УНИВЕРЗИТЕТ „КИРИЛ И МЕТОДИЈ" - СКОПЈЕ

Д-р Наум ЦЕЛАКОСКИ

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

со примери и задачи

Второ издание

Скопје, 1986

Одобрено со решение на ректорот
бр. 11-374 од 24.II 1986 година
како СКРИПТА

II издание

Р е ц е н з е н т и:

Проф. д-р Илија Шапкарев
Проф. д-р Никола Речкоски

Л е к т у р а

Оливера Павловска

Д а к т и л о г р а ф

Кирил Наков

Умножено на офсет техника во Универзитетската печатница – Скопје
Тираж: 800 примероци

П Р Е Д Г О В О Р

Книгава го содржи материјалот по обични и парцијални диференцијални равенки во рамките на предметот математика III на Електротехничкиот и Машинскиот ракултет, а се изложуваат елементи од операционото сметање (лапласова и фурјеова трансформација). Покрај студентите од Електротехничкиот и Машинскиот факултет, книгава може да ја користат и студенти од други факултети на Универзитетот во Скопје.

Материјалот е распореден така што, веднаш по воведните поими за диференцијалните равенки (ДР), се преминува на линеарните ДР, што е позгодно за наставата на техничките факултети. Главно место во текстот зафаќаат точно линеарните случаи, било да се работи за обичните ДР, системите ДР или за парцијалните ДР.

Ваквиот распоред на материјалот овозможува да се користи книгава едноставно и за пократки курсеви, во кои се изучуваат, главно, линеарните случаи, т.е. материјалот само од Гл. 1,27 и, евентуално, од Гл. 8-9, зашто изоставањето на Гл. 3-6 и на некои параграфи од Гл. 7-9 не предизвикува особени тешкотии.

По материјалот на овој учебник е изработена збирка задачи, како II книга со истиот наслов. Решените задачи, а и задачите за вежбање во неа, го илустрираат, го дополнуваат и го прошируваат овој материјал и, во таа смисла, учебникот и збирката прават целина. На крајот од параграфите во учебников се наведуваат броевите на соодветните задачи од таа збирка.

Некои (мали) делови од текстот во книгава се отпечатени погусто, „со петит" и се издвоени со знаците **...** . Тие делови, а и параграфите што се означени со * (на пример, *§1.8), може да се изоставаат при првото запознавање со предметот, како незадолжителен текст, без пречки за разбирање на другиот материјал. Завршувањето на доказот (или отсуството на доказ) на секоја теорема е означено со знакот □ , а завршувањето на примерите - со знакот ||.

На крајот се наведува краток список на користената и консултираната литература. За повеќето факти и резултати што се користат низ текстот, а што (би требало да) му се познати на студентот од курсевите по математика I, II и делумно од математика III, може да се консултира, ако е потребно, учебникот „Предавања по виша математика" кн. I, II, III од Ѓ.Чупона, Б.Трпеновски, Н.Целакоски.

С к о п ј е, Септември 1982

КОН ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

Во второто издание се преработени првите две глави, извршено е преместување на мал дел од материјалот од гл. 3 и гл. 5, на други места се направени мали поправки и отстранети се забележаните печатни грешки.

С к о п ј е, Септември 1986 А в т о р о т

С О Д Р Ж И Н А

Г л а в а 1

ПОЧЕТНИ ПОИМИ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПРВ РЕД

Диференцијалните равенки претставуваат едно од најраспространетите и најефикасните средства за решавање голем број задачи од природно-математичките и техничките науки. Со нивна помош, многу природни појави и задачи во техниката се опишуваат едноставно и целосно. Затоа е сосема разбирливо што диференцијалните равенки заземаат посебно место во образованието на идните инженери.

Оваа глава има воведен карактер: во неа ќе се запознаеме со почетните поими за диференцијални равенки од прв ред.

§1.1. ПОИМ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПРВ РЕД

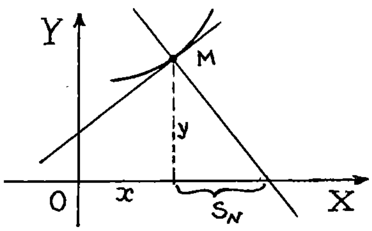
При изучувањето на неопределените интеграли ја решаваме задачата:

„За дадена функција $f(x)$, дефинирана и (специјално) непрекината на даден интервал (a,b), се бара функција $y=y(x)$, којашто го задоволува условот

1) $y' = f(x)$, т.е. $dy = f(x)dx$"

Со тоа доаѓаме до равенка во која, покрај дадената функција $f(x)$, се јавува изводот y' на н е п о з н а т а   ф у н к ц и ј а.

До вакви равенки доаѓаме и при решавањето на многу други задачи. На пример, при барањето крива $y=y(x)$ со својството: „субнормалата S_N во произволна точка $M(x,y)$ од кривата да е еднаква со апсцисата во таа точка" (црт. 1), доаѓаме до равенката $S_N=x$, т.е.



Црт. 1

2) $yy' = x$,

во која се јавува изводот y' на непознатата функција y. Од таков вид се и равенките:

3) $y' + 2y = \cos x$,   4) $y' + y = 0$,

5) $y'^2 - xy' + y = 0$,   6) $y = xy' + \ln y'$ и др.

Сите овие равенки 1)-6) се примери на диференцијални равенки од прв ред. Во секоја од нив непознатата е некоја функција од една променлива, при што во равенката задолжително се јавува изводот на таа функција. Секоја од равенките 1)-6) може да се запише во имплицитна форма вака: $F(x,y,y')=0$.

Грубо кажано, диференцијална равенка од прв ред претставува врска меѓу непознатата функција и нејзиниот извод. Попрецизно, равенката

$$F(x,y,y') = 0, \tag{1}$$

каде што F е непрекината функција од независно-променливите x,y,y', е <u>диференцијална равенка</u>*) <u>од прв ред</u>. Функцијата F може и да не зависи од аргументите x,y, но y' мора да биде застапен.

Во најопшт случај условот за непрекинатост на функцијата F не мора да биде поставен. Ние ќе го направиме тоа ограничување зашто ќе се занимаваме главно со случаите кога тој услов е исполнет. Уште повеќе, најчесто ќе го разгледуваме обликот

$$y' = f(x,y) \tag{2}$$

(наречен: <u>ДР сведена по</u> y'), каде што $f(x,y)$ е непрекината функција од две независно променливи во некоја област од рамнината OXY. На пример, диференцијалните равенки:

$$y' = 3y, \quad y' = \frac{x}{y}, \quad y' = -2y + \cos x$$

се сведени по y', а ДР $y=xy'+\ln y'$ - не е. Една функција

$$y = \phi(x) \tag{3}$$

се вика <u>решение на дадена ДР</u> од прв ред на некој интервал, на пример, $a<x<b$ (може и бесконечен), ако таа е дефинирана и диференцијабилна во тој интервал, а равенката станува идентитет кога y и y' се заменат со ϕ и ϕ' соодветно.

<u>Пример 1</u>. Функцијата $y=\phi(x)=e^{-x}$ е решение на ДР

$$y' + y = 0$$

за сите x, зашто $\phi'=-e^{-x}$, па заменувајќи ги ϕ и ϕ', дадената ДР се претвора во идентичното равенство: $-e^{-x} + e^{-x} \equiv 0$. ||

*) Натаму често ќе ја употребуваме кратенката ДР наместо диференцијална равенка

Понекогаш некое решение на дадена ДР може да се јави во вид на имплицитна функција, т.е. во обликот

$$\Phi(x,y) = 0;$$

во тој случај тоа се вика <u>имплицитно решение</u>, за разлика од експлицитното решение (3).

<u>Пример 2</u>. Функцијата $y=\phi(x)$, $y>0$, определена со равенството

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

е имплицитно решение на ДР $yy'+x=0$ во интервалот $(-2,2)$, што лесно се проверува. ||

Во овој пример решението можеме лесно да го запишеме и во експлицитна форма: $y=\sqrt{4-x^2}$, но во други случаи тоа може да биде тешко, дури и невозможно.

Едно решение може да биде запишано и во <u>параметарска форма</u>: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha<t<\beta$. Така, за решението од примерот 2 имаме: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0<t<\pi$, и сл.

Наместо решение на ДР се употребува и терминот <u>интеграл на ДР</u>. Поради тоа, графикот на едно решение на дадена ДР, поставен во рамнината OXY, се вика <u>интегрална крива</u> на таа ДР.

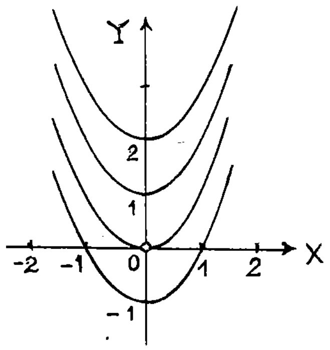
<u>Пример 3</u>. За ДР:

$$y' = 2x, \tag{a$_1$}$$

секоја функција од фамилијата

$$y = x^2+C \tag{б$_1$}$$

(C-произволна константа) е решение во интервалот $(-\infty,+\infty)$. За секоја конкретна вредност на C, на пример $C=-1,0,1,2$ добиваме по едно решение на дадената ДР, геометриски претставено на црт. 2. Значи, параболите од црт. 2:



Црт. 2

$$y = x^2-1,\ y = x^2,\ y = x^2+1,\ y = x^2+2 \tag{в$_1$}$$

се интегрални криви на ДР $y'=2x$. ||

Не е тешко да увидиме дека ДР (a_1) од претходниот пример има безброј многу решенија. Од курсот по интегрално сметање знаеме дека секое решение на ДР (a_1) е од обликот ($б_1$), т.е. формулата $y=x^2+C$, каде што C е произволна константа, го претставува множеството од с и т е решенија на ДР $y'=2x$.

Во општ случај, една ДР има, обично, безброј многу решенија. Ќе наведеме уште еден пример.

Пример 4. Лесно се проверува дека секоја од функциите

$$y = e^{-x}, \quad y = 2e^{-x}, \quad y = -\frac{2}{3}e^{-x} \tag{a_2}$$

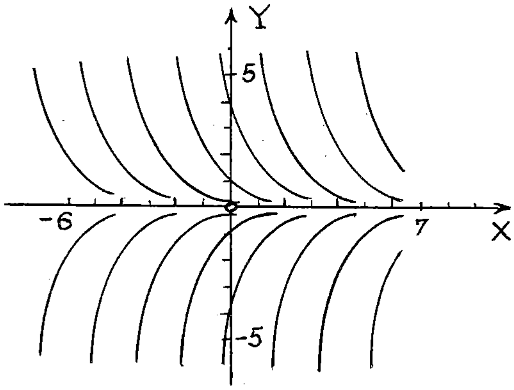
е решение на диференцијалната равенка

$$y' + y = 0. \tag{$б_2$}$$

Подоцна ќе видиме дека секое решение на таа ДР е од обликот

$$y = Ce^{-x}, \tag{$в_2$}$$

каде што C е константа. Земајќи ја C за произволна, формулата ($в_2$) го претставува множеството од с и т е решенија на ($б_2$). Неколку интегрални криви на ДР ($б_2$) се прикажани на црт. 3.



Црт. 3

Последните два примера го илустрираат фактот дека една диференцијална равенка може да има (и, во општ случај, има) повеќе од едно решение, дури и бесконечно многу решенија, коишто можат да се претстават со единствена формула што содржи една п р о и з в о л н а к о н с т а н т а C. Вообичаено е таква функција да се нарече општо решение на дадената ДР од прв ред.

Попрецизно, <u>општо решение</u> (или: <u>општ интеграл</u>) на дадена ДР од прв ред е функција со една произволна константа C,

$$y = \phi(x,C) \tag{4}$$

или, во имплицитна форма

$$\Phi(x,y,C) = 0, \tag{5}$$

којашто идентично ја задоволува (т.е. е решение на) дадената ДР за сите вредности на константата C од некое множество реални броеви, при што е битно да има бесконечно многу такви вредности.

Ако на константата C во (4) или (5) ѝ припишеме одредена, „допустлива" вредност на константата C, тогаш добиваме решение кое се вика <u>партикуларно решение</u> (или: партикуларен интеграл) на дадената ДР.

Така, во примерот 3, $y=x^2+C$ е општото решение, а $y=x^2-1$, $y=x^2$, $y=x^2+2$ и др. се партикуларни решенија на ДР $y'=2x$; во примерот 4, $y=Ce^{-x}$ е општото решение, а $y=e^{-x}$, $y=2e^{-x}$, $y=-\frac{2}{3}e^{-x}$ и др. се партикуларни решенија на ДР $y'+y=0$.

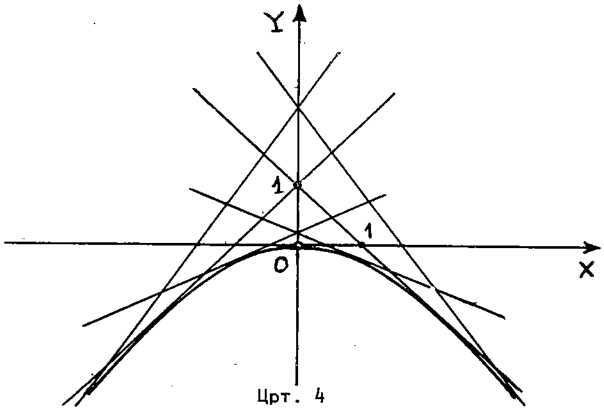
**Во врска со поимот општо решение на ДР од прв ред ќе направиме неколку важни забелешки.

<u>1</u>. Некои ДР може да имаат и решенија коишто не се добиваат од општото решение за ниедна конкретна вредност на произволната константа C, т.е. општото решение не мора да ги опфаќа сите можни решенија на дадената ДР.

<u>Пример 5</u>. Диференцијалната равенка

$$y = xy' + y'^2 \tag{6}$$

има општо решение $y=Cx+C^2$, коешто претставува фамилија прави; секоја права одговара на одредена вредност на константата C (црт. 4).



Црт. 4

Меѓутоа, решение на ДР (6) е и функцијата

$$y = -\frac{x^2}{4}, \tag{7}$$

којашто не може да се добие од општото решение за ниедна вредност на константата C; таквото решение се вика сингуларно решение (или: сингуларен интеграл) на дадената ДР. Очигледно, секое партикуларно решение на (6) претставува тангента на параболата (7), (црт. 4).

2. Во наредните лекции ќе разгледаме некои методи за наоѓање општи решенија на диференцијални равенки од прв ред. Секој од тие методи води до општо решение на дадена ДР, коешто е единствено (со исклучок на неговиот запис), па поради тоа ќе велиме: „општото решение на дадената ДР...".

3. Во дефиницијата на поимот „општо решение" изразот „за сите вредности на константата C" не е сосема коректен (без ограничување). Имено, во некои случаи, за константата C мора да се поставaт некои ограничувања за да се избегнат имагинарни изрази или бесмислености (во таа смисла и го употребуваме изразот допустливи вредности на константата C).

На пример, $y=\sqrt{C-x^2}$ е општиот интеграл на ДР $yy'+x=0$, но само за $C \geq 0$, зашто за $C < 0$ функцијата $\sqrt{C-x^2}$ не е дефинирана. Во овој случај ограничувањето можеме да го сметаме за привидно, зашто запишувајќи го општиот интеграл во обликот $x^2+y^2=C^2$, овозможуваме C да биде и негативен број.

За ДР $2yy'=\sin x$, пак, општиот интеграл е $y^2=C-\cos x$; овде не смее да биде $C<-1$, зашто десната страна би била негативна за секој x.

4. Подоцна ќе видиме дека условите при кои дадена ДР има решенија се прилично општи. Меѓутоа, треба да забележиме дека има едноставни ДР коишто немаат никакво решение, а и равенки коишто немаат општо решение.

Пример 6. ДР $y'^2=-1$ нема ниедно решение (за реални y), а ДР $|y'|+|y|=0$ нема општо решение, зашто има само едно решение $y \equiv 0$.

5. Во некои книги поимот општ интеграл означува формула што ги вклучува сите решенија на дадената ДР - и партикуларните и сингуларните. Таа дефиниција овде не е прифатена од две причини. Прво, често е многу тешко да се докаже дека некоја формула ги вклучува сите решенија, поради што испаѓа практично неупотреблива. Од друга страна, ќе видиме дека една мошне широка и многу важна класа равенки (т.н. линеарни ДР) немаат сингуларни решенија, а прифатената дефиниција за општо решение на ДР од прв ред може лесно да се обопшти за таквите равенки, така што добиениот поим ќе ги вклучува сите решенија на ДР што е линеарна. **

Задачи*): 1.21, 1.22

§1.2. СЕПАРАБИЛНИ РАВЕНКИ. КОШИЕВ ПРОБЛЕМ

Многу диференцијални равенки од прв ред, со алгебарски трансформации може да се доведат до обликот

$$g(y)\cdot y' = f(x), \tag{1}$$

т.е. имајќи предвид дека $y'=dy/dx$, до обликот

*) Задачите се однесуваат на збирката ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ СО ПРИМЕРИ И ЗАДАЧИ , II, којашто претставува II дел од овој учебник

$$g(y).dy = f(x)dx. \tag{2}$$

Во (1) односно во (2) променливите се раздвоени така што x се јавува само на десната, а y само на левата страна. Поради тоа, ваквите ДР се викаат равенки со раздвоени променливи или, кусо, сепарабилни равенки.

Интегрирајќи ги двете страни од (2), добиваме

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C. \tag{3}$$

Претпоставувајќи дека функциите g(y) и f(x) се непрекинати, интегралите ќе постојат, па откако ќе ги пресметаме, ќе го добиеме општото решение на ДР (1).

Пример 1. Да ја решиме равенката

$$y' = -\frac{x}{2y}.$$

Прво, ги раздвојуваме променливите:

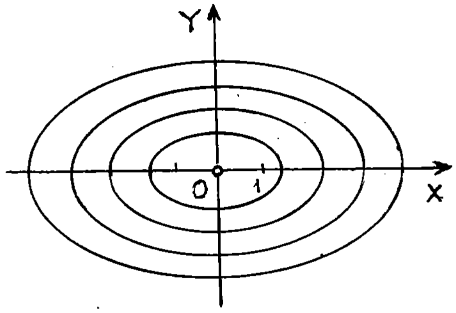
$$2y\cdot dy = -x\cdot dx;$$

потоа, интегрирајќи, го добиваме општото решение

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + C, \text{ т.е.}$$

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = C.$$

Интегралните криви се елипси (црт. 1).



Црт. 1

Пример 2. Да ја решиме ДР

$$y' + 2y\cdot \mathrm{th}x = 0.$$

Прво, ги раздвојуваме променливите

$$\frac{dy}{y} = -2.\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\,dx;$$

потоа, интегрирајќи, го добиваме општото решение

$$\ln|y| = -2\ln|\mathrm{ch}x| + c, \text{ т.е. } y = \frac{C}{\mathrm{ch}^2 x} \qquad (C=e^c).$$

** Диференцијалните равенки од обликот

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad \frac{dy}{dx} = d(y)$$

се најпростите равенки со раздвоени променливи (всушност, тие се наши стари познаници од делот „интегрално сметање"); нивните општи интеграли се добиваат со непосредно интегрирање:

$$y = \int f(x)dx + C, \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = x + C$$

соодветно. На пример, за ДР $y'=3x^2$ односно $y'=-y^2$ општиот интеграл е $y=x^3+C$ односно $\frac{1}{y} = x + C$.

И диференцијалната равенка

$$f(x)\cdot g(y)dy + f_1(x)\cdot g_1(y)dx = 0, \tag{4}$$

делејќи ја со $f(x)\cdot g_1(y)$ $(\neq 0)$, се сведува на ДР со раздвоени променливи:

$$\frac{g(y)}{g_1(y)}\cdot dy = -\frac{f_1(x)}{f(x)}\cdot dx.$$

Да забележиме дека при делењето со $f(x)\cdot g_1(y)$ можно е „да се изгубат" некои решенија; затоа треба посебно да се провери дали со равенството $f(x)\cdot g_1(y)=0$ е определено некое решение на (4), коешто не се содржи во општото.

Пример 3. ДР $xdy=(y+y^2)dx$, делејќи ја со $x.(y+y^2)$, се сведува на:

$$\frac{dy}{y(1+y)} = \frac{dx}{x}, \text{ т.е. } \left(\frac{1}{y}-\frac{1}{1+y}\right)dy = \frac{dx}{x};$$

интегрирајќи, го добиваме општото решение:

$$\ln|y| - \ln|1+y| = \ln|x| + c,$$

т.е.

$$\frac{y}{1+y} = Cx \quad (C=e^c) \text{ или } y = \frac{Cx}{1-Cx}.$$

Од равенството $xy(1+y) = 0$, чија лева страна е изразот со кој ја делевме дадената ДР, добиваме

$$y = -1, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

Очигледно, секоја од овие три функции е решение на дадената ДР, а ниедна не се добива од општото решение за ниедна (допустлива) вредност на константата C (дури ни $y=0$, зашто $C=e^c > 0$).

Ова е уште еден пример од кој се гледа дека општото решение не мора да ги опфаќа сите можни решенија на дадената ДР (види ја забелешката 1. во §1.1). **

Во многу задачи од техниката ние не сме заинтересирани за општото решение на дадена ДР, а само за некое партикуларно решение $y(x)$, што задоволува даден почетен услов: во некоја точка x_0 решението $y(x)$ да има однапред определена вредност y_0, т.е. $y(x_0)=y_0$. Ваква задача се вика задача со почетен услов или кошиев проблем.

Попрецизно, задача со почетен услов или кошиев проблем се вика задача со која се бара (партикуларно) решение на дадена ДР од прв ред,

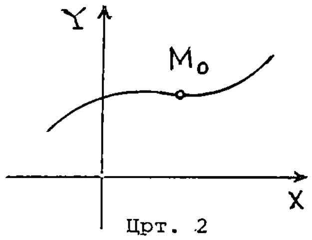
$$y' = f(x,y), \tag{5}$$

за кое би бил исполнет почетниот услов

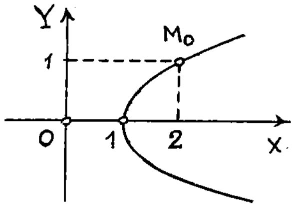
$$y(x_0) = y_0 \tag{6}$$

(друг запис: $y|_{x=x_0}=y_0$), каде што x_0, y_0 се зададени броеви.

Геометриски тоа значи дека се бара интегрална крива на дадена ДР што минува низ дадена точка $M_0(x_0,y_0)$ во рамнината OXY (црт. 2).



Црт. 2



Црт. 3

Пример 4. Да ја решиме следнава кошиева задача:

$$2xyy' = y^2+1, \quad y(2) = 1. \tag{7}$$

Чекор 1. Го наоѓаме општиот интеграл на дадената ДР. Раздвојувајќи ги променливите, имаме

$$\frac{2ydy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}$$

па интегрирајќи, го добиваме општиот интеграл

$$\ln(1+y^2) = \ln x + c^{*)}, \text{ т.е. } 1+y^2 = Cx,$$

$$y^2 = Cx-1 \quad (C=e^c, \text{ т.е. } C>0). \tag{8}$$

Чекор 2. Ја определуваме константата C од општиот интеграл, користејќи го почетниот услов. Ставајќи x=2 и y=1 во $y^2=Cx-1$, добиваме $1=C\cdot 2-1$, т.е. C=1. Значи, бараното партикуларно решение, т.е. бараната интегрална крива е параболата (црт. 3):

$$y^2 = x-1. \tag{9}$$

Чекор 3. Проверка на добиениот резултат. Очигледно, параболата (9) минува низ точката (2,1).

** Забелешка. Да се реши една ДР, во најопшт случај, значи да се најдат сите нејзини решенија. Тоа е можно само во посебни случаи. Обично се смета дека една ДР е решена кога ќе успееме нејзиното општо решение да го изразиме „со помош на квадратури", т.е. кога општото решение ќе го добиеме како функција $y=\phi(x,C)$ експлицитно или, во имплицитна форма $\Phi(x,y,C)=0$.

---

*) Јасно, $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$, но ние натаму, за поедноставно, често ќе пишуваме $\ln x+c$. (Вакви непрецизности често се среќаваат во книгите по диференцијални равенки, а се прават свесно, во интерес на упростувањето.)

Притоа, функцијата ϕ односно Φ може да зависи од интеграли $\int f(x)dx$, $\int g(y)dy$ коишто не можат да се изразат преку елементарни функции, како на пример:

1) $y' = e^{-x^2}$; $y = \int e^{-x^2}dx + C$.

2) $xe^y dy + y\sin x \cdot dx = 0$; $\int \frac{e^y}{y}dy + \int \frac{\sin x}{x}dx = C$. **

Наместо изразот да се реши ДР, често се употребува изразот да се интегрира ДР и тоа натаму ќе ни значи:

-да се најде општото решение на дадената ДР или да се најде партикуларно решение кога се зададени почетни услови.

Задачи: 1.7-1.8; I.36-1.38

§1.3. СОСТАВУВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

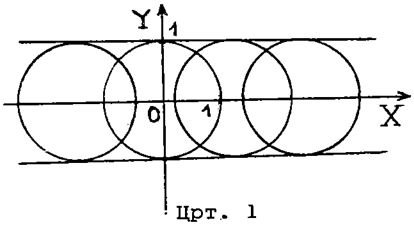
Да се задржиме, сега, на прашањето: како се добиваат диференцијални равенки? Една можност е тривијална: да напишеме равенка со непозната функција и со изводот на таа функција, не водејќи сметка за некоја конкретна ситуација или интерпретација.

Други можности за добивање ДР даваат разни задачи од математиката и нејзините примени: математичката формулација на многу задачи од механиката, електротехниката, биотехниката и општо, од применетата математика, доведува до некоја ДР; при наоѓање равенка на крива што има некое однапред дадено својство, при елиминација на произволни константи или параметри од некоја функција и сл. се доаѓа до некоја диференцијална равенка. За илустрација, ќе разгледаме неколку примери.

Пример 1. Да се елиминира параметарот c од функцијата $y=cx^2$.

Имаме: $y' = 2cx$, $c = \frac{y'}{2x}$; $y = \frac{y'}{2x}\cdot x^2$, $y' = \frac{2y}{x}$. ||

Пример 2. Да се најде ДР на фамилијата кружници со радиус 1 и центар на апсцисната оска (црт. 1).



Црт. 1

Равенката на таквите кружници е

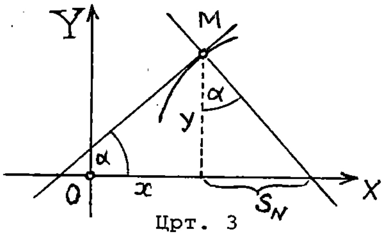
$$(x-a)^2 + y^2 = 1,$$

каде што a е произволна константа. Диференцирајќи, добиваме

$$2(x-a) + 2yy' = 0, \quad a = x + yy',$$

па заменувајќи во равенката на кружниците, ја добиваме ДР $y^2(1+y'^2) = 1$. ||

Пример 3. Да се најде равенката на крива, којашто го има својството: субнормалата S_N во произволна точка $M(x,y)$ од кривата е еднаква со апсцисата на таа точка (црт. 2; види и 2) од §1.1).



Црт. 3

Бидејќи $tg\alpha=y'$, $S_N=yy'$ и $S_N=x$, ја добиваме равенката $yy'=x$ - со раздвоени променливи. Интегрирајќи непосредно, добиваме

$$y^2/2 = x^2/2 + C/2, \text{ т.е. } x^2 - y^2 = C.$$

Значи, бараната крива е (која било) рамнострана хипербола. ||

Решавањето задачи од применет карактер се состои, обично, од следниве чекори:

1) детален преглед на условите на задачата и, ако треба, цртеж;

2) составување равенка („математички модел" на процесот - тоа е највалжниот чекор и, најчесто, најтешкиот);

3) наоѓање општо решение;

4) наоѓање соодветно партикуларно решение;

5) извод на општиот закон на процесот;

6) анализа на одговорот и проверка.

Пример 4 (радиоактивност). По експериментален пат е установено дека: брзината на радиоактивното распаѓање на некоја материја е пропорционална со количеството од нераспаднатата материја.

Да се најде зависноста меѓу количеството нераспаднатата материја и времето t на распаѓањето, ако количеството материја во почетниот момент $t=0$ било два грама.

Решение. Чекор 1 и 2 (математички опис на физичкиот процес). Нека количеството материја во моментот t е означено со $y=y(t)$. Тогаш, во моментот $t+\Delta t$ ќе биде $y+\Delta y$, што значи дека за време Δt се распаднала маса Δy. Количникот $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ е средна брзина на распаѓањето, а граничната вредност на тој количник при $\Delta t \to 0$, $\frac{dy}{dt}$ е брзина на распаѓањето во моментот t. Според законот што важи за радиоактивното распаѓање (цитиран во условот на задачата) имаме

$$\frac{dy}{dt} = -\kappa y, \tag{1}$$

каде што $\kappa > 0$ е коефициентот на пропорционалноста, а се зема знакот минус зашто во текот на времето масата се намалува, па $\frac{dy}{dt} < 0$. Значи, физичкиот процес што го разгледувавме е опишан математички со ДР (1).

Чекор 3 (решавање на добиената ДР). Равенката (1) може да се напише во обликот

$$\frac{dy}{y} = -\kappa dt,$$

па интегрирајќи, го добиваме општото решение

$$\ln y = -\kappa t + \ln C, \text{ т.е. } y = Ce^{-\kappa t}. \tag{2}$$

Чекор 4 (наоѓање партикуларен интеграл). Од почетните услови ($y=2$ при $t=0$) и од (2) добиваме $2=C\cdot 1$, па

$$y = 2e^{-\kappa t}. \tag{3}$$

Чекор 5 (извод на општиот закон на процесот). Од добиеното партикуларно решение заклучуваме дека радиоактивното распаѓање се врши по „експоненцијален закон".

Чекор 6 (проверка и анализа на одговорот). Од (3), диференцирајќи, добиваме $dy/dt=-\kappa\cdot 2e^{-\kappa t}=-\kappa y$, како и $y(0)=2\cdot e^{0}=2$. Значи, функцијата (3) ја задоволува ДР (1) и почетниот услов.

При ваквите задачи, се разбира, одделните чекори не мора да се наведуваат издвоено.

** Во (1), κ е определена физичка константа, чија нумеричка вредност, за секоја радиоактивна материја, може да се определи експериментално, на следниов начин. Нека, на пример, почетната маса од 1 грам се распаднала на половина грам за 53 минути. Значи, за $t=0$ од (1) имаме $C=1$, т.е. $y=e^{-\kappa t}$, а за $t=53$ минути имаме $y=1/2$, па

$$\frac{1}{2} = e^{-53\kappa}, \quad -53\kappa = -\ln 2, \quad \kappa = \frac{\ln 2}{53} \approx 0{,}013.$$

Според тоа, таа радиоактивна материја се распаѓа по формулата

$$y = e^{-0{,}013t}. \quad **$$

Пример 5 (Њутнов закон на ладење). Една бакарна топка е загреана до $100^{o}C$. Тогаш, во моментот $t=0$, таа е ставена во вода што има температура $20^{o}C$. По 3 минути, температурата на топката е симната на $65^{o}C$.

Да се најде времето t за кое температурата на топката ќе се симне на $22^{o}C$.

Чекор 1. Температурата на телото, во моментот t, да ја означиме со T. Според Њутновиот закон на ладење, брзината на промената на температурата, т.е. $\frac{dT}{dt}$, е пропорционална со разликата $T-T_c$, т.е.

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa\cdot(T-T_c), \tag{4}$$

каде што T_c е температурата на средината во која се сместува телото, а κ е коефициентот на пропорционалноста, којшто зависи од физичките својства и од формата на телото (се зема знакот минус зашто $\kappa > 0$, а со растење на времето t, температурата T се намалува).

За нашиот случај, „средината" е водата и $T_c=20$, па Њутновиот закон на ладење е

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa(T-20). \tag{5}$$

Чекор 2. Раздвојувајќи ги променливите во (5) и интегрирајќи, го добиваме општиот интеграл на (5):

$$T(t) = Ce^{-\kappa t} + 20. \tag{6}$$

Чекор 3. За почетниот услов $T_o=T(0)=100$, од (6) добиваме: $100=C\cdot e^{o}+20$, т.е. $C=80$, па бараното партикуларно решение е

$$T(t) = 80\cdot e^{-\kappa t} + 20. \tag{7}$$

Чекор 4. Константата κ може да се определи од дадената информација за температурата во 3-та минута, $T(3)=65$:

$$T(3) = 80\cdot e^{-3\kappa} + 20 = 65, \text{ па } \kappa = \frac{1}{3}\ln\frac{16}{9} \approx 0,1918.$$

Значи, температурата $T(t)$ на топката е

$$T(t) = 80.e^{-0,1918t} + 20, \tag{8}$$

а вредноста $T=22^{o}C$ се постигнува кога

$$80\cdot e^{-0,1918t} + 20 = 22, \quad t = \frac{\ln 40}{0,1918} \approx 19,23,$$

т.е. приближно: по 19 минути.

Задачи: 1.5, 1.13-1.20; 1.48-1.65.

§1.4. РАВЕНКИ ШТО СЕ ТРАНСФОРМИРААТ ВО СЕПАРАБИЛНИ

Некои диференцијални равенки од прв ред, со соодветна смена на променливите, се трансформира во равенка со раздвоени променливи, т.е. во сепарабилна равенка. Ќе разгледаме неколку такви ДР.

I. $y' = f(ax+by+c)$, (1)

каде што f е дадена функција, a,b,c дадени броеви и $b\neq 0$, со смената

$$u = ax + by + c, \quad u = u(x), \tag{2}$$

се сведуваат на ДР со раздвоени променливи. Имено, од (2) имаме

$$u' = a + by', \text{ т.е. } y' = (u'-a)/b,$$

па од тоа и од (1) следува дека

$$u' - a = bf(u), \text{ т.е. } \frac{du}{bf(u)+a} = dx.$$

Пример 1. ДР $y'=(x+y+1)^2$ со смената $u=x+y+1$ се сведува на

$$y'-1 = u^2, \text{ т.е. } \frac{du}{u^2+1} = dx$$

чиј општ интеграл е $\operatorname{arctg}u=x+C$, па $x+y+1=\operatorname{tg}(x+C)$. ||

II. ДР $y' = f(\frac{y}{x})$, (3)

каде што $f(y/x)$ е дадена функција, се вика хомогена ДР. Со смената

$$u = \frac{y}{x}, \text{ т.е. } y = x\cdot u, \tag{4}$$

каде што $u=u(x)$ е нова непозната функција, ДР (3) се трансформира во сепарабилна равенка. Навистина, од (4) имаме $y'=u+xu'$ па заменувајќи во (3), добиваме

$$xu' + u = f(u), \text{ т.е. } \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

Пример 2. ДР $xy'=y(\ln y-\ln x)$, т.е. $y' = \frac{y}{x}\cdot\ln\frac{y}{x}$, со (4) се трансформира во сепарабилна ДР

$$\frac{du}{u(\ln u-1)} = \frac{dx}{x};$$

нејзиното општо решение е $u=e^{cx+1}$, а за дадената: $y=xe^{cx+1}$. ||

III. ДР $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$, (5)

каде што f е дадена функција и a,b,c,a_1,b_1,c_1 - константи - такви што $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, се трансформира во хомогена. Имено, со смената

$$x = \xi + \alpha, \qquad y = \eta + \beta, \tag{6}$$

каде што $\eta=\eta(\xi)$ е нова непозната функција од ξ, а α и β се константи, избрани така што да се решенија на системот равенки

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \quad a_1\alpha + b_1\beta + c = 0, \tag{7}$$

равенката (5) се сведува на хомогена ДР:

$$\eta' = f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right) = f\left(\frac{a+b\cdot(\eta/\xi)}{a_1+b_1\cdot(\eta/\xi)}\right) = g\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Пример 3. ДР $(x-1)y' = x+y-2$, е од обликот (5). За неа, системот (7)

$$\alpha + \beta - 2 = 0, \quad \alpha - 1 = 0,$$

има решение $\alpha=1$, $\beta=1$, па со смената (6): $x=\xi+1$, $y=\eta+1$, дадената ДР се трансформира во хомогената ДР:

$$\eta' = \frac{\xi+\eta}{\xi}, \text{ т.е. } \eta' = 1 + \frac{\eta}{\xi}.$$

Последнава ДР, со смената $\eta=\xi u$, каде што $u=u(\xi)$ е нова функција од ξ, се трансформира во сепарабилна:

$$u + \xi u' = 1+u, \ du = \frac{d\xi}{\xi}; \quad u = \ln Cx.$$

Враќајќи се на старите променливи, го добиваме општото решение на дадената ДР:

$$y = 1 + (x-1)\cdot\ln C(x-1). \ ||$$

Во случајот кога $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, ДР (5) се сведува на ДР со раздвоени променливи со смената

$$u = ax + by, \quad u = u(x). \tag{8}$$

Пример 4. $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

Имаме: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, па со смената $u=x+y$, добиваме $\frac{2u-1}{u-3}\cdot du=dx$ - ДР со раздвоени променливи. Општиот интеграл на дадената ДР е $x+2y+5\ln|x+y-3| = C$. ||

Забелешка Понекогаш обликот на дадена ДР сугерира други едноставни смени на променливите. Неколку такви примери може да се видат во задачите 1.39-1.41.

Задачи: 1.9-1.11; 1.39-1.47.

