Самоил Малчески
Скопје

БИНАРЕН БРОЕН СИСТЕМ

При докажување на некои својства на природните броеви се користиме со записот на броевите со помош на цифри, т.е. со *декадниот систем*, со основа 10, кој користи десет цифри. Меѓутоа, често пати во употреба се и бројни системи со основа различна од бројот 10. Така, на пример, во информатиката најчесто користен е *бинарниот* (*дијадскиот*) броен систем, кој има основа 2. Принципот на запишување на броевите во други бројни системи, како што е бинарниот, е ист како и во декадниот, само наместо основа 10 се зема основа b. Следнава теорема претставува основа за користење на бројни системи со различна основа.

Теорема 1. Нека b е природен број поголем од 1. Тогаш секој природен број m може на единствен начин да се запише во обликот

$$m = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 , \qquad (1)$$

каде $0 < a_n < b$ и $0 \le a_i < b,$ за $i = 0,1,2,...,n-1$.

Доказ. Нека b и m се дадени природни броеви. Според теоремата за делење со остаток постојат q_0 и a_0 такви што

$$m = q_0 b + a_0 , \; 0 \le a_0 < b .$$

Јасно, $q_0 \ge 0$. Ако $q_0 > 0$, тогаш за q_0 и b постојат q_1 и a_1 такви што

$$q_0 = q_1 b + a_1 , \; 0 \le a_1 < b .$$

Продолжувајќи ја постапката добиваме

$$\begin{array}{lll}
m = q_0 b + a_0 , & 0 \le a_0 < b , & q_0 > 0 , \\
q_0 = q_1 b + a_1 , & 0 \le a_1 < b , & q_1 > 0 \\
q_1 = q_2 b + a_2 , & 0 \le a_2 < b , & q_2 > 0 \\
\multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
q_{n-2} = q_{n-1} b + a_{n-1} , & 0 \le a_{n-1} < b , & q_{n-1} > 0 \\
q_{n-1} = q_n b + a_n , & 0 \le a_n < b , & q_n = 0
\end{array}$$

Понатаму, од неравенствата $m > q_0 > q_1 > ... > 0$ следува дека постои природен број q_{n-1} кој е позитивен и е помал од b. Сега од последното равенство следува $a_n = q_{n-1}$, што значи дека a_n е позитивен број. Со последователна замена од горната низа равенства добиваме:

$$
\begin{aligned}
m &= q_0 b + a_0 \\
&= (q_1 b + a_1)b + a_0 = q_1 b^2 + a_1 b + a_0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= (q_{n-1} b + a_{n-1})b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \\
&= q_{n-1} b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \\
&= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 .
\end{aligned}
$$

Со тоа ја докажавме егзистенцијата на претставувањето (1). Останува уште да ја докажеме единственоста. Нека $n \geq s$ и

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = c_s b^s + c_{s-1} b^{s-1} + \ldots + c_2 b^2 + c_1 b + c_0$$

$0 < c_s < b$ и $0 \leq c_j < b$, за $j = 0,1,2,\ldots,s-1$. Тогаш

$$b(a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \ldots + a_2 b + a_1 - c_s b^{s-1} - c_{s-1} b^{s-2} - \ldots - c_2 b - c_1) = c_0 - a_0 ,$$

што значи дека $b \,|\, (c_0 - a_0)$, па затоа $c_0 = a_0$. Ако во горното равенство поделиме со b, тогаш повторувајќи ја постапката добиваме $c_1 = a_1$. Повторувајќи ја постапката, добиваме дека $c_i = a_i$, за $i = 0,1,2,\ldots,s$. Ако $n > s$ имаме

$$a_n b^{n-(s+1)} + a_{n-1} b^{n-(s+2)} + \ldots + a_{s+2} b + a_{s+1} = 0 ,$$

и како $b > 0$ од последното равенство следува $a_i = 0$, за $i = s+1, s+2, \ldots, n$. Со тоа е докажана единственоста на претставувањето (1). ■

Последица 1. Секој позитивен цел број m на единствен начин може да се претстави како збир на степени бројот 2.

Доказ. Ако во теорема 1 земеме $b = 2$, добиваме

$$m = 2^n a_n + 2^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 2^2 a_2 + 2a_1 + a_0 ,$$

каде $a_n = 1$ и $a_i = 0$ или 1, за $i = 0,1,2,\ldots,n-1$, од што следува точноста на тврдењето. ■

Дефиниција 1. Ако се исполнети условите од теорема 1 и ако важи (1), тогаш ќе велиме дека m е претставен во *броен систем со основа* b. Бројот b го нарекуваме *основа* (*база*) на дадениот броен систем, а бројот m го запишуваме во видот $m = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_{0_b}$.

Ако од контекстот е јасно во кој броен систем е запишан некој број, тогаш во записот на бројот го изоставуваме индексот b. Така, на пример, во секојдневната пракса подразбираме дека записот на бројот е даден во декаден броен систем, ако не е поинаку кажано.

