567, tj. broj

$$\left\lfloor \frac{566}{7} \right\rfloor = 80,$$

pa je traženi broj višekratnika $176 - 80 = 96$.

Primjer 4. *Odrediti broj peteroznamenkastih brojeva koji su djeljivi sa 6, a nisu djeljivi s 30.*

Rješenje: Treba odrediti broj višekratnika od 6 koji nisu višekratnici od 30 među brojevima 10000, 10001, ..., 99999. Broj višekratnika od 6 u danom nizu je

$$\left\lfloor \frac{99999}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9999}{6} \right\rfloor = 15000.$$

Svaki višekratnik od 30 je ujedno i višekratnik od 6, pa od broja višekratnika od 6 u danom nizu treba oduzeti broj višekratnika od 30 u danom nizu, tj. broj

$$\left\lfloor \frac{99999}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9999}{30} \right\rfloor = 3000.$$

Sada je traženi broj $15000 - 3000 = 12000$.

Teorem 1. *Neka je n prirodan broj, p prost broj i s prirodan broj takav da je $p^s \leq n < p^{s+1}$, te a najveći prirodan broj za koji vrijedi $p^a | n!$. Tada je*

$$a = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor.$$

Dokaz: Prema Lemi 1, broj višekratnika od p koji se pojavljuju kao faktori produkta $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, od p^2 jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$, od p^3 jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$, ..., od p^s jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor$. Uočimo da za $k \geq s + 1$ nema višekratnika od p^k koji nisu veći od n jer za takve k vrijedi $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{p^{s+1}} \right\rfloor = 0$, što zajedno s $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \geq 0$ daje $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$. Sada je očigledno da je suma iz tvrdnje teorema traženi eksponent jer je svaki faktor produkta $n!$ koji je višekratnik od p^m , a nije višekratnik od p^{m+1} , brojen na navedeni način točno m puta i to kao višekratnik od p, p^2, p^3, \dots, p^m . \square

Primjer 5. *Odrediti eksponent broja 3 u rastavu broja 100! na produkt prostih faktora.*

Rješenje: Prema Teoremu 1, traženi eksponent jednak je

$$\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^4} \right\rfloor = 33 + 11 + 3 + 1 = 48.$$

Primjer 6. *Rastaviti broj 10! na produkt prostih faktora.*

Rješenje: Treba odrediti eksponente prostih faktora $p \leq 10$ u rastavu broja 10! na produkt prostih faktora. Imamo redom:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^3} \right\rfloor &= 5 + 2 + 1 = 8, \\ \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{3^2} \right\rfloor &= 3 + 1 = 4, \\ \left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor &= 2, \\ \left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor &= 1. \end{aligned}$$

Stoga, $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Primjer 7. Dokazati da je $\frac{2008!}{7^{330} \cdot 11^{190}}$ prirodan broj.

Rješenje: Neka je a najveći eksponent broja 7 i b najveći eksponent broja 11 tako da su 7^a i 11^b djelitelji od $2008!$. Tada je

$$a = \left\lfloor \frac{2008}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{7^3} \right\rfloor = 286 + 40 + 5 = 331,$$

$$b = \left\lfloor \frac{2008}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{11^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{11^3} \right\rfloor = 182 + 16 + 1 = 199,$$

pa broj $7^{330} \cdot 11^{190}$ dijeli broj $2008!$, te je zadani broj zaista prirodan.

Primjer 8. *S koliko nula završava broj $2008!$?*

Rješenje: Prirodan broj završava s onoliko nula kolika je najveća potencija broja 10 koja dijeli taj broj. Kako je $10 = 2 \cdot 5$ i 2 je faktor s najvećim eksponentom u rastavu broja $2008!$ na produkt prostih faktora, broj $2008!$ završava s onoliko nula koliki je eksponent broja 5 u rastavu tog broja na produkt prostih faktora. Prema tome, broj $2008!$ završava s

$$\left\lfloor \frac{2008}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{5^4} \right\rfloor = 401 + 80 + 16 + 3 = 500$$

nula.

Primjer 9. *S koliko nula završava $\binom{180}{90}$?*

Rješenje: Kako je $\binom{180}{90} = \frac{180!}{90!90!}$, od kratnosti faktora 5 u brojniku, moramo oduzeti njegovu kratnost u nazivniku

$$\left\lfloor \frac{180}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{180}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{180}{5^3} \right\rfloor = 36 + 7 + 1 = 44$$

$$\left\lfloor \frac{90}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{5^2} \right\rfloor = 18 + 3 = 21,$$

pa $\binom{180}{90}$ završava s $44 - 2 \cdot 21 = 2$ nule.

Primjer 10. Dokazati da $n!$ nije djeljiv s 2^n .

Rješenje: Neka je $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Tada je eksponent najveće potencije od 2 koja dijeli $n!$ jednak

$$a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^k} = n \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) < n,$$

pa 2^n ne dijeli $n!$.

Primjer 11. Dokazati da je za prirodne brojeve m i n , broj $\frac{(mn)!}{(m!)^n n!}$ prirodan broj.

Rješenje: Neka su r i s takvi da je $p^r \leq n < p^{r+1}$, $p^s \leq m < p^{s+1}$. Tada je $mn < p^{r+s+2}$. Dovoljno je pokazati da je

$$S = \sum_{i=1}^{r+s+1} \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - n \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \geq 0$$

za sve proste brojeve p .

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=s+1}^{s+r} \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{mn}{p^{r+s+1}} \right\rfloor - n \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \\ &= \sum_{i=1}^s \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \right) + \sum_{i=1}^r \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^{s+i}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{mn}{p^{r+s+1}} \right\rfloor \\ &\geq \sum_{i=1}^s \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \right) + \sum_{i=1}^r \left(\left\lfloor \frac{np^s}{p^{s+i}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{i=1}^s \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \right) \geq \sum_{i=1}^s \left(n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \right) = 0. \end{aligned}$$

Zadaci

Zadatak 1. *Odredite eksponent broja 17 u rastavu broja 1000! na produkt prostih faktora.*

Zadatak 2. *Rastavite na produkt prostih faktora brojeve 15!, 20!, 25! i 30!.*

Zadatak 3. *S koliko nula završavaju brojevi 300!, 456!, 1200 i 2000!?*

Zadatak 4. *S kojom je najvećom potencijom broja 12 djeljiv broj 100!?*

Zadatak 5. *Koji eksponent ima prost broj p u rastavu broja $p^n!$ na produkt prostih faktora?*

Zadatak 6. *Dokažite da je $\frac{200!}{3^{60} \cdot 5^{40} \cdot 7^{20}}$ prirodan broj!*

Literatura

- [1] R.L. GRAHAM, D.E. KNUTH, D. PATASHNIK, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley, USA, 1994.
- [2] L. ČELIKOVIĆ, *Antje funkcija*, Društvo mladih matematičara "Pitagora", Beli Manastir, 1990.
- [3] B. PAVKOVIĆ, B. DAKIĆ, P. MLADINIĆ, *Elementarna teorija brojeva*, Element, Zagreb, 1994.
- [4] B. PAVKOVIĆ, D. VELJAN, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [5] N. ELEZOVIĆ, *Odabrani zadaci elementarne matematike*, Element, Zagreb, 1992.