§1.5. ЛИНЕАРНИ И БЕРНУЛИЕВИ ДР ОД ПРВ РЕД

Диференцијалната равенка

$$y' + a(x)\cdot y = f(x), \qquad / \cdot e^{A} \tag{1}$$

каде што $a=a(x)$ и $f=f(x)$ се дадени функции од x, дефинирани и непрекинати на некој интервал (конечен или бесконечен), се вика линеарна диференцијална равенка (ЛДР) од прв ред.

Во случај кога $f(x) \equiv 0$ (т.е. $f(x)=0$ за сите вредности на x од разгледуваниот интервал), равенката (1) добива вид

$$y' + a(x)\cdot y = 0 \tag{2}$$

и се вика хомогена ЛДР од прв ред. (Во таа смисла, ЛДР (1) се вика нехомогена кога $f(x) \not\equiv 0$.) ЛДР (2) се сведува на равенка со раздвоени променливи: $\boxed{y'/y=-a(x)}$; нејзиниот општ интеграл е $\ln y=-\int a(x)dx+\ln C$, т.е. $\longrightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)\,dx$

$$y = Ce^{-\int adx}. \tag{3}$$

И диференцијалната равенка од обликот

$$a_0(x)y' + a(x)y = f(x),$$

по делењето со $a_0(x)$ (за оние x за кои $a_0(x)\neq 0$), се сведува на ДР (1), т.е. е линеарна.

За да ја решиме нехомогената ЛДР (1), ќе ја помножиме со една функција e^A, каде што $A=A(x)$ е некоја (која било) примитивна функција на функцијата $a=a(x)$; обично се зема $A=\int adx$ (произволната константа c се зема како што ни е згодно, а најчесто $c=0$). Така, добиваме:

$$e^Ay' + e^Aay = e^Af, \text{ т.е. } \int (e^Ay)' = \int e^Af.$$

Интегрирајќи го последното равенство, добиваме

$$e^Ay = \int e^Afdx + C, \text{ т.е. } y = e^{-A}[C+\int e^Afdx].$$

Бидејќи $A=\int adx$, општото решение на (1) добива вид

$$\boxed{y = e^{-\int adx}[C + \int e^{\int adx}f(x)\,dx].} \tag{4}$$

Функцијата $e^A=e^{\int adx}$ се вика интегрален множител за ДР (1).

Пример 1. $y' + \frac{1}{x}\cdot y = 2$. Интегрален множител за оваа ДР е

$$e^A = e^{\int dx/x} = e^{\ln x} = x,$$

па множејќи ја со x, добиваме

$$xy' + y = 2x, \quad (xy)' = 2x, \quad xy = x^2+C, \quad y = x + \frac{C}{x}. \;||$$

Секако, можеме да ја користиме формулата (4) директно.

<u>Пример 2</u>. $y'-y\,\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$. Според (4):

$$y = e^{-\int \mathrm{tg}x dx}[C+\int e^{\int \mathrm{tg}x dx}\cdot\frac{1}{\cos x}dx];$$

по интегрирањето, го добиваме општото решение $y = \frac{C+x}{\cos x}$. ||

Равенката (1) може да се реши и со т.н. <u>Лагранжов метод на варијација на произволните константи</u>. Имено, ќе се обидеме општото решение на (1) да го најдеме во вид на производ од две функции,

$$y = u\cdot v = u(x)v(x), \tag{5}$$

каде што

$$v = e^{-\int a dx}$$

е решение на хомогената ЛДР (2), а $u=u(x)$ ќе ја определиме така што $y=uv$ да биде решение на ДР (1).

(Како што гледаме, овој метод се состои во заменување на произволната константа C од општото решение (3) на хомогена ЛДР (2), со некоја функција $C=u(x)$.)

Заменувајќи ја (5) во (1), добиваме

$$u'v + u(v'+av) = f(x).$$

Бидејќи $v=v(x)$ е решение на (2), ќе имаме $v'+av=0$, па

$$u'v = f(x), \quad du = \frac{f}{v}dx, \quad u = \int\frac{f}{v}dx + C.$$

Според тоа,

$$\boxed{y = uv = v(\int\frac{1}{v}\cdot f dx+C) = e^{-\int a dx}[C+\int e^{\int a dx}f dx]}$$

е решение на (1), а бидејќи содржи една произволна константа, тоа е општо решение на (1).

<u>Пример 3</u>. ДР $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ со (5): $y=uv$, $y'=u'v+uv'$ се сведува на

$$u'v+uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3, \quad u'v+u(v' - \frac{2}{x}v) = 2x^3; \tag{a}$$

избирајќи ја $v=v(x)$ така што $v' - \frac{2}{x}v = 0$, т.е. $v=x^2+C_1$ и ставајќи $C_1=0$, по заменувањето на $v=x^2$ во (a), добиваме

$$x^2u' = 2x^3; \quad u' = 2x, \quad u = x^2+C.$$

Значи, $y=u\cdot v=(x^2+C)\cdot x^2=x^4+Cx^2$ е општото решение на дадената ЛДР. ||

Бернулиеви равенки. Равенките со форма

$$y' + a(x)y = y^k f(x), \tag{6}$$

каде што $a=a(x)$ и $f(x)$ се дадени непрекинати функции од x во некој интервал, а k е даден реален број (константа), се викаат бернулиеви ДР. За $k=0$, (6) е равенката (1), а за $k=1$ - тоа е равенката (2), т.е. (6) е линеарна.

Во случајот $k\neq 0;1$, равенката (6) може да се напише во обликот $y^{-k}y'+ay^{-k+1}=f(x)$. Со смената

$$z = y^{-k+1}, \quad z' = (-k+1)y^{-k}y', \tag{7}$$

таа се сведува на линеарна: $z'+(-k+1)a(x)z=(-k+1)f(x)$. (При множењето со y^{-k} можно е "да се изгуби" некое решение.) Општиот интеграл на (6) може да се најде и со методот на варијација на произволните константи, т.е. со (5) (в. зад. 2.4).

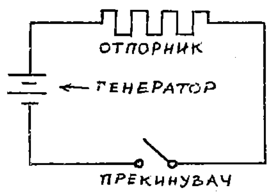
Пример 3. $y' - \frac{1}{x}y = x/y^2$; $k=-2$, па множиме со y^2; имаме: $y^2y' - \frac{1}{x}y^3 = x$; со (7): $z=y^3$, $z'=3y^2y'$ја добиваме линеарната ДР $z' - \frac{3}{x}z = 3x$; со помош на (3): $z=Cx^3-3x^2$, па $y^3=Cx^3-3x^2$ е општ интеграл на дадената ДР. ||

Задачи: 2.1-2.7; 2.31-2.62.

§1.6. ЕЛЕКТРИЧНИ КОЛА

Ќе разгледаме една примена на линеарните ДР од прв ред во електротехниката за "решавање" електрични кола.

Наједноставното електрично коло е (сериско) коло во кое има само генератор со електромоторна сила (ЕМС) и отпорник (црт. 1).



Црт. 1

Со затворање на прекинувачот, низ отпорникот потечува струја i и на краевите од отпорникот се јавува напон u_R којшто може да се мери со волтметар.

По експериментален пат е утврдено дека важи следниов закон:

1°. Омов закон. Напонот u_R на краевите на отпорникот е пропорционален со моменталната струја $i=i(t)$, т.е.

$$u_R = R\,i, \tag{1}$$

каде што R е константа на пропорционалноста и се вика активна отпорност или резистанса. (Струјата i се мери во ампери, резистансата R во омови, а напонот u_R во волти.)

Други два елемента што се јавуваат во електричните кола се индуктивните елементи и кондензаторите.

Индуктивниот елемент се спротивставува на промената на струјата, т.е. тој има инерцијален ефект во електрицитетот (како што има масата во механиката). По експериментален пат е утврдено дека важи следниов закон:

2°. Напонот u_L на краевите од индуктивниот елемент е пропорционален со изводот на струјата што тече низ елементот, т.е.

$$u_L = L\,\frac{di}{dt}, \tag{2}$$

каде што L е коефициент на пропорционалноста и се вика индуктивност на индуктивниот елемент (таа се мери во хенрии).

Кондензатор е елемент којшто ја складира енергијата. По експериментален пат е утврдено дека важи следниов закон:

3°. Напонот u_C на краевите на кондензаторот е пропорционален со електричното оптоварување $q=q(t)$ на кондензаторот, т.е.

$$u_C = \frac{1}{C}\,q, \tag{3}$$

каде што C се вика капацитивност (таа се мери во фаради, а електричното оптоварување во кулони).

Бидејќи струјата i е еднаква со промената на електричното оптоварување во единица време, т.е.

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \left(\text{или: } q = \int_{t_0}^{t} i\,dt\right), \tag{4}$$

следува дека (3) може да се изрази и на следниов начин:

$$u_C = \frac{1}{C}\,q = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt \tag{5}$$

(или: $u_C = \frac{1}{C}(q_0+q) = \frac{1}{C}(q_0+\int_0^t i\,dt)$, при што $q_0=q(t_0)$).

Ако се има предвид (4), формулата (2) може да се напише и во следнава форма:

$$u_L = L\,\frac{di}{dt} = L\,\frac{d^2q}{dt^2}. \tag{2'}$$

При решавањето задачи од електрични кола се доаѓа до диференцијални равенки, при што се користат Киркофовите закони, особено вториот.

Прв Киркофов закон. Во која било точка од едно коло, сумата на струите што "доаѓаат" е еднаква со сумата на струите што "заминуваат".

Втор Киркофов закон. Алгебарскиот збир од сите електромоторни сили во едно просто струјно коло е еднаков со збирот на напоните на пасивните елементи во колото.

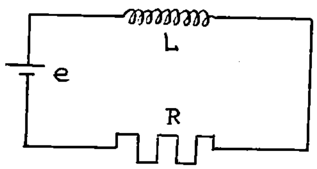
За илустрација, ќе разгледаме два едноставни примера.

Пример 1 (RL-коло). Да се најде временската промена на струјата $i(t)$ во коло со резистанса R и индуктивност L (црт. 2), ако во него дејствува ЕМС $e = e(t)$.

Од вториот Киркофов закон добиваме:

$$u_L + u_R = e(t),$$

па според (2) и (1):



Црт. 2

$$L\,\frac{di}{dt} + R\,i = e(t), \tag{6}$$

т.е. линеарна ДР од прв ред. Ќе ги разгледаме двата случаја: а) ЕМС е константна и б) ЕМС е периодична.

а) (ЕМС е константна). Ако $e(t)=E$ (=конст.), тогаш (6) се сведува на ДР:

$$\frac{di}{E-Ri} = \frac{dt}{L}, \quad \text{па} \quad -\frac{1}{R}\ln(E-Ri) = \frac{t}{L} + \text{конст.},$$

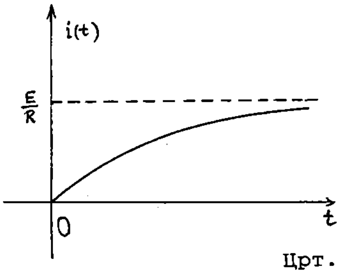
од каде што $E-Ri = Ae^{-Rt/L}$ (A е произволна константа). При почетните услови $t=0$, $i=0$ добиваме $A=E$, па

$$i(t) = \frac{E}{R}\,(1-e^{-Rt/L}). \tag{7}$$

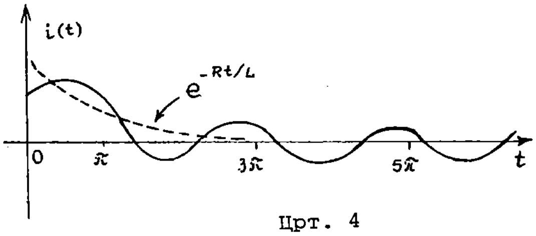
Со формулата (7) е искажан законот за временската промена на струјата во RL-коло со константна ЕМС, графички прикажан на црт. 3. Да забележиме дека при $t \to \infty$ имаме $e^{-Rt/L} \to 0$, па во (7), $i(t) \to E/R$.

б) (Периодична ЕМС). Ако $e(t)=E\sin\omega t$, тогаш општото решение (в. (4), §1.5) на ДР

$$L\,\frac{di}{dt} + R\,i = E\sin\omega t$$



Црт. 3



Црт. 4

е $\quad i(t) = e^{-\alpha t}[c + \frac{E}{L}\int e^{\alpha t}\sin\omega t\,dt]$, $(\alpha = \frac{R}{L})$.

Со делумна интеграција, добиваме

$$i(t) = c\cdot e^{-Rt/L} + \frac{E}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t).$$

Бидејќи $A\sin x - B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x-\delta)$, $\delta=\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{A}$ (в. зад. 2.10), добиваме:

$$i(t) = c\, e^{-Rt/L} + \frac{E}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\sin(\omega t-\delta),\quad \delta=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L}{R}. \tag{8}$$

Кога $t\to\infty$, експоненцијалниот член во (8) ќе се стреми кон нула, што значи дека по доволно долго време струјата $i(t)$ ќе се менува, практично, по законот на хармониска функција (црт. 4).

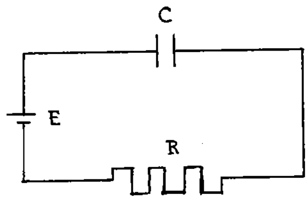
Пример 2 (RC-коло). Да се најде временската промена на струјата во коло со отпор R и капацитет C (црт. 5), ако во него дејствува ЕМС $e = e(t)$.

Од вториот Киркофов закон ја добиваме равенката

$$u_R + u_C = e(t),$$

па според (1) и (5):

$$Ri + \frac{1}{C}\cdot\int_{t_0}^{t} i\,dt = e(t).$$



Црт. 5

Диференцирајќи ги двете страни од последното равенство по t, ја добиваме следнава линеарна ДР:

$$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{de}{dt};$$

нејзиното општо решение е:

$$i(t) = e^{-t/RC}[A + \frac{1}{R}\int(e^{t/RC}\frac{de}{dt})dt].$$

а) За $e(t)$ = конст: $\frac{de}{dt} = 0$, па $i(t) = A\, e^{-t/RC}$.

б) За $r(t) = E\sin\omega t$: $\frac{de}{dt} = E\omega\cos\omega t$, па

$$i(t) = c_1 e^{-t/RC} + \frac{\omega EC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}(\cos\omega t + \omega RC\sin\omega t),$$

$$i(t) = c_1 e^{-t/RC} + \frac{\omega EC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cdot\sin(\omega t-\delta),\quad \delta = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right).$$

(в. и зад. 2.10).

<u>Задачи</u>: 2.8 - 2.10; 2.63 - 2.75.

§1.7. ЕГЗИСТЕНЦИЈА И ЕДИНСТВЕНОСТ НА РЕШЕНИЈАТА

Во §1.2 ја разгледавме задачата со почетен услов, т.е. кошиевиот проблем за ДР од прв ред:

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_o) = y_o. \tag{1}$$

Оваа задача, за разни ДР, може: да нема решение, може да има точно едно, а може да има и повеќе од едно решение. На пример, кошиевата задача:

1) $y'^2 + y^2 = 0, \quad y(0) = 1,$

нема решение, зашто $y \equiv 0$ е единственото решение на дадената ДР,

2) $y' = 2x, \quad y(0) = -1$

има точно едно решение, имено $y=x^2-1$,

3) $xy' + y = 2, \quad y(0) = 2,$

има повеќе решенија: $y=2+x$, $y=2-x$, $y=2+5x$ итн. (дури и бесконечно многу: $y=2+Cx$).

Оваа ситуација природно ги наметнува следниве две основни прашања:

<u>проблем на егзистенција</u>. Под кои услови кошиевата задача од обликот (1) има барем едно решение?

<u>проблем на единственост</u>. Под кои услови тој проблем има единствено, т.е. само едно решение?

Теоремите што ги поставуваат тие услови се викаат <u>теореми за егзистенција</u> и <u>теореми за единственост</u>, соодветно.

Наведените примери 1)-3) се мошне прости, па одговорот на поставените две прашања можеме да го најдеме едноставно, со пребарување. Но, тоа не е така лесно во комплицирани случаи (на пример, кога равенката не може да се реши со елементарни методи) и затоа теоремите за егзистенција и единственост на решение на ДР се многу важни.

(Да напоменеме дека такви теореми за егзистенција и единственост се среќаваат во многу други гранки од математиката - на пример, егзистенција и единственост на решение на систем линеарни равенки; тие таму се исто толку важни, колку таквите теореми кај диференцијалните равенки.)

Условите за егзистенција и единственост на решението на кошиевата задача (1) се мошне едноставни. Имено:

-ако $f(x,y)$ е непрекината во некоја област D од рамнината OXY при што $(x_o,y_o)\in D$, тогаш задачата (1) има барем едно решение;

-ако, покрај тоа, парцијалниот извод $\partial f/\partial y$ постои и е непрекинат во областа D, тогаш проблемот (1) има точно едно решение.

Овие услови ќе ги формулираме попрецизно во следниве две теореми.

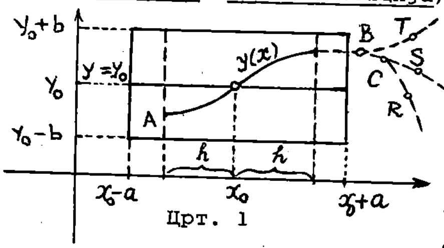
<u>Теорема 1</u> (<u>за егзистенција</u>). Ако $f(x,y)$ е непрекината во сите точки од еден правоаголник D (црт.1):

$$|x-x_o| < a, \quad |y-y_o| < b$$

и е ограничена на D на пример,

$$|f(x,y)| \le K \quad \forall (x,y)\in D, \tag{2}$$

тогаш кошиевата задача (1) има барем едно решение $y(x)$, коешто е дефинирано за сите вредности на x барем од интервалот $|x-x_o| < h$, каде што h е помалиот од броевите a, b/K.



Црт. 1

<u>Теорема 2</u> (<u>за единственост</u>). Ако $f(x,y)$ и $\partial f/\partial y$ се непрекинати во сите точки (x,y) од правоаголникот D и се ограничени,

$$(2) \quad |f| \le K, \qquad (3) \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L \quad \forall (x,y)\in D,$$

тогаш кошиевата задача (1) има само едно решение $y(x)$, коешто е дефинирано барем во интервалот $|x-x_0| < h$, $h=\min(a,b/K)$.

Тоа решение може да се добие со Пикаровиот метод на итерации, т.е. низата $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, каде што

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]dt, \quad n=1,2,\dots \tag{4}$$

конвергира кон тоа решение $y(x)$.

Геометриски, теоремата 2 кажува дека низ точката $(x_0,y_0)\in D$ минува една интегрална крива $y(x)$ и таа е единствена низ (x_0,y_0) во интервалот $|x-x_0| < \alpha$ (црт. 1). Но, надвор од овој интервал, т.е. во некоја поширока област, во која не е исполнет условот за непрекинатост на изводот $\partial f/\partial y$, може да се случи низ (x_0,y_0) да минуваат повеќе интегрални криви (на црт. 1: ABT, ABCR, ABCS).

Доказите на теоремите 1 и 2 излегуваат од рамките на оваа книга. (Доказ може да се најде, на пример, во книгата [МА], стр. 138-146 или [ЧУ], кн. III, стр. 139-146.)

Ќе разгледаме два примера.

<u>Пример 1</u>. Да провериме дали има решение следнава кошиева задача:

$$y' = xy + \cos y, \quad y(0) = 1.$$

Дадената ДР не можеме да ја решиме и да дадеме директен одговор. Сепак, со помош на теоремата 2, можеме да установиме дали оваа задача има решение. Имено, функциите

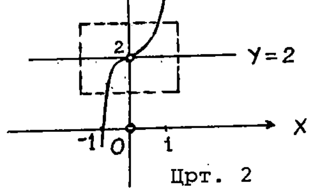
$$f(x,y) = xy + \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \sin y$$

се непрекинати во сите точки од рамнината OXY, т.е. тие се непрекинати и ограничени во секој правоаголник со центар во точката (0,1). Според теоремата 2, горната кошиева задача има единствено решение (во целата рамнина).

<u>Пример 2</u>. За кошиевата задача

$$y' = 3x\sqrt[3]{y-2}, \quad y(0) = 2,$$

можеме да заклучиме, според теоремата 1, дека има барем едно решение, зашто функцијата $f(x,y)=3x\sqrt[3]{y-2}$

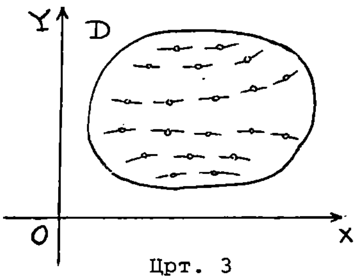


Црт. 2

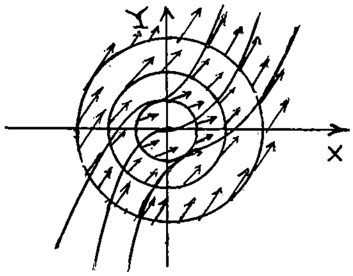
е непрекината во околина на точката (0,2). Функцијата $f'_y(x,y)=$ $=x(y-2)^{-2/3}$ не е ограничена во околина на (0,2), како и во која било точка од правата y=2, т.е. не е исполнет условот (3); затоа не можеме да тврдиме дали решението на задачата е единствено.

Лесно се покажува дека оваа задача има две различни решенија: $y_1(x)=2$ и $y_2(x)=x^3+2$ (црт. 2).

Во врска со ДР (1) постои можност да си создадеме геометриска претстава за одот на интегралните криви на (1) во областа D, во која функцијата f(x,y) е непрекината. Имено, со $y'=f(x,y)$, во секоја точка (x_o,y_o) од D е определен коефициентот на правецот на тангентата на интегралната крива што минува низ (x_o,y_o). Затоа се вели дека ДР (1) определува во D поле на правци (црт. 3).



Црт. 3



Црт. 4

Во практиката, за претставување на полето на правците обично се користат т.н. изоклини - линии, во чии точки правците на полето се константни (y'=конст.), т.е. линии со равенки f(x,y)=конст.

Пример 4. Полето на правци на ДР $y'=\sqrt{x^2+y^2}$ е определено со изоклините $x^2+y^2=C$ (црт. 4).

** Во врска со теоремите 1 и 2 ќе направиме неколку забелешки.

Заб. 1. Условите во двете теореми се доволни, но не се неопходни. Имено, може да се случи да постои решение на ДР - $y'=f(x,y)$, што го задоволува условот $y(x_o)=y_o$, дури и единствено, макар што во точката (x_o,y_o) не е исполнет условот (2) или (3) или двата заедно.

На пример, за ДР $y'=1/y^2$ имаме $f(x,y)=1/y^2$, $f'_y=-2/y^3$; во точките $(x_o,0)$ на оската OX условите (2) и (3) не се исполнети - функцијата f(x,y) и парцијалниот извод f'_y се прекинати и се неограничени при $y\to 0$ - но сепак низ секоја точка на оската OX минува интегрална крива, $y=\sqrt[3]{3(x-x_o)}$, и таа е единствена низ точката $(x_o,0)$.

Заб. 2. Условот (3) во теоремата 2 - за ограниченост на парцијалниот извод - може малку да се ослаби. Имено, според теоремата за средна вредност на функции имаме

$$f(x,y_2)-f(x,y_1) = (y_2-y_1)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=\overline{y}}$$

каде што (x,y_1) и (x,y_2) се точки од областа D, а $\overline{y}$ е соодветна вредност меѓу y_1 и y_2. Од ова и од (3) следува дека

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| \le L\,|y_2-y_1|; \tag{5}$$

се покажува дека условот (3) може да се замени со послабиот услов (5), којшто е познат под името Липшицов услов. Двете теореми можеме да ги обединиме во една:

Теорема 3. Ако функцијата $f(x,y)$ е непрекината и го задоволува Липшицовиот услов (5) по y во правоаголникот D, тогаш кошиевата задача

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0,y_0)\in D \tag{6}$$

има решение и тоа е единствено (во соодветен дел од D).

Заб. 3. Како што видовме во заб. 2, од ограниченоста на изводот f'_y, т.е. од (3), следува Липшицовиот услов (5), но од (5) не следува ограниченост на f'_y, дури f'_y може и да не постои. На пример, за ДР $y'=2|y|\cos x$ имаме дека изводот f'_y на фунцкијата $f(x,y)=2|y|\cos x$ во точката $(x_0,0)$, $x_0\neq\pi/2+k\pi$ $(k=0,\pm1,\dots)$ не постои, но Липшицовиот услов во околина на таа точка е исполнет.

Непрекинатоста, пак, на функцијата $f(x,y)$ од (6) не гарантира единственост на решението на задачата. Значи, непрекинатоста (и ограниченоста) на f'_y е одвишна, а на f - недоволна за единственост на решението на (6). **

Задачи: 5.11; 5.69-5.70

*§1.8. ПОИМ ЗА ПРИБЛИЖНО РЕШАВАЊЕ ДР

Дадена е диференцијална равенка

$$y' = f(x,y). \tag{1}$$

Се бара решение $y=y(x)$ што го задоволува условот

$$y(x_o) = y_o. \tag{2}$$

Во практиката често се случува со познатите методи да не можеме да најдеме точно решение, па тогаш се обраќаме кон приближни методи (нумерички или аналитички). Такви методи се изучуваат во нумеричката математика. За илустрација, овде ќе наведеме два такви метода.

I Ојлеров метод

Да речеме, нас нè интересира решението на сегментот $[x_o,a]$. Тогаш тој сегмент го поделуваме на неколку (обично еднакви) делови со точки $x_o,x_1,\dots,x_n$;

$$x_o<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n = a.$$

Бараната интегрална крива минува низ точката (x_o,y_o), каде што x_o,y_o се зададените броеви со почетниот услов (2). За $x_o \le x \le x_1$, таа крива ја заменуваме со нејзината тангента во (x_o,y_o); бидејќи нејзиниот наклон (т.е. коефициентот на правецот) е $y_o'=f(x_o,y_o)$, нејзината равенка ќе биде:

$$y - y_o = f(x_o,y_o)(x-x_o).$$

Оттука лесно ја наоѓаме ординатата y_1 на точката со апсциса x_1:

$$y_1 = y_o + f(x_o,y_o)(x_1-x_o).$$

За $x_1 \le x \le x_2$, бараната интегрална крива ја заменуваме со правата низ (x_1,y_1) со наклон $y_1'= (x_1,y_1)$:

$$y - y_1 = f(x_1,y_1)(x-x_1),$$

од каде што ја добиваме ординатата y_2 што одговара на x_2:

$$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)(x_2-x_1).$$

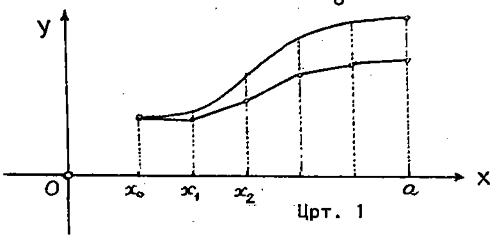
Продолжувајќи така, на k+1-от чекор добиваме

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k,y_k)(x_{k+1}-x_k), \tag{3}$$

т.е. ако точките x_o, $x_1,\dots,x_n$ се на еднакви растојанија и $h=x_{k+1}-x_n$:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k,y_k). \tag{3'}$$

Формулата (3), за $k=0,1,\dots,n-1$, ги дава ординатите на темињата на искршената линија на црт. 1 (наречена ојлерова искршена линија); таа линија определува графичко приближно решение на (1) во сегментот $[x_o,a]$.



Црт. 1

На тој начин ја добиваме таблицата

x_o	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
y_o	y_1	y_2	...	y_k	...	y_n

којашто определува нумеричко решение на (1) во сегментот $[x_o,a]$.

Ако $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ се непрекинати во разгледуваната област D, т.е. ако за (1) се исполнети условите од теоремата 2 во §1.7 за (егзистенција и) единственост на решението , тогаш може да се покаже дека ојлеровата искршена линија, при условот $\max|x_{k+1}-x_k|\to 0$ кога $k\to\infty$, ја претставува интегралната крива во точката (x_o,y_o).

II Метод на последователни приближувања (Пикаров метод)

Решението на задачата, поставена во почетокот на овој параграф, е еквивалентна со решението на интегралната равенка

$$y = \int_{x_o}^{x} f(x,y)dx + y_o. \tag{4}$$

Навистина, ако една функција $y=y(x)$ ги задоволува ДР (1) и условот (2), тогаш, заменувајќи ја $y(x)$ во (1) и интегрирајќи од x_o до x, ја добиваме врската (4).

Обратно, нека една функција $y=y(x)$ ја задоволува равенката (4). Заменувајќи ја $y(x)$ во (4) и диференцирајќи ја (4) по x, доаѓаме до врската $y'=f(x,y)$ и, притоа, ставајќи $x=x_o$ во (4), добиваме дека $y(x_o)=y_o$.

Равенката (4) лежи во основата на т.н. метод на последователни приближувања, кој се состои во следново:

-за почетно приближување се зема почетниот услов y_o, а потоа последователно ја добиваме низата функции

$$y_1 = y_1(x),\quad y_2 = y_2(x),\dots,y_n = y_n(x),\dots , \tag{5}$$

чиј општ член $y_n=y_n(x)$ е определен со формулата

$$y_n = y_o + \int_{x_o}^{x} f(x,y_{n-1})dx. \tag{6}$$

(Функциите $y_1,y_2,y_3,\dots$ се викаат: прво, второ, трето,... приближување.)

Може да се покаже дека низата (5), во случајот кога $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ се непрекинати во некоја (правоаголна) област D, конвергира и нејзиниот лимес $y=y(x)$ е решението на (1) при почетниот услов (2).

Задачи: 5.12, 5.13; 5.71-5.74

Глава 2

ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Линеарните ДР со константни коефициенти имаат едноставна теорија и во некои учебници таа се изложува само како мала епизода во општата теорија на линеарните ДР. Причините што линеарните ДР од втор ред со константни коефициенти овде ги разгледуваме посебно се следниве: од една страна, тие се на првото место по значење за примените; од друга страна, добро е студентот да се концентрира отпрво на овој тип ДР од повисок ред, зашто нивното решавање е неспоредливо поедноставно отколку на општите линеарни ДР; на крајот, откако студентот ќе ги совлада методите за решавање на овие равенки, општите теориски разгледувања ќе му станат далеку полесни.

Прво ќе се запознаеме со почетните поими за ДР од повисок ред, потоа ќе ги разгледаме методите за решавање хомогени и нехомогени ЛДР од втор ред со константни коефициенти и, на крајот, ќе се задржиме кратко на некои примени на ЛДР од втор ред во механиката и електротехниката. Во последниот параграф на оваа глава ќе се сретнеме со една мала, но убава илустрација на една мисла од францускиот математичар А. Поанкаре (1854-1912) дека: „Математиката е уметност да се нарекуваат различни нешта со исто име".

§2.1. ПОЧЕТНИ ПОИМИ ЗА ДР ОД ПОВИСОК РЕД

Поимот диференцијална равенка од n-ти ред се воведува аналогно како поимот ДР од прв ред: тоа е равенка, чија непозната е функција од една променлива, а во равенката влегуваат и изводите на таа функција до изводот од n-ти ред заклучно.

Значи, диференцијална равенка од n-ти ред е равенка од обликот

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

каде што F е непрекината функција од $x,y,y',\dots,y^{(n)}$. Притоа, некој од аргументите $x,y,y',\dots,y^{(n-1)}$ на функцијата F во (1) може и да недостасува, но $y^{(n)}$ мора да е застапен. Така, на пример:

1) $y''-5y'+6y = 0$ е ДР од втор ред,

2) $y'''+y'' = \cos x$ е ДР од трет ред,

3) $x^2y^6+yy^{iv} = 5$ е ДР од четврти ред итн.

Ние ќе разгледуваме ДР од n-ти ред главно сведени по n-тиот извод, т.е. ДР од обликот

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}), \qquad (2)$$

а специјално, сведени ДР од втор ред:

$$y'' = f(x,y,y'),$$

каде што f е непрекината функција од своите аргументи.

Една функција $y=\phi(x)$ се вика <u>решение</u> на една ДР од n-ти ред во некој интервал (може и бесконечен), ако $\phi(x)$ е дефинирана и n-пати диференцијабилна во тој интервал и ако дадената ДР станува идентитет кога y и нејзините изводи $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ во равенката ќе се заменат со $\phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n)}$ соодветно.

<u>Пример</u>. Функцијата $\phi(x)=e^x-x^2/2$, како што може лесно да се провери, е решение на ДР $y'''-y''=1$. ||

Ако решението е зададено како имплицитна функција, во обликот $\Phi(x,y)=0$, тогаш тоа се вика <u>имплицитно решение</u> или, често, <u>интеграл</u> на дадената ДР. Самиот процес на наоѓање решенија се вика <u>интегрирање</u> на дадената ДР.

Најпростите ДР од n-ти ред имаат облик

$$y^{(n)} = f(x), \tag{3}$$

каде што f(x) е дадена функција. Наоѓањето на нејзините решенија може да се сведе на n последователни интегрирања.

<u>Пример 2</u>. Да ја интегрираме ДР

$$y''' = e^x. \tag{а}$$

Имаме:

$$y''=\int e^x dx = e^x+\bar{C}_1; \qquad y'=\int (e^x+\bar{C}_1)dx = e^x+\bar{C}_1x+C_2;$$

$$y=\int (e^x+\bar{C}_1x+C_2)dx = e^x+C_1x^2+C_2x+C_3 \quad (C_1=\bar{C}_1/2).$$

Добиената функција

$$y = e^x + C_1x^2 + C_2 + C_3 \tag{б}$$

е решение на ДР (а) од трети ред; таа содржи три произволни константи C_1, C_2, C_3, независни една од друга. (Независноста овде значи: истото решение не може да се редуцира на облик што содржи помалку од три произволни константи.) ||

Лесно можеме да замислиме дека вака добиеното решение на ДР (3) ќе содржи точно n произволни константи $C_1, C_2, \ldots, C_n$, независни меѓу себе. Со некои мали исклучоци, тоа својство го има и секоја ДР од n-ти ред.

И за ДР од n-ти ред може да се формулира <u>кошиева задача</u> (т.е. <u>задача со почетни услови</u>). Таа се состои во следново:

Да се најде решение $y=y(x)$ на ДР од n-ти ред,

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}), \tag{4}$$

за која би биле исполнети почетните услови:

$$y(x_o)=y_o,\quad y'(x_o)=y_o',\dots,y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}, \tag{5}$$

каде што $x_o,y_o,y_o',\dots,y_o^{(n-1)}$ се дадени n+1 броеви.

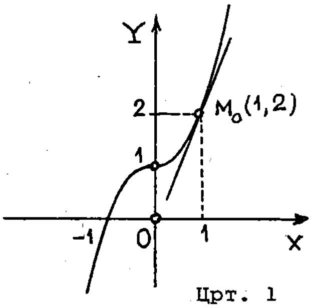
Геометриски тоа значи дека се бара интегрална крива што минува низ точката (x_o,y_o), а во таа точка изводите $y',y'',\dots,y^{(n-1)}$ треба да имаат однапред зададени вредности: $y_o,y_o'',\dots,y_o^{(n-1)}$ соодветно.

<u>Пример 3</u>. Да најдеме решение на ДР

$$y'' = 6x, \tag{a}$$

коешто ги задоволува почетните услови:

$$y(1)=2,\qquad y'(1)=3. \tag{б}$$



Црт. 1

Имаме:

$y'=\int 6x dx = 3x^2+C_1$;

$y=\int(3x^2+C_1)dx = x^3+C_1x+C_2$.

Функцијата

$$y = x^3 + C_1x + C_2 \tag{в}$$

е решение на дадената ДР (поточно: таа е множество решенија, поради произволноста на константите C_1, C_2). За да го најдеме бараното решение, треба да ги определиме константите C_1 и C_2, така што да бидат задоволени дадените почетни услови. Затоа, во

$$y = x^3+C_1x+C_2 \quad \text{и} \quad y' = 3x^2+C_1$$

ги заменуваме x=1, y=2 и y'=3 и го добиваме системот равенки по C_1 и C_2:

$$2 = 1+C_1\cdot 1+C_2,\qquad 3 = 3\cdot 1^2+C_1;$$

неговото решение е $C_1=0$, $C_2=1$. Заменувајќи во (в), го добиваме бараното решение: $y=x^3+1$. Интегралната крива минува низ точката (1,2), а коефициентот на правецот на нејзината тангента во таа точка е $y'=3$ (црт. 1). ||

Егзистенција и единственост на решението на кошиевата задача за ДР од n-ти ред обезбедува следнава теорема, којашто е директно обопштување на Т.1 и Т.2 од §1.7.

Теорема 1. Ако во ДР (4) функцијата f:

i) е непрекината по сите свои аргументи $x,y,y',\dots,y^{(n-1)}$ во некоја област D (од R^{n+1}) на нивното менување,

ii) има ограничени парцијални изводи

$f'_y, f'_{y'}, f'_{y''},\dots,f'_{y^{(n-1)}}$ во областа D,

тогаш постои интервал $(x_o-h,\ x_o+h)$ на кој ДР (4) има единствено решение, кое ги задоволува условите (5); притоа, $(x_o,y_o,y'_o,\dots,y_o^{(n-1)})\in D$. ∎

Пример 4. Кошиевата задача

$$y'' = x^2y'+e^{xy},\qquad y(0) = 2,\quad y'(0) = 3,$$

има единствено решение $y=\phi(x)$, зашто функциите:

$$f(x,y,y') = x^2y'+e^{xy},\qquad f'_y=xe^{xy},\quad f'_{y'}=x^2$$

се непрекинати функции од своите аргументи за сите вредности на x,y,y' (т.е. во сите точки од R^3), па според Т.1, решението на дадената задача е единствено. ||

Сега да го воведеме поимот општо решение на ДР од n-ти ред.