Пример 1. Имаме

$$1456_{10} = 1\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + 6,$$

$$10011_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 19_{10}$$

$$1423_7 = 1\cdot 7^3 + 4\cdot 7^2 + 2\cdot 7 + 3 = 556_{10}\,. \blacksquare$$

Пример 2. а) Бројот 2385_{10} ќе го запишеме во систем со основа 8. Имаме

$$2385 = 298\cdot 8 + 1, \qquad a_0 = 1$$

$$298 = 37\cdot 8 + 2, \qquad a_1 = 2$$

$$37 = 4\cdot 8 + 5, \qquad a_2 = 5$$

$$4 = 0\cdot 8 + 4, \qquad a_3 = 4,$$

па затоа $2385_{10} = 4521_8$.

б) Бројот 43_{10} ќе го запишеме во систем со основа 2. Имаме

$$43 = 21\cdot 2 + 1, \qquad a_0 = 1$$

$$21 = 10\cdot 2 + 1, \qquad a_1 = 1$$

$$10 = 5\cdot 2 + 0, \qquad a_2 = 0$$

$$5 = 2\cdot 2 + 1, \qquad a_3 = 1,$$

$$2 = 1\cdot 2 + 0, \qquad a_4 = 0,$$

$$1 = 0\cdot 2 + 1, \qquad a_5 = 1,$$

па затоа $43_{10} = 101011_2$. ■

Забелешка 1. Кај бројните системи со основа поголема од 10 неопходно е да се воведат ознаки за дополнителни цифри. На пример, во систем со основа 12 за цифрите 10 и 11 можеме да ги користиме ознаките a и b. На тој начин ги добиваме цифрите за бројниот систем со основа 12: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a и b.

Во информатиката често пати се користи систем со основа 16, при што за цифрите A, B, C, D, E и F се користат за означување на броевите 10, 11, 12, 13, 14, и 15. Ово систем е познат под називот *хексадецимален систем.*

Пример 3. а) Ќе го претставиме бројот $2ba4_{12}$ во декаден броен систем. Имаме

$$2ba4_{12} = 2\cdot 12^3 + 11\cdot 12^2 + 10\cdot 12 + 4 = 3456 + 1548 + 120 + 4 = 5164_{10}.$$

б) Бројот $B3FC_{16}$ претставен во декаден броен систем е:

$$B3FC_{16} = 11\cdot 16^3 + 3\cdot 16^2 + 15\cdot 16 + 12 = 45056 + 768 + 240 + 12 = 46076.$$ ■

СОБИРАЊЕ, ОДЗЕМАЊЕ, МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ ВО БИНАРЕН БРОЕН СИСТЕМ

Во претходните разгледувања се осврнавме на тоа како даден број кој е запишан во декаден броен систем може да се запише во броен систем со произволна основа b. Меѓутоа, како што рековме бинарниот броен систем има огромно значење за информатиката, па затоа во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на реализирањето на собирањето, одземањето, множењето и делењето во бинарен броен систем.

Основните операции во било кој броен систем се реализираат на потполно аналоген начин како и во декадниот броен систем. Притоа треба да се има предвид дека во систем кој се разликува од декадниот броен систем аритметичките закони (комутативниот, асоцијативниот и дистрибутивниот) се исти како и во декадниот броен систем, но при пресметувањата мора да се користат други таблици за собирање и множење. Затоа пред да почнеме со пресметувањата во бинарен броен систем ќе ги напишеме таблиците кои се користат. Составувањето на овие таблици е исто за секој броен систем. Имено, таблиците се составуваат со непосредно пресметување колку изнесува збирот, односно производот на секои два едноцифрени броја во разгледуваниот броен систем. Така, за бинарниот броен систем таблиците се:

Таблиза за собирање

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	10

Таблица за множење

·	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Пример 3. а) Пресметај го збирот на броевите 1001_2 и 111_2.

б) Пресметај го збирот на броевите 11001_2 и 10011_2.

Решение. а) Пресметуваме: $1+1=10$, пишуваме 0 и имаме пренос 1. Понатаму, $1+1+0=10$, па пишуваме 0 и пренесуваме 1, потоа пресметуваме $1+1+0=10$, па пишуваме 0 и пресме-

$$\begin{array}{r} 1001 \\ +\ 111 \\ \hline 10000 \end{array}$$

туваме 1 и на крајот пресметуваме $1+1=10$ и пишуваме 10.

б) Пресметуваме $1+1=10$, пишуваме 0 и имаме пренос 1. Понатаму, $1+1+0=10$, па пишуваме 0 и пренесуваме 1, потоа пресметуваме $1+0+0=1$ и пишуваме 1. Сега, пресметуваме $1+0=1$ и пишуваме 1, па пресметуваме $1+1=10$ и пишуваме 10. ■

$$\begin{array}{r} 11001 \\ +\ 10011 \\ \hline 101100 \end{array}$$

Пример 4. Пресметај го производот на броевите 1001_2 и 111_2.