Општо решение на ДР (4) од n-ти ред се вика функцијата

$$y = \phi(x,C_1,C_2,\dots,C_n) \tag{6}$$

којашто зависи од n произволни константи и таква што:

а) таа ја задоволува дадената ДР при кои било вредности на константите $C_1,C_2,\dots,C_n$;

б) при зададени почетни услови (5) константите $C_1,\dots,C_n$ може да се изберат така што функцијата (6) да ги задоволува тие услови.

(Притоа, се подразбира дека точката $(x_o,y_o,y'_o,\dots,y_o^{(n-1)})$ ѝ припаѓа на областа D, спомната во Т.1).

Врската од обликот $\Phi(x,y,C_1,C_2,\dots,C_n)=0$ којашто имплицитно го определува општото решение се вика општ интеграл на дадената ДР.

Секоја функција што се добива од општото решение кога константите $C_1,\dots,C_n$ се заменат со конкретни вредности, се вика партикуларно решение, а нејзиниот график - интегрална крива на дадената ДР.

Задачи: 1.1-1.6; 1.21, 1.25, 1.26

§2.2. ХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДР ОД ВТОР РЕД СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Во овој дел ќе ги разгледаме ДР од втор ред со форма

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{1}$$

каде што a и b се дадени реални броеви, наречени коефициенти на ДР (1). Овие ДР, наречени хомогени линеарни ДР од втор ред со константни коефициенти, имаат важни примени во техниката, особено во механиката и електротехниката, како што ќе видиме натаму.

Нека функцијата $y=e^{rx}$ (r=конст.) е решение на ДР (1). Заменувајќи ја во (1), а потоа кратејќи со e^{rx}, ја добиваме равенката

$$r^2 + ar + b = 0. \tag{2}$$

Обратно, ако r е решение на равенката (2), тогаш функцијата $y=e^{rx}$ е решение на (1). Значи, потребен и доволен услов за функцијата $y=e^{rx}$ да е решение на (1) е бројот r да е корен на равенката (2). Поради тоа, (2) се вика карактеристична равенка на ДР (1).

Нека r_1 и r_2 се корените на (2). Тогаш $a=-(r_1+r_2)$ и $b=r_1r_2$, па (1) ја добива формата

$$y'' - (r_1+r_2)y' + r_1r_2y = 0, \tag{3}$$

т.е.

$$(y'-r_1y)' - r_2(y'-r_1y) = 0.$$

Ставајќи $u=y'-r_1y$ во (3), добиваме $u'-r_2u=0$, чиешто општо решение е $u=Ce^{r_2x}$, па $y'-r_1y=Ce^{r_2x}$. Користејќи ја формулата (4) од §1.5, добиваме:

$$y = e^{r_1x}\left(C_1 + C\int e^{(r_2-r_1)x}dx\right).$$

Ако $r_1=r_2=r$, тогаш

$$\boxed{y = e^{rx}(C_1 + C_2x),} \tag{4}$$

каде што $C_2=C$; ако, пак, $r_1 \neq r_2$, тогаш ставајќи $C_2=C/(r_2-r_1)$, добиваме

$$\boxed{y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x};} \tag{5}$$

притоа, C_1 и C_2 се произволни константи, независни една од друга. Поради тоа:

Теорема 1. Функцијата $y=\phi(x,C_1,C_2)$, определена со (4) кога $r_1=r_2=r$, односно со (5) кога $r_1 \neq r_2$, претставува општо решение на (1).

Пример 1. Да ја решиме ДР $y''-2y'-3y = 0$.

Ги наоѓаме, прво, корените на карактеристичната равенка

$$r^2 -2r-3 = 0 ,$$

$r_1=-1$, $r_2=3$; тие се различни меѓу себе, па според (5),

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

е општото решение на дадената ДР. ||

Пример 2. $y''-4y'+4y = 0$.

Корените на карактеристичната равенка $r^2-4r+4=0$ се еднакви, $r_1=r_2=2$, па според (4), $y=e^{2x}(C_1+C_2x)$ е општото решение на дадената ДР. ||

Пример 3. $y''-2y'+2y=0$.

Карактеристичната равенка е $r^2-2r+2=0$. Нејзините корени се: $r_1=1+i$, $r_2=1-i$, значи се различни. Според (5):

$$y = C_1e^{(1+i)x}+C_2e^{(1-i)x} = e^x(C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}). \quad ||$$

Ако корените r_1, r_2 се комплексни, тогаш тие се конјугирано комплексни: $r_1=\alpha+i\beta=r$, $r_2=\alpha-i\beta=\bar{r}$ $(\beta\neq0)$. Во тој случај, со (5) е определена комплексна функција y од реален аргумент x (притоа, C_1 и C_2 се комплексни константи), па се поставува прашањето за издвојување на реалните решенија на ДР (1).

Имајќи ја предвид дефиницијата на функцијата e^{ix}: $e^{ix}=\cos x+ +i\sin x$ (в. [ЧУ], кн. II, стр. 139), како и

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}),$$

се покажува дека:

Теорема 2. Ако корените r_1 и r_2 се конјугирано комплексни, $r_1=r$ и $r_2=\bar{r}$, тогаш функцијата y во (5) е реална ако и само ако константите C_1 и C_2 се конјугирани, $C_1 = \bar{C}_2$.

Навистина, нека C_1 и C_2 се конјугирани: $C_2=(A+iB)/2$, $C_1=(A-iB)/2$, A и B се реални произволни константи. Тогаш во (5) имаме:

$$y = C_1e^{rx} + C_2e^{\bar{r}x} = \frac{1}{2}(A-iB)e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2}(A+iB)e^{(\alpha-i\beta)x} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{\alpha x}[A(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) + iB(-e^{i\beta x}+e^{-i\beta x})],$$

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x),} \tag{6}$$

т.е. функцијата y е реална. (Лесно се покажува и обратното.)

Ако r_1, r_2 се чисто имагинарни, тогаш $\alpha=0$, т.е. $e^{\alpha x}=1$, па општото решение на (1) добива вид:

$$y = A\cdot\cos\beta x + B\cdot\sin\beta x. \tag{6'}$$

Пример 4. $y'' + 9y = 0$; $r^2 + 9 = 0$, $r_{1,2} = \pm 3i$; општото решение е $y = A\cos 3x + B\sin 3x$. ||

Задачи: 2.11-2.13; 2.76-2.90

§2.3. НЕХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДР ОД ВТОР РЕД СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Диференцијалната равенка со форма

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{1}$$

каде што a и b се дадени реални броеви, наречени коефициенти на (1), а f(x) е дадена ненулта функција, се вика нехомогена линеарна ДР од втор ред со константни коефициенти. Диференцијалната равенка

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2}$$

се вика соодветна хомогена ЛДР на (1).

Теорема 1. Секое решение $y=y(x)$ на ДР (1) е определено со формулата

$$y = y_0 + Y, \tag{3}$$

каде што y_0 е кое било решение на (2), а Y е некое партикуларно решение на (1).

<u>Доказ</u>. Ако y_0 е решение на (2), а Y – на (1), тогаш:

$$y_0'' + ay_0' + by_0 = 0, \qquad Y'' + aY' + bY = f(x),$$

па $(y_0+Y)'' + a(y_0+Y)' + b(y_0+Y) = f(x)$, што значи дека $y = y_0 + Y$ е решение на (1).

Обратно, нека $y=y(x)$ е решение на (1), т.е. за y важи равенството (1). Бидејќи $Y=Y(x)$ е, исто така, решение на (1), добиваме:

$$(y-Y)'' + a(y-Y)' + b(y-Y) = 0,$$

што значи дека $y-Y$ е решение на (2); означувајќи го со y_0 добиваме $y-Y = y_0$, т.е. y го има видот (3). ▯

Ако y_0 е општо решение на (2), тогаш решението y на (1), дадено со $y=y_0+Y$, содржи две произволни константи; се покажува дека тоа е општо решение на ДР (1). Затоа, Т. 1 често се искажува и на следниов начин:

<u>Теорема 1'</u>. Општото решение y на (1) се составува од општото решение y_0 на (2) и од некое партикуларно решение Y на (1): $y=y_0+Y$. (Во тој случај y_0 се вика и <u>комплементарна функција</u> на (1).) ▯

<u>Пример 1</u>. $y''-3y'+2y=2x-3$. Лесно се увидува дека $Y=x$ е решение на дадената ДР. Соодветната хомогена ЛДР, $y''-3y'+2y=0$, има карактеристична равенка $r^2-3r+2=0$, чии корени се $r_1=1$, $r_2=2$, па нејзиното општо решение е $y_0=C_1e^x+C_2e^{2x}$. Според Т. 1, општото решение на дадената нехомогена ЛДР е $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x$. ‖

Од изнесеното е јасно дека основната тешкотија при решавањето на нехомогени ЛДР со константни коефициенти е наоѓањето на еден партикуларен интеграл на таа ДР. Во некои случаи, кога десната страна на (1), т.е. $f(x)$, припаѓа на една посебна класа функции, постои можност релативно лесно да се најде партикуларното решение Y на (1).

Најважни форми на $f(x)$ и најчесто среќавани во примената се:

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{4}$$

или:

$$f(x) = Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{4'}$$

каде што $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ се дадени полиноми од m-ти степен, а α и β се дадени реални броеви.

Класата функции со форма (4) или (4´) е моќне широка. На пример, за $\alpha=\beta=0$ и $m>0$, $f(x)$ е полином (од m-ти степен); за $m=0=\beta$ и $\alpha\neq 0$, $f(x)$ е експоненцијална функција; итн.

Начинот на наоѓање партикуларно решение на (1) со десна страна $f(x)$ од обликот (4) или (4´), наречен <u>метод на избор</u> или <u>метод на неопределени коефициенти</u>, се потпира на следнава теорема:

<u>Теорема **2**</u>. Нека десната страна на (1) има вид (4) или (4´).

<u>1°</u>. Ако, притоа, бројот $\alpha+i\beta$ не е корен на карактеристичната равенка $r^2+ar+b=0$, тогаш ДР (1) има партикуларно решение со форма

$$Y = e^{\alpha x}[U_m(x)\cos\beta x + V_m(x)\sin\beta x], \tag{5}$$

каде што $U_m(x)$, $V_m(x)$ се некои полиноми со степен не поголем од m.

<u>2°</u>. Ако, пак, $\alpha+i\beta$ е корен на $r^2+ar+b=0$ со кратност k, тогаш ДР (1) има партикуларно решение од видот

$$Y = x^k e^{\alpha x}[U_m(x)\cos\beta x + V_m(x)\sin\beta x], \tag{6}$$

каде што $U_m(x)$ и $V_m(x)$ се како во 1°.

Во случајот 1°, кога $\alpha+i\beta$ не е корен на $r^2+ar+b=0$, постоењето на партикуларно решение со форма (5) може да се очекува поради тоа што, ако (5) се диференцира и се замени во (1), изразот на левата страна од (1) ќе има ист вид како (5), но со некои други (неопределени) коефициенти во полиномите, коишто се множители на $\cos\beta x$, $\sin\beta x$. Бидејќи и функцијата $f(x)$ има вид (5), следува дека при некој <u>специјален избор</u> на коефициентите на $U_m(x)$ и $V_m(x)$ може да се постигне функцијата Y, определена со (5), да ја задоволува (1).

За случајот **2**° важи истото расудување, со мала корекција. □

<u>Пример 2</u>. $y''+4y=25xe^{-x}$ $(m=1,\ \alpha=-1,\ \beta=0)$.

Карактеристичната равенка на соодветната хомогена ЛДР е $r^2+4=0$, чии решенија се $r_1=i$, $r_2=-i$, па бројот $\alpha+i\beta=-1$ не е нејзин корен. Значи, го имаме случајот 1°, па според (5):

$$Y = (Ax + B)e^{-x},$$

каде што A и B се неопределени константи. Заменувајќи Y и $Y''=(Ax+B-2A)e^{-x}$ во дадената ДР, добиваме:

$$(Ax + B - 2A)e^{-x} + (4ax + 4B)e^{-x} = 25x\ e^{-x},$$

$$5Ax + 5B - 2A = 25x,$$

од каде што $5A=25$ и $5B-2A=0$, т.е. $A=5$, $B=2$, па $y=(5x+2)e^{-x}$.

Бидејќи општото решение на соодветната хомогена ЛДР $y''+4y=0$ е $y_o=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$, според Т.1´ добиваме дека

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + (5x+2)e^{-x}$$

е општо решение на дадената ДР. ||

За наоѓање партикуларни решенија често се користи т.н. принцип на суперпозиција:

Теорема 3. Ако Y_1 односно Y_2 е партикуларно решение на ДР $y''+ay'+by=f_1(x)$ односно $y''+ay'+by=f_2(x)$, тогаш функцијата $Y=Y_1+Y_2$ е решение на ДР

$$y'' + ay' + by = f_1(x)+f_2(x). \tag{7}$$

Точноста на ова тврдење лесно се проверува со непосредно заменување на функцијата $Y=Y_1+Y_2$ во последната равенка. Јасно е дека овој принцип се проширува и за случајот кога десната страна на (7) има и повеќе од два собирока.□

За илустрација, ќе разгледаме еден пример.

Пример 1. $y'' + y' = e^{-x} + 2\cos x.$ (а)

Според Т.3, доволно е да ги решиме равенките

$$y'' + y' = e^{-x}, \quad y'' + y' = 2\cos x. \tag{б}$$

За соодветната хомогена ЛДР $y''+y'=0$ општото решение е

$$y_o=C_1+C_2e^{-x}.$$

Првата од равенките (б) има партикуларно решение од обликот $Y_1=Axe^{-x}$, а втората - од обликот $Y_2=B\cos x+C\sin x$; лесно добиваме дека

$$Y_1 = -xe^{-x}, \qquad Y_2 = -\cos x+ \sin x.$$

Според Т.3, $Y=Y_1+Y_2 = -xe^{-x}-\cos x+\sin x$ е партикуларно решение на ДР (а), па

$$y = y_o+Y = C_1+C_2e^{-x}-xe^{-x}-\cos x+\sin x$$

е општото решение на дадената ДР. ||

Задачи: 2.14-2.21; 2.91-2.101; 3.60 а)

§2.4. ЛАГРАНЖОВ МЕТОД НА ВАРИЈАЦИЈА НА ПРОИЗВОЛНИТЕ КОНСТАНТИ

Постои општ метод за наоѓање партикуларни решенија на нехомогени линеарни ДР, наречен Лагранжов метод на варијација на произволните константи. За разлика од методот на избор (§2.3), за чија примена функцијата $f(x)$ од десната страна на равенката (1) треба да има специјален облик, при методот на варијација на константите тоа барање за функцијата $f(x)$ не е неопходно. (Да забележиме дека со овој метод веќе се сретнавме во §1.5 за ЛДР од прв ред.)

Нека е дадена нехомогената линеарна ДР

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x), \tag{1}$$

каде што f е дадена функција, непрекината на некој интервал E. Потоа, нека комплементарната функција на (1) е најдена, т.е. нека соодветната хомогена ЛДР

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{2}$$

е решена и нејзиното општо решение е

$$y_o = C_1y_1 + C_2y_2. \tag{3}$$

Идејата на Лагранжовиот метод се состои во заменување на произволните константи C_1 и C_2 од (3) со неопределени функции $c_1=c_1(x)$ и $c_2=c_2(x)$, кои треба да се определат така што добиената функција

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 \tag{4}$$

да биде партикуларно решение на (1) во интервалот E (тоа заменување на C_1,C_2 со $c_1(x)$, $c_2(x)$ значи варирање на произволните константи).

Диференцирајќи ја функцијата (4), добиваме

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' + (c_1'y_1+c_2'y_2).$$

Функциите $c_1(x)$ и $c_2(x)$ можеме да ги определиме така што

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \tag{5}$$

(подолу ќе се покаже дека е тоа можно); според тоа, изразот за y' го добива обликот

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2', \tag{6}$$

а нејзиниот извод е

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2'. \tag{7}$$

Заменувајќи ги (4), (6) и (7) во (2), добиваме

$$c_1(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+c_2(y_2''+a_1y_2'+a_2y_2)+c_1'y_1'+c_2'y_2' = f(x).$$

Бидејќи y_1 и y_2 се решенија на (2), последното равенство се сведува на

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x).$$

Оваа равенка и (5) го формираат следниов систем алгебарски равенки по непознатите функции c_1', c_2':

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0, \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' &= f(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Се покажува дека детерминантата на системот (8),

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1y_2'$$

е различна од нула за секој x од интервалот E (види §3.4 и Т.4 во §3.7) па тој систем, според Крамеровото правило, има единствено решение:

$$c_1' = -y_2 \cdot \frac{f(x)}{W}, \quad c_2' = y_1 \cdot \frac{f(x)}{W}.$$

По интегрирањето:

$$c_1 = -\int y_2 \cdot \frac{f(x)}{W}\,dx + A_1, \quad c_2 = \int y_1 \cdot \frac{f(x)}{W}\,dx + A_2,$$

т.е.

$$c_1 = \Phi_1(x) + A_1, \quad c_2 = \Phi_2(x) + A_2$$

(A_1 и A_2 се произволни константи). Така, за (4) имаме

$$y = A_1y_1 + A_2y_2 + \Phi_1(x)\cdot y_1 + \Phi_2(x)\cdot y_2 \tag{9}$$

Од претходната дискусија е јасно дека (9) е решение на (1). Ставајќи во (9): $A_1=A_2=0$, добиваме дека $Y=\Phi_1(x)\cdot y_1+\Phi_2(x)\cdot y_2$ е партикуларно решение на (1). Бидејќи $y_o=A_1y_1+A_2y_2$ е општо решение на соодветната хомогена ЛДР (2), според Т.1 од §2.3, добиваме дека (9) има облик $y=y_o+Y$, т.е. (9) е општо решение на (1).

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. Нека $y=C_1y_1+C_2y_2$ е општото решение на хомогената ЛДР (2). Ако на местото од произволните константи C_1, C_2 се стават функции $c_1=c_1(x)$, $c_2=c_2(x)$ соодветно, што ги задоволуваат условите

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0,\\ c_1'y_1' + c_2'y_2' &= f(x), \end{aligned} \tag{10}$$

тогаш општото решение на ЛДР (1) е определено со формулата

$$y = c_1(x)\cdot y_1 + c_2(x)\cdot y_2. \;\square \tag{11}$$

За илустрација ќе разгледаме два примера.

Пример 1. $y''+y'=e^{-x}+2\cos x.$ $\quad (a_1)$

Општото решение на соодветната хомогена ДР $y''+y'=0$ е

$$y = C_1 + C_2e^{-x}$$

(в. и пр. 3 од §2.3), а системот (10) има вид:

$$\begin{aligned} c_1'\cdot 1 + c_2'\cdot e^{-x} &= 0,\\ c_1'\cdot 0 - c_2'\cdot e^{-x} &= e^{-x} + 2\cos x. \end{aligned} \tag{a_2}$$

Од втората равенка на (a_2) имаме

$$c_2 = \int(-1-2e^{x}\cos x)\,dx = -x-e^{x}(\sin x+\cos x) + A_2;$$

потоа, од првата равенка на (a_2):

$$c_1'=-e^{-x}\cdot c_2' = e^{-x}+2\cos x; \quad c_1=-e^{-x}+2\sin x+A_1.$$

Значи, според (11), општото решение на (a_1) е:

$$y = A_1+(A_2+1)e^{-x} - xe^{-x} - \cos x + \sin x. \;||$$

Пример 2. $y''+y=\operatorname{tg}x.$

За хомогената: $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Системот (10): $c_1'\cdot\cos x+$ $+c_2'\cdot\sin x=0$, $-c_1'\cdot\sin x+c_2'\cdot\cos x=\operatorname{tg}x$; $c_2=-\cos x+A_2$, $c_1=\sin x-\ln\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})+A_1$; $y=A_1\cos x+A_2\sin x-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$. ||

Задачи: 3.19; 3.62–3.66

§2.5. ОЈЛЕРОВИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД

Диференцијалните равенки со форма

$$x^2y'' + axy' + by = f(x), \tag{1}$$

каде што a и b се константи, a f е дадена функција од x, се викаат ојлерови (или кошиеви) равенки. Ако $f(x) \equiv 0$, тогаш ДР (1) се вика хомогена, а ако $f(x) \not\equiv 0$, тогаш (1) се вика нехомогена линеарна ДР на Ојлер од втор ред.

Ојлеровата хомогена линеарна ДР

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \tag{2}$$

со смената на аргументот x,

$$x = e^t \text{ при } x > 0 \quad (x=-e^t \text{ при } x < 0) \tag{3}$$

се трансформира во хомогена ЛДР со константни коефициенти.

Пример 1. $x^2y''-xy'-3y = 0.$ (a_1)

Смена: $x=e^t$, $x > 0$; $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t}$; $y'' = \frac{d}{dx}(y') =$ $= \frac{d}{dt}(\dot{y}e^{-t})e^{-t} = (\ddot{y}-\dot{y})e^{-2t}$; по заменувањето во (a_1), добиваме:

$$\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 0; \tag{a_2}$$

$r^2-2r-3=0$, $r_1=3$, $r_2=-1$, па $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$ е општо решение на (a_2). Со смената $e^t=x$ добиваме $y=C_1x^3+C_2x^{-1}$ - општо решение на ДР (a_1). ||

Наместо со смената $x=e^t$, решенија на (2) може да се бараат во обликот

$$y = x^k, \tag{4}$$

каде што k е константа што треба да се определи.

Пример 2. $x^2y'' - xy' - 3y = 0.$

Заменуваме $y=x^k$, $y=kx^{k-1}$, $y''=k(k-1)k^{x-2}$ и добиваме $k(k-1)x^k-kx^k-3x^k=0$, т.е. $k^2-2k-3=0$, $k_1=3$, $k_2=-1$ (забележете дека оваа равенка по k е еквивалентна со карактеристичната равенка на ДР (a_2) од пр. 1). Значи, $y_1=x^3$ и $y_2=x^{-1}$ се две (линеарно независни) решенија на дадената ДР, па $y=C_1x^3+C_2x^{-1}$ е нејзино општо решение. (Види и §3.4.) ||

Нехомогената ојлерова ДР (1) може да се интегрира откако ќе се реши соодветната хомогена равенка (2) и потоа ќе се најде едно партикуларно решение на ДР (1), на пример, со методот на варијација на произволните константи.

Пример 3. $x^2y'' + xy' - y = 3\sqrt{x}$. (б$_1$)

Оваа е нехомогена ојлеровска ДР. Како и во примерот 2, за соодветната хомогена ДР наоѓаме: $y=C_1x+C_2/x$. Системот (10) од §2.4 е:

$$C_1'x + C_2'/x = 0, \qquad C_1'-C_2'/x^2 = 3\sqrt{x}/x^2. \tag{б$_2$}$$

(Забележете дека $f(x)=3\sqrt{x}/x^2$, а не $3\sqrt{x}$!)

Од (б$_2$) се добива $C_1=-3x^{-1/2}+A_1$ и $C_2=-x^{3/2}+A_2$, па општиот интеграл на (б$_1$) е $y=A_1x+A_2/x-4\sqrt{x}$. ||

Задачи: 3,20; 3.54-3.55; 3.70-3.73.

§2.6. НЕКОИ ПРИМЕНИ НА ЛДР ОД ВТОР РЕД СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Лиенарните ДР од втор ред со константни коефициенти се мошне важни за примената, особено во механиката и електротехниката. За илустрација, овде ќе разгледаме неколку такви примени.

I. ДР на просто хармониско движење

Нека една материјална точка прави просто хармониско движење (т.е. осцилира) по оската Oy. Во тој случај силата, па, значи, и забрзувањето, на растојание y од координатниот почеток O, е насочена кон O и е пропорционална на растојанието y. Тогаш $y''=-\omega^2y$ (ω=конст.), т.е.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2y = 0, \tag{1}$$

што претставува хомогена ЛДР со константни коефициенти. Нејзиното општо решение, како што знаеме од §2.2, е

$$y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t. \tag{2}$$

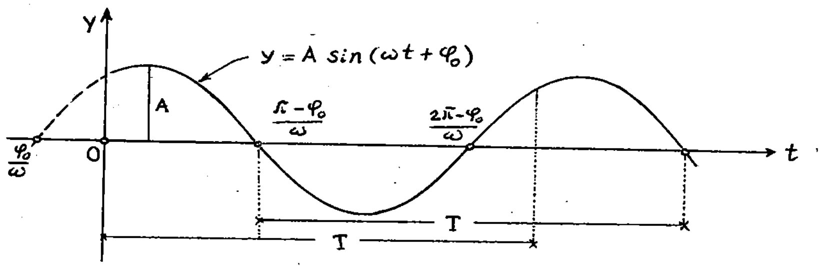
Ако ставиме $C_1=A\sin\phi_o$, $C_2=A\cos\phi_o$, каде што A и ϕ_o се нови произволни константи: $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ и $\operatorname{tg}\phi_o = C_1/C_2$, и ако замениме во (2), добиваме

$$y = A\sin(\omega t+\phi_o). \tag{2'}$$

Слично, при $C_1=A\cos\phi_o$ и $C_2=A\sin\phi_o$ $(\mathrm{tg}\phi_o=C_2/C_1)$:

$$y = A\cos(\omega t-\phi_o) \tag{2"}$$

(в. и зад. 2.10).

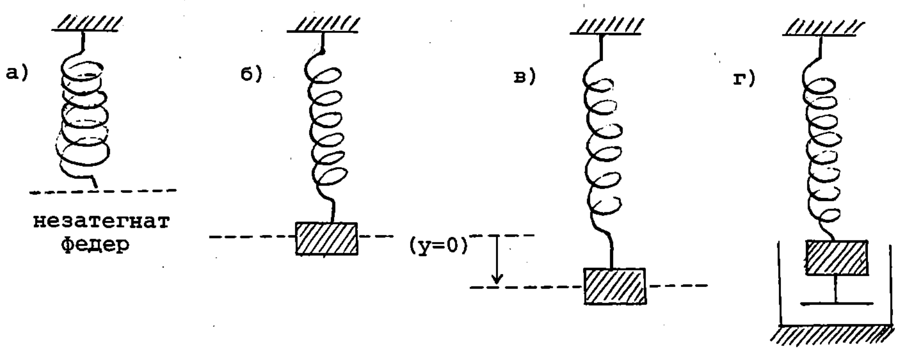


Црт. 6

Значи, интегралните криви се синусоиди. Времето $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (за кое аргументот на синусот се променува за 2π) се вика период на осцилацијата, бројот ω на осцилациите за време 2π се вика фреквенција (или честота), бројот A - амплитуда на осцилацијата, а ϕ_o - почетна фаза (в. црт. 6).

II. Равенка на слободни осцилации со придушување

Нека едно тело со маса m е закачено на еден еластичен федер (црт. 7). Кога телото мирува, имаме рамнотежна положба (црт. 7 б)). Силата на Земјиното привлекување се урамнотежува со еластичноста на федерот. Отклонот на телото од рамнотежната положба, црт. 7 в), ќе го означиме со y и ќе го сметаме за позитивен кога е надолу, а за негативен - кога е нагоре од рамнотежната положба.



Црт. 7

Да претпоставиме дека силата што се стреми да го врати телото во рамнотежна положба (<u>силата на федерот</u>) е пропорционална со отклонот, т.е. е еднаква со $-ky$, каде што k е константа на пропорционалноста (<u>модулус на федерот</u>).

Натаму, да претпоставиме дека телото (со маса m) е сврзано со некоја пречка (црт. 7 г)). Во тој случај мора да се земе предвид придушувањето што го врши пречката врз движењето на телото. Соодветната придушувачка сила има насока спротивна на моменталното движење и ние ќе земеме дека таа е пропорционална со брзината $v=\dot{y}=dy/dt$ на телото. (Оваа апроксимација е добра барем за мали брзини.) Значи, придушната сила има облик $-c\dot{y}$, каде што c е <u>константа на придушувањето</u>, и е позитивна.

Резултантата F на силите што дејствуваат на телото, според вториот Њутнов закон, е $F=m\ddot{y}$, па $m\ddot{y} = -c\dot{y}-ky$, т.е.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0, \tag{3}$$

што претставува хомогена линеарна ДР со константни коефициенти. ДР (3) се вика <u>равенка на слободни придушени осцилации</u>. (Ако нема придушување, тогаш во (3) ќе го нема членот $c\dot{y}$, т.е. ќе се добие равенката (1) на просто хармониско движење.)

Ставајќи $2n = \frac{c}{m}$ и $\omega^2 = \frac{k}{m}$, (3) добива форма:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad (3\ )$$

Корените на карактеристичната равенка $r^2+2nr+\omega^2=0$ се:

$$r_1 = -n + \sqrt{n^2-\omega^2}, \qquad r_2 = -n - \sqrt{n^2-\omega^2}.$$

1° Ако $n^2-\omega^2 > 0$, тогаш r_1 и r_2 се реални негативни броеви и општото решение на (3) е $y=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$. Од оваа формула следува дека отклонот y, при кои било почетни услови, се стреми кон 0 кога $t\to\infty$, па во овој случај нема осцилации (отпорот е многу голем во споредба со коефициентот на еластичноста на федерот).

2° Ако $n^2=\omega^2$, тогаш $r_1=r_2=-n<0$, па $y=(C_1+C_2t)e^{-nt}$.

И во овој случај отклонот $y\to 0$ кога $t\to\infty$, но не така брзо како во 1°; движењето се вика <u>критички придушено</u>.

3° Ако $n=0$, т.е. нема отпор, тогаш се добива формулата за просто хармониско движење.

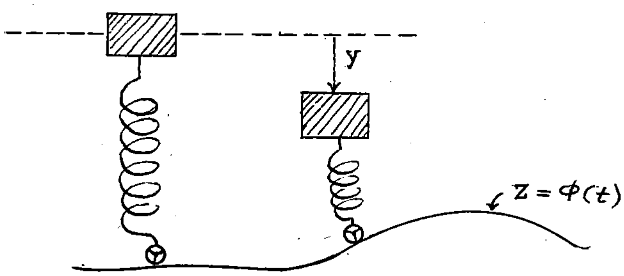
4° Ако $n\neq 0$ и $n^2<\omega^2$, тогаш $r_1=\alpha+i\beta$ и $r_2=\alpha-i\beta$, па $y=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$, или:

$$y = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t+\phi_0),\ \beta = \sqrt{n^2-\omega^2}. \tag{3"}$$

Бидејќи $\alpha=-n<0$, следува дека $Ae^{\alpha t}\to 0$ кога $t\to\infty$, па тука се работи за придушени осцилации.

III. Равенка на принудни осцилации

Да разгледаме, сега, систем од тело и федер, така што долната точка од федерот да прави вертикални движења по законот $z=\phi(t)$ (на пример, кога долниот крај на федерот е прикрепен на тркалце, коешто, заедно со федерот и телото, се движи по нерамен терен (црт. 8).



Црт. 8

Во тој случај, силата што се стреми да го врати телото во рамнотежната положба ќе биде еднаква, не со $-ky$, туку со $-k[y+\phi(t)]$, силата на отпорот ќе биде $-c[\dot{y}+\phi'(t)]$, па наместо равенката (3), ќе ја добиеме ДР:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -k\phi(t) - c\phi'(t). \tag{4}$$

т.е. ставајќи $2n = \frac{c}{m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$ и $f(t) = -2n\phi(t)-\omega^2\phi'(t)$

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega^2 y = f(t), \tag{4 }$$

што претставува нехомогена линеарна ДР со константни коефициенти.

ДР (4) се вика равенка на принудни осцилации.

Во практиката најважен е случајот кога надворешната сила $f(t)$ е периодична и се менува по законот $f(t)=a\sin\omega t$. Како и кај слободните осцилации, и тука е можно да се дадат соодветни физички толкувања на решението на (4), во зависност од параметрите што се јавуваат во (4).

IV. <u>RLC-коло</u>

Ќе разгледаме уште еден важен електричен систем што се опишува со иста диференцијална равенка како и механичкиот систем што го разгледавме во точката III.

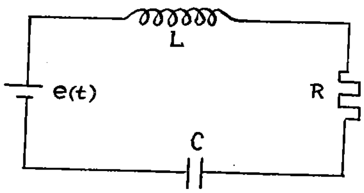
(Ова е извонреден пример на важниот факт дека наполно различни физички системи може да одговараат на иста диференцијална равенка. Тоа е една илустрација и за улогата на математиката во обединувањето на разни појави од сосема различна физичка природа.)

Да го разгледаме RLC-колото на црт. 9. Според вториот Киркофов закон (кој во електричните кола игра улога како вториот Њутнов закон во механичките системи), имаме:

$$u_L + u_R + u_C = e(t),$$

па, имајќи ги предвид формулите од §2.2, при $e(t)=E\sin\omega t$, добиваме:

$$L\,\frac{di}{dt} + R\,i + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt = E\sin\omega t.$$



Црт. 9

Диференцирајќи по t, добиваме

$$L\,\frac{d^2 i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = E\omega\cos\omega t, \qquad (5)$$

т.е. нехомогена линеарна ДР со константни коефициенти.

ДР (5) и ДР (4) во суштина се исти. Тоа покажува дека даденото RLC-коло е електричен аналог на механичкиот систем од претходната точка. Притоа, постои следново соодветство меѓу електричните и механичките величини:

- индуктивност $L \longleftrightarrow$ маса m;
- отпорност $R \longleftrightarrow$ константа на придушување, c,
- реципрочна капацитивност $\frac{1}{C} \longleftrightarrow$ модулус на федерот, k,
- струја $i(t) \longleftrightarrow$ отклон $y(t)$.

За наоѓање партикуларно решение на (5) се постапува како во §2.4, Т.2; в. и зад. 2.114.

<u>Задачи</u>: 2.22-2.30; 2.102-2.116

Глава 3

ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ОПШТ ВИД

Обичните ДР може да се поделат на две големи класи: линеарни и нелинеарни. Додека нелинеарните се прилично тешки, линеарните се релативно едноставни од повеќе аспекти (иако не се така едноставни како линеарните ДР што ги разгледавме во претходната глава): постојат стандардни методи за решавање на многу од тие равенки, а разни својства на нивните решенија може да се окарактеризираат на општ начин. За линеарните ДР постои доволно полна теорија. Таа овозможува да се решат сите автономни линеарни ДР (т.е. ЛДР во кои независнопроменливата не се јавува експлицитно) и некои неавтономни, а се користи и како прво приближување при нелинеарни задачи.

Во оваа глава ќе се запознаеме со основните елементи на таа теорија.

§3.1. ЕГЗИСТЕНЦИЈА И ЕДИНСТВЕНОСТ НА РЕШЕНИЕ НА ЛДР

Диференцијалните равенки со форма

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} +\ldots+ a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \tag{1}$$

каде што $a_1=a_1(x),\ldots,a_n=a_n(x)$, $f(x)$ се дадени функции од реален аргумент, непрекинати на некој конечен или бесконечен интервал E, се викаат линеарни диференцијални равенки (ЛДР). Ако $f(x)\equiv 0$, ЛДР (1) добива форма:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} +\ldots+ a_{n-1}y' + a_ny = 0 \tag{2}$$

и се вика хомогена ЛДР; во спротивниот случај, (1) се вика нехомогена ЛДР. Интервалот E се вика интервал на непрекинатост на коефициентите $a_1,\ldots,a_n$, $f(x)$ на ЛДР.

Специјално, за n=1 од (1) се добива ЛДР од прв ред, а за n=2 се добива ЛДР од втор ред

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x).$$

ДР $a_oy^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x)$ се сведува на (1) ако се подели со a_o (притоа, можно е да се изгубат некои решенија на дадената ДР).

Решението на ЛДР од прв ред секогаш се сведува на пресметување еден или повеќе интеграли, т.е. како што се вели кратко: ЛДР од прв ред се решава со <u>квадратури</u>. Тоа не важи за ЛДР од повисок ред, освен во некои специјални случаи (на пример, ЛДР со константни коефициенти).

Сепак, следната теорема (којашто е специјален случај од теоремата 1 во §1.2) гарантира постоење на решение на (1) за секој n.

<u>Теорема 1</u> (<u>за егзистенција и единственост на решение</u> на ЛДР).

Постои, и притоа единствено, решение $y=y(x)$ на ЛДР (1), определено во целиот интервал E на непрекинатост на коефициентите $a_1,\dots,a_n,f$, што ги задоволува почетните услови:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\dots,y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{3}$$

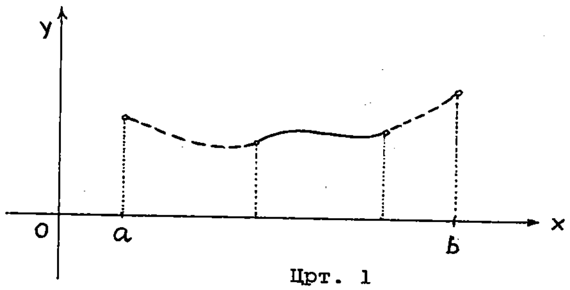
каде што x_0 е произволна точка од E, а $y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)}$ се сосем произволно избрани броеви. □

(Да забележиме дека десната страна на ЛДР

$$y^{(n)} = f(x) - a_1y^{(n-1)}-\dots-a_{n-1}y' - a_ny,$$

како функција од $x,y,y',\dots,y^{(n-1)}$, е полином по аргументите $y,y',\dots,y^{(n-1)}$, па таа ги задоволува условите од Т.1 во §2.1)

Ако една функција $y=y(x)$ е определена во некој дел од интервалот $E=[a,b]$ на непрекинатост на коефициентите на (1) и ако е решение на (1), тогаш таа може да се продолжи, на единствен начин, на целиот интервал E (црт. 1), како решение на (1).



Црт. 1

Според тоа, можеме да сметаме дека:

Секое решение на ЛДР (1) е зададено во целиот интервал E на непрекинатост на коефициентите.

<u>Задачи</u>: 3.21

§ 3.2. ОПЕРАТОРОТ L

Ако $y=y(x)$ е произволна n-пати диференцијабилна функција во интервалот E на непрекинатост на функциите $a_1=a_1(x),\dots,a_n=a_n(x)$, тогаш со изразот

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} +\dots+ a_{n-1}y' + a_n y \tag{1}$$

е определен еден оператор L, т.е. правило, според кое на секоја n пати диференцијабилна функција $y(x)$ во интервалот E ѝ се придружува функција $\phi(x)$, еднаква на десната страна од (1).

На пример, ако $L(y)=y''-xy'-3y$, а $y(x)=e^{2x}$, тогаш

$$L(e^{2x}) = 4e^{2x} - 2xe^{2x} - 3e^{2x} = (1-2x)e^{2x},$$

т.е. на e^{2x} со L ѝ се придружува функцијата $\phi(x)=(1-2x)e^{2x}$.

Користејќи ги својствата на изводите: $(cy)^{(n)}=cy^{(n)}$ и $(y_1+y_2)^{(n)}=y_1^{(n)}+y_2^{(n)}$, добиваме:

Теорема 1. Ако $y, y_1,\dots,y_k$ се n пати диференцијабилни функции, а $c, c_1,\dots,c_k$ се константи, тогаш:

1°. $L(cy) = cL(y)$,

2°. $L(y_1+y_2) = L(y_1) + L(y_2)$,

3°. $L(c_1y_1+\dots+c_ky_k) = c_1L(y_1)+\dots+c_kL(y_k)$. □

Поради овие својства, L, определен со (1), се вика линеарен диференцијален оператор од n-ти ред.

Користејќи го симболот L, ЛДР

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} +\dots+ a_ny = f(x), \tag{2}$$

односно соодветната хомогена ЛДР

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} +\dots+ a_ny = 0, \tag{3}$$

можеме да ја претставиме во форма

$$L(y) = f(x),\ \text{односно}\ L(y) = 0, \tag{4}$$

која се вика операторска форма на (2), односно на (3).

Со помош на својството 3° лесно ја добиваме точноста на следнава важна теорема:

Теорема 2. Ако $y_1, y_2, \dots, y_k$ се партикуларни решенија на хомогената ЛДР (3) (каде што k е произволен природен број), тогаш и нивната линеарна комбинација

$$u(x) = c_1y_1 + \dots + c_ky_k \tag{5}$$

е решение на таа равенка.

Доказ. Бидејќи $L(y_1) = \dots = L(y_k) = 0$, според 3°, имаме $L(u) = L(c_1y_1 + \dots + c_ky_k) = c_1L(y_1) + \dots + c_kL(y_k) = 0$. □

За $k=n$, функцијата $u(x)$, определена со (5), е решение на (2) и содржи n произволни константи. Дали е тоа општо решение на (2) кога $n>1$? Дека не мора да биде покажува следниов пример: ако $y_1 = y_2 = \dots = y_n$, тогаш функцијата

$$u = c_1y_1 + \dots + c_ny_n = (c_1 + \dots + c_n)y_1 = cy_1$$

содржи фактички само една произволна константа (т.е. константите $c_1, \dots, c_n$ се меѓусебно зависни).

Задачи: 3.1, 3.2; 3.22-3.24

§3.3. ЛИНЕАРНА ЗАВИСНОСТ НА ФУНКЦИИ ВРОНСКИЕВА ДЕТЕРМИНАНТА

За еден систем функции

$$y_1, y_2, \dots, y_k \tag{1}$$

велиме дека е линеарно зависен на некој сегмент $[a,b]$ ако постојат константи $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, од кои барем една не е нула, такви што

$$\gamma_1y_1 + \gamma_2y_2 + \dots + \gamma_ky_k \equiv 0; \tag{2}$$

во спротивниот случај, т.е. ако

$$\gamma_1y_1 + \dots + \gamma_ky_k = 0 \Longrightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_k = 0, \tag{3}$$

велиме дека системот (1) е линеарно независен.

Пример 1. а) Системот функции $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ е линеарно независен. Имено, $\gamma_1x + \gamma_2x^2 = 0$ означува дека полиномот од левата страна на ова равенство е нулти, па коефициентите му се нули, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Значи,

$$\gamma_1x + \gamma_2x^2 = 0 \Longrightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

б) Системот функции $e^x, e^{-x}, \mathrm{ch}x$ е линеарно зависен зашто $\gamma_1 e^x + \gamma_2 e^{-x} + \gamma_3 \mathrm{ch}x = 0$, на пример, за $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = -2$.

[** Множеството $V = F[a,b]$ од сите реални функции, дефинирани на даден сегмент $[a,b]$, е векторски простор над полето на реалните броеви во однос на операциите собирање на функции и множење на функција со реален број, при што збирот $f+g$ и производот αf $(f,g \in V, \alpha \in R)$ се дефинирани со:

$$(f+g)(x) \overset{Df}{=} f(x)+g(x), \quad (\alpha f)(x) \overset{Df}{=} \alpha f(x)$$

за секој $x \in [a,b]$. Погоре воведените поими за линеарна зависност односно линеарна независност на функции може да се разгледуваат во рамките на векторскиот простор $F[a,b]$. **]

Лесно се увидува дека важат наредните својства (1°-4°).

$\underline{1^\circ}$. За линеарната зависност на (1) не е битен распоредот на функциите $y_1, \dots, y_k$.

$\underline{2^\circ}$. Ако некоја од функциите y_k е 0 или ако некој потсистем од m $(m<k)$ функции е линеарно зависен, тогаш и целиот систем (1) е линеарно зависен;

$\underline{3^\circ}$. Системот (1) е линеарно зависен ако и само ако некоја функција y_i од (1) може да се претстави како линеарна комбинација од другите функции во (1). Специјално:

$\underline{3'}$. Системот y_1, y_2 е линеарно зависен на $[a,b]$ ако и само ако постои константа γ, таква што $y_1 = \gamma y_2$ или $y_2 = \gamma y_1$. Според тоа:

$\underline{4^\circ}$. Ако $y_1/y_2 \neq$ конст. макар на некој подинтервал од $[a,b]$, тогаш y_1, y_2 се линеарно независни на целиот сегмент $[a,b]$.

<u>Пример 2</u>. $\sin x/\cos x = \mathrm{tg}x \neq$ конст., па $\sin x$ и $\cos x$ се линеарно независни на кој било интервал. ‖

Нека $y_1, y_2, \dots, y_k$ се функции од x, дефинирани на некој интервал E и диференцијабилни на E најмалку $k-1$ пат. Детерминантата

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_k' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \tag{4}$$

се вика <u>вронскиева детерминанта</u> или <u>вронскијан</u> на дадените функции; таа се означува со:

$W(y_1,\dots,y_k)$ или $W(x)$ или само со W.

За $k=2$, вронскијанот на y_1,y_2 е од втор ред:

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2.$$

Теорема 1. Ако две диференцијабилни функции y_1,y_2 се линеарно зависни, тогаш $W(y_1,y_2)\equiv 0$ на разгледуваниот интервал.

Навистина, поради $y_1=\gamma y_2$, ќе имаме $y_1y_2'-y_1'y_2 = \gamma y_2y_2'-\gamma y_2'y_2 \equiv 0$, т.е. $W(y_1,y_2)\equiv 0$.

Воопшто, ако $y_1,\dots,y_k$ се најмалку $k-1$ пат диференцијабилни и линеарно зависни на некој интервал, тогаш

$$W(y_1,\dots,y_k) \equiv 0.$$

Навистина, поради 3^o, $y_1=\gamma_2y_2+\dots+\gamma_ky_k$, па првата колона на (4) ќе биде линеарна комбинација на преостанатите колони, од што следува дека $W(y_1,\dots,y_k)\equiv 0$. □

На пример, за функциите од примерот 1 б) имаме $W(e^x,e^{-x},\mathrm{ch}x)\equiv 0$.

Задачи: 3.4-4.8; 3.25-3.32

§3.4. СВОЈСТВА НА РЕШЕНИЈАТА НА ХОМОГЕНА ЛДР

Во врска со поимите линеарна зависност и вронскијан на функции, ќе разгледаме неколку важни својства на хомогените ЛДР

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} +\dots+ a_ny = 0, \tag{1}$$

ограничувајќи се често на случајот $n=2$, т.е. на ДР

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{2}$$

пред сè, поради едноставноста во разгледувањата, а и поради посебната важност на линеарните ДР од втор ред во примената. Интервалот (a,b) на непрекинатост на коефициентите $a_1,\dots,a_n$ и во овој параграф ќе го означуваме со E.

Теорема 1. Ако y_1 и y_2 се решенија на (2) и ако вронскијанот на y_1,y_2 во некоја точка $x_0\in E$ е нула, $W(x_0)=0$, тогаш

а) y_1,y_2 се линеарно зависни на E,

б) $W(x)=0$ за секој $x\in E$.

Доказ. а) Системот (обични) равенки по непознатите γ_1, γ_2:

$$\gamma_1 y_1(x_o) + \gamma_2 y_2(x_o) = 0, \quad \gamma_1 y_1'(x_o) + \gamma_2 y_2'(x_o) = 0 \tag{3}$$

е хомоген, со детерминанта $W(x_o)=0$, па тој има ненулто решение γ_1, γ_2 (т.е. барем еден од броевите γ_1, γ_2 не е нула). За еден таков пар γ_1, γ_2 функцијата

$$y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 \tag{4}$$

е решение на (2), како линеарна комбинација на решенија од (2); (4), поради (3), ги задоволува следниве почетни услови:

$$y(x_o) = 0, \quad y'(x_o) = 0.$$

Според теоремата за егзистенција и единственост на решение (§3.1), тие почетни услови ги задоволува само една функција, а бидејќи нив ги задоволува нултата функција $y \equiv 0$, следува дека $\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 \equiv 0$, при што барем еден од броевите γ_1, γ_2 не е нула. Значи, y_1 и y_2 се линеарно зависни.

б) Нека $W(x_o)=0$ за некој $x_o \in E$. Според а), функциите y_1, y_2 се линеарно зависни, а според Т.1 од §3.3, $W(y_1, y_2)=0$, т.е. $W(x)=0$ за секој $x \in E$. ∎

На ист начин се докажува поопшто, дека:

Теорема 1'. Ако $y_1, \dots, y_n$ се решенија на (1) и ако вронскијанот на $y_1, \dots, y_n$ за некој $x_o \in E$ е 0, $W(x_o)=0$, тогаш:

а) $y_1, \dots, y_n$ се линеарно зависни на E,

б) $W(x)=0$ за секој $x \in E$. ∎

Од оваа теорема директно добиваме:

Последица 1. Ако $y_1, \dots, y_n$ се решенија на (1) и ако $W(x_o) \neq 0$ за некој $x_o \in E$, тогаш $W(x) \neq 0$ за секој $x \in E$.

(Навистина, ако $W(x)=0$ за некој $x \in E$, тогаш според Т.1', $W(x)=0$ за секој $x \in E$, па и за $x=x_o$, што противречи на претпоставката дека $W(x_o) \neq 0$.) ∎

Теорема 2. Решенијата $y_1, \dots, y_n$ на (1) се линеарно независни на E ако и само ако $W(x_o) \neq 0$ за некој x_o од E.

<u>Доказ</u>. Ако $y_1,\dots,y_n$ се линеарно независни, тогаш, поради последицата 1, не е можно равенството $W(x_o)=0$ за ниедна точка x_o од E.

Обратно, ако за решенијата $y_1,\dots,y_n$ важи $W(x_o)\neq 0$ за некој x_o од E, тогаш тие мора да се линеарно независни (зашто, за линеарно зависни функции, според Т.1 од §3.3, важи $W(x)=0$). □

Знаејќи n линеарно независни решенија на ДР (1) може да се состави нејзиното општо решение. Имено, важи следнава:

<u>Теорема 3</u>. Ако $y_1,y_2,\dots,y_n$ се n линеарно независни решенија на ЛДР (1) во интервалот (a,b), тогаш формулата

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n, \tag{5}$$

каде што $C_1,C_2,\dots,C_n$ се произволни константи, го дава општото решение на (1) во областа D:

$$a<x<b,\ \ |y|<+\infty,\ \ |y'|<+\infty,\dots,|y^{(n-1)}|<+\infty. \ \square \tag{6}$$

Од Т.3 непосредно заклучуваме:

<u>Последица 2</u>. Максималниот број линеарно независен решенија на една хомогена линеарна ДР е еднаков со нејзиниот ред. □

** <u>Забелешка</u>. Кој било систе од n линеарно независни решенија $y_1,y_2,\dots,y_n$ на (1) се вика <u>фундаментален систем решенија</u> на (1). Секоја хомогена ЛДР (1) има фундаментален систем решенија. За неговото добивање е доволно да се изберат n^2 броеви $y_i^{(n)}(x_o)$ $(i=1,\dots,n;\ k=0,1,\dots,n-1)$, што ќе го задоволуваат условот

$$W\, y_1(x_o),\dots,y_n(x_o) \neq 0,$$

каде што $x_o\in E$. Тогаш решенијата $y_i(x)$ што се определени со почетните услови $y_i^{(k)}(x_o)$ $(i=1,\dots,n;\ k=0,1,\dots,n-1)$, образуваат фундаментален систем решенија.

Може да се покаже дека ако две хомогени ЛДР од n-ти ред

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0, \quad y^{(n)} + b_1y^{(n-1)} + \dots + b_ny = 0$$

(каде што $a_i(x)$ и $b_i(x)$ се непрекинати на еден сегмент E), имаат ист фундаментален систем решенија, тогаш тие ДР се совпаѓаат: $a_1\equiv b_1,\dots,a_n\equiv b_n$, т.е. фундаменталниот систем решенија $y_1,y_2,\dots,y_n$ наполно ја определува ДР (1). **

<u>Задачи</u>: 3.9, 3.10; 3.33-3.36

§3.5. СНИЖУВАЊЕ НА РЕДОТ НА ХОМОГЕНА ЛДР

Не постои општ метод за наоѓање општо решение на хомогена ЛДР со променливи коефициенти, непрекинати на даден сегмент E,

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y = 0 \tag{1}$$

во конечен вид (дури и кога се работи за случајот n=2). Сепак, ако е познато некое (нетривијално, т.е. ненулто) партикуларно решение y_1 на (1) (а такво често може да се најде со нагаѓање), тогаш можеме да го снижеме редот на (1) за единица со смената

$$y = y_1 z, \tag{2}$$

каде што z е нова функција од x. Притоа, (1) се трансформира во ДР до (n-1)-в ред којашто е линеарна и хомогена. Имено, користејќи ја Лајбницовата формула

$$y^{(k)}=(y_1z)^{(k)}=y_1^{(k)}z+ky^{(k-1)}z'+\binom{k}{2}y_1^{(k-2)}z''+\ldots+y_1z^{(n)},$$

по заменувањето на $y,y',\ldots,y^{(n)}$ во (1), а потоа со смената $z'=u$, добиваме хомогена ЛДР од (n-1)-в ред:

$$u^{(n-1)} + b_1u^{(n-2)} +\ldots+ b_{n-1}u = 0. \tag{3}$$

Пример 1. Да го снижеме редот на ДР

$$xy''' - y'' - xy' + y = 0, \tag{б$_1$}$$

знаејќи дека $y_1=e^x$ е нејзино партикуларно решение. Во разгледувањево ќе се ограничиме на интервалот $E=(0,+\infty)$. По смената (2): $y=e^xz$; $y'=e^x(z'+z)$, $y''=e^x(z''+2z'+z)$, $y'''=e^x(z'''+3z''+3z'+z)$ во (б$_1$) ја добиваме ДР $xz'''+(3x-1)z''+2(x-1)z'=0$, а по $z'=u$ – ДР од втор ред

$$xu'' + (3x-1)u' + 2(x-1)u = 0. \;\| \tag{б$_2$}$$

Да забележиме дека двете воведени смени: $y=y_1z$, $z'=u$ може да се заменат со една смена:

$$y = y_1\int u\,dx, \tag{4}$$

каде што $u=u(x)$ е нова непозната функција.

Пример 2. За ДР од примерот 1 би имале: $y=e^x\int u dx$, $y'=e^x(\int udx+u)$, $y''=e^x(\int udx+2u+u')$, $y'''=e^x(\int udx+3u+3u'+u'')$; по заменувањето во (б$_1$) ќе ја добиеме ДР (б$_2$). ||

Знаејќи k линеарно независни (на сегментот E на непрекинатост на коефициентите $a_1,\ldots,a_n$) решенија $y_1,y_2,\ldots,y_k$ на (1), може да се сниже редот на (1) до n-k (на тој сегмент). Имено, за добиената ДР (3) со смената (4), ќе имаме k-1 нејзини партикуларни решенија

$$u_1 = (y_2/y_1)',u_2 = (y_3/y_1)',\ldots,u_{k-1} = (y_k/y_1)', \tag{4'}$$

коишто се добиваат од (4), ставајќи последователно $y=y_2$, $y=y_3,\ldots$, $y=y_k$ во $u=(y/y_1)'$.

Пример 3. Покрај $y_1=e^x$, партикуларното решение на ДР ($б_1$) е $y_2=x$. Според (4´), $u_1=(x/e^x)'=(1-x)e^{-x}$ е партикуларно решение на ДР ($б_2$). Сега, со смената $u=u_1\int v\,dx$, $v=v(x)$, од ДР ($б_2$) ќе се добие ЛДР од прв ред по v, v':

$$x(1-x)v' - (x^2+1)v = 0.$$

Специјално, кога е познато едно ненулто партикуларно решение y_1 на ЛДР од втор ред

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0, \tag{5}$$

тогаш таа, по смената (4), се сведува на ЛДР од прв ред

$$u' + (a_1y + 2y_1')=0,$$

чие општо решение е $u=Cy_1^{-2}e^{-\int a_1dx}$, па од (4) имаме:

$$y/y_1 = \int u\,dx, \quad y = y_1\int Cy_1^{-2}e^{-\int a_1dx}dx + A.$$

Така, за C=0=A добиваме уште едно партикуларно решение y_2 на (5) (линеарно независно со y_1):

$$y_2 = y_1\int y_1^{-2}e^{-\int a_1dx}dx. \tag{6}$$

Пример 4. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$, $y_1=e^x$. Со смената (4), добиваме $xu'-u=0$, чие општо решение е $u=cx$; за $c=2$, $y_2=y_1\int u_1dx=e^x\int 2x\,dx=x^2e^x$, па $y=C_1e^x+C_2x^2e^x$ е општо решение на дадената ЛДР.

Пример 5. Да ја илустрираме примената на формулата (6).

а) $x^2y''\ln x - xy' + y = 0$, $y_1 = x$;

$$y_2 = x\int x^{-2}e^{\int d(\ln x)/\ln x}dx = -(\ln x+1);$$

општото решение е: $y = C_1x + C_2(1+\ln x)$.

б) $xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0$; $y_1 = e^{2x}$;

$$y_2 = e^{2x}\int e^{-4x}e^{\int(2+1/x)dx}dx = -\frac{1}{2}(x+1);$$

општото решение е $y = C_1e^{2x} + C_2(x+1)$. ||

Задачи: 3.11, 3.12; 3.37-3.42; 3.43-3.52

§3.6. ХОМОГЕНИ ЛДР СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Ако коефициентите $a_1,\dots,a_n$ на ДР

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} +\dots+ a_n y = 0 \qquad (1)$$

се константни, тогаш (1) се вика хомогена линеарна ДР со константни коефициенти (од n-ти ред). За n=2, овој вид ДР ги разгледавме во §2.2. Општото решение на (1) се наоѓа на ист начин како во случакот на ДР од втор ред:

1. Ја составуваме карактеристичната равенка на (1):

$$r^n + a_1 r^{n-1} +\dots+ a_n = 0. \qquad (2)$$

2. Ги наоѓаме корените на (1): $r_1, r_2, \dots, r_n$.

3. Ги испишуваме партикуларните линеарно независни решенија на (1), раководејќи се од следново:

а) на секој реален еднократен корен r му одговара партикуларно решение e^{rx};

б) на секој реален корен r на (2) со кратност k му одговараат k линеарно независни решенија

$$e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx};$$

в) на секој пар конјугирано-комплексни корени $r=\alpha+i\beta$ и $\bar{r}=\alpha-i\beta$ му одговара еден пар партикуларни решенија $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

г) на секој пар конјугирано-комплексни корени $r=\alpha+i\beta$ и $\bar{r}=\alpha-i\beta$ со кратност k му одговараат 2k партикуларни решенија:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Такви партикуларни решенија ќе има толку на број колку што е степенот на (2), т.е. колку што е редот на (1). Може да се докаже дека тие решенија, да ги означиме со $y_1, y_2, \dots, y_n$, се линеарно независни, па општото решение на (1) ќе биде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 +\dots+ C_n y_n.$$

Диференцијалните равенки со форма

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} +\dots+ a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \qquad (3)$$

каде што $a_1,\dots,a_n$ се константи, се викаат равенки на Ојлер. Со смената на аргументот

$$x = e^t \text{ при } x > 0 \quad (x=-e^t \text{ при } x < 0) \qquad (4)$$

(3) се трансформира во хомогена ЛДР со константни коефициенти.

И равенките со форма

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_n y = 0, \quad (5)$$

каде што $a,b,a_1,\dots,a_n$ се зададени броеви (константи), се викаат ојлеровски ДР и се сведуваат на видот (3) со смената $ax+b=\xi$. Според тоа, партикуларните решенија на таа равенка може да се бараат во облик $y=(ax+b)^k$ или, пак, ДР (5) да се трансформира во хомогена ЛДР со константни коефициенти со смената $ax+b=e^t$, ако $ax+b>0$, или со $ax+b=-e^t$, ако $ax+b<0$.

Задачи: 3.13-3.15; 3.53-3.58

§3.7. НЕХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Да ја разгледаме нехомогената линеарна ДР од n-ти ред

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} +\dots+ a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

т.е. кратко

$$L(y) = f(x),$$

каде што $a_1(x),\dots,a_n(x)$, $f(x)$ се дадени функции од x, непрекинати на некој интервал E, при што $f(x) \not\equiv 0$ на E. За неа, соодветната хомогена ЛДР е

$$L(y) = 0. \quad (2)$$

Како и во §2.4 - за нехомогени ЛДР од втор ред, се покажува дека:

Теорема 1. Секое решение $y=y(x)$ на (1) има форма

$$y = y_o + Y,$$

каде што y_o е некое решение на ДР (2), а Y е кое било партикуларно решение на ДР (1).□

Според тоа, општото решение y на (1) се составува од општото решение $y_o=c_1y_1+\dots+c_ny_n$ на (2), наречено комплементарна функција на (1), и кое било партикуларно решение Y на (1)

$$y = c_1y_1 +\dots+ c_ny_n + Y.$$

На ист начин како во §3.5 се покажува дека редот на нехомогената ЛДР (1) може да се сниже за единица ако е познато некое ненулто решение y_1 на соодветната хомогена ЛДР (2), со смената

$$y = y_1 z \quad \text{или} \quad y = y_1 \int u\,dx .$$

Притоа, новодобиената ДР ќе биде, исто така, линеарна.

Од Т.1 е јасно дека основната задача при наоѓањето на општото решение на нехомогената ЛДР (1), ако се знае општото решение на (2), се состои од наоѓање на некое партикуларно решение Y на (1).

Во претходната глава, во §2.3 и §2.4, разгледавме некои методи за наоѓање партикуларни решенија на нехомогени ЛДР со константни коефициенти од втор ред. Истите методи може да се искористат и тука.

За нехомогените ЛДР со константни коефициенти од повисок ред често може да се искористи методот на избор, т.е. методот на неопределени коефициенти, содржан во следнава теорема (спореди со Т.2, §2.3):

Теорема 2. Ако десната страна на ДР (1), во која $a_1,\dots,a_n$ се константи, има облик

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ или } f(x) = Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{3}$$

тогаш партикуларното решение на (1) има облик:

1°. $Y = e^{\alpha x}[U_m(x)\cos\beta x + V_m(x)\sin\beta x]$

кога $\alpha+i\beta$ не е корен на карактеристичната равенка

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1}r + a_n = 0, \tag{4}$$

2°. $Y = x^\kappa e^{\alpha x}[U_m(x)\cos\beta x + V_m(x)\sin\beta x]$,

кога $\alpha+i\beta$ е корен на (4) со кратност к. ∎

Ако десната страна на ЛДР (1) се состои од повеќе собироци $f_i(x)$ со обликот (3), тогаш може корисно да послужи принципот на суперпозиција:

Теорема 3. Ако $Y_i (i=1,\dots,\kappa)$ е решение на ЛДР од n-ти ред

$$L(y) = f_i(x),$$

тогаш $Y = Y_1+\dots+Y_\kappa$ е решение на ЛДР

$$L(y) = f_1(x)+\dots+f_\kappa(x) . ∎$$

За наоѓање партикуларно решение на нехомогените ЛДР од општ вид (било да се со константни, било со променливи коефициенти), може да се примени Лагранжовиот метод на варијација на произволните константи. Разгледувањата направени во §2.4 за случајот $n=2$ можеме без особени тешкотии да ги прошириме за ЛДР од произволен ред и да дојдеме до заклучокот содржан во следнава теорема:

Теорема 4. Нека $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ е општо решение на хомогената ЛДР (2). Ако на местото од произволните константи $C_1,\dots,C_n$ се стават функции $c_1=c_1(x),\dots,c_n=c_n(x)$ што ги задоволуваат условите:

$$\begin{aligned} &c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots + c_n'y_n = 0,\\ &c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots + c_n'y_n = 0\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &c_1'y_1^{(n-2)} + \dots + c_n'y_n^{(n-2)} = 0,\\ &c_1'y_1^{(n-1)} + \dots + c_ny_n^{(n-1)} = f(x) \end{aligned} \tag{5}$$

тогаш општото решение на (1) е определено со формулата

$$y = c_1(x)\cdot y_1 + c_2(x)\cdot y_2 + \dots + c_n(x)\cdot y_n. \;\square \tag{6}$$

(Да забележиме дека детерминантата на системот (5) е вронскијанот $W=W(y_1,\dots,y_n)$. Бидејќи $y_1,\dots,y_n$ образуваат фундаментален систем решенија за хомогената ЛДР (2), следува дека $W\neq 0$ во интервалот E, во кој коефициентите се непрекинати, па системот има, и тоа единствено решение во E. Овој факт недостасуваше во доказот на Т.1 од §2.4.)

Нехомогената ојлеровска линеарна ДР

$$(ax+b)^ny^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_ny = f(x),$$

каде што $a,b,a_1,\dots,a_n$ се константи, може да се интегрира откако ќе се реши соодветната хомогена равенка (в. §3.6) и потоа ќе се најде едно партикуларно решение или, пак, со методот на варијација на произволните константи.

Задачи: 3.16-3.20; 3.59-3.74

Глава 4

РЕШАВАЊЕ ДР СО СТЕПЕНСКИ РЕДОВИ НЕКОИ СПЕЦИЈАЛНИ ФУНКЦИИ

Хомогените линеарни ДР со константни коефициенти може да се решаваат со алгебарски методи, при што решенијата се некои елементарни функции. Ситуацијата кај линеарните ДР со променливи коефициенти е мошне позаплеткана и решенијата не мора да се елементарни функции. Од друга страна, некои ДР од тој вид (како на пример, ермитската, лежандровата, хипергеометриската, беселовата ДР) и нивните решенија (коишто спаѓаат во класата на т.н. специјални функции) играат важна улога во техниката.

Затоа ќе се запознаеме со можноста за решавање на тие ДР со помош на степенски редови, а ќе разгледаме и некои основни својства на нивните решенија.

*§4.1. МЕТОД НА ПОСЛЕДОВАТЕЛНО ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ

Дадена е диференцијалната равенка

$$y' = F(x,y); \tag{1}$$

се бара решение на (1) што го задоволува почетниот услов

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Ако $y=f(x)$ е решение на ДР (1) што го задоволува условот (2) и ако F е соодветно диференцијабилна, тогаш можеме да ги добиеме изводите од повисок ред на функцијата $f(x)$ во точката x_0, од дадената ДР. Прво, од (1) добиваме

$$f'(x_0) = F(x_0,y_0) = y_0'.$$

Потоа, диференцирајќи ја (1), имаме $y''=F_x+F_y\cdot y'$, па

$$f''(x_0) = F_x(x_0,y_0) + F_y(x_0,y_0)y_0' = y_0''.$$

Со повторено диференцирање, можеме да го најдеме $y^{(n)}$, па да го добиеме $f^{(n)}(x_0)$ со помош на претходно најдените вредности. На тој начин, во принцип, можеме да го формираме тејлоровиот ред на $f(x)$ во точката x_o:

$$f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)+\ldots+f^{(n)}(x_o)\,\frac{(x-x_o)^n}{n!}+\ldots \qquad (3)$$

Ако утврдиме дека овој ред конвергира кон $f(x)$, тогаш бараното решение на (1) со условот (2) сме го добиле како збир на степенски ред.

Слично расудување се применува за ДР од повисок ред, сведени по највисокиот извод

$$y^{(n)} = F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}),$$

при дадени почетни услови.

Пример 1. $y'=x^2-y+y^2$, $y=1$ за $x=0$. Овде имаме $y'=0-1+1=0$ за $x=0$. Од

$$y'' = 2x - y' + 2yy',\ y''' = 2 - y'' + 2y'^2 + 2yy'',$$
$$y^{(4)} = -y''' + 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy'',$$
$$y^{(5)} = -y^{(4)} + 6y''^2 + 6y'y''' + 2y'y'' + 2yy^{(4)},$$
$$y^{(6)} = -y^{(5)} + 12y''y''' + 8y''y''' + 10y'y^{(4)} + 2yy^{(5)},\ldots$$

за $x=0$, $y=0$ и $y'=0$ добиваме: $y''=0$, $y'''=2$, $y^{(4)}=-2$, $y^{(5)}=2$, $y^{(6)}=-2$. Значи, нашето решение - редот (3), е

$$f(x) = 1 + 0x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2}{5!}x^5 - \frac{2}{6!}x^6 + \ldots$$

Да забележиме дека тука е тешко да се најде формула за n-тиот член на редот (на пример, веќе коефициентот пред x^7 е $\frac{82}{7!}$). ||

Пример 2. $y''=xy'+2y$, $y=0$, $y'=1$ за $x=1$. Од равенката имаме $y''(1)=1$ и

$$y''' = xy''+3y',\ y^{(4)}=xy'''+4y'',\ldots,y^{(k)}=xy^{(k-1)}+ky^{(k-2)},\ldots$$

$(k=2,3,\ldots)$, па за $x=1$ имаме: $y=0$, $y'=1$, $y''=1$, $y'''=4$, $y^{(4)}=8$, $y^{(5)}=28,\ldots$, па решението во вид на редот (3) е

$$f(x) = (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 + \frac{8}{4!}(x-1)^4 + \frac{28}{5!}(x-1)^5 + \ldots \ ||$$

** Во двата примера е јасно дека можеме да најдеме толку членови на редот колку што сакаме и дека така добиениот ред е еднозначно определен. Може да се покаже дека, за секој од горните примери, редот конвергира во некој интервал околу x_o и дека навистина го претставува единственото решение при дадените почетни услови.

Општо, за ДР од прв ред (1), ако се знае дека $F(x,y)$ е аналитична во некоја околина на (x_o,y_o) (т.е. може да се развие во тејлоров ред во таа околина), тогаш формалниот степенски ред (3) навистина е конвергентен и неговиот збир го претставува бараното решение во некој интервал $(x_o-h,\ x_o+h)$. Постои слична теорема за ДР од повисок ред. **

Задачи: 4.31-4.35

§4.2. МЕТОД НА НЕОПРЕДЕЛЕНИ КОЕФИЦИЕНТИ (МЕТОД НА СТЕПЕНСКИ РЕДОВИ)

Методот на степенски редови се состои во следново: решението на дадената ДР го бараме во вид на степенски ред

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \tag{1}$$

чии коефициенти a_n се неопределени; задачата ќе биде наполно решена откако:

1) ќе ги определиме тие коефициенти заменувајќи го (1) и неговите изводи

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 +\ldots+ na_nx^{n-1} +\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}, \\ y'' &= 2a_2 + 3\cdot 2a_3x +\ldots+ n(n-1)a_nx^{n-2} +\ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

во дадената диференцијална равенка и

2) ќе провериме дали добиениот ред е конвергентен (во некоја област).

Овој метод е поедноставен и мошне ефикасен за линеарни ДР, а се применува особено за линеарни ДР со променливи коефициенти, каде што откажуваат другите методи. За линеарни ДР, формалниот процес на наоѓање решение во вид на степенски ред може да се упрости, зашто во многу случаи може да се најде формула за n-тиот член на редот и да се определи интервалот на конвергенцијата на решението. За илустрација, ќе разгледаме еден пример.

Пример 1. Со помош на степенски редови да го најдеме општото решение на ДР

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0 \tag{$б_1$}$$

во форма $y=a_of(x)+a_1g(x)$, каде што a_o и a_1 се произволни константи, а f и g - редови.

Редовите (1) и (2) ги заменуваме во ($б_1$):

$$\begin{aligned} &(1-x^2)[2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots] - \\ &\quad -x[a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots] + \\ &\quad +4[a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots] = 0, \end{aligned}$$

т.е. групирајќи ги по степените на x:

$$(2a_2+4a_o)+(2\cdot 3a_3-a_1+4a_1)x+(3\cdot 4a_4-2a_2-2a_2+4a_2)x^2+$$
$$+\ldots+[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n+4a_n]x^n+\ldots = 0$$

Ги изедначуваме со нула коефициентите пред степените на x:

пред x^o: $2a_2 + 4a_o = 0$; $a_2 = -2a_o$

пред x^1: $2\cdot 3a_3 + 3a_1 = 0$; $a_3 = -\frac{1}{2}a_1$

пред x^2: $3\cdot 4a_4 - 4a_2 + 4a_2 = 0$; $a_4 = 0$

....

пред x^n: $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2-n+n-4\; a_n = 0$,

т.е.

$$(n+1)a_{n+2} = (n-2)a_n \quad (n \geq 2). \tag{б$_2$}$$

Врската (б$_2$) меѓу a_{n+2} и a_n дава две множества коефициенти, едните изразени преку a_o, а другите преку a_1.

Бидејќи $a_4=0$, од (б$_2$) следува дека сите коефициенти со парен индекс за $n \geq 4$ се нули, $a_{2k}=0$ за $k=2,3,4,\ldots$ Според тоа,

$$a_of(x) = a_o + a_2x^2 = a_o(1-2x^2) \tag{б$_3$}$$

Со помош на (б$_2$), ќе определиме неколку коефициенти со непарен индекс:

$$n = 3:\ a_5 = \frac{1}{4}a_3 = -\frac{1}{3\cdot 4}a_1,$$
$$n = 5:\ a_7 = \frac{3}{6}a_5 = -\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}a_1,\ \ldots$$

Според тоа,

$$a_1g(x) = a_1x\left[1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 - \ldots\right]. \tag{б$_4$}$$

Редот во заградите од десната страна претставува биномен развој на изразот $(1-x^2)^{1/2}$; тој е конвергентен за $|x| < 1$.

Бидејќи за решенијата $y_1=1-2x^2$, $y_2=x(1-x^2)^{1/2}$ на ДР (б$_1$) важи $y_1/y_2 \neq$конст., следува дека тие се линеарно независни во интервалот $(-1,1)$ (в. 4^o од §3.3), па општото решение на (б$_1$) е $y=a_o(1-2x^2)+$ $+a_1x(1-x^2)^{1/2}$. ||

Добиениот резултат (постоење решение на дадената ДР во облик на конвергентен степенски ред) не е случаен. Тоа го покажува наредната теорема (која го оправдува методот на степенски редови).

Теорема 1. Ако $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ се аналитички функции во околина на точката $x=a$ (т.е. може да се развијат во степенски ред по степените на $x-a$), тогаш и секое решение на ДР

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \tag{3}$$

е аналитичка функција во точката $x=a$, т.е. може да се развие во степенски ред по $x-a$, со радиус на конвергенција $R > 0$. □

ДР од примерот 1, откако ќе се подели со $1-x^2$, може да се претстави во обликот (3); функциите $f(x)=-x/(1-x^2)$, $g(x)=4/(1-x^2)$ и $h(x) = 0$ се аналитички во точката $x=0$.