Решение. Прво користејќи ја таблицата за множење, на потполно ист начин како кај декадниот броеи систем бројот 1001_2 го множиме со 1_2, со 10_2 и со 100_2 и ги добиваме производите 1001_2, 10010_2 и 100100_2. Потоа, добиените производи ги собираме и го добиваме резултатот од множе-њето на дадените броеви 111111_2.

$$\begin{array}{r} 1001\cdot 111 \\ \hline 1001 \\ 1001 \\ +1001 \\ \hline 111111 \end{array}$$

Проверка: Имаме:

$1001_2 = 1\cdot 2^3 + 1 = 9$,

$111_2 = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1 = 7$,

$111111_2 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1 = 32+16+8+4+2+1 = 63$

и $9\cdot 7 = 63$. ■

Пример 5. Пресметај го производот на броевите 1100_2 и 101_2.

Решение. Имаме:

$$\begin{array}{r} 1100\cdot 101 \\ \hline 1100 \\ 0000 \\ +1100 \\ \hline 111100 \end{array}$$

Проверка. Имаме;

$1100_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 = 12$, $101_2 = 1\cdot 2^2 + 1 = 5$,

$111100_2 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 = 32+16+8+4 = 60$,

и $12\cdot 5 = 60$. ■

Пример 6. Пресметај ја разликата $1100_2 - 101_2$.

Решение. Одземаме 1 од 0, што не може. Позајмуваме 10 и одземаме 1 од 10, што е еднакво на 1. Третата цифра на бројот 1100_2 е 0, па позајмувањето е извршено од втората цифра до третата, а потоа од третата до четвртата. ■

$$\begin{array}{r} 1100 \\ -\ \ 101 \\ \hline 111 \end{array}$$

Пример 7. Бројот 10001010_2 подели го со бројот 110_2 .

Решение. Имаме:

$$\begin{array}{l} 10001010:110=10111 \\ \underline{-110} \\ \ \ \ 1010 \\ \ \ \underline{-\ 110} \\ \ \ \ \ \ 1001 \\ \ \ \ \ \underline{-\ 110} \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 110 \\ \ \ \ \ \ \ \underline{-110} \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Проверка. Имаме:

$$10001010_2 = 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2 = 128 + 8 + 2 = 138,$$

$$110_2 = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 = 4 + 2 = 6,$$

$$10111_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$$

и $138:6=23$. ■

Забелешка 2. Таблиците за собирање и множење во систем со основа 7 (септимален броен систем) се:

Таблица за собирање
во систем со основа 7

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12
4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	10	11	12	13	14
6	6	10	11	12	13	14	15

Таблица за множење во
систем со основа 7

·	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	21	24
4	0	4	11	15	22	26	33
5	0	5	13	21	26	34	42
6	0	6	15	24	33	42	51

Користејќи ги овие таблици покажи дека

а) $626_7+32_7=661_7$, б) $626_7\cdot 32_7=30025_7$,

а потоа изврши ги соодветните проверки.

Задачи за самостојна работа

1. Определи ги декадните записи на броевите:
   а) 101010_2, б) 11011011_2, в) 11100111_2.
2. Запиши ги најмалиот и најголемиот седумцифрен број во бинарен броен систем и определи ги декадните записи на овие броеви.
3. Определи ги бинарните записи на броевите:
   а) 444_{10}, б) 444_7, в) 444_5
4. Пресметај ги збировите:
   а) 10111_2+1010_2, б) $1111011_2+101110_2$, в) $111011_2+110111_2$
   а потоа изврши проверка.
5. Пресметај ги производите:
   а) $10111_2\cdot 1010_2$, б) $1111011_2\cdot 101110_2$, в) $111011_2\cdot 110111_2$,
   а потоа изврши проверка.
6. Пресметај ги разликите:
   а) 10111_2-1010_2, б) $1111011_2-101110_2$, в) $111011_2-110111_2$
   а потоа изврши проверка.
7. Бројот 11000_2 подели го со бројот 110_2, а потоа изврши проверка.
8. Бројот 1111110_2 подели го со бројот 1001_2, а потоа изврши проверка.
9. Коефициентите во равенката $\frac{3x+14}{5}=58$ запиши ги во бинарен броеви систем и определи го нејзиното решение.

Литература

1. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје, 2020
2. Милошевић, Д. Бинарни бројевни систем, Математички лист, Београд
3. Ранђеловић, Л. Представљање бројева и рачунање у системима који нису децимални, Математичк лист, Београд
4. Ружић-Вучетић, О. Изражавање природног броја у бројном систему дате основе, Математички лист, Београд
5. Станојевић, Р. Бинарни бројни систем, Математички лист, Београд