Задачи: 4.1-4.6; 4.36-4.63

§4.3. ЕРМИТСКА ДР. ЕРМИТСКИ ПОЛИНОМИ

Диференцијалната равенка

$$y'' - xy' + py = 0, \tag{1}$$

каде што p е даден реален број, се вика ермитска ДР. Постапувајќи како во §4.2, т.е. заменувајќи ги редовите (1) и (2) од §4.2 во ермитската ДР и средувајќи по степените на x, добиваме:

$$pa_o + 2!a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(p-n)a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2}\right]x^n = 0.$$

Изедначувајќи ги со 0 коефициентите пред $x^o, x^1, x^2, \ldots$, сите коефициенти $a_2, a_3, a_4, \ldots$ можеме да ги изразиме преку a_o и a_1:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{p}{2!}a_o,\ a_4 = \frac{p(p-2)}{4!}a_o, \ldots, a_{2k} = (-1)^k \frac{p(p-2)\ldots(p-2k+2)}{(2k)!}a_o, \ldots \\ a_3 &= -\frac{p-1}{3!}a_1,\ a_5 = \frac{(p-1)(p-3)}{5!}a_1, \ldots, a_{2k+1} = (-1)^k \frac{(p-1)(p-3)\ldots(p-2k+1)}{(2k+1)!}a_1 \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Така, општото решение на (1) во облик на степенски ред е

$$y = a_o y_1 + a_1 y_2, \tag{3}$$

каде што y_1 и y_2 се редовите:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{p(p-2)\ldots(p-2k+2)}{(2k)!}x^{2k}, \\ y_2 &= x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(p-1)(p-3)\ldots(p-2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1} \end{aligned} \tag{4}$$

** Конвергенцијата на редовите (4), за секој x, лесно се проверува со Даламберовиот критериум. Јасно е дека y_1 и y_2 се решенија на (1), а бидејќи $y_1/y_2 \neq$конст., тие се линеарно независни. Следствено, (3) е општо решение на (1), при што a_o и a_1 се произволни константи. **

Ако p во (1) е <u>парен</u> природен број, $p=2k$, тогаш од (2) добиваме $a_{2k+2}=a_{2k+4}=\ldots=0$ и y_1 во (2) станува полином со степен $2k$, а за $p=2k+1$ добиваме $a_{2k+3}=a_{2k+5}=\ldots=0$ и тогаш y_2 во (4) станува полином со степен $2k+1$. (Кога p не е природен број, y_1 и y_2 од (4) не се сведуваат на полиноми.) Во случајот кога y_1 е полином со степен $2k$, односно y_2 е полином со степен $2k+1$, изразите

$$H_{2k}(x)=c_o y_1=c_o\left(1-\frac{p}{2!}x^2+\ldots+(-1)^k\frac{p(p-2)\ldots(p-2k+2)}{(2k)!}x^{2k}\right), \qquad (4')$$

каде што $c_o=(-1)^k\dfrac{(2k)!}{p(p-2)\ldots(p-2k+2)}$, односно

$$H_{2k+1}(x)=c_1 y_2=c_1\left(x-\frac{p-1}{3!}+\ldots+(-1)^k\frac{(p-1)(p-3)\ldots(p-2k+1)}{(2k)!}x^{2k+1}\right), \qquad (4'')$$

каде што $c_1=(-1)^k\dfrac{(2k+1)!}{(p-1)(p-3)\ldots(p-2k+1)}$, се викаат <u>ермитски полиноми</u> со парен, односно непарен степен.

Ермитските полиноми $H_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$, спаѓаат во класата на т.н. <u>специјални функции</u>. Тие полиноми може да се дефинираат и директно:

$$H_o=1,\ H_n(x)=(-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n},\quad n=1,2,\ldots \qquad (5)$$

Така, имаме: $H_1=x$, $H_2=x^2-1$, $H_3=x^3-3x$, $H_4=x^4-6x^2+3$, $H_5=x^5-10x^3+15x$ итн. (в. и зад. 4.64, 4.65).

** Постојат интересни рекурентни врски за ермитските полиноми. На пример, со диференцирање на (5) се добива врската

$$H_{n+1}(x)=xH_n(x)-H_n'(x). \qquad (6)$$

Ермитските полиноми се јавуваат во коефициентите на маклореновиот ред на функцијата $\exp(tx-t^2/2)$:

$$e^{tx-t^2/2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}. \qquad (7)$$

(функцијата $e^{tx-t^2/2}$ се вика <u>генератриса</u> на $H_n(x)$. Диференцирајќи ја (7) по x, добиваме:

$$H_n'(x)=nH_{n-1}(x), \qquad (8)$$

а користејќи ги (6) и (8), се покажува дека $H_n(x)$ ја задоволува ДР:

$$y''-xy'+ny=0.$$

<u>Забелешка</u>. Како и за многу други специјални функции, во литературата се среќаваат и други ознаки, па често ермитските полиноми се дефинираат со изразите

$$H_o(x)=1,\ H_n^*(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}. \qquad (9)$$

Овие полиноми ја задоволуваат ДР

$$y''-2xy'+2ny=0,$$

којашто, исто така се вика <u>ермитска</u> ДР. $H_n(x)$ и $H_n^*(x)$ се сврзани со следнава релација:

$$H_n^*(x)=2^{n/2}H_n(x\sqrt{2}),\quad H_n(x)=2^{-n/2}H_n^*(x/\sqrt{2}).\ ** \qquad (10)$$

<u>Задачи</u>: 4.7–4.11; 4.64–4.76

§4.4. ЛЕЖАНДРОВА ДР. ЛЕЖАНДРОВИ ПОЛИНОМИ

Во задачи од теоријата на потенцијали се јавува ДР

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{1}$$

(n е даден реален број), наречена лежандрова ДР. Делејќи ја (1) со $1-x^2$, ја добиваме стандардната форма (3) од §4.2 и забележуваме дека коефициентите од добиената ДР се аналитични во точката $x=0$, така што може да се примени методот на степенски редови (Т.1 од §4.2). Заменувајќи го редот

$$y = a_o + a_1x + \ldots + a_kx^k + \ldots \tag{2}$$

и неговите изводи во (1) и постапувајќи како во §4.2, ја добиваме следнава врска:

$$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k, \quad k=0,1,2,\ldots \tag{3}$$

Редот (2) тогаш ја добива формата:

$$y = a_oy_1 + a_1y_2, \tag{4}$$

каде што

$$y_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{n!}x^4 - \ldots \tag{4'}$$

$$y_2 = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \ldots \tag{4''}$$

Редовите y_1 и y_2 се конвергентни во интервалот $(-1,1)$ и $y_1/y_2 \neq$ конст., па (4) го претставува општото решение на (1) во интервалот $(-1,1)$.

Секое решение на (1) се вика лежандрова функција. Од посебна важност за примената се ДР (1) во кои параметарот n е ненегативен цел број. Во тој случај, кога $k=n$, десната страна во (3) станува нула, па $a_{k+2}=0$, $a_{k+4}=0,\ldots$. Според тоа, ако n е парен, тогаш y_1 станува полином од n-ти степен, а ако n е непарен, тогаш y_2 станува полином. Тие полиноми, откако ќе се помножат со некои константи, се викаат лежандрови полиноми и се означуваат со $P_n(x)$.

За да добиеме формула за $P_n(x)$, врската (3) ќе ја напишеме во облик

$$a_k = -\frac{(k+2)(k+1)}{(n-k)(n+k+1)}a_{k+2} \tag{5}$$

и полиномот y_1, односно y_2, ќе го помножиме со константа, таква што да биде $a_n=1$ кога $n=0$, а

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}, \quad n=1,2,\ldots; \tag{6}$$

Ставајќи во (5) $k=n-2, n-4,\ldots,n-2m,\ldots,s$ (s е 0 или 1) и имајќи го предвид (6), добиваме:

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n = -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!},$$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2} = \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-2m} = (-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n\cdot m!(n-m)!(n-2m)!}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Така, за лежандровите полиноми $P_n(x)$ ја добиваме формулата

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{t}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n\cdot m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m} \tag{7}$$

каде што t е $\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$, во зависност од тоа дали n е парен или непарен (в. и зад. 4.13). Така, имаме

$$P_o = 1;\ P_1 = x;\ P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1);\ P_3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x). \tag{7'}$$

Лежандровите полиноми имаат интересни својства. Овде ќе наведеме неколку од нив.

1°. $P_n(1) = 1,\ n=0,1,2,\ldots$

2° (Формула на Родригез).

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{8}$$

3° (Ортогоналност на лежандровите полиноми во $-1\le x\le 1$).

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot P_m(x)dx = 0 \quad \text{за} \quad m\neq n$$

4°. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$; 4'. $P_n(-1) = (-1)^n$.

5°. Сите нули на лежандровите полиноми и на нивните изводи се: реални, различни и се наоѓаат во интервалот $(-1,1)$.

6°. Лежандровите полиноми се коефициенти во маклореновиот ред на функцијата $(1-2xt+t^2)^{-1/2}$, т.е.

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{9}$$

Функцијата $(1-2xt+t^2)^{-1/2}$ се вика <u>генератриса</u> на лежандровите полиноми.

7° (Рекурентни формули).

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x); \tag{10}$$

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x); \tag{11}$$

$$(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x). \tag{12}$$

** Својството 1°, геометриски означува дека графикот на кој било лежандров полином минува низ точката (1,1) (в. црт. во одговорот на зад. 4.78). За да се добие ова својство, коефициентот a_n беше избран како во (6).

2° Формулата на Родригез може да се добие на следниов начин. Функцијата $f(x)=(x^2-1)^n$, според биномната формула, ќе ја напишеме во обликот

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!} x^{2n-2m}$$

и ќе ја диференцираме n пати. Споредувајќи го n-тиот извод $f^{(n)}(x)$ со (7), ќе ја добиеме формулата 2°.

Равенството 3° може да се добие користејќи го фактот што $P_m=P_m(x)$ и $P_n=P_n(x)$ се решенија на ДР (1), напишана во обликот $[(1-x^2)y']'=-k(k+1)$, т.е.

$$[(1-x^2)P_m']' = -m(m+1)P_m, \quad [(1-x^2)P_n']' = -n(n+1)P_n.$$

Ако ја помножиме првата со P_n и втората со $-P_m$, а потоа ги собереме, ќе добиеме равенка, која треба да ја интегрираме во сегментот $[-1,1]$; откако ќе ги решиме интегралите од левата страна со делумна интеграција, ќе го добиеме 3°. За друг доказ в.зад. 4.16.

Користејќи ја формулата на Родригез и интегрирајќи n пати со делумна интеграција, се покажува дека левата страна на 3°, при $m=n$, има вредност $\frac{2}{2n+1}$:

$3'$. $$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Својството 4° се добива непосредно од (7) кога x се замени со $-x$; од него, ставајќи $x=1$, го добиваме равенството $P_n(-1) = (-1)^n$.

Доказ на 5° може да се најде во [АН] или [MI] (во цитираната литература).

За други својства на лежандровите полиноми и т.н. лежандрови функции од втор вид може да се консултира книгата [УИ], Гл. 15.

Формулата (9) дава можност да се добијат разните својства на лежандровите полиноми. На пример, користејќи го очиномиот ред на $(1+u)^m$:

$$(1+u)^m = 1+mu + \frac{m(m-1)}{2!}u^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}u^3 + \ldots ,$$

левата страна на (9) можеме да ја развиеме по степените на t ставајќи $u=t^2-2tx$ и $m=-1/2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\cdot t^n = 1+xt + \frac{1}{2}(3x^2-1)t^2 + \frac{1}{2}(5x^3-3x)t^3 + \ldots$$

од каде што, со изедначување на коефициентите пред t^n, ги добиваме (7').

Ставајќи $x=1$ во (9), добиваме

$$(1-t)^{-1} = P_0(1) + P_1(1)t + P_2(1)t^2 + \ldots . \tag{13}$$

Бидејќи $(1-t)^{-1}=1+t+t^2+\ldots+t^n+\ldots$, од (13) следува 1°. На сличен начин, ставајќи во (9) $x=-1$, се добива $4'$.

И рекурентните формули во 7° може да се добијат од (9).

Го диференцираме (9) по t:

$$(x-t)(1-2tx+t^2)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}. \tag{14}$$

Потоа ги множиме двете страни од (14) со $1-2tx+t^2$ и пак го користиме (9):

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x)\right]\cdot(1-2tx+t^2)$$

По изедначувањето на коефициентите пред t^n, го добиваме (10).

Ако, пак, го диференцираме (9) по x, а во добиеното равенство го примениме (9), по изедначувањето на коефициентите пред t^n, ќе го добиеме (11). Диференцирајќи го (10), а потоа користејќи го (11) за да се елиминира $xP_n'(x)$, ќе го добиеме (12).

За други рекурентни врски в.зад. 4.90. **

Задачи: 4.12–4.17; 4.77–4.98

§4.5. МЕТОД НА ОБОПШТЕНИ СТЕПЕНСКИ РЕДОВИ (МЕТОД НА ФРОБЕНИУС). ХИПЕРГЕОМЕТРИСКА ДР.

Некои линеарни ДР од втор ред, коишто се мошне важни за многу примени, имаат коефициенти што не се аналитични во точката $x=0$, па за нив не може да се примени теоремата од §4.2. Сепак, за една класа ДР од таков вид постои можност да се решаваат со помош на обопштени степенски редови. Доволни услови за тоа дава наредната теорема, која се докажува во аналитичката теорија на ДР.

Теорема 1 (на Фукс). Ако во равенката

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

коефициентите $p(x)$ и $q(x)$ може да се претстават во обликот

$$p(x) = \frac{1}{x}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \qquad q(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{*}$$

каде што редовите се конвергентни во областа $|x|<R$ (R е позитивен број) и коефициентите b_0, c_0, c_1 не се нула истовремено, тогаш ДР (1) има барем едно решение во вид на обопштен степенски ред

$$y(x) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots), \tag{2}$$

којшто е конвергентен барем во областа $|x|<R$. (Притоа, r може да биде произволно избран број, но така што $a_0\neq 0$.)

** Да забележиме дека сингуларната точка $x=0$ во чија околина коефициентите $p(x)$ и $q(x)$ може да се претстават во обликот (*), се вика регуларна сингуларна точка или пол. Во оваа теорема x може да се замени со $x-x_0$, каде што x_0 ("полот") е кој било број. Со помош на смена на променливата, полот секогаш може да се пренесе во точката $x=0$. **

Во смисла на теоремата 1, ќе ги разгледуваме ДР од видот

$$y'' + \frac{f(x)}{x}y' + \frac{g(x)}{x^2}y = 0, \text{ т.е. } x^2y''+xf(x)y'+g(x)y = 0, \tag{3}$$

каде што $f(x)$ и $g(x)$ се аналитични во точката $x=0$, па за (3) постои решение од видот (2).

За решавање на вакви ДР се користи методот на Фробениус. Тој се состои во следново: функциите $f(x)$ и $g(x)$ ги претставуваме во вид на редови:

$$f(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + \ldots, \quad g(x) = c_o + c_1x + c_2x^2 + \ldots$$

и заедно со (2) и со неговите изводи ги заменуваме во ДР (3); притоа ќе добиеме:

$$x^r[r(r-1)a_o + \ldots] + (b_o+b_1x+\ldots)x^r(ra_o+\ldots) + \\ + (c_o+c_1x+\ldots)x^r(a_o+a_1x+\ldots) = 0. \tag{4}$$

Коефициентот пред секој степен на x го изедначуваме со нула и на тој начин добиваме равенки за определување на коефициентите a_n. Коефициентот пред x^r - најмалиот степен на x - изнесува

$$[r(r-1) + b_or + c_o]a_o = 0,$$

па бидејќи сакаме да е $a_o \neq 0$ (Т.1), следува дека другиот множител е нула, т.е.

$$r^2 + (b_o-1)r + c_o = 0. \tag{5}$$

Оваа важна квадратна равенка се вика индексна равенка на ДР (3). Овој метод води до фундаментален систем решенија на (3); притоа, едното решение секогаш ќе ја има формата (2), а за другото решение постојат три можности, во зависност од следниве три случаи:

1) корените на (5) се различни и разликата не е цел број (тука се вклучуваат и конјугирано комплексни корени),

2) равенката (5) има двоен корен,

3) корените на (5) се разликуваат за цел број.

Нека r_1, r_2 се корените на (5). Заменувајќи во (4), прво $r=r_1$ и потоа $r=r_2$, со помош на a_o, ги изразуваме другите коефициенти a_n. Така ги добиваме обопштените степенски редови y_1 и y_2:

$$\begin{aligned} r = r_1:\ y_1 &= x^{r_1}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots) \\ r = r_2:\ y_2 &= x^{r_2}(a_0^*+a_1^*x+a_2^*x^2+\ldots) \end{aligned} \tag{6}$$

Теорема 2. 1°. Ако $r_1-r_2 \neq$ цел број, тогаш општото решение на (3) е $y=Ay_1+By_2$, каде што y_1 и y_2 се определени со (6), а A и B се произволни константи (в. зад. 4.19).

2°. Ако $r_1=r_2$, тогаш општото решение на (3) е $y=Ay_1+By_2^*$, каде што y_1 е како во (6), а y_2 има облик:

$$y_2^* = y_1 \ln x + x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \tag{7}$$

(в. зад. 4.20).

3°. Ако r_1-r_2 е цел број и $r_1-r_2>0$, тогаш општото решение на (3) е $y=Ay_1+By_2^*$, каде што

$$y_2^* = ky_1 \ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n, \tag{8}$$

при што y_1 е како во (6), а k=конст., може и 0 (в. 4.21). □

Пример 1. Диференцијалната равенка

$$x(x-1)y'' + [(a+b+1)x-c]y' + aby = 0, \tag{9}$$

каде што a,b,c се константи, е позната под името гаусова хипергеометриска ДР. За сингуларните точки x=0 и x=1 на коефициентите од (9), условите на теоремата на Фукс се исполнети, па (9) има решение во вид на редот (2).

Применувајќи го методот на Фробениус, добиваме дека индексната равенка на (9) е $r(r+c-1)=0$, чии корени се $r_1=0$ и $r_2=1-c$. За $r_1=0$, при $c\neq 0$, се добива редот:

$$y_1(x) = 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \ldots . \tag{10}$$

Редот од десната страна на (10) се означува со $F(a,b,c;x)$ и се вика хипергеометриски (гаусов) ред. Значи:

$$F(a,b,c;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!c(c+1)\ldots(c+n-1)}x^n \tag{11}$$

Тој е конвергентен во интервалот (-1,1). За $r_2=1-c$, се добива решението на (9):

$$y_2 = x^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c;x) \tag{12}$$

Ако c не е цел број, тогаш општото решение на (9) е:

$$y = A\,F(a,b,c;x) + Bx^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c;x) \qquad (12)$$

(За деталите в. нпр. [ЧУ], кн. III, стр. 51 или [АН] стр. 321.)

Задачи: 4.18-4.23; 4.99-4.104

4.6. ГАМА-ФУНКЦИЈА

Несвојствениот интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ зависи од параметарот $x>0$, т.е. е функција од x, којашто се означува со $\Gamma(x)$ и се вика гама-функција. Значи:

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \quad x>0. \qquad (1)$$

Се покажува дека:

1°. Несвојствениот инетграл во (1) е конвергентен за секој $x\in(0,+\infty)$, т.е. функцијата $\Gamma(x)$ е дефинирана во интервалот $(0,+\infty)$ (в. [ЧУ], кн. III, стр. 57). □

$\Gamma(x)$ ја задоволува следнава важна функционална равенка:

2°. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x>0.$ (2)

Доказ. Применувајќи делумна интеграција, имаме:

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x}dt = \int\limits_0^\infty t^{x}d(-e^{-t}) =$$
$$= \left[-t^{x}e^{-t}\right]_0^\infty - \int\limits_0^\infty -e^{-t}xt^{x-1}dt =$$
$$= 0 + 0 + x\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x). \;\square$$

Од 2°, ставајќи $x=1,2,3,\dots$, добиваме по ред:

$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!,\ \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!,\dots$.

Индуктивно:

3°. $\Gamma(n+1) = n!,\ \Gamma(1) = 1.$

Со помош на функционалната равенка 2°, $\Gamma(x)$ може да се дефинира и за негативни вредности на x. Имено, често под гама-функција се подразбира функција којашто за $x>0$ се определува со (1), а за $x<0$ и $x\neq 0,-1,-2,\dots$ се определува со функционалната равенка 2°. Графикот на $\Gamma(x)$ е претставен на црт. 1.

Користејќи го резултатот

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

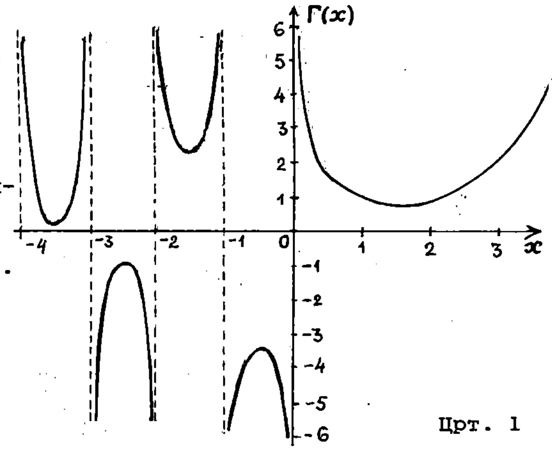
(Поасонов интеграл), може да се покаже дека:

4°. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Со повторна примена на 2°, добиваме:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = \ldots .$$

Индуктивно $(k \in \mathbb{N})$:



Црт. 1

5°. $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+k+1)}{x(x+1)\ldots(x+k)}$.

Интегралот со форма

6°. $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad (x,y > 0)$

се вика Ојлеров интеграл од прв вид, а функцијата B(x,y) што е дефинирана со него, се вика бета-функција. (Интегралот во (1) се вика Ојлеров интеграл од втор вид.)

Со помош на смената t=1-z, добиваме:

7°. $B(x,y) = B(y,x)$, т.е. бета-функцијата е симетрична.

Гама-функцијата и бета-функцијата се сврзани со равенството

8°. $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Релацијата 8° се добива лесно ако во

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx \cdot \int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}dxdy$$

извршиме смена: $x=u(1-v)$, $y=uv$, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = u$; така ќе добиеме

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\cdot B(p,q).$$

Задачи: 4.24-4.26; 4.105-4.111

§4.7. БЕСЕЛОВА ДР. БЕСЕЛОВИ ФУНКЦИИ

Ќе ја разгледаме ДР

$$x^2y'' + xy' + (x^2-p^2)y = 0, \tag{1}$$

каде што p е ненегативен реален број, наречена беселова ДР.

Според методот на Фробениус, индексната равенка на (1) (в. (5) од §4.5) е:

$$r^2 - p^2 = 0$$

па за r=p, за одредување на коефициентите на редот

$$y = x^p(a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots), \tag{2}$$

по диференцирањето и заменувањето во (1), добиваме:

$$(2p+1)a_1 = 0, \quad a_n = -\frac{1}{n(n+2p)}a_{n-2}. \tag{3}$$

Поради $p \geq 0$, од првата равенка во (3) добиваме $a_1=0$, а од тоа и од втората равенка во (3):

$$a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \ \ldots \ , a_{2k-1} = 0, \ldots \ .$$

За n=2k, од (3) ја добиваме следнава рекурентна формула:

$$a_{2k} = -\frac{1}{2^2k(k+p)}a_{2k-2} \quad (k=1,2,\ldots) \tag{3'}$$

За коефициентот a_o обично се зема:

$$a_o = \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}, \tag{4}$$

каде што $\Gamma(x)$ е гама-функцијата.

Од (3'), (4) и од равенството $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, добиваме:

$$a_2 = -\frac{1}{2^2(p+1)}a_o = -\frac{1}{2^2(p+1)}\cdot\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)} = -\frac{1}{2^{p+2}1!\Gamma(p+2)}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2\cdot 2(p+2)}a_2 = \frac{1}{2^{p+4}2!\Gamma(p+3)},$$

...; индуктивно,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{p+2k}k!\Gamma(p+k+1)}, \ldots \ .$$

Заменувајќи ги добиените вредности за a_n во (2), за y добиваме

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k} \tag{5}$$

Функцијата $J_p(x)$ се вика беселова функција од прв вид, со индекс p.

Ако p не е цел број, тогаш заменувајќи r=-p и работејќи како при r=p, добиваме друго решение на ДР (1)

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{r!\,\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2k} \tag{6}$$

Според методот на Фробениус, а бидејќи p не е цел број, добиваме дека $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ се линеарно независни решенија на ДР (1), па

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$$

е општото решение на (1).

Во случај кога p=n е природен број или 0, се покажува дека $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ се линеарно зависни (в. 2^o, §4.8); во тој случај општото решение на (1) е:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x), \quad x > 0,$$

при што

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right) J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} b_k \quad (x>0) \tag{7}$$

каде што $b_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n+k}$ и

$\gamma = \lim\limits_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} - \ln k) \doteq 0{,}577216$ (Ојлерова константа), а

$b_o = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

** Функцијата $Y_n(x)$ се вика Беселова функција од втор вид (со индекс n). Беселовите функции од втор вид, $Y_p(x)$, може да се претстават во обликот:

$$Y_p(x) = \frac{\cos\pi p . J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin\pi p}. \tag{8}$$

Кога p се стреми кон некој цел број n, тогаш десната страна од (8) станува неопределена. Таа неопределеност може да се "отвори" по Лопиталовото правило. Добиваме:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial n}[J_n(x)] - (-1)^n \frac{\partial}{\partial n}[J_{-n}(x)]\right\}.$$

Натаму се пресметува изводот $J_n'(x)$, односно $J_{-n}'(x)$, и се доаѓа до формулата (7) за $Y_n(x)$ (в. нпр. [АН], §7.5.3.)

За некои други факти во врска со беселовите функции може да се консултира на пример книгата [УИ], гл. 17. **

Да забележиме дека ДР

$$x^2 y'' + xy' + (k^2x^2 - p^2)y = 0, \tag{9}$$

каде што k е некоја константа (k≠0), се сведува на беселова:

$$t^2\ddot{y} + t\dot{y} + (t^2-p^2)y = 0 \tag{9'}$$

со помош на смената $x=t/k$ (притоа: $\dot{y}=dy/dt$). Општото решение на (9′) при $p \neq$ цел број, ќе биде $y=C_1J_p(t)+C_2J_{-p}(t)$, а за (9): $y=C_1J_p(kx)+$ $+C_2J_{-p}(kx)$. Ако p е цел број, тогаш ќе биде $y=C_1J_p(kx)+C_2Y_p(kx)$.

На беселова се сведува и секоја ДР од обликот

$$x^2y'' + axy' + (b+cx^m)y = 0, \tag{10}$$

каде што a,b,c,m се константи ($c>0$, $m\neq 0$). Имено, ставајќи

$$y = u\cdot\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\alpha/\beta}, \quad x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{1/\beta},$$

каде што $\alpha=(a-1)/2$, $\beta=m/2$, $\gamma=2\sqrt{c}/m$, $p^2=[(a-1)-4]/m^2$, а $u=u(t)$ е нова непознатата функција од t, (10) го добива обликот:

$$t^2u'' + tu' + (t^2-p^2)u = 0. \tag{10'}$$

§4.8. НЕКОИ СВОЈСТВА НА БЕСЕЛОВИТЕ ФУНКЦИИ

Беселовите функции имаат широка примена во техничките науки. Како и другите специјални функции, тие имаат интересни својства. Некои од нив ќе наведеме овде. Од (5) во §4.7 добиваме

$$\frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2p+2k-1}}{k!\,\Gamma(p+k+1)}\cdot\frac{(2p+2k)}{2}\cdot 2^p =$$

$$= x^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{p+2k-1}}{k!\,\Gamma(p+k)} = x^pJ_{p-1}(x).$$

Значи:

1°. $\frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)] = x^pJ_{p-1}(x)$.

Слично:

2°. $\frac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)] = -x^{-p}J_{p+1}(x)$.

Од 1°, односно од 2°, добиваме:

3°. $J_p'(x) + \frac{p}{x}J_p(x) = J_{p-1}(x)$,

4°. $J_p'(x) - \frac{p}{x}J_p(x) = -J_{p+1}(x)$.

Собирајќи ги 3° и 4°, односно одземајќи го 4° од 3°, добиваме:

5°. $2J_p'(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)$,

6°. $\frac{2p}{x}J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)$.

Од 4°, за $p=0$, добиваме:

7°. $J_0'(x) = -J_1(x)$.

Од 7° заклучуваме дека нулите на функцијата $J_1(x)$ се совпаѓаат со точките во кои функцијата $J_0(x)$ ги има своите максимуми (в. и зад. 4.112).

Ако p е природен број, $p=n$, тогаш (5) од §4.7, имајќи предвид дека $\Gamma(n+k+1)=(n+k)!$, добива вид

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \tag{5'}$$

а (6) од §4.7:

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{-n+2k}}{k!\Gamma(k-n+1)} \tag{6'}$$

Првите членови на редот (6') ќе бидат нули сѐ додека $k-n$ е цел негативен број (зашто функцијата Γ е бесконечна во тие точки), т.е. редот ќе почне од $k=n$. Ставајќи во (6') $k=m+n$, добиваме:

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}(x/2)^{n+2m}}{m!(n+m)!} = (-1)^n J_n(x).$$

Значи:

8°. $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

Да забележиме дека, според 8°, беселовите функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$, кога n е цел број, се линеарно зависни.

Ако во (5) ставиме $p=\frac{1}{2}$ и го искористиме равенството

$$\Gamma(k+\tfrac{3}{2}) = (k+\tfrac{1}{2})\cdot(k-\tfrac{1}{2})\ldots\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} =$$
$$= 2^{-k}(2k+1)(2k-1)\ldots3\cdot1\sqrt{\pi},$$

ќе добиеме:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\,\frac{2}{x\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)(2k-1)\ldots3\cdot1} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Слично: $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$. Значи:

9°. $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$

Според тоа, $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ се елементарни функции. Користејќи го тоа и формулата 6°, добиваме дека:

10°. За секој $p = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots, J_p(x)$ е елементарна функција.

** Беселовите функции (како и други специјални функции) можат да се дефинираат и направо, со помош на т.н. генератриси. Функцијата

$$G(z,t) = e^{z(t-1/t)/2}$$

каде што z и t се менуваат во множеството C на комплексните броеви, се вика генератриса на беселовите функции.

Ако во околина на точката $t=0$ функцијата $G(z,t)$ се развие во ред

$$G(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n t^n,$$

тогаш коефициентите A_n се определени со:

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} G(z,t)t^{-n-1}dt.$$

$J_n(z)=A_n$ се вика беселова функција со индекс n. **

Задачи: 4.27-4.30; 4.112-4.122.

Г л а в а 5

НЕЛИНЕАРНИ ДР ОД ПРВ РЕД

Со некои видови ДР од прв ред се сретнавме порано (Гл. 1 и Гл. 2), меѓу нив и со нелинеарни. Иако примената на нелинеарните ДР (од прв и повисок ред) не е така голема како примената на линеарните, тие имаат значителна теориска важност. Сакајќи читателот да добие заокружен увид во оваа класа ДР, ќе разгледаме уште некои видови нелинеарни ДР од прв ред: егзактни, сведени по изводот, несведени по изводот. На крајот ќе се задржиме, многу кратко, на неколку "геометриски"прашања, сврзани со фамилии криви - решенија на ДР: обвивни линии, ортогонални траектории, еволвенти.

§5.1. ЕГЗАКТНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

За левата страна на равенката

$$f(x,y,y') = 0 \tag{1}$$

велиме дека е точен извод, ако постои функција $u(x,y)$, таква што за секоја диференцијабилна функција $y=y(x)$ важи равенството

$$\frac{d}{dx}\,u(x,y) = f(x,y,y'). \tag{2}$$

(Притоа се претпоставува дека графикот $y=y(x)$ лежи во дефиниционата област на ДР (1), т.е. е определен во секоја точка (x,y) за која постои бројот y', кој, заедно со x и y, ја задоволува (1).)

Поради условот (2), ДР (1) е еквивалентна со равенката $\frac{d}{dx}\,u(x,y)=0$, па општиот интеграл на (1) има вид

$$u(x,y) = C,$$

каде што C е произволна константа.

Ако левата страна на ДР

$$f(x,y,y') = \phi(x) \tag{3}$$

е точен извод и функцијата $\phi(x)$ е непрекината, тогаш (3) е еквивалентна со $\frac{d}{dx}\,u(x,y) = \phi(x)$, од каде што добиваме дека

$$u(x,y) = \int \phi(x)dx$$

е општиот интеграл на (3).

<u>Пример 1</u>. $3x^2 + y'\cos y = xe^x$.

За која било диференцијабилна функција $y=y(x)$ имаме:

$$\frac{d}{dx}(x^3+\sin y) = 3x^2 + y'\cos y, \text{ т.е.}$$

$$\frac{d}{dx}(x^3+\sin y) = xe^x,$$

па:

$$x^3 + \sin y = (x-1)e^x + C$$

е општиот интеграл на дадената ДР. ||

Ако $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ е тотален диференцијал од некоја функција $u=u(x,y)$, тогаш ДР

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0} \tag{4}$$

се вика <u>егзактна диференцијална равенка</u>. Ако (4) ја напишеме во обликот $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$, тогаш за која било диференцијабилна функција $y=y(x)$ имаме:

$$\frac{d}{dx}u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}y' = P(x,y)+Q(x,y)y',$$

т.е. левата страна на (4) е точен извод. Според тоа, општиот интеграл на (4) е

$$u(x,y) = C, \tag{5}$$

каде што C е произволна константа.

Ако $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ се непрекинати функции во некоја област D, тогаш левата страна на ~~(1)~~ (4) е тотален диференцијал од некоја функција $u=u(x,y)$ ако и само ако

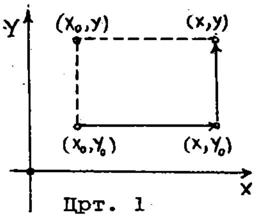
$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \tag{6}$$

и, во случај на правоаголна област D, знаеме да ја најдеме и функцијата $u(x,y)$ (в. [ЧУ], кн. III, стр. 160):

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C, \tag{7}$$

каде што (x_0,y_0) е произволна фиксирана точка од D; притоа можеме да земеме C=0. Слично

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C \tag{7'}$$



Црт. 1

Пример 2. $(3x^2-y)dx+(3y^2-x)dy = 0$.

Бидејќи $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2-y)=-1 = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2-x)$, следува дека левата страна на дадената ДР е тотален диференцијал од некоја функција $u(x,y)$. Притоа $P,Q,\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ се непрекинати во Oxy. Според (7´):
$u(x,y) = \int_0^x (3x^2-y)dx+\int_0^y (3y^2-0)dy = x^3-xy+y^3$,
па $x^3+y^3-xy=C$ е општиот интеграл на дадената ДР.

Да забележиме дека ДР $P(x)dx+Q(y)dy=0$ (при која променливите се раздвојуваат) е специјален случај од (4).

Задачи: 5.1; 5.31-5.35

§5.2. ИНТЕГРАЛЕН МНОЖИТЕЛ

Нека е зададена диференцијалната равенка

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{1}$$

Ако $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, често пати е корисно (1) да се помножи со некоја згодно избрана функција $\lambda=\lambda(x,y)$, така што левата страна на

$$(\lambda P)dx + (\lambda Q)dy = 0 \tag{2}$$

да биде тотален диференцијал од некоја функција. Тоа ќе биде исполнето ако

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q),$$

т.е.

$$P\frac{\partial \lambda}{\partial y} - Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{3}$$

Во општ случај, решавањето на равенката (3) по непознатата функција λ е потешко отколку решавањето на (1), но, во специјални случаи, тоа може да не е тешко. На пример, во случај λ да е функција само од x, тогаш (3) добива вид

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), \tag{4}$$

па бидејќи $\frac{\lambda'}{\lambda}$ е функција само од x, следува дека и десната страна на (4) е функција само од x, нпр. $R(x)$. Тогаш:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = R(x), \qquad \lambda = e^{\int R(x)dx}. \tag{5}$$

Функцијата $\lambda(x,y)$ се вика <u>интегрален множител</u> на ДР (1). Ако се знае дека интегралниот множител λ на некоја ДР има посебен вид (нпр. λ е функција само од y, или само од xy или само од x^2+y^2 итн.), тогаш λ може релативно лесно да се најде.

<u>Пример 1</u>. Да го најдеме општиот интеграл на ДР

$$4x^3y^2dx + (y^4-x^4y+5)dy = 0, \qquad (a_1)$$

знаејќи дека таа има интегрален множител од обликот $\lambda=\lambda(y)$.

Ако ДР (1) има интегрален множител што зависи само од y, тогаш $\lambda'_x=0$ и $\lambda'_y = \frac{d\lambda}{dy} = \lambda'$, па равенството (3) добива вид:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \qquad (6)$$

Левата страна $\frac{\lambda'}{\lambda}$ на (6) е функција само од y, па мора да е и десната страна функција само од y.

За дадената ДР (a_1) имаме:

$$P = 4x^3y^2,\ Q = y^4-x^4y+5,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 8x^3y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -4x^3y,$$

па (6) е $\lambda'/\lambda=-3/y$. Оттука $\ln\lambda=\ln y^{-3}$, т.е. $\lambda=1/y^3$. Множејќи ја (a_1) со $1/y^3$ $(y\neq 0)$, ја добиваме ДР

$$\frac{4x^3}{y}dx + \left(y - \frac{x^4}{y^2} + \frac{5}{y^3}\right)dy = 0, \qquad (a_2)$$

којашто е егзактна. Според (7) од §5.1, имаме

$$u(x,y) = \int_0^x 4x^3dx + \int_1^y\left(y - \frac{x^4}{y^2} + \frac{5}{y^3}\right)dy = x^4 + \left[\frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{y} - \frac{5}{2y^2}\right]_1^y,$$

па општиот интеграл на (a_2), т.е. на (a_1) е

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{y} - \frac{5}{2y^2} = C.$$

(Решение на (a_1) е и $y=0$.)

<u>Задачи</u>: 5.2-5.8; 5.36-5.59

§5.3. РИКАТИЕВИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Диференцијалните равенки со форма

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \tag{1}$$

каде што $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ се дадени функции од x, се викаат рикатиеви ДР. Во случај да е $P(x)\equiv 0$, ДР (1) е линеарна од прв ред, а ако $R(x)\equiv 0$ (а $P(x)$ и $Q(x)$ ненулти функции), тогаш (1) е бернулиева.

ДР (1) во општ случај не се интегрира во квадратури. Меѓутоа, ако е познат еден партикуларен интеграл на (1), $y_1=y_1(x)$, тогаш, лесно се покажува дека, со смената

$$y = z + y_1, \tag{2}$$

ДР (1) се сведува на бернулиева, а со смената

$$y = \frac{1}{z} + y_1, \tag{3}$$

(1) се сведува на линеарна ДР (притоа, z е нова непозната функција од x).

Пример. $y'=y^2+(2x+\frac{1}{x})y+x^2$ има партикуларен интеграл $y_1=-x$. Ставајќи, според (3),

$$y = \frac{1}{z} - x, \quad y' = -\frac{z'}{z^2} - 1$$

во дадената равенка, добиваме:

$$-\frac{z'}{z^2} - 1 = \frac{1}{z^2} - \frac{2x}{z} + x^2 + (2x+\frac{1}{x})(\frac{1}{z} - x) + x^2,$$

а по средувањето:

$$z' + \frac{1}{x}z = -1,$$

којашто е линеарна ДР од прв ред. Нејзиното општо решение (§2.1) е

$$z = x^{-1}(C-x^2/2) = \frac{2C-x^2}{2x},$$

па општото решение на дадената ДР е

$$y = -x + 2x/(2C-x^2).$$

Задачи: 5.9, 5.10; 5.60-5.68

§5.4. КЛЕРООВИ И ЛАГРАНЖОВИ ДР

Диференцијалните равенки со форма

$$y = xy' + \phi(y'), \tag{1}$$

каде што ϕ е дадена диференцијабилна функција по y', се викаат клероови ДР. (Притоа, се подразбира дека ϕ не е константна функција.) Да забележиме дека овие ДР се линеарни во однос на x и y.

Ставајќи во (1) $y'=p$ и диференцирајќи по x, добиваме:

$$y = xp + \phi(p); \quad p = p + x\frac{dp}{dx} + \phi'(p)\frac{dp}{dx},$$

$$x + \phi'(p)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Последнава равенка е еквивалентна со (дисјункцијата на) равенките:

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad x + \phi'(p) = 0.$$

Од $\frac{dp}{dx} = 0$ имаме $p=C$, т.е. $y'=C$, па заменувајќи во (1), добиваме

$$y = Cx + \phi(C); \tag{2}$$

тоа е општото решение на клерoовата ДР (1).

Од $x+\phi'(p)=0$ и $y=xp+\phi(p)$ добиваме

$$x = -\phi'(p), \quad y = -p\phi'(p) + \phi(p). \tag{3}$$

Со директно заменување во (1) се уверуваме дека функцијата, определена со параметарските равенки (3), е интеграл на (1). Може да се покаже дека интегралот (3) не се добива од општото решение (2) за ниедна вредност на произволната константа C и дека тој е сингуларен интеграл на ДР (1).

** Да забележиме дека сингуларниот интеграл на (3) можеме да го добиеме со елиминирање на произволната константа C од општото решение и од неговата изводна равенка по C, т.е. од равенките (в. (6) од §5.):

$$y = Cx + \phi(C), \quad 0 = x + \phi_C'(C). \tag{3'}$$

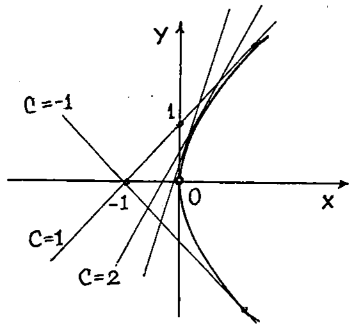
Значи, графикот на сингуларниот интеграл (3) на ДР (1) е обвивна линија на фамилијата прави, определени со општото решение (2). **

Пример 1. Да ги најдеме општото и сингуларното решение на следнава клероова ДР

$$y = xp + \frac{1}{p} \quad (p=y'). \tag{a_1}$$

Според горната дискусија, општото решение на (a_1) е

$$y = Cx + \frac{1}{C}. \tag{a_2}$$



Според (3):

$$x = \frac{1}{p^2}, \quad y = \frac{p}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p},$$

па елиминирајќи го p, добиваме

$$y^2 = 4x \qquad (a_3)$$

-сингуларниот интеграл на (a_1). (Ако работевме според (3′), ќе го добиевме истиот резултат.) Фамилијата прави (a_2) и нивната обвивна линија - параболата (a_3), се прикажани на црт. 1. ||

Диференцијалните равенки од видот

$$y = x\phi(p) + \psi(p), \qquad (4)$$

каде што $p=y'$, а ϕ и ψ се дадени диференцијабилни функции од p, се викаат <u>лагранжови</u> <u>ДР</u>. И тие се линеарни по x,y и се решаваат како клероовите. Имено, диференцирајќи ја (4) по x и земајќи предвид дека $dy=pdx$, ја добиваме равенката

$$pdx = \phi(p)dx + [x\phi'(p) + \psi'(p)]dp, \qquad (5)$$

која, при $\phi(p)\neq p$, е линеарна по функцијата $x=x(p)$. Ако општото решение на (5) е определено со формулата $x=f(p,C)$, тогаш општиот интеграл на (4) ќе биде определен со параметарските равенки

$$x = f(p,C), \quad y = f(p,C)\phi(p) + \psi(p). \qquad (6)$$

Ако $p-\phi(p)=0$ има реално решение, на пример, $p=p_o$, тогаш и

$$y = x\phi(p_o) + \psi(p_o) \qquad (7)$$

е решение на (4). Ако тоа не може да се добие од општиот интеграл (6) за ниедна вредност на произволната константа C, тогаш тоа е сингуларно решение на (4). Значи, лагранжовата ДР (4) може да има сингуларен интеграл во случајот кога равенката $p=\phi(p)$ има реално решение.

<u>Пример 2</u>. Да се најде општиот интеграл и (ако има) сингуларниот на ДР

$$y = xy'^2 + y'^3$$

Ставајќи $y'=p$, добиваме $y=xp^2+p^3$, па диференцирајќи по x:

$$p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx},$$

т.е.

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}\, x = \frac{3p}{1-p} \quad (p\neq 0;1).$$

Општото решение на оваа линеарна ДР е

$$x = (C+3p^2-2p^3)/2(p-1)^2,$$

па општиот интеграл на дадената ДР, во параметарска форма е

$$x = (C+3p^2-2p^3)/2(p-1)^2, \quad y = xp^2 + p^3.$$

Од $p-p^2=0$ имаме $p_1=0$ и $p_2=1$, па $y=0$ и $y=x+1$ се, исто така, решенија на дадената ДР; тие се сингуларни решенија.

Задачи: 5.14, 5.15; 5.75-5.85

§5.5. ДРУГИ ДР НЕСВЕДЕНИ ПО ИЗВОДОТ

Во претходниот параграф разгледавме диференцијални равенки (клероови и лагранжови) што не беа сведени по изводот. Овде ќе разгледаме уште некои ДР од прв ред несведени по изводот, т.е. некои специјални случаи на ДР

$$F(x,y,y') = 0. \tag{1}$$

I. Практично е можно да се реши равенката (1) по y' и притоа се добива една или повеќе ДР со облик

$$y' = f(x,y), \tag{2}$$

кои припаѓаат на некоја од познатите класи: хомогени, линеарни и сл. Таква е, на пример, ДР (зад. 5.16):

$$xy'^2 - 2xy' + y = 0$$

Во тој случај, општиот интеграл на (1) се добива како производ од општите интеграли на равенките (2).

II. Ако равенката (1) има вид $f(x,y')=0$ и практично е можно x да се изрази како функција од y', т.е. $x=\phi(p)$, $p=\frac{dy}{dx}$, тогаш од $dy=pdx$ добиваме

$$y = \int p dx + C,$$

па општиот интеграл на (1) ќе биде:

$$\begin{cases} x = \phi(p), \\ y = \int p\phi'(p)dp + C. \end{cases}$$

Таква е, на пример, ДР: $y'-\operatorname{arctg} y' + x/y' = 0$ (в. 5.18).

III. Слично се работи ако имаме $f(y,y')=0$ и ако у може да се изрази како функција од y':

$$y=\psi(p),\quad dy=pdx.$$

Тогаш, од $dx=\frac{1}{p}\,dy$ добиваме дека

$$y=\psi(p),\quad x=\int\frac{1}{p}\,\psi'(p)dp+C$$

е општ интеграл на (1) (в. зад. 5.19: $y^2-2y'^2-y'^6=0$).

Ако, пак, равенката $f(y,y')=0$ не може (или, пак, е тешко) да се реши по y или по y', но може y и y' да се изразат згодно со помош на некој параметар t:

$$y=\phi(t),\quad y'=\psi(t),$$

тогаш од $p=y'$, т.е. $dy=pdx=\psi(t)dx$ и од $dy=\phi'(t)$ добиваме дека

$$dx=\frac{\phi'(t)}{\psi(t)}\,dt,\quad \begin{cases} x=\int\frac{\phi'(t)}{\psi(t)}\,dt+C \\ y=\phi(t)\end{cases}$$

е општ интеграл на (1). Аналогно за $f(x,y')=0$.

Таква е, на пример, ДР: $y'^{2/5}+y^{2/5}=a^{2/5}$ (в. 5.20).

IV. Од равенката (1) y може да се претстави во вид $y=f(x,y')$. Ставајќи $y'=p\,(dy=pdx)$, добиваме:

$$y=f(x,p),$$

од каде што, земајќи го тоталниот диференцијал, имаме:

$$dy=f'_x(x,p)dx+f'_p(x,p)dp,$$

т.е. по $dy=pdx$:

$$(f'_x-p)dx+f'_p dp=0. \tag{3}$$

Ако може да се најде решението на (3) во облик $x=g(p)$, тогаш општиот интеграл на (1) ќе биде определен со параметарските равенки

$$x=g(p),\quad y=f(g(p),p).$$

Таква е, на пример, ДР (в. 5.21):

$$y=2xy'-y'^2-x^2/2.$$

Аналогно се работи ако од (1) може да се добие $x=h(y,y')$.

Во сите случаи сингуларните интеграли на (1) може да се најдат на начинот, опишан во наредниот параграф.

Задачи: 5.16–5.21; 5.81–5.86

§5.6. СИНГУЛАРНИ ТОЧКИ И СИНГУЛАРНИ РЕШЕНИЈА НА ДР; ОБВИВНИ ЛИНИИ

Да ја разгледаме диференцијалната равенка

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

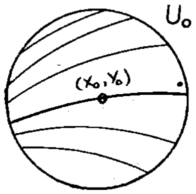
при што функцијата $f(x,y)$ е зададена во некоја област D.

За една точка (x_0,y_0) ќе велиме дека е обична точка за ДР (1), ако:

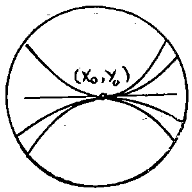
1) (x_0,y_0) е внатрешна точка на D,

2) постои околина U_0 на (x_0,y_0) во која $f(x,y)$ е непрекината и има непрекинат парцијален извод f'_y т.е. ги задоволува условите од теоремата 2 во §1.7 - за егзистенција и единственост на решение на ДР (1).

Според таа теорема, низ (x_0,y_0), а и низ секоја друга точка од U_0 минува една и само една интегрална крива на ДР (1) (црт. 1).



Црт. 1



Црт. 2

Секоја точка од D што не е обична, а и секоја точка од границата на D, дури и да не припаѓа на D, се вика сингуларна точка за ДР (1).

Значи, ако (x_0,y_0) е сингуларна точка на (1), тогаш можно е, во која било нејзина околина, да се нарушени условите на теоремата за егзистенција и единственост на решение (§1.7). Според тоа, можно е да постојат неколку решенија на (1) што го задоволуваат условот

$$y(x_0) = y_0,$$

т.е. низ (x_0,y_0) може да минуваат неколку интегрални криви (црт. 2). Притоа, бидејќи со равенката (1) во (x_0,y_0) е определена единствена вредност на y', следува дека сите интегрални криви што минуваат низ (x_0,y_0) имаат заедничка тангента.

Ако сингуларните точки на (1) формираат некоја линија, тогаш таа се вика <u>сингуларна линија</u> за ДР (1); во случај кога таа е и интегрална крива, тогаш таа се вика <u>сингуларна интегрална крива</u>, а нејзината равенка - <u>сингуларен интеграл</u> или сингуларно решение на ДР (1).

** Да забележиме дека, ако точката (x_o,y_o) е сингуларна, тоа уште не значи дека во неа е нарушена единственоста на решението (зошто?). За да се издвојат точките во кои навистина е нарушена единственоста, тие се наречени <u>суштински</u> сингуларни точки. Во таа смисла зборуваме за: суштинска сингуларна крива и суштински сингуларен интеграл. **

Значи, едно решение $y=\phi(x)$ на ДР $y'=f(x,y)$ или, во имплицитна форма,

$$F(x,y,y') = 0 \tag{1'}$$

се вика <u>сингуларно</u> или <u>особено решение</u>, ако во секоја точка (x_o,y_o) од неговиот график се нарушува единственоста: покрај графикот на тоа решение, низ (x_o,y_o) минува графикот и на друго решение, кое има иста тангента со $y=\phi(x)$ и не се совпаѓа со него во некоја (произволно мала) околина на (x_o,y_o) (црт. 2).

Може да се покаже дека, ако функцијата $F(x,y,p)$ и нејзините парцијални изводи F'_y и F'_p се непрекинати по сите аргументи x,y,p (при што $p=y'$), тогаш секое сингуларно решение ја задоволува и равенката

$$F'_p(x,y,p) = 0. \tag{2}$$

Значи, за да ги добиеме сингуларните решенија на (1), треба да го исклучиме $p=y'$ од (1') и (2). Резултатот од исклучувањето на p е некоја врска

$$D(x,y) = 0, \tag{3}$$

којашто се вика <u>p-дискриминанта</u> на ДР (1'), а кривата, определена со (3), се вика <u>p-дискриминантна крива</u> (кратко ПДК).

Во случаи кога ПДК се состои од неколку гранки, нужно е да се провери дали секоја гранка посебно претставува интегрална крива на (1') и, ако одговорот е потврден, дали таа е сингуларен интеграл, т.е. дали во секоја нејзина точка се нарушува единственоста.

<u>Пример 1</u>. Да ги најдеме сингуларните решенија на ДР

$$y'^2 - 4xy' + 4y = 0. \tag{a_1}$$

1. Прво, ја наоѓаме ПДК. Во дадениов случај имаме:

$$F(x,y,y') \equiv y'^2 - 4xy' + 4y = 0, \quad F'_{y'} \equiv 2y' - 4x = 0,$$

па $y'=2x$. Заменувајќи го $y'=2x$ во (a_1), добиваме

$$y = x^2. \tag{a_2}$$

Значи, p-дискриминантната крива (a_2) на ДР (a_1) се состои од една гранка и таа е парабола.

2. Потоа проверуваме дали ПДК (a_2) е решение на (a_1): заменувајќи ја (a_2) и нејзиниот извод во (a_1), заклучуваме дека $y=x^2$ е решение на ДР (a_1).

3. На крајот проверуваме дали решението $y=x^2$ е сингуларно. За таа цел го наоѓаме општиот интеграл на ДР (a_1); таа може да се претстави во форма $y=xy'-\frac{1}{4}y'^2$, т.е. таа е клероова ДР, па општото решение е

$$y = Cx - \frac{1}{4}C^2. \tag{a_3}$$

Значи, секое партикуларно решение на (a_1) претставува некоја права. Ќе покажеме дека параболата $y=x^2$, во која било своја точка, се допира со некоја линија од фамилијата (a_3).

Условите при кои две криви $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ се допираат во точката со апсцисата x_o се:

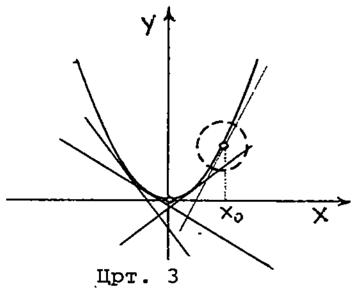
$$y_1(x_o) = y_2(x_o), \quad y_1'(x_o)=y_2'(x_o). \tag{a_4}$$

За конкретниов случај:

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = Cx - C^2/4,$$

условите (a_4) имаат вид:

$$x_o^2 = Cx_o - C^2/4, \quad 2x_o = C.$$



Црт. 3

Ставајќи $C=2x_o$ во првото од овие равенства, добиваме дека тоа е идентички задоволено. Значи, кривата $y=x^2$, во секоја нејзина точка, ја допира некоја права од фамилијата (a_3) (црт. 3). Според тоа, $y=x^2$ е сингуларно решение на ДР (a_1). ‖

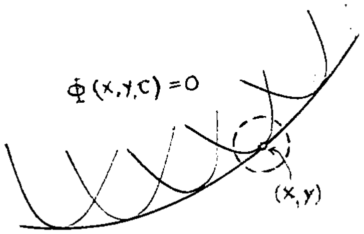
Во непосредна врска со поимот сингуларна интегрална крива се јавува поимот обвивна линија на фамилија криви. Нека

$$\Phi(x,y,C) = 0 \tag{4}$$

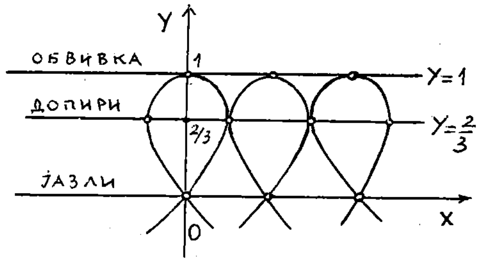
е дадена (еднопараметарска) фамилија криви. Кривата L

$$y = \psi(x) \tag{5}$$

се вика обвивна линија (или: анвелопа, обвивка) на фамилијата (4) ако во секоја своја точка (x,y) допира некоја линија од фамилијата (4), при што е различна од неа во некоја околина на (x,y) и, во различни точки, L допира различни линии од фамилијата (црт. 4).



Црт. 4



Црт. 5

Нека (4) е општ интеграл на ДР (1´). Обвивната линија на (4), ако постои, ќе биде сингуларна интегрална крива на (1´). Навистина, во точките на обвивката, вредностите x,y,y' се совпаѓаат со вредностите x,y,y' за интегралната крива што ја допира обвивката во точката (x,y) и, следствено, во секоја точка од обвивката вредностите x,y,y' ја задоволуваат равенката $F(x,y,y')=0$. Значи, обвивката на (4) е интегрална крива на (1´). Од друга страна, во секоја точка (x,y) на обвивката е нарушена единственоста: низ (x,y) минуваат две (различни) интегрални криви. Следствено, обвивката е сингуларна интегрална крива.

Се покажува дека обвивната линија влегува во составот на C-дискриминантната крива (кратко СДК) на (4), којашто се определува со равенките:

$$\Phi(x,y,C) = 0, \quad \Phi'_C(x,y,C) = 0. \tag{6}$$

Имено, СДК претставува равенка со облик $E(x,y)=0$, добиена од (6) со исклучување на параметарот C. Но, СДК, покрај обвивната линија, со некои свои множители може да содржи и други геометриски места, сврзани со дадената фамилија, како на пример: г.м. (геометриско место) на јазли, г.м. на допири, г.м. на повратни точки (шилци).

** Некоја гранка на СДК ќе биде обвивна линија ако на неа:

1°. постојат ограничени парцијални изводи, т.е.

$$|\Phi'_x| \le M_1, \quad |\Phi'_y| \le M_2 \qquad (M_1, M_2 = \text{конст.});$$

2°. $\Phi'_x \ne 0$ или $\Phi'_y \ne 0$.

(Условите 1° и 2° се само доволни, па затоа некои од гранките на СДК, на кои е нарушен еден од тие услови, исто така, можат да бидат обвивни линии.) **

Пример 2. Да ја најдеме обвивната линија (ако постои) на фамилијата криви

$$y^2(1-y) = (x-C)^2 \tag{б$_1$}$$

За таа цел ќе ја најдеме СДК. Исклучувајќи го C од системот равенки

$$y^2(1-y) - (x-C)^2 = 0, \quad 2(x-C) = 0$$

ја добиваме СДК на (б$_1$):

$$y^2(1-y) = 0. \tag{б$_2$}$$

За да видиме дали некоја гранка од СДК ($y=0$ или $y=1$) е обвивка на (б$_1$), ќе провериме дали таа е сингуларна интегрална крива на ДР што одговара на (б$_1$). Од (б$_1$) и од нејзиниот извод (по x):

$$2yy'(1-y) - y^2y' = 2(x-C)$$

ја исклучуваме C и ја добиваме бараната ДР:

$$y'^2(2-3y)^2 - 4(1-y) = 0. \tag{б$_3$}$$

Исклучувајќи ја y' од (б$_3$) и од нејзината изводна равенка (по y')

$$2y'(2-3y)^2 = 0,$$

ја добиваме ПДК на (б$_3$):

$$(1-y)(2-3y)^2 = 0 \tag{б$_4$}$$

Множителот $1-y$ влегува и во СДК и во ПДК, а $y=1$ е (сингуларно) решение на (б$_3$). Значи, $y=1$ е обвивна линија на фамилијата (б$_1$).

Равенката $2-3y=0$ (што влегува во ПДК) претставува геометриско место на допири на интегралните криви, а $y=0$ (што влегува во СДК) е геометриско место на јазли (црт. 5). Тие не се решенија на ДР (б$_3$). ||

Задачи: 5.22–5.24; 5.90–5.96

§5.7. ОРТОГОНАЛНИ И ИЗОГОНАЛНИ ТРАЕКТОРИИ

Нека е дадена фамилија линии, определена со равенката

$$\Phi(x,y,a) = 0 \tag{1}$$

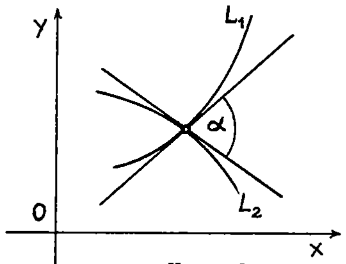
(а е параметар; (1) се вика и еднопараметарска фамилија криви).

Ако некоја крива L ги сече сите линии од фамилијата (1) под ист агол α, тогаш L се вика изогонална траекторија на (1), Специјално, ако $\alpha=\pi/2$, тогаш таа се вика ортогонална траекторија на дадената фамилија.

За да најдеме равенка на изогоналните траектории на (1), ќе постапиме на следниов начин. Го елиминираме параметарот а од (1) и од равенката $\Phi'_x=0$ и ја добиваме диференцијалната равенка

$$F(x,y,y') = 0 \tag{2}$$

на фамилијата (1). Бидејќи агол меѓу две криви е аголот α меѓу нивните тангенти во пресечната точка (црт. 1), ќе имаме:



Црт. 1

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}, \text{ т.е.}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'-Y'}{1+y'Y'}, \tag{3}$$

каде што $k_1=y'$ е наклонот (т.е. коефициентот на правецот) на тангентата на кривата од дадената фамилија, а $k_2=Y'$ е наклонот на тангентата на бараната траекторија. Ставајќи $k=\operatorname{tg}\alpha$, од (3) добиваме $y' = \frac{Y'+k}{1-kY'}$, па, заменувајќи го во (2) y' со $\frac{Y'+k}{1-kY'}$ добиваме нова фамилија линии, чии тангенти ги сечат соодветните тангенти од дадената фамилија линии под агол α, Значи,

$$F\left(X,Y,\frac{Y'+k}{1-kY'}\right) = 0 \tag{4}$$

е диференцијална равенка на изогоналните траектории на фамилијата (1). Специјално, ако $\alpha=90^\circ$, тогаш $y' = \frac{-1}{Y'}$, па

$$F\left(X,Y,-\frac{1}{Y'}\right) = 0 \tag{4'}$$

е ДР на ортогоналните траектории на (1).

Ако една фамилија рамнински криви е зададена со равенка во поларни координати

$$\Psi(\phi,\rho,a) = 0, \tag{5}$$

тогаш, исклучувајќи го параметарот a од (5) и од $\frac{d\Psi}{d\phi}=0$, ја добиваме диференцијалната равенка $F(\phi,\rho,\rho')=0$ на (5). Заменувајќи го во неа ρ' со $-\frac{\rho^2}{\rho'}$, ја добиваме ДР на фамилијата ортогонални траектории

$$F(\phi,\rho,-\frac{\rho^2}{\rho'})=0. \tag{6}$$

Откако ќе се реши ДР (4), односно (4′) или (6), се добива равенката на фамилијата изогонални траектории, односно равенката на фамилијата ортогонални траектории.

Да разгледаме еден пример.

Пример 1. Дадена е фамилијата параболи (со параметар a):

$$y = ax^2.$$

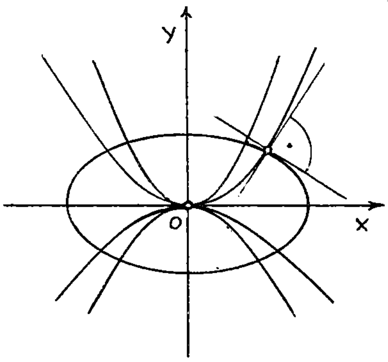
Да ја најдеме равенката на нејзините ортогонални траектории. Имаме:

$$y' = 2ax, \qquad a = y'/2x,$$

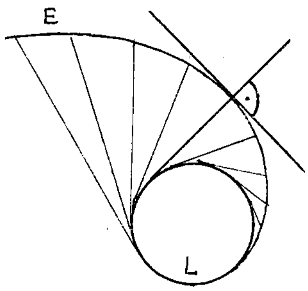
па $xy'=2y$ е ДР на дадената фамилија криви. Заменувајќи го y' со $-1/y'$, ја добиваме ДР

$$2yy' = -x,$$

чие решение $\frac{x^2}{2}+y^2=C$ е равенка на ортогоналните траектории на дадената фамилија параболи (црт. 2). ||



Црт. 2



Црт. 3

Во врска со проблемот за определување ортогонални траектории се јавува и задачата за еволвента на крива.

Нека L е дадена крива. Кривата E што го има својството: секоја тангента на L ја сече E под прав агол и секоја точка од E е точка од некоја тангента на L, се вика <u>еволвента</u> на кривата L. Значи, E е составена од подножни точки на тангентите од L; на црт. 3 е претставена една еволвента на кружницата L. (Кривата L се вика <u>еволута</u> за кривата E.)

Ако кривата L е дадена со равенка $f(x,y)=0$, тогаш равенката на нејзината еволвента може да се најде на следниов начин: во клероовата ДР

$$y = xp + \phi(p) \tag{7}$$

функцијата $\phi(p)$ ќе ја определиме така што $f(x,y)=0$ да биде сингуларен интеграл на (7). Откако ќе ја определиме $\phi(p)$, во равенката (7) го заменуваме p со $-1/p$ и ја добиваме диференцијалната равенка на ортогоналните траектории на фамилијата прави $y=Cx+\phi(C)$:

$$y = -\frac{x}{p} + \phi\left(-\frac{1}{p}\right). \tag{8}$$

Решението на оваа ДР е бараната равенка на еволвентите на L.

<u>Пример 2</u>. Во клероовата ДР (7) да се определи функцијата ϕ така што $y^2=2x$ да биде нејзин сингуларен интеграл.

Ја диференцираме $y^2=2x$ по x и добиваме $2yy'=2$, т.е. $y=1/y'=1/p$; заменувајќи во $y^2=2x$, добиваме $1/p^2=2x$, па $x=1/2p^2$. Сега, ги заменуваме $y=1/p$ и $x=1/2p^2$ во (7): $1/p=p/2p^2+\phi(p)$, од каде што добиваме

$$\phi(p) = \frac{1}{2p}.$$

(Ако се бара, натаму, да ја најдеме фамилијата еволвенти на параболата $y^2=2x$, ја решаваме, според (8), ДР $y = -\frac{x}{p} - \frac{p}{2}$.) ‖

<u>Задачи</u>: 5.25–5.30; 5.97–5.103.

Глава 6

НЕЛИНЕАРНИ ДР ОД ПОВИСОК РЕД

Нелинеарни ДР од повисок ред, во наредните глави, ќе сретнеме сосем малку, скоро во занемарлив број случаи. Сепак, поради комплетност, ќе се задржиме кратко на некои прашања од техниката на нивното решавање. Од методски причини, прво ќе разгледаме некои видови нелинеарни ДР од втор ред, а потоа ќе преминеме на ДР од произволен ред. (Притоа ќе ја имаме предвид забелешката од §1.1 во врска со ДР од n-ти ред, стр. 2.)

*§6.1. ДР ОД ВТОР РЕД ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА ДР ОД ПРВ РЕД

Ќе разгледаме меколку специјални случаи на ДР од втор ред што допуштаат снижување на редот, а во примената се јавуваат често.

I. ДР во кои не се јавуваат y и y':

$$F(x,y'') = 0. \tag{1}$$

Постојат неколку можности.

1°. Ако од (1) може y'' да се изрази како функција од x, т.е. $y''=f(x)$, тогаш општиот интеграл на (1) го добиваме со две последователни интегрирања.

2°. Ставајќи $y'=p$, добиваме $y'' = \frac{dp}{dx}$, па (1) добива форма $F(x,\frac{dp}{dx})=0$, т.е. добиваме ДР од прв ред.

3°. Воведувајќи параметар t на згоден начин, т.е. ставајќи

$$x = \phi(t), \quad y'' = \psi(t),$$

добиваме: $dy' = y''dx = \psi(t)\phi'(t)dt$, $\quad y' = \int\psi(t)\phi'(t)dt + C_1$,
па од $dy = y'dx$:

$$y = \int\left[\int\psi(t)\phi'(t)\,dt + C_1\right]\phi'(t)dt + C_2;$$

оваа функција, заедно со $x=\phi(t)$, дава општ интеграл на (1).

Пример 1. $3y''^2 + 2y'' = x$. Оваа ДР има форма на (1). За неа е најзгодно да постапиме како во 3^o. Затоа ќе ставиме:

$$y'' = t, \qquad x = 3t^2 + 2t.$$

Натаму: $dy' = y''dx = t(6t+2)dt$, па

$$y' = \int(6t^2 + 2t)dt = 2t^3 + t^2 + C_1;$$

$$y = \int[2t^3+t^2+C_1]\cdot(6t+2)dt = \int[12t^4+10t^3+2t^2+6C_1t+2C_1]dt,$$

$$y = \frac{12}{5}t^5 + \frac{5}{2}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 3C_1t^2 + 2C_1t + C_2$$

Оваа функција, заедно со $x=3t^2+2t$, дава општ интеграл на дадената ДР.

II. $F(y',y'') = 0$. (2)

1^o. Како и во случајот I, со смената $y'=p$, ДР (2) се сведува на ДР од прв ред: $F(p,p') = 0$.

2^o. ДР (2) може да се претстави во параметарска форма, ставајќи:

$$y' = \phi(t), \qquad y'' = \psi(t).$$

Од $dy'= y''dx$ и од $dy=y'dx$ имаме по ред:

$$dx = \frac{dy'}{dy''} = \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt, \qquad dy = \phi(t)\,\frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt,$$

па општиот интеграл на (2) е определен со следниве параметарски равенки:

$$x =\int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt + C_1, \qquad y =\int \frac{\phi(t)\phi'(t)}{\psi(t)}dt + C_2.$$

Пример 2. ДР за движењето на тело што паѓа низ воздух, без почетна брзина, сметајќи го отпорот на воздухот за пропорционален со квадратот на брзината, е

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{a}$$

каде што s е изминатиот пат, m е масата на телото, t е времето, g е Земјиното забрзување и k е константа на пропорционалноста.

Ставајќи $v = \frac{ds}{dt}$, ДР (a) се сведува на ДР од прв ред:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \text{ т.е. } \frac{mdv}{mg-kv^2} = dt;$$

$$t = m\int_0^v \frac{dv}{mg-kv^2} = \frac{1}{k\sqrt{g}}\,\text{Arth}\,\frac{kv}{\sqrt{g}},$$

$v = \frac{\sqrt{g}}{k}\,\text{th}(k\sqrt{g}t)$; множејќи со dt и уште еднаш интегрирајќи, го наоѓаме законот на патот $s=s(t)$:

$$s = \frac{1}{k^2}\,\text{lnch}(k\sqrt{g}t).$$

III. $F(y,y'') = 0.$ (3)

Во зависност од изразот на левата страна, за решавање на ДР (3) постапуваме на еден од наредните три начини.

1°. Ако ставиме:

$$y' = p, \quad y'' = \frac{d}{dx}(p) = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dx},$$

(3) се трансформира во ДР од прв ред: $F(p,p\,\frac{dp}{dy}) = 0$.

2°. Ако од ДР (3) може да се изрази y'' како функција од y,

$$y'' = f(y),$$

тогаш, множејќи ја таа равенка член по член со равенката $2y'dx=2dy$, добиваме:

$$d(y'^2) = 2f(y)dy,$$

од каде што

$$y' = \pm(2\int f(y)dy + C_1)^{1/2}, \quad dx = \pm(2\int f(y)dy + C_1)^{-1/2}dy,$$

па општиот интеграл на (3) е определен со

$$x = \pm\int[f(y)dy + C_1]^{-1/2}dy + C_2.$$

3°. ДР (3) може да се замени со параметарски равенки

$$y = \phi(t), \quad y'' = \psi(t).$$

Во тој случај, од $dy'=y''dx$ и од $y'dx=dy$, добиваме:

$$y'dy' = y''dy,$$

па: $\frac{1}{2}\,d(y'^2) = \psi(t)\phi'(t)dt, \quad y'^2 = 2\int\psi(t)\phi'(t)dt + C_1,$

$$y' = \pm\sqrt{2\int\psi(t)\phi'(t)dt + C_1}.$$

Од $dy=y'dx$ го наоѓаме $dx = \frac{dy}{y'}$, а потоа и x:

$$x = \int\frac{dy}{y'} = \pm\int\frac{\phi'(t)dt}{\sqrt{2\int\psi(t)\phi'(t)dt+C_1}} + C_2;$$

Оваа равенка, заедно со равенката $y=\phi(t)$, го определува општиот интеграл на (3) во параметарска форма.

<u>Пример 3</u>. Да се интегрира ДР на математичкото нишало,

$$\ddot{x} + a^2\sin x = 0, \tag{4}$$

при почетните услови $x(0)=x_o$, $\dot{x}(0) = 0$, $(x=x(t))$.

Како во случајот 1^o (III), ставаме $\dot{x} = v$ и $\ddot{x} = v\frac{dv}{dx}$, па

$$v \cdot dv = -a^2 \sin x dx, \quad \frac{1}{2} v^2 = a^2(\cos x - \cos x_o),$$

$$v = \pm a\sqrt{2(\cos x - \cos x_o)} = \frac{dx}{dt}.$$

Така, со

$$t = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}} \int_{x_o}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos x_o}}$$

е определен бараниот партикуларен интеграл (тој се сведува на елиптични функции). ||

Задачи: 6.1-6.6; 6.11-6.27

*§6.2. СНИЖУВАЊЕ РЕДОТ НА ДР ОД ПОВИСОК РЕД

I. Равенката не ја содржи y и нејзините $k-1$ изводи:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}. \tag{1}$$

Ако (1) има облик $F(x, y^{(n)}) = 0$ и ако

$$y^{(n)} = f(x), \tag{2}$$

тогаш општото решение на (1) се добива по n последователни интегрирања

$$y = \underbrace{\int(\dots(\int}_{n} f(x)dx)\dots)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_n$$

Во општ случај, редот на (1) може да се сниже на $n-k$ со смената $y^{(k)} = p$, т.е. се добива

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Ако последната равенка има општо решение $p = g(x, C_1, \dots, C_{n-k})$, тогаш општиот интеграл на (1) се добива по k последователни интегрирања на $y^{(k)} = g(x, C_1, \dots, C_{n-k})$, како за (2).

Пример 1. $y^{(4)} + \frac{1}{x} y''' = 0$. Ставајќи $y''' = p$, $y^{(4)} = p'$, добиваме:

$$p' + \frac{1}{x} p = 0, \text{ т.е. } \frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x}$$

- ДР со раздвоени променливи, чие решение е $p = \frac{C}{x}$. Од $y''' = \frac{C}{x}$, по три последователни интегрирања:

$$y'' = C\ln x + C_2, \quad y' = C(x\ln x - x) + C_2 x + C_3,$$

$$y = C(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}) + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

го добиваме општиот интеграл $y = y(x)$ на дадената ДР. ||

II. ДР не го содржи експлицитно x, т.е.

$$F(y,y',\dots,y^{(n)}) = 0. \tag{3}$$

Редот на ДР (3) може да се снижи за единица со смената $y' = p$, каде што $p = p(y)$ е нова непозната функција. Значи:

$$y' = p; \quad y'' = \frac{d}{dx}(p) = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p; \tag{4}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\,p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\,p\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2p}{dy^2}\cdot p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p;$$

аналогно за изводите од повисок ред. Јасно е дека изводот $y^{(k)}$ се изразува со изводите на p по y со ред не поголем од k-1.

Пример 2. Да го најдеме партикуларното решение на ДР

$$y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0$$

што ги задоволува почетните услови $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. Користејќи ги (4), од дадената ДР добиваме:

$$p\,\frac{dp}{dy} - p^2 + p(y-1) = 0, \quad \frac{dp}{dy} - p = 1-y,$$

т.е. линеарна ДР од прв ред. Нејзиниот општ интеграл е

$$y' = p = C_1e^y + y.$$

Од почетните услови имаме $p = y' = 2$ и $y = 2$ при $x = 0$, па $2 = C_1e^2 + 2$, т.е. $C_1 = 0$. Значи:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{dy}{y} = dx, \quad \ln y = x + \ln C_2, \quad y = C_2e^x.$$

Од почетниот услов $y = 2$ за $x = 0$ добиваме $2 = C_2e^0$, т.е. $C_2 = 2$, па

$$y = 2e^x$$

е бараното партикуларно решение. ||

III. $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ (5)

е хомогена во однос на $y,y',\dots,y^{(n)}$ (со ред на хомогеност m), т.е.

$$F(x,ty,ty',\dots,ty^{(n)}) = t^mF(x,y,y',\dots,y^{(n)}). \tag{6}$$

Нејзиниот ред може да се снижи за единица со смената

$$y = e^{\int z dx}, \tag{7}$$

каде што $z = z(x)$ е нова непозната функција. Имаме:

$$y' = ze^{\int z dx}, \quad y'' = (z'+z^2)e^{\int z dx}, \tag{8}$$

$$y''' = (z''+3zz'+z^3)e^{\int z dx},\dots,y^{(k)} = \Phi(z,z',\dots,z^{(k-1)})e^{\int z dx},$$

$$k=1,2,\dots,n.$$

По заменувањето на овие изрази во (5), а поради хомогеноста на (5), множителот $e^{m\int zdx}$ може да се извлече пред знакот F:

$$e^{m\int zdx}f(x,z,z',\dots,z^{(n-1)}) = 0,$$

од каде што добиваме $f(x,z,z',\dots,z^{(n-1)}) = 0$.

(Наместо (7), може да се употреби смената $y' = yz$.)

<u>Пример 3</u>. ДР $xyy'' + xy'^2 - 2yy' = 0$ е хомогена:

$$x(ty)(ty'')+x(ty')^2-2(ty)(ty') = t^2(xyy''+xy'^2-2yy').$$

Заменувајќи ги (7) и (8), дадената ДР се сведува на

$$x(z'+z^2) + xz^2 - 2\cdot z = 0, \text{ т.е. } z' - \frac{2}{x}z = -2z^2.$$

Последнава е бернулиева ДР; нејзиното општо решение е

$$z = \frac{3x^2}{2x^3-3C}.$$

Бидејќи

$$\int\frac{3x^2dx}{2x^3-3C} = \frac{1}{2}\int\frac{d(2x^3-3C)}{2x^3-3C} = \ln c_2\sqrt{2x^3-3C},$$

следува дека општиот интеграл е:

$$y = e^{zdx} = C_2\quad 2x^3-3C. \;\|$$

IV. Ако левата страна на ДР

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0 \tag{9}$$

е извод на некој диференцијален израз од (n-1)-в ред $\Phi(x,y',\dots,\dots,y^{(n-1)})$, тогаш (9) се сведува на ДР од (n-1)-в ред во која се содржи една произволна константа:

$$\Phi(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}) = C_1; \tag{10}$$

таа е еквивалентна со (9) и се вика <u>прв интеграл</u> на ДР (9).

<u>Пример 4</u>. ДР $(y')^2y'' - 2yy' = 0$ може да се напише во вид $(yy'-y^2)' = 0$, па $yy' - y^2 = C_1$ е ДР од прв ред, еквивалентна со дадената. Сега лесно се добива општиот интеграл

$$\ln(y^2+C_1) = 2x + C_2. \;\|$$

Во некои случаи дадената равенка треба да се помножи со некоја функција (наречена интегрален множител) за да се добие ДР од видот IV.

Пример 5. ДР $yy''+2y'^2=0$, ако се помножи со y, се сведува на ДР $y^2y''+2yy'^2=0$, т.е. $d(y^2y')=0$; општо решение е: $y^3=C_1x+C_2$. ||

Како што споменавме, за овие ДР важи теоремата од §2.1.

Задачи: 6.7–6.10; 6.28–6.45

Г Л А В А 7

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Во оваа глава, како и во поголемиот дел од книгава, тежиштето паѓа на линеарниот случај. Централно место имаат линеарните системи со константни коефициенти. Во почетокот се врши кратка дискусија (во врска со основните поими) и за поопшти системи во нормална форма, а се разгледува и симетрична форма на системи, главно поради потребите во наредната глава.

§7.1. НОРМАЛНИ СИСТЕМИ ДР

Многу проблеми од физиката и техничките науки доведуваат до задачата: да се најдат функции $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t),\ldots,x_n=x_n(t)$ кои задоволуваат равенки што го содржат аргументот t, бараните функции $x_1,\ldots,x_n$ и нивните изводи. Меѓу наједноставните е системот ДР во кои се јавуваат изводи само од прв ред и секоја равенка е сведена по изводот, т.е. системот од видот

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t,x_1,\ldots,x_n), \\ x_2' &= f_2(t,x_1,\ldots,x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= f_n(t,x_1,\ldots,x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

каде што $f_1,\ldots,f_n$ се познати функции од t, $x_1,\ldots,x_n$, зададени и непрекинати во некоја област D (во R^{n+1}), а $x_k'=dx_k/dt$.

За системот (1) велиме дека има нормална форма или, кратко, дека е <u>нормален</u>. Бројот n (на равенките во (1) и на непознатите функции) се вика <u>ред на системот</u>. Ако $f_1,\ldots,f_n$ се линеарни функции од $x_1,\ldots,x_n$, тогаш системот (1) се вика <u>линеарен</u>.

Еден систем од n функции

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ldots,x_n = x_n(t), \tag{2}$$

дефинирани и непрекинато диференцијабилни во даден интервал (a,b), се вика <u>решение</u> на системот (1) во интервалот (a,b), ако функциите (2) ги претворуваат равенките на (1) во идентитети, за сите вредности на t од интервалот (a,b).

И за систем ДР може да се формулира т.н. задача на Коши: да се најде решение на (1) кое ги задоволува условите

$$x_1(t_o)=x_{1o},\ x_2(t_o)=x_{2o},\dots,x_n(t_o)=x_{no}, \tag{3}$$

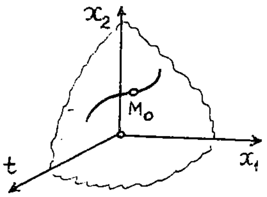
каде што $t_o,x_{1o},\dots,x_{no}$ се з а д а д е н и б р о е в и (почетни услови).

Системот функции $x_1,\dots,x_n$ што е решение на (1) и го задоволува условот (3) се вика партикуларно решение на (1) што одговара на условот (3). Кривата во $(n+1)$-димензионалниот простор $(t,x_1,\dots,x_n)$, што одговара на тоа решение, се вика интегрална крива; таа минува низ точката $(t_o,x_{1o},\dots,x_{no})$.

Во врска со Кошиевата задача важи аналогна теорема за егзистенција и единственост на решение на систем ДР, како за една ДР (в.Т.1 во §2.1). Имено:

За постоење решение на Кошиевата задача доволно е функциите $f_1,\dots,f_n$ во (1) да се непрекинати во некоја околина на точката $M_o=(t_o,x_{1o},\dots,x_{no})$. За да се обезбеди и единственост на решението на Кошиевата задача, доволно е да се претпостави уште дека функциите $f_1,\dots,f_n$ имаат ограничени (специјално: непрекинати) парцијални изводи по променливите $x_1,\dots,x_n$ во некоја околина на точката M_o.

Геометриски тоа значи дека низ точката M_o минува интегрална крива на системот (1) и таа е единствена во границите на споменатата околина (црт. 1 за n=2).



Црт. 1

(Да забележиме дека Т.2 од §1.7 е специјален случај на горната теорема во врска со Кошиевата задача за системи.)

Множеството од n функции

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(t,C_1,\dots,C_n),\\ x_2 &= \phi_2(t,C_1,\dots,C_n),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n &= \phi_n(t,C_1,\dots,C_n), \end{aligned} \tag{4}$$

определени во некоја област на менувањето на променливите $t,C_1,\dots,C_n$ и кои имаат парцијални изводи по t, се вика општо решение на системот (1) во областа D на менувањето на променливите $t,x_1,\dots,x_n$, во која важи егзистенцијата и единственоста на решението на Кошиевата задача, ако:

i) системот равенки (4) е решлив во D по произволните константи $C_1,\ldots,C_n$, така што

$$\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(t,x_1,\ldots,x_n), \\ C_2 &= \psi_2(t,x_2,\ldots,x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= \psi_n(t,x_1,\ldots,x_n); \end{aligned} \tag{5}$$

ii) Системот функции (4) е решение на системот (1) за сите вредности на произволните константи, дадени со формулите (5), кога точката $(t,x_1,\ldots,x_n)$ ќе ја прокрстари D.

За наоѓање решение на системот (1) со почетни услови (3) во D се постапува аналогно како за една ДР (в. §2.1): во системот (4) се заменуваат $t,x_1,\ldots,x_n$ со соодветните почетни вредности (3), се решава така добиениот систем по $C_1,\ldots,C_n$ и добиените вредности за $C_1,\ldots,C_n$ се заменуваат во (3).

** Ќе направиме уште неколку забелешки.

1. Векторска форма на (1). Секое решение (2) на (1) можеме да го сметаме за векторска функција со n компоненти (т.е. пресликување од некое подмножество E од R во R^n), $\vec{x} = \vec{x}(x_1(t),\ldots,x_n(t))$, кратко означена со $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Со тие ознаки, системот (1) може да се запише кратко, во векторска форма

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}), \tag{1'}$$

каде што $\vec{f}$ е векторска функција со компоненти $f_1,\ldots,f_n$.

2. Каноничен систем ДР. Може да се разгледуваат и системи во кои диференцијалните равенки се од повисок ред. Ако секоја ДР од системот е сведена по највисокиот извод во неа, нпр. $x_i^{(m_i)}$, $i=1,\ldots,k$, тогаш системот се вика каноничен. Збирот на редовите m_i на највисоките изводи, т.е. бројот $m_1+m_3+\ldots+m_k$ се вика ред на каноничниот систем.

Секој каноничен систем, од произволен ред, може да се трансформира во нормален систем (т.е. секоја ДР од системот се трансформира во ДР од прв ред, во сведен облик).

Поради тоа, доволно е да се задржиме на разгледување само на нормалните системи (1); притоа, погоре искажаната теорема за егзистенција и единственост на решение на Кошиевата задача важи и за канонични системи ДР од повисок ред (со соодветна модификација).

Пример. Задачата за движење на материјална точка под дејство на сила $\vec{F} = \vec{F}(t,\vec{r},\dot{\vec{r}})$ доведува до систем од три диференцијални равенки од втор ред. Имено, ако

$$\vec{F} = (F_1,F_2,F_3), \quad \vec{r} = (x,y,z), \quad \dot{\vec{r}} = (\dot{x},\dot{y},\dot{z}),$$

тогаш законот на движењето (т.е. функциите $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$) се определува со системот ДР (закон на Њутн):

$$m\ddot{x} = F_1(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),$$
$$m\ddot{y} = F_2(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \qquad (6)$$
$$m\ddot{z} = F_3(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}).$$

(Системот има ред 6.) Ставајќи $\dot{x}=u$, $\dot{y}=v$, $\dot{z}=w$, системот (4) се сведува на систем од шест ДР од прв ред:

$$\dot{x}=u, \quad \dot{y}=v, \quad \dot{z}=w, \quad m\dot{u}=F_1(t,x,y,z,u,v,w),$$
$$m\dot{v}=F_2(t,x,y,z,u,v,w), \quad m\dot{w}=F_3(t,x,y,z,u,v,w). \ \|$$

3. Механичко толкување на (2). Покрај геометриското, можно е и друго толкување на решението (2) од системот (1), доста згодно и природно во многу механички задачи, особено кога десните страни на равенките во (1) не зависат експлицитно од t.

Решението $x_1=x_1(t),\dots,x_n=x_n(t)$ на (1) во евклидски n-димензионален простор со правоаголни координари $x_1,\dots,x_n$ определува закон на движење по некоја траекторија во зависност од параметарот t (кој овде се смета за време). При ова толкување, $\frac{d\vec{x}}{dt}$ е брзина на движењето на точка, а $x_1',\dots,x_n'$ се координатите на брзината; системот (1) обично се вика динамички систем, просторот со координатите $x_1,\dots,x_n$ се вика фазен простор, а кривата $\vec{x} = \vec{x}(t)$ фазна траекторија. **|

Задачи: 7.1; 7.15-7.18

§7.2. МЕТОД НА ИСКЛУЧУВАЊЕ

Ќе разгледаме една можност за решавање на нормалниот систем ДР од §7.1:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t,x_1,\dots,x_n), \\ x_2' &= f_2(t,x_1,\dots,x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' &= f_n(t,x_1,\dots,x_n). \end{aligned} \qquad (1)$$

Многу вакви системи од n-ти ред може да се интегрираат ако претходно се сведат на една ДР од n-ти ред со една непозната функција, или на неколку такви равенки, при што сумата на нивните редови е n. Тоа сведување, кога е возможно, се постигнува со последователно диференцирање на една од равенките на системот и со исклучување на сите непознати функции освен една (затоа оваа постапка се вика метод на исклучување). Интегрирајќи ја добиената равенка, ќе се добие општо решение на дадениот систем без нови интегрирања.

Овој метод ќе го илустрираме со еден пример.

Пример 1. Да го решиме системот ДР

$$\{x' = x-y-e^t, \quad y' = y-4x-te^t\} \qquad (a_1)$$

при почетните услови $x(0)=1$, $y(0)=-11/4$.

Ја диференцираме првата од равенките (a_1) по t:

$$x'' = x' - y' - e^t. \tag{a_2}$$

Заменувајќи $y=-x'+x-e^t$ (од првата) во втората равенка од (a_1), добиваме $y'=-x'-3x-e^t-te^t$, а заменувајќи го ова во (a_2), ја добиваме ДР

$$x'' - 2x' - 3x = te^t, \tag{a_3}$$

којашто е линеарна, од втор ред, со константни коефициенти. Општото решение на соодветната хомогена ДР $x''-2x'-3x=0$ е

$$x_o = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}, \tag{a_4}$$

а едно партикуларно решение на (a_3), со облик $X = e^t(A_o+A_1t)$, лесно се наоѓа: $X = -\frac{t}{4}e^t$. Според тоа, општото решение на (a_3) е

$$x = x_o + X = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} - \frac{1}{4}te^t.$$

Заменувајќи го $x'=3C_1e^{3t}-C_2e^{-t} - \frac{1}{4}(1+t)e^t$ во $y=-x'+x-e^t$, добиваме

$$y = -2C_1e^{3t} + 2C_2e^{-t} - \frac{3}{4}e^t.$$

Значи, општото решение на системот (a_1) е парот функции

$$x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} - \frac{1}{4}te^t,\ y=-2C_1e^{3t}+2C_2e^{-t}-\frac{3}{4}e^t. \tag{a_5}$$

Од (a_5) и од почетните услови, добиваме:

$$C_1 + C_2 = 1,\quad -2C_1 + 2C_2 - \frac{3}{4} = -\frac{11}{4},$$

од каде што $C_1=1$, $C_2=0$. Заменувајќи ги $C_1=1$ и $C_2=0$ во (a_5), го добиваме партикуларното решение на системот (a_1) што ги задоволува дадените почетни услови,

$$x(t) = e^{3t} - \frac{1}{4}te^t,\quad y(t) = -2e^{3t} - \frac{3}{4}e^t. \tag{a_6}$$

<u>Забелешка</u>. Фактот што ДР (a_3) е линеарна не е случаен. Ако системот (1) е линеарен (соодветно: со константни коефициенти), тогаш и ДР од n-ти ред што се добива од (1) со методот на исклучување ќе биде линеарна (соодветно: со константни коефициенти).

** Исклучувањето на непознатите функции (освен една) од системот (1), во општ случај, се спроведува на следниов начин.

Ја диференцираме првата равенка од (1) по x:

$$x_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot x_1' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\cdot x_n',$$

а потоа, тука, ги заменуваме $x_1',\ldots,x_n'$ со нивните изрази $f_1,\ldots,f_n$ од равенките (1). На тој начин ја добиваме равенката

$$x_1'' = F_2(t,x_1,\dots,x_n).$$

Ако оваа равенка ја диференцираме и ако постапиме како погоре, ќе ја добиеме равенката

$$x_1''' = F_3(t,x_1,\dots,x_n).$$

На тој начин го добиваме системот

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t,x_1,\dots,x_n),\\ x_1'' &= F_2(t,x_1,\dots,x_n),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ x_1^{(n)} &= F_n(t,x_1,\dots,x_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Од првите n-1 равенки на (2) ги изразуваме $x_2,\dots,x_n$ со помош на t,x_1 и со изводите $x_1',x_1'',\dots,x_1^{(n-1)}$:

$$\begin{aligned} x_2 &= g_2(t,x_1',\dots,x_1^{(n-1)}),\\ x_3 &= g_3(t,x_1',\dots,x_1^{(n-1)}),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ x_n &= g_n(t,x_1,x_1',\dots,x_1^{(n-1)}), \end{aligned} \tag{3}$$

а потоа добиените изрази од десните страни на(3) ги заменуваме во последната равенка од (2). Така добиваме ДР од n-ти ред:

$$x_1^{(n)} = G(t,x_1,x_1',\dots,x_1^{(n-1)}). \tag{4}$$

Со решавањето на оваа ДР од n-ти ред ја определуваме непознатата функција x_1:

$$x_1 = \phi_1(t,C_1,\dots,C_n). \tag{5}$$

За да ги најдеме другите непознати функции $x_2,\dots,x_n$, ќе ја диференцираме (5) n-1 пат, ќе ги најдеме $x_1',x_1'',\dots,x_1^{(n-1)}$ како функции од $t,C_1,\dots,C_n$ и ќе ги замениме во десните страни на равенките (3). Така ги определуваме и функциите $x_2,\dots,x_n$:

$$\begin{aligned} x_2 &= \phi_2(t,C_1,\dots,C_n),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ x_n &= \phi_n(t,C_1,\dots,C_n). \end{aligned} \tag{6}$$

Функциите од (5) и (6) определуваат општо решение на (1). **|

Ако еден систем од n ДР од прв ред има облик:

$$x_1' = f_1(t,x_1),\ x_2' = f_2(t,x_2),\dots,x_n' = f_n(t,x_n),$$

тогаш неговото интегрирање се сведува на интегрирање на секоја од ДР одделно. Во случаи, пак, кога системот има вид

$$x_1' = f_1(t,x_1),\ x_2' = f_2(t,x_1,x_2),\dots,x_n' = f_n(t,x_1,\dots,x_n),$$

тогаш неговото интегирање се извршува последователно: треба да се интегрира првата равенка, најденото општо решение се заменува во втората, потоа се интегрира втората ДР итн.

<u>Задачи</u>: 7.2-7.4; 7.19-7.26

§7.3. ИНТЕГРИРАЊЕ СИСТЕМИ СО НАОЃАЊЕ ИНТЕГРАБИЛНИ КОМБИНАЦИИ

Интегрирањето на систем ДР

$$x_i' = f_i(t,x_1,\ldots,x_n), \quad i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

во некои случаи, може да се врши директно, преку наоѓање на т.н. интеграбилни комбинации. Интеграбилна комбинација е ДР, којашто е последица од дадениот систем и лесно се интегрира; нејзиното решение

$$\Phi(t,x_1,\ldots,x_n) = C \tag{2}$$

се вика прв интеграл на дадениот систем.

Со помош на добиениот прв интеграл, системот (1) се сведува на друг систем со една равенка помалку. Ако добиеме k независни први интеграли, тогаш системот (1) можеме да го сведеме на систем со k равенки помалку. Ако добиеме n (независни) први интеграли, тогаш општиот интеграл на системот (1) е определен (имплицитно) со тие интеграли.

Пример 1. Даден е системот ДР

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \tag{a_1}$$

$x=x(t)$, $y=y(t)$. Ако ги собереме двете равенки, ќе добиеме:

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x+y, \text{ т.е. } \frac{d(x+y)}{x+y} = dt. \tag{a_2}$$

Добиената равенка е интеграбилна комбинација на системот (a_1). Од (a_2) добиваме:

$$\ln|x+y| = t + \ln C_1, \text{ т.е. } x + y = C_1e^t, \tag{a_3}$$

што претставува прв интеграл на (a_1).

Одземајќи ја втората равенка од првата во (a_1), ќе имаме:

$$\frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y), \text{ т.е. } \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt,$$

од каде што добиваме уште еден прв интеграл на (a_1):

$$x - y = C_2e^t. \tag{a_4}$$

Со (a_3) и (a_4) е определен општиот интеграл на (a_1); овде него можеме да го изразиме во експлицитна форма:

$$x = \frac{1}{2}C_1e^t + \frac{1}{2}C_2e^{-t}, \quad y = \frac{1}{2}C_1e^t - \frac{1}{2}C_2e^{-t}. \;\|$$

Системот ДР (1) може да се претстави и во вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} \quad (=k), \tag{3}$$

наречен <u>симетрична форма</u> на (1); (3) се вика и <u>симетричен систем</u>.

Обратно, секој симетричен систем

$$\frac{dx_1}{B_1} = \ldots = \frac{dx_n}{B_n} = \frac{dt}{B_o}, \quad B_k = B_k(t, x_1, \ldots, x_n),$$

може да се трансформира во нормален вид, $x_i' = f_i$ $(i=1,\ldots,n)$, ако се стави $x_i' = dx_i/dt$ и $f_i = B_i/B_o$ $(i=1,\ldots,n)$.

При решавање на еден систем со наоѓање интеграбилни комбинации често е згодно тој да биде претставен во симетрична форма.

<u>Пример 2</u>. Да се претстави во симетрична форма системот

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z-x}{y-z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x-y}{y-z} \tag{б$_1$}$$

и да се најде онаа интегрална крива што минува низ точката (1,1,-2).

Имаме:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} \quad (=k), \tag{б$_2$}$$

т.е.

$$\begin{aligned} dx &= k(y-z), \\ dy &= k(z-x), \\ dz &= k(x-y). \end{aligned} \tag{б$_3$}$$

Собирајќи ги овие равенки добиваме

$$dx + dy + dz = 0,$$

од што добиваме еден прв интеграл на (б$_1$):

$$x + y + z = C_1. \tag{б$_4$}$$

Потоа, множејќи ги равенките (б$_3$) со x,y,z соодветно и собирајќи ги потоа, добиваме

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

од што, пак со директно интегрирање, добиваме уште еден прв интеграл на (б$_1$):

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{б$_5$}$$

Така, општиот интеграл на системот (б$_1$) е определен со (б$_4$) и (б$_5$). Од почетните услови x=1, y=1 и z=-2, заменети во (б$_4$) и (б$_5$), добиваме:

за наоѓање интеграбилни комбинации за сист. (3) може да се користи следн. својство на дропки (= „продолжена пропорција"):

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = q \;\&\; k_1, \ldots, k_n (\neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_n b_n} = q.$$

$$1 + 1 - 2 = C_1, \quad 1 + 1 + 4 = C_2,$$

т.е. $C_1=0$, $C_2=6$, па бараната интегрална крива е кружницата

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x + y + z = 0. \,\|$$

Задачи: 7.5; 7-27-7.35

§7.4. РЕШЕНИЈА НА ХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ

Системот ДР од видот

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n+b_i, \quad i=1,2,\ldots,n \tag{1}$$

каде што $x_1,\ldots,x_n$ се непознати (барани) функции од t, а $a_{ij}=a_{ij}(t)$, $b_i=b_i(t)$ се дадени функции од t, се вика линеарен систем ДР од прв ред

Ако функциите a_{ij} и b_i се непрекинати во некој интервал $(a,b)=E$, наречен интервал на непрекинатост на коефициентите, тогаш за линеарниот систем (1) важи следнава теорема за егзистенција и единственост на решение (таа е специјален случај од теоремата во §7.1):

Постои единствено решение

$$x_1 = x_1(t),\ldots,x_n = x_n(t) \tag{2}$$

на системот (1), определено во целиот интервал E на непрекинатост на коефициентите на (1), коешто ги задоволува почетните услови

$$x_1(t_o) = x_{1o},\ldots,x_n(t_o) = x_{no}, \tag{3}$$

каде што t_o е произволна точка од E, а $x_{1o},\ldots,x_{no}$ се сосем произволно емени броеви.

За линеарните системи ДР често се користи матрично-векторска ознака, со што разгледувањата се упростуваат. Имено, ставајќи

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

системот (1) може да се напише во векторска форма:

$$X' = AX + B, \tag{1'}$$

што претставува една ДР во однос на векторската функција $X=X(t)$ (при што $A=A(t)$ и $B=B(t)$ се дадени функции).

Ако $b_1 \equiv 0,\ldots,b_n \equiv 0$ на $(a,b)=E$ тогаш системот (1) се вика хомоген; во спротивниот случај (1) се вика нехомоген систем.

Пр. 3. $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{z+x} = \dfrac{dz}{x+y}$; 1) $\dfrac{dx-dy}{y-x} = \dfrac{dy-dz}{z-y}$,

$\dfrac{d(x-y)}{x-y} = \dfrac{d(y-z)}{y-z}$; $x-y = C_1(y-z)$;

2) $\dfrac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)} = \dfrac{dx-dy}{y-x}$; ...; $(x+y+z)(x-y)^2 = C_2$.

Еден хомоген систем

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \tag{4}$$

може да се напише во векторска форма вака:

$$X' = AX. \tag{5}$$

Лесно се увидува дека решенијата на системот (5) имаат аналогни својства како решенијата на една хомогена ЛДР (Т.2 од §3.2).

1° Ако $X_1 = (x_{11},\ldots,x_{n1})^T = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}$ е решение на системот (5), тогаш и $cX_1 = (cx_{11},\ldots,cx_{n1})^T$ е решение на (5) за која било константа c.

2° Ако $X_1 = (x_{11},\ldots,x_{n1})^T$ и $X_2 = (x_{12},\ldots,x_{n2})^T$ се решенија на (5), тогаш и $X_1+X_2 = (x_{11}+x_{12},\ldots,x_{n1}+x_{n2})^T$ е решение на (5).

3° Ако $X_1, X_2, \ldots, X_m$ се решенија на (5), тогаш и секоја нивна линеарна комбинација

$$Y = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_mX_m \tag{6}$$

е решение на системот (5) ($C_1,\ldots,C_m$ се произволни константи).

Навистина, бидејќи $X_1' = AX_1, \ldots, X_m' = AX_m$, добиваме:

$$Y' = C_1X_1' + \ldots + C_kX_k' = C_1(AX_1) + \ldots + C_m(AX_m) =$$
$$= A(C_1X_1 + \ldots + C_mX_m) = AY.$$

** Имајќи го предвид изнесеното во §7.2, особено забелешката по примерот 1 (дека секој л и н е а р е н систем од n-ти ред се сведува на л и н е а р н а ДР од n-ти ред), природно е да очекуваме дека општото решение на хомогениот систем (4), т.е. (5), има форма (6) при m=n. Подолу ќе видиме дека тоа очекување е сосем оправдано. Сепак, решението (6) не мора да е општо, иако содржи n произволни константи (при m=n). Овде ќе видиме кои услови треба да ги исполнуваат решенијата $X_1,\ldots,X_n$ за (6) да биде општо решение на (5). За таа цел ќе изнесеме, прво, некои поими и резултати (аналогно како за хомогени ЛДР во §3.4). **

Нека $X_1 = X_1(t), \ldots, X_m = X_m(t)$ се решенија на системот (5), непрекинати во интервалот $E=(a,b)$ на непрекинатост на коефициентите $a_{ij}(t)$; притоа

$$X_k = (x_{1k}(t), x_{2k}(t), \ldots, x_{nk}(t))^T, \quad k=1,2,\ldots,n, \tag{7}$$

каде што функцијата $x_{ik}(t)$ е i-та компонента на векторот X_k.

Како и во §3.3, за системот векторски функции $X_1,\ldots,X_m$ ќе велиме дека е линеарно независен ако идентитетот

$$\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \ldots + \alpha_mX_m \equiv 0 \tag{8}$$

е можен с а м о кога сите броеви $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ се нули, а линеарно зависен ако тој идентитет е можен на E и кога некој од броевите $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ е р а з л и ч е н од нула.

Да ја формираме матричната функција

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nm}(t) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

чии колони се решенијата (7). Може да се покаже дека:

Теорема 1. Решенијата $X_1,\dots,X_m$ $(m \le n)$ на (5) се линеарно независни функции ако и само ако матрицата $\Phi(t)$ има ранг m за секој t од E. Притоа:

-ако рангот на $\Phi(t)$ е m за еден t_o од E, тогаш тој е m за секој t од E;

-ако рангот е помал од m за еден t_o, тогаш тој е помал од m за секој t од E.

За $m=n$, $\Phi(t)=[x_{ik}(t)]$ е квадратна матрица од n-ти ред и нејзината детерминанта $W(t)$ се вика вронскијан за функциите $X_1,\dots,X_n$:

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

** Од Т.1 непосредно заклучуваме:

Последица 1. Ако системот векторски функции $X_1,\dots,X_n$ е линеарно зависен (односно линеарно независен) во интервалот E, тогаш нивниот вронскијан $W(t)$ е нула (односно $W(t)$ е различен од нула) за секој t од E. Притоа

а) $(\exists t_o \in E)\left(W(t_o) = 0\right) \Rightarrow (\forall t \in E)\left(W(t) = 0\right)$;

б) $(\exists t_o \in E)\left(W(t_o) \ne 0\right) \Rightarrow (\forall t \in E)\left(W(t) \ne 0\right)$.

Последица 2. Решенијата $X_1,\dots,X_n$ на (5) формираат линеарно независен систем на интервалот E, ако и само ако нивниот вронскијан $W(t)$ нема нула во E. **

Во случајот кога вронскијанот на решенијата $X_1,\dots,X_n$ на (5) е различен од нула, $W(t_o)\ne 0$, за некој t_o од E, тогаш $X_1,\dots,X_n$ се вика фундаментален систем решенија на (5) во интервалот E на непрекинатост на коефициентите $a_{ij}(t)$; соодветната матрица $\Phi(t)$ се вика фундаментална матрица на системот (5).

** Користејќи ја теоремата за егзистенција и единственост на решение на линеарен систем ДР, може да се покаже дека: ако коефициентите на системот (4) се непрекинати во интервалот $E=(a,b)$, тогаш фундаментални системи на (4), во тој интервал, постојат. **

Ако се најдени n линеарно независни решенија, т.е. некој фундаментален систем решенија на (5), тогаш од нив може да се добие општо решение на (5).

Теорема 2. Ако $X_1,\ldots,X_n$ е фундаментален систем решенија на хомогениот линеарен систем ДР (5), тогаш

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 +\ldots+ C_nX_n, \tag{10}$$

каде што $C_1,\ldots,C_n$ се произволни константи, е општо решение на (5), т.е.

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1X_{11} + C_2X_{12} +\ldots+ C_nX_{1n}, \\ x_2 &= C_1X_{21} + C_2X_{22} +\ldots+ C_nX_{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= C_1X_{n1} + C_2X_{n2} +\ldots+ C_nX_{nn} \end{aligned} \tag{11}$$

е општото решение на (4), во областа

$$a < t < b, \quad |x_1| < +\infty,\ldots, |x_n| < +\infty. \tag{12}$$

** Доказ. Потсетувајќи се на дефиницијата на општо решение на нормален систем (§7.1), да забележиме, прво, дека областа (12) е областа на егзистенција и единственост на решение на Кошиевата задача за системот (4) и дека функциите (11) се определени во областа

$$a < t < b, \quad |C_1| < +\infty,\ldots, |C_n| < +\infty \tag{13}$$

и се непрекинато диференцијабилни по t.

Проверуваме, сега, дали се исполнети двата услова i), ii) од дефиницијата на општо решение (§7.1).

i) Системот (11) е решлив во областа (12) по произволните константи $C_1,\ldots,C_n$ (зошто?).

ii) Функциите (11) образуваат решение на системот (4) при сите вредности на произволните константи $C_1,\ldots,C_n$.

Следствено, (11) е општо решение на (4), т.е. (10) е општо решение на (5). **

§ 7.5. ХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ ДР СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Наједноставни но најважни за примената се линеарните системи ДР со константни коефициенти:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + \ldots + a_{1n}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + \ldots + a_{2n}z, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z' &= a_{n1}x + a_{n2}y + \ldots + a_{nn}z, \end{aligned} \tag{1}$$

каде што a_{ij} се зададени броеви, а $x=x(t)$, $y=y(t),\ldots,z=z(t)$ се непознати функции. (Без да се изгуби нешто од општоста, може да се земе $n=3$ и разгледувањата да се вршат на систем од три ДР со три непознати функции.)

Ставајќи $A=[a_{ij}]$ $(i,j=1,\ldots,n)$, $V=\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ z \end{bmatrix} = (x,\ldots,z)^T$, $V'=\begin{bmatrix} x' \\ \vdots \\ z' \end{bmatrix} = (x',\ldots,z')^T$, системот (1) можеме да го претставиме во векторско-матрична форма: $V' = AV.$ (1′)

Ако системот (1) го сведеме на една ДР (од n-ти ред) со една непозната функција $x(t)$, тогаш таа ќе биде линеарна со константни коефициенти и таа ќе има решенија со облик $x=e^{rt}$ (r=константа). Бидејќи функциите $y,\ldots,z$ се линеарни комбинации од $x,x',\ldots,x^{(n)}$ (в. (3) и забелешката во §7.2), следува дека и тие ќе имаат таков вид, возможно со некои коефициенти: $y=Me^{rt},\ldots,z=Ne^{rt}$.

Решенијата можеме да ги добиеме и директно, ако во (1) ги замениме функциите

$$x = \alpha e^{rt}, \quad y = \beta e^{rt},\ldots,z = \gamma e^{rt}, \tag{2}$$

а потоа броевите $r,\alpha,\beta,\ldots,\gamma$ ги избереме така што да биде задоволен системот (1).

Овој начин на решавање хомогени линеарни системи со константни коефициенти се вика Ојлеров метод.

Од функциите (2) можеме да ја формираме векторската функција

$$V = e^{rt}\cdot K, \tag{2′}$$

каде што $V=(\alpha e^{rt},\beta e^{rt},\ldots,\gamma e^{rt})^T$, $K=(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)^T$. Јасно е дека функцијата $V=0$ што се добива за $K=(0,\ldots,0)$ е решение на системот (1′). Ние сме заинтересирани за нетривијални решенија, па затоа ќе претпоставиме дека $K\neq 0$. Заменувајќи ја (2´) во (1´), добиваме:

$$(e^{rt}K)' = A(e^{rt}K), \quad \text{т.е.} \quad re^{rt}K = e^{rt}AK,$$

од каде што

$$AK = rK. \tag{3}$$

(Тоа значи дека r е карактеристична (сопствена) вредност на матрицата A, а K е карактеристичен вектор што одговара на r.) Од (3) добиваме:

$$(A-rE)K = 0$$

(E е единичната матрица од n-ти ред), т.е.

$$\begin{aligned} (a_{11}-r)\alpha + a_{12}\beta +\ldots+ a_{1n}\gamma &= 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-r)\beta +\ldots+ a_{2n}\gamma &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha + a_{n2}\beta +\ldots+ (a_{nn}-r)\gamma &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Бидејќи $K=(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)^T$ е решение на (4) и $K\neq 0$, следува дека детерминантата на системот (4) е нула, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Равенката (5), по непознатата r, наречена карактеристична равенка на системот (1) е полиномна равенка од n-ти степен.

На секој корен r_i на (5) одговараат броеви $\alpha_i,\beta_i,\ldots,\gamma_i$ определени со (4), т.е. одговараат партикуларни решенија на (1) со облик (2).

Корените на карактеристичната равенка може да бидат: а) реални и прости (т.е. реални и меѓусебно различни) или б) произволни (реални или комплексни, прости или повеќекратни).

I. Корените се реални и прости. Ако корените $r_1,r_2,\ldots,r_n$ на (5) се реални и различни меѓусебно, тогаш за секој r_i $(i=1,\ldots,n)$ од (4) добиваме по една n-ка $\alpha_i,\beta_i,\ldots,\gamma_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и по едно партикуларно решение на (1):

$$
\begin{aligned}
x &= C_1\alpha_1 e^{r_1 t} + C_2\alpha_2 e^{r_2 t} + \ldots + C_n\alpha_n e^{r_n t},\\
y &= C_1\beta_1 e^{r_1 t} + C_2\beta_2 e^{r_2 t} + \ldots + C_n\beta_n e^{r_n t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z &= C_1\gamma_1 e^{r_1 t} + C_2\gamma_2 e^{r_2 t} + \ldots + C_n\gamma_n e^{r_n t}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

<u>Пример 1</u>. (прости корени). Да се најде општото решение на системот

$$
\begin{cases} x' = 2x + y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases} \qquad V' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot V \tag{a_1}
$$

Корените на карактеристичната равенка

$$
\begin{vmatrix} 2-r & 1 & -1 \\ -1 & -r & -1 \\ -1 & -1 & -r \end{vmatrix} = (r-2)(r^2-1) = 0
$$

се $r_1=2$, $r_2=1$, $r_3=-1$. Во системот (4): $(A-rE)\cdot K=0$, т.е.

$$
\begin{cases} (2-r)\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\alpha - r\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta - r\gamma = 0, \end{cases} \tag{a_2}
$$

го заменуваме $r_1=2$, и го добиваме системот

$$\{\beta - \gamma = 0,\quad -\alpha - 2\beta - \gamma = 0,\quad -\alpha - \beta - 2\gamma = 0\},$$

кој има безброј решенија, определени со: $\alpha=-3u$, $\beta=\gamma=u$ (u е произволен реален број). Земајќи некој $u\neq 0$, на пример $u=1$, добиваме $\alpha_1=-3$, $\beta_1= =\gamma_1=1$, па $x_1=-3e^{2t}$, $y_1=e^{2t}$, $z_1=e^{2t}$ е едно партикуларно решение на системот (a_1).

Заменувајќи го $r_2=1$, односно $r_3=-1$ во (a_2), на сосема ист начин, добиваме $\alpha_2=1$, $\beta_2=-1$, $\gamma_2=0$, односно $\alpha_3=0$, $\beta_3=1$, $\gamma_3=1$, т.е. уште две партикуларни решенија:

$$x_2=e^t,\quad y_2=-e^t,\quad z_2=0;\quad x_3=0,\quad y_3=e^{-t},\quad z_3=e^{-t}.$$

Според тоа, општото решение на системот (a_1) е:

$$
\begin{aligned}
x &= -3C_1e^{2t} + C_2e^t \\
y &= C_1e^{2t} + C_2e^t + C_3e^{-t}, \\
z &= C_1e^{2t} + C_3e^{-t};
\end{aligned}
\qquad V = \begin{bmatrix} -3e^{2t} & e^t & 0 \\ e^{2t} & -e^t & e^{-t} \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}.
$$

II. <u>Корените се произволни</u>. Важи следнава теорема:

Нека $r_1, r_2, \ldots$ се сите различни корени на карактеристичната равенка (5), а $k, \ell, \ldots$ нивните кратности. Тогаш општото решение на хомогениот систем (1) го има следниов вид:

$$\begin{aligned} x &= (\alpha_1+\alpha_2 t+\ldots+\alpha_k t^{k-1})e^{r_1 t}+(\alpha_{k+1}+\alpha_{k+2}t+\ldots+\alpha_{k+\ell}t^{\ell-1})e^{r_2 t}+\ldots \\ y &= (\beta_1+\beta_2 t+\ldots+\beta_k t^{k-1})e^{r_1 t}+(\beta_{k+1}+\beta_{k+2}t+\ldots+\beta_{k+\ell}t^{\ell-1})e^{r_2 t}+\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

каде што $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ се некои константи (на број n^2) што зависат од произволните константи $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

<u>Пример 2</u> (кратни корени). Да го решиме системот

$$\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{б$_1$}$$

Карактеристичната равенка на (б$_1$),

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 \\ 1 & 1-r \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т.е.} \quad r^2 - 4r + 4 = 0,$$

има корени $r_1 = r_2 = 2$. Според (7), решението на (б$_1$) ќе биде:

$$\begin{aligned} x &= (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{2t} \\ y &= (\beta_1 + \beta_2 t)e^{2t} \end{aligned} \tag{б$_2$}$$

каде што $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ не се познати. За да ги најдеме тие коефициенти, ќе ги замениме изразите (б$_2$) во првата равенка од системот (б$_1$) и ќе добиеме:

$$(\alpha_2+2\alpha_1+2\alpha_2 t)e^{2t} = (3\alpha_1+3\alpha_2 t)e^{2t} - (\beta_1+\beta_2 t)e^{2t},$$

од каде што, по средувањето на коефициентите пред еднаквите степени на t, добиваме:

$$\alpha_2 + 2\alpha_1 = 3\alpha_1 - \beta_1, \quad 2\alpha_2 = 3\alpha_2 - \beta_2$$

т.е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2. \tag{б$_3$}$$

Величините α_1 и α_2 остануваат произволни. Означувајќи ги со C_1 и C_2 соодветно, го добиваме општото решение на системот (б$_1$):

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2t)e^{2t}, \\ y = (C_1 - C_2+C_2t)e^{2t}, \end{cases} \quad \text{т.е.} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{2t} & (-1+t)e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

Да забележиме дека, ако ($б_2$) ги заменевме во втората равенка од системот ($б_1$), ќе го добиевме истиот резултат ($б_3$). ||

Пример 3 (комплексни корени). Да го решиме системот

$$\begin{cases} x' = -x + 5y, \\ y' = -x + y. \end{cases} \tag{$в_1$}$$

Корените на карактеристичната равенка

$$\begin{vmatrix} -1-r & 5 \\ -1 & 1-r \end{vmatrix} = r^2 + 4 = 0$$

се $r_1=2i$, $r_2=-2i$. Според (7), општото решение на ($в_1$) е:

$$x = \alpha_1e^{2it} + \alpha_2e^{-2it}, \quad y = \beta_1e^{2it} + \beta_2e^{-2it}, \tag{$в_2$}$$

при што α_j, β_j се непознати (а $x=x(t)$ и $y=y(t)$ се комплексни функции од реалниот аргумент t). За определувањето на α_j, β_j го формираме системот

$$\{(-1-r)\alpha + 5\beta = 0, \quad -\alpha + (1-r)\beta = 0\}. \tag{$в_3$}$$

Ставајќи во ($в_3$) $r_1=2i$ (како во примерот 1), добиваме:

$$(-1-2i)\alpha_1 + 5\beta_1 = 0, \quad -\alpha_1 + (1-2i)\beta_1 = 0$$

– две линеарно зависни равенки (зашто детерминантата на ($в_3$) е нула). Земајќи $\alpha_1=5C_1$ добиваме $\beta_1=(1+2i)C_1$, каде што C_1 е произволна константа.

Ставајќи во ($в_3$) $r_2=-2i$, на сличен начин добиваме $\alpha_2=5C_2$, $\beta_2=(1-2i)C_2$.

(Истиот резултат би можеле да го добиеме ако постапевме како во примерот 2, т.е. ако изразите ($в_2$) ги заменемве во ($в_1$).)

Значи, општото решение ($в_2$) на ($в_1$) е:

$$\begin{aligned} x &= 5C_1e^{2it} + 5C_2e^{-2it}, \\ y &= (1+2i)C_1e^{2it} + (1-2i)C_2e^{-2it}. \end{aligned} \tag{$в_4$}$$

Од посебна важност е издвојувањето на реалните решенија на ($в_1$). Ако ја искористиме формулата $e^{iat}=\cos at+i\sin at$, решението ($в_4$) ќе го добие следниов вид:

$$\dot{x} = 5C_1(\cos 2t + i \sin 2t) + 5C_2(\cos 2t - i \sin 2t) =$$
$$= 5(C_1 + C_2)\cos 2t + 5i(C_1 - C_2)\sin 2t,$$
$$y = (1+2i)C_1(\cos 2t + i \sin 2t) + (1-2i)C_2(\cos 2t - i \sin 2t) =$$
$$= (C_1+C_2)[\cos 2t - 2 \sin 2t] + i(C_1-C_2)[2\cos 2t + \sin 2t],$$

$$\begin{cases} x = 5A \cos 2t + 5B \sin 2t, \\ y = A(\cos 2t - 2\cdot\sin 2t)+B(2\cdot\cos 2t + \sin 2t) \end{cases} \qquad (в_5)$$

каде што $A=C_1+C_2$, $B=i(C_1-C_2)$, т.е. $C_1=(A-iB)/2$, $C_2=(A+iB)/2$. Значи, за реални вредности на A и B, формулите $(в_5)$ даваат реални решенија на $(в_1)$.

(Да забележиме дека важи и овде резултатот на Т.2 од §2.2, модифициран на соодветен начин.) //

** Забелешка. На аналоген начин може да се најде решението на систем линеарни ДР од повисок ред со константни коефициенти. На пример, за системот

$$\begin{aligned} x'' &= a_{11}x + a_{12}y, \\ y'' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \qquad (8)$$

каде што $x=x(t)$, $y=y(t)$ (вакви системи ДР се јавуваат во механиката и електричните кола), решението се бара во форма:

$$x = \alpha e^{rt}, \quad y = \beta e^{rt},$$

Заменувајќи ги во (8) и скратувајќи со e^{rt}, ќе се добие системот равенки (за определување r,α и β):

$$\begin{aligned} (a_{11} - r^2)\alpha + a_{12}\beta &= 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - r^2)\beta &= 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

α и β ќе бидат различни од нула кога детерминантата на системот (9) ќе биде нула, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-r^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

Равенката (10), наречена карактеристична равенка на системот (8), има четири корени: r_1,r_2,r_3,r_4. Да претпоставиме дека тие се различни. За секој корен r_i од системот (9) ги наоѓаме вредностите α_i и β_i. Тогаш општото решение на (8) ќе биде:

$$x = \sum_{i=1}^{4} C_i\alpha_i e^{r_i t}, \quad y = \sum_{i=1}^{4} C_i\beta_i e^{r_i t}. \quad **$$

Задачи: 7.6-7.8; 7.37-7.46

§7.6. НЕХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ

Да ги разгледаме сега нехомогените линеарни системи

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + \ldots + a_{1n}z + f_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z' = a_{n1}x + a_{n2}y + \ldots + a_{nn}z + f_n, \end{cases} \tag{1}$$

при што a_{ij} и f_i се дадени функции од t, непрекинати на некој интервал $E=(a,b)$, т.е. во векторска форма

$$V' = AV + F, \tag{1'}$$

каде што $V'=(x',\ldots,z')^T$, $A=[a_{ij}]$, $V=(x,\ldots,z)^T$, $F=(f_1,\ldots,f_n)^T$.

За нехомогените линеарни системи важи аналогна теорема како кај нехомогените линеарни ДР (§2.4, §3.7).

Теорема 1. Општото решение на системот (1′) има вид

$$V = V_o + V_p \tag{2}$$

каде што V_o е општо решение на соодветниот хомоген систем

$$V' = AV, \tag{3}$$

а V_p е некое партикуларно решение на (1′); во скаларна форма, обликот на решението (2) е:

$$x = x_o + x_p, \quad y = y_o + y_p, \ldots, z = z_o + z_p. \tag{2'}$$

Доказ. Секоја векторска функција од видот (2) ја задоволува (1′):

$$\begin{aligned} V' &= (V_o + V_p)' = V_o' + V_p' = AV_o + (AV_p + F) = \\ &= A(V_o + V_p) + F = AV + F, \end{aligned}$$

т.е. (2) е решение на (1′). Обратно, ако V е решение на (1′), а V_p е партикуларно решение на (1′), тогаш:

$$\begin{aligned} (V - V_p)' &= V' - V_p' = (AV + F) - (AV_p + F) = \\ &= AV - AV_p = A(V - V_p), \end{aligned}$$

што значи дека $V-V_p$ е решение на хомогениот систем (3). Ставајќи $V-V_p=V_o$, добиваме дека општото решение V на (1′) има форма (2). □

Пример 1. Да го решиме системот

$$\begin{cases} x' = 3x + 8y + t + 10, \\ y' = x + y + 2t + 2, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad V' = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot V + \begin{bmatrix} t+10 \\ 2t+2 \end{bmatrix}$$

знаејќи дека $x_p=-3t+1$, $y_p=t-2$ е негово партикуларно решение.

Работејќи како во примерот 1 од § 7.5, наоѓаме дека општото решение на соодветниот хомоген систем е:

$$V_o = C_1\begin{bmatrix}4e^{5t}\\ e^{5t}\end{bmatrix} + C_2\cdot\begin{bmatrix}2e^{-t}\\ -e^{-t}\end{bmatrix}.$$

Според Т.1, општото решение на дадениот систем е:

$$V = V_o + V_p = C_1\begin{bmatrix}4e^{5t}\\ e^{5t}\end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix}2e^{-t}\\ -e^{-t}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3t+1\\ t-2\end{bmatrix}. \;\|$$

Како и кај нехомогените линеарни ДР, посебен проблем кај нехомогените линеарни системи претставува наоѓањето партикуларно решение. И тука помага Лагранжовиот метод на варијација на константите, содржан во следнава теорема.

Теорема 2. Нека е даден фундаментален систем решенија (т.е. решенија за кои вронскијанот $W(t)\neq 0$) на хомогениот линеарен систем ДР (3), $V'=AV$:

$$x_k,\ y_k,\ldots,z_k \qquad (k=1,2,\ldots,n). \tag{4}$$

Тогаш општото решение на нехомогениот систем (1´) $V'=AV+F$, има вид

$$\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + \ldots + C_nz_n, \end{aligned} \tag{5}$$

каде што $C_1=C_1(t),\ldots,C_n=C_n(t)$ се функции од t што треба да се определат од системот равенки (по непознатите $C_1',\ldots,C_n'$):

$$\begin{aligned} C_1'x_1 + C_2'x_2 + \ldots + C_n'x_n &= f_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1'z_1 + C_2'z_2 + \ldots + C_n'z_n &= f_n. \end{aligned} \tag{6}$$

Доказ. Да забележиме, прво, дека детерминантата на системот (6) е вронскијанот $W(t)$ на функциите (4), а бидејќи тие формираат фундаментален систем решенија на (3), следува дека $W(t)\neq 0$; поради тоа, (6) е решлив по $C_1',\ldots,C_n'$.

Да ги напишеме (4), (5) и (6) во векторска форма:

$$V_k = (x_k,y_k,\ldots,z_k) \qquad (k=1,2,\ldots,\ ) \tag{4´}$$

$$V = C_1V_1 + C_2V_2 + \ldots + C_nV_n, \tag{5'}$$

$$C_1'V_1 + C_2'V_2 + \ldots + C_n'V_n = F. \tag{6'}$$

Бидејќи векторските функции $V_1, \ldots, V_n$ се решенија на хомогениот систем (3), за функцијата V, определена со (5'), земајќи го предвид (6'), имаме

$$V' = (C_1V_1 + \ldots + C_nV_n)' = (C_1V_1' + \ldots + C_nV_n') + (C_1'V_1 + \ldots + C_n'V_n) =$$
$$= C_1(AV_1) + \ldots + C_n(AV_n) + F =$$
$$= A(C_1V_1 + \ldots + C_nV_n) + F = AV + F,$$

што значи дека V е решение на системот (1').

Останува да докажеме дека V е општо решение на (1'). За таа цел, да претпоставиме дека од системот равенки (6) се добиени

$$C_1' = \phi_1(t), \ldots, C_n' = \phi_n(t),$$

а оттука, со интегирање,

$$C_1 = \Phi_1(t) + c_1, \ldots, C_n = \Phi_n(t) + c_n, \tag{7}$$

каде што $c_1, \ldots, c_n$ се произволни константи.

Заменувајќи ги (7) во (5'), добиваме

$$V = [\Phi_1(t)V_1 + \ldots + \Phi_n(t)V_n] + [c_1V_1 + \ldots + c_nV_n]. \tag{8}$$

Во првите средни загради имаме некое партикуларно решение V_p на (1'), а во вторите - општо решение V_o на хомогениот систем (3). Следствено, за векторската функција (8) имаме:

$$V = V_p + V_o,$$

па според Т.1, (8) го дава општото решение на (1').□

<u>Пример 2</u>. Да го решиме системот

$$\{ x' = 3x + 8y + t + 10, \quad y' = x + y + 2t + 2 \}, \tag{a$_1$}$$

знаејќи дека (в. пример 1) општото решение на соодветниот хомоген систем е:

$$x_o = 4C_1e^{5t} + 2C_2e^{-t}, \quad y_o = C_1e^{5t} - C_2e^{-t}. \tag{a$_2$}$$

Значи:

$$x_1 = 4e^{5t}, \quad x_2 = 2e^{-t}, \quad y_1 = e^{5t}, \quad y_2 = -e^{-t}$$

е фундаментален систем решенија на соодветниот хомоген систем на (a_1). Го формираме системот (6):

$$\begin{cases} 4C_1'e^{5t} + 2C_2'e^{-t} = t + 10, \\ C_1'e^{5t} + C_2'e^{-t} = 2t + 2 \end{cases} \qquad (a_3)$$

и наоѓаме дека негово решение е парот

$$C_1' = \frac{1}{6}(5t + 14)e^{-5t}, \quad C_2' = \frac{1}{6}(2 - 7t)e^{t}. \qquad (a_4)$$

Применувајќи делумна интеграција, од (a_4) добиваме:

$$C_1(t) = -\frac{1}{6}(t+3)e^{-5t}+c_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{6}(9-7t)e^{t}+c_2. \qquad (a_5)$$

Заменувајќи ги изразите (a_5) во (a_2), според Т.2, добиваме дека

$$x = 4c_1e^{5t} + 2c_2e^{-t} - 3t + 1, \quad y = c_1e^{5t} - c_2e^{-t} + t - 2$$

е општото решение на системот (a_1). ||

<u>Задачи</u>: 7.9-7.14; 7.47-7.58

Глава 8

ПАРЦИЈАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПРВ РЕД

Парцијалните диференцијални равенки[1] се мошне важни и за чистата и за применетата математика. За солидно изучување на нивната теорија неопходна е поголема зрелост на студентот во математиката и нејзините примени, отколку што се предвидува за еден почетен курс и во една елементарна книга по ДР како што е оваа. Сепак, можно е да се разгледаат елементи од таа теорија на елементарен начин и да се дискутираат почетните поими.

Покрај линеарните ПДР од прв ред и Кошиевиот проблем за нив, во оваа глава ќе разгледаме некои нелинеарни ПДР, како и прашањето за наоѓање комплетни интеграли на некои ПДР од прв ред.

§8.1. УВОДНИ ПОИМИ

Равенка што содржи парцијални изводи од некоја функција u од два или повеќе аргументи, при што непозната во равенката е функцијата u, се вика *парцијална диференцијална равенка*; покрај парцијалните изводи, равенката може да ја содржи непознатата функција u, како и дадени функции од аргументите. Редот на највисокиот парцијален извод во равенката се вика *ред* на таа ПДР. Така, на пример,

$$1)\ x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z, \qquad 2)\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 - xy = 0$$

се ПДР од прв ред. Парцијалните изводи $z_x' = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z_y' = \frac{\partial z}{\partial y}$ често се означуваат кратко со p и q соодветно, па дадените ПДР може да се запишат на следниов начин:

$$1')\ xp + yq = z, \qquad 2')\ p^3 - xy = 0.$$

Општо, ПДР од прв ред за една функција z=z(x,y) може да се запише во обликот

$$F(x,y,z,p,q) = 0. \tag{1}$$

Многу примери на ПДР се среќаваат во физиката, електротехниката и други науки; ќе наведеме неколку:

3) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x,y,z)$ – равенка на распространување

[1] Натаму, наместо "парцијална диференцијална равенка" често ќе пишуваме кратко: ПДР.

на светлосните зраци во нехомогена средина со индекс на прекршување $n=n(x,y,z)$;

4) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – равенка на топлоспроводливоста:,

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – бранова равенка;

6) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ – (тридимензионална) лапласова равенка,

т.е. ПДР што ја задоволува потенцијал на поле во области кои не содржат електричен полнеж;

7) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = RC\,\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RC\,\frac{\partial i}{\partial t}$ – телеграфски равенки (на подморски кабел).

ПДР во 1), 2) и 3) се од прв ред, а сите други ПДР – во 4) – 7) се од втор ред.

8) $\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^6 + xzu = 0$

е ПДР од петти ред.

До парцијални диференцијални равенки се доаѓа преку разни конкретни проблеми од механиката, електротехниката, физиката и други науки, а може да се составуваат и со елиминација на произволни константи или произволни функции.

Пример 1. Да ги елиминираме произволните константи a,b од функцијата $z=ax+by$.

Елиминацијата ќе ја извршиме од даденото равенство и од двете равенства што ќе се добијат од него по парцијалното диференцирање (по x и по y):

$$z = ax + by,\quad \frac{\partial z}{\partial x} = a,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = b.$$

Имаме:

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z. \tag{2}$$

Така, со елиминирање на двете произволни константи, добиваме ПДР од прв ред. ||

Пример 2. Да се елиминира произволната (диференцијабилна) функција f од релацијата $z=xf(\frac{y}{x})$. Од равенствата

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial x} = f + x\left(-\frac{y}{x^2}\right)f' = f - \frac{y}{x}f',\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cdot\frac{1}{x}\cdot f' = f'$$

ги елиминираме f и f′ заменувајќи го f′ од третото во второто равенство, а од така добиеното го изразуваме f и го заменуваме во првото равенство:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f - \frac{y}{x}.\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad f = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}.\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$z = x\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\right), \text{ т.е. } x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Така, со елиминање на непознатата функција f, ја добиваме ПДР од прв ред $xp+yq=z$. ||

Решение на една ПДР е функција којашто ги има соодветните парцијални изводи (ние ќе претпоставуваме дека тие се непрекинати во соодветна област D) и ја задоволува таа ПДР идентично на D. Едно решение на ПДР што е определено имплицитно, обично се вика интеграл на таа ПДР. Процесот на наоѓање решенија се вика интегрирање на таа ПДР.

Од начинот како е добиена ПДР (2) во примерите 1 и 2 е јасно дека $z=ax+by$ и $z=x.f(y/x)$ се нејзини решенија; по форма, тие битно се разликуваат меѓу себе.

Општо решение на една ПДР е решение на таа ПДР кое содржи толку произволни, меѓусебно "независни" функции, колку што е редот на таа ПДР. Општо решение на една ПДР запишано во имплицитен вид се вика општ интеграл на таа ПДР.

Така, $z=xf(y/x)$ е општо решение на ПДР (2) - од прв ред, зашто е решение на (2) и содржи точно една произволна функција.

Едно решение на дадена ПДР што може да се добие од општото решение со посебен избор на произволните функции се вика партикуларно решение на таа ПДР. На пример, $z=2x-y$, $z=x\sin(y/x)$ се партикуларни решенија на ПДР (2). Нивните графици се викаат интегрални површини на таа ПДР.

Фамилијата решенија на ПДР (1): $F(x,y,z,p,q)=0$, зададена во обликот

$$V(x,y,z,a,b) = 0 \quad \text{или} \quad z = \phi(x,y,a,b), \tag{3}$$

каде што a и b се произволни, меѓусебно "независни" константи се вика комплетен (или полн) интеграл на ПДР (1). Елиминирајќи ги a и b од системот равенки

$$V(x,y,z,a,b) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}p = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}q = 0 \tag{4}$$

се добива равенка, еквивалентна на ПДР (1). (На пример, $z=ax+yb$ е комплетен интеграл на ПДР (2).)

** Комплетниот интеграл (3) претставува двопараметарска фамилија површини која може, но не мора, да има "обвивка". За да се најде обвивната површина (ако постои), ги елиминираме a и b од равенките

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0. \tag{5}$$

Ако добиената елиминанта $E(x,y,z)=0$ ја задоволува (1), тогаш таа се вика сингуларен интеграл на (1); ако $E(x,y,z)=\alpha(x,y,z)\cdot\beta(x,y,z)$ и ако $\alpha=0$ ја задоволува (1), а $\beta=0$ – не, тогаш $\alpha=0$ е сингуларен интеграл.

Аналогно како кај обичните ДР (в. §5.8), сингуларниот интеграл може да се добие од дадената ПДР (1) со елиминирање на p и q од системот

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0. \tag{6}$$

На пример, за ПДР $z=xp+yq-p^2-q^2$, параболоидот $4z=x^2+y^2$ е сингуларно решение. **)

Задачи: 8.1–8.8; 8.29–8.40

§ 8.2. ЛИНЕАРНИ ПДР ОД ПРВ РЕД

Равенките со форма

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = A_o, \tag{1}$$

каде што $A_i=A_i(x_1,\ldots,x_n,u)$ се дадени, а $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ непозната функција, се викаат нехомогено линеарни ПДР или, уште, квазилинеарни ПДР од прв ред. (ПДР (1) е линеарна по изводите, но може да биде нелинеарна по непознатата функција u.)

Ако $A_o \equiv 0$ и A_k $(k=1,\ldots,n)$ не зависат од функцијата u, тогаш

$$A_1(x_1,\ldots,x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x_1,\ldots,x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{2}$$

се вика хомогено линеарна ПДР од прв ред.

Ние ќе претпоставуваме дека коефициентите $A_1,\ldots,A_n$ во (2) се непрекинато диференцијабилни функции во некоја околина на дадена точка $(x_1^{(o)},\ldots,x_n^{(o)})$ и, покрај тоа, во таа точка не се анулираат истовремено, нпр. $A_n \neq 0$ во таа точка. (Да забележиме дека $u=c$, за кој било број c, е решение на ПДР (2); таквите решенија ќе ги наречеме очигледни.)

При тие претпоставки, хомогено линеарната ПДР (2) има фамилија решенија што содржи произволна функција. Таа фамилија решенија може да се најде со помош на решенијата на симетричен систем од обични ДР, соодветен на ПДР (2), т.е. општо решение на (2) може да се конструира како што е укажано во следната теорема.

Теорема 1. i) Левата страна на секој прв интеграл $\psi(x_1,\ldots,x_n)=C$ (в. §7.3) на симетричниот систем обични ДР

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n}, \tag{3}$$

каде што $A_i=A_i(x_1,\ldots,x_n)$, е интеграл на хомогено линеарната ПДР (2), т.е. ако $\psi(x_1,\dots,x_n)=C$ е интеграл на (3), тогаш $u=\psi(x_1,\dots,x_n)$ е интеграл на (2).

ii) Ако $\psi_1,\dots,\psi_{n-1}$ се левите страни на $n-1$ "независни" први интеграли на (3), а $z=F(z_1,\dots,z_{n-1})$ е произволна непрекинато диференцијабилна реална функција, тогаш $u=F(\psi_1,\dots,\psi_{n-1})$ е општ интеграл на (2).

Доказ. а) Ако $\psi(x_1,\dots,x_n)=C$ е интеграл на (3), тогаш таа е интеграл и на системот

$$x_i' = f_i(x_1,\dots,x_n) \quad \left(x_i' = \frac{dx_i}{dx_n},\ f_i = \frac{A_i}{A_n}\right),\ i=1,\dots,n-1.$$

Од тоталниот диференцијал на $\psi(x_1,\dots,x_n)=C$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n = 0$$

имаме:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx_n} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} = 0,$$

па поради $\frac{dx_i}{dx_n} = x_i' = f_i = \frac{A_i}{A_n}$, добиваме:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{A_1}{A_n} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\frac{A_{n-1}}{A_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} = 0,$$

а по множењето со A_n, ја добиваме ПДР (2) (со $u\equiv\psi$). Значи, $\psi(x_1,\dots,x_n)$ е интеграл на (2).

(Доказот на ii) може да се најде во [ЭΛ] стр. 249.)

Пример 1. Да го најдеме општиот интеграл на ПДР

$$xp + yq = 0. \tag{a_1}$$

Соодветниот симетричен систем е

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Негов прв интеграл е $\frac{y}{x} = C$, па според ii) од Т.1, $z = F(\frac{y}{x})$ е општ интеграл на (a_1). ||

Да ја разгледаме, сега, нехомогено линеарната, т.е. квазилинеарната ПДР

$$A_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + A_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = A_o, \tag{4}$$

каде што коефициентите $A_i=A_i(x_1,\dots,x_n,u)$, $(i=0,1,\dots,)$ се непрекинато диференцијални функции во некоја околина на зададена точка $(x_1^{(o)},\dots, x_n^{(o)},u^{(o)})$ и барем една од нив, нпр. A_n, не е нула во таа точка. Решение на (1) ќе бараме во обликот

$$V(x_1,\dots,x_n,u) = 0 \tag{5}$$

Ако извршиме диференцирање на (5) по x_i, ќе добиеме

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)/\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right).$$

Заменувајќи во (1), по средувањето ќе ја добиеме ПДР

$$A_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + A_n\frac{\partial V}{\partial x_n} + A_o\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \tag{6}$$

која е хомогено линеарна (по V). Следствено, можеме да ја примениме теоремата 1.

Значи, за да се реши квазилинеарната ПДР (4), треба да се напише соодветниот симетричен систем

$$\frac{dx_1}{A_1} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n} = \frac{du}{A_o}$$

и да се најдат n независни први интеграли на тој систем,

$$\psi_1(x_1,\ldots,x_n,u) = C_1,\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_n,u) = C_n.$$

Општото решение на (4), според Т.1 (ii), во имплицитен вид ќе биде:

$$F(\psi_1,\ldots,\psi_n) = 0, \tag{7}$$

каде што F е произволна диференцијабилна функција.

Специјално, ако u се појавува с а м о во еден од првите интеграли, нпр. во последниот, ψ_n, тогаш општото решение (7) може да се напише во обликот

$$\psi_n(x_1,\ldots,x_n,u) = f(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}), \tag{8}$$

каде што f е произволна диференцијабилна функција. Ако (8) (или (7)) може да се реши по u, ќе се добие општо решение на (4) во јавен вид.

Пример 2. $xp + yq = z$ (в. (2) во §8.1). (a_2)

Ја трансформираме во обликот (6):

$$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \tag{a_3}$$

го решаваме симетричниот систем $dx/x = dy/y = dz/z$, $\psi_1 \equiv y/x = C_1$, $\psi_2 \equiv z/x = C_2$ се два први интеграла. Според Т.1 ii), $V=F(y/x,z/x)$ е општ интеграл на (a_3), а според (7), општ интеграл на (a_2) е $F(y/x,z/x) = 0$.

Бидејќи непознатата функција z се јавува само во еден од првите интеграли, општиот интеграл $F(\psi_1,\psi_2) = 0$ може да се напише во обликот $\psi_2 = f(\psi_1)$. Значи: $\frac{z}{x} = f(y/x)$, т.е. $z=xf(y/x)$. ||

Задачи: 8.10–8.11; 8.54–8.65

§8.3. НАОЃАЊЕ ИНТЕГРАЛЕН МНОЖИТЕЛ НА ОБИЧНА ДР

Да ја разгледаме диференцијалната равенка

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{1}$$

Левата страна на (1) може да стане тотален диференцијал од некоја функција $u=u(x,y)$ ако се помножи со некоја функција $\lambda=\lambda(x,y)$, којашто го задоволува условот

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda N)}{\partial x}. \tag{2}$$

Равенството (2) може да се напише во вид

$$-N\frac{\partial\lambda}{\partial x} + M\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \lambda\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{3}$$

а тоа е ПДР, нехомогено линеарна по λ. Соодветниот симетричен систем ДР за (3) е

$$\frac{dx}{-N} = \frac{dy}{M} = \frac{d\lambda}{\lambda\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}. \tag{4}$$

Ако успееме да најдеме барем една функција λ ($\lambda\neq 0$) што го задоволува системот (4), тогаш сме нашле интегрален множител за (1). Ако ја помножиме (1) со λ, ќе добиеме егзактна ДР, па општиот интеграл на (1) ќе можеме да го најдеме.

Пример 1. Да најдеме интегрален множител λ на линеарната ДР:

$$y' + a(x)y = f(x), \quad \text{т.е.} \quad (ay - f)dx + dy = 0.$$

Во овој случај: $M = ay - f$, $N = 1$, па системот (4) е:

$$\frac{dx}{-1} = \frac{dy}{ay-f} = \frac{d\lambda}{\lambda(-a)}.$$

Од $\frac{d\lambda}{\lambda} = adx$ добиваме $\ln\lambda = \int adx + C$, т.е. $\lambda = e^{\int adx}$ (земаме $C = 0$ зашто ни треба само една функција λ). (Спореди со §2.1, стр. 15.) ||

Пример 2. Да се најде интегрален множител λ на ДР

$$(x^3 - y^3 + 4)dx + 3xy^2dy = 0,$$

а потоа и нејзиниот општ интеграл. Имаме:

$$\frac{dx}{-3xy^2} = \frac{dy}{x^3-y^3+4} = \frac{d\lambda}{\lambda(3y^2+3y^2)},$$

па од првиот и последниот однос добиваме:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -2\,\frac{dx}{x}, \quad \lambda = \frac{1}{x^2}.$$

Множејќи ја дадената ДР со $\lambda = 1/x^2$, ја добиваме ДР

$$(x - \frac{y^3}{x^2} + \frac{4}{x^2})\cdot dx + \frac{3y^2}{x}\, dy = 0,$$

којашто е егзактна, па

$$u = \int_1^x (x - \frac{0}{x^2} + \frac{4}{x^2})dx + \int_0^y \frac{3y^2}{x}\, dy =$$

$$= (\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}) \Big|_1^x + \frac{y^3}{x} + C_1 = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + \frac{y^3}{x} + (\frac{7}{2} + C_1)$$

од каде што добиваме дека $x^3+2y^3-8 = Cx$ е општ интеграл на дадената ДР.

Задачи: 8.12; 8.67–8.73

§8.4. КОШИЕВ ПРОБЛЕМ ЗА КВАЗИЛИНЕАРНИ ПДР ОД ПРВ РЕД

Дадена е линеарната ПДР

$$P(x,y,z)\ \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\ \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \tag{1}$$

и една линија, определена со равенките:

$$\Phi_1(x,y,z) = 0,\ \Phi_2(x,y,z) = 0 \tag{2}$$

или со параметарските равенки:

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t). \tag{2'}$$

Кошиевиот проблем за линеарни ПДР од прв ред, во тридимензионалниот случај гласи: да се најде интегрална површина на ПДР (1) што минува низ дадената линија (2).

Ако се познати два независни први интеграли

$$\psi_1(x,y,z) = C_1,\quad \psi_2(x,y,z) = C_2 \tag{3}$$

на соодветниот за ПДР (1) симетричен систем

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}, \tag{4}$$

тогаш, како што знаеме (§8.2),

$$F\big(\psi_1(x,y,z),\quad \psi_2(x,y,z)\big) = 0$$

е општ интеграл на (1). (Линиите од двапараметарската фамилија (3) се викаат карактеристики на ПДР (1).) Бараната интегрална површина може да се најде земајќи ја функцијата F не произволно, туку определувајќи функција $G(C_1,C_2)$ по пат на исклучување на x,y,z од равенките:

$$\Phi_1(x,y,z) = 0,\quad \Phi_2(x,y,z) = 0,$$

$$\psi_1(x,y,z) = C_1,\quad \psi_2(x,y,z) = C_2.$$

Од тоа ќе добиеме некоја врска $G(C_1,C_2)=0$ и бараниот интеграл ќе биде $G(\psi_1(x,y,z),\ \psi_2(x,y,z)) = 0$.

Ако дадената линија (2) е карактеристика на (1), тогаш задачата ќе биде неопределена, зашто во тој случај се добиваат различни интегрални површини што минуваат низ таа линија.

Пример 1. Да ја најдеме интегралната површина на ПДР

$$xp - yq = 0 \tag{a_1}$$

што минува низ параболата $x = 1,\ z = y^2$.

Од помошниот систем ДР

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0} \tag{a_2}$$

добиваме $\ln x = -\ln y + \ln C_1$ и $z = C_2$, т.е.

$$xy = C_1, \quad z = C_2 \tag{a_3}$$

- два независни први интеграла на (a_2). (Општиот интеграл на (a_1) ќе биде $F(xy,z)=0$, каде што F е произволна функција или, решен по z, имаме $z=\phi(xy)$, каде што ϕ е произволна диференцијабилна функција.)

Елимирајќи ги x,y,z од равенките

$$x = 1, \quad z = y^2, \quad xy = C_1, \quad z = C_2,$$

добиваме $C_2 = z = y^2 = (1\cdot y^2) = (xy)^2 = C_1^2$,

$$C_2 = C_1^2. \tag{a_4}$$

Заменувајќи ги изразите за C_1 и C_2 од (a_3) во врската (a_4), ја добиваме бараната интегрална површина: $z = (xy)^2$. ||

Пример 2. Да се најде интегралната површина на

$$xp - yq = 0 \tag{a_1}$$

(пример 1) што минува низ хиперболата

$$z = 1, \quad xy = 4. \tag{$б_1$}$$

Дадената линија ($б_1$), како што можеме да видиме од (a_3), е карактеристика на ПДР (a_1), па задачата е неопределена. Навистина, интегрални површини на (a_1) се севозможните површини $z=\phi(xy)$ а, очигледно, постојат безброј многу од нив што минуваат низ хиперболата ($б_1$), како на пример,

$$z = xy - 3, \quad 4z = xy, \quad z^2 = -xy + 5, \quad z = \sqrt{xy} - 1 \text{ итн.}$$ ||

** Аналогно се формулира Кошиевиот проблем за линеарни ПДР во случај на n независно променливи. Имено, за дадена хомогено линеарна ПДР од прв ред

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{4}$$

се бара функција $u=u(x_1,\ldots,x_n)$, којашто го задоволува условот

$$x_n = x_n^o, \quad u = \Phi(x_1,\ldots,x_{n-1}), \tag{5}$$

каде што x_n^o е даден број и Φ е дадена диференцијабилна функција.

И решението за $n+1$ - димензионалниот случај е аналогно на тридимензионалниот случај. Имено, нека

$$\psi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = C_1,\ldots,\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = C_{n-1}$$

се $n-1$ независни први интеграли на помошниот систем ДР

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n} \tag{6}$$

и нека

$$\overline{\psi}_1 = \psi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^o),\ldots,\ \overline{\psi}_{n-1} = \overline{\psi}_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^o).$$

Од овие равенства ги изразуваме $x_1,\ldots,x_{n-1}$ (ако може):

$$x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}),\ldots,x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1})$$

и ја формираме функцијата

$$u = \Phi(\omega_1(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}),\ldots,x_{n-1} = \omega_{n-1}(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}) \tag{7}$$

Се покажува дека функцијата (7) е интеграл на (4) и ги задоволува условите (5).

Навистина $\omega_i(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})$ $(i=1,\ldots,n-1)$ е интеграл на (6), т.е. на (4), па следствено $\Phi(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$ е интеграл на (4). Ставајќи $x_n = x_n^o$ во ψ_i, добиваме:

$$u(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \Phi(\omega_1(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}),\ldots,\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1})) = \Phi(x_1,\ldots,x_{n-1}),$$

што требаше да се докаже. **

Задачи: 8.13-8.17; 8.75-8.84

§8.5. МЕТОД НА РАЗДВОЈУВАЊЕ НА ПРОМЕНЛИВИТЕ (ФУРЈЕОВ МЕТОД)

Методот на Фурје се состои во следново: за дадена ПДР се бараат оние решенија што може да се претставаат во вид на производ од две или повеќе функции, секоја од кои зависи само од една независно променлива. Со тоа дадената ПДР се заменува со еден систем од две или повеќе обични ДР.

Пример 1. $x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = u$. Ставаме

$$u = f\cdot g = f(x)\cdot g(x),$$

наоѓаме $u_x' = f'g$, $u_y' = fg'$ и заменуваме во дадената равенка:

$$xf'g + yfg' = fg.$$

Делиме со fg и добиваме $x\cdot\frac{f'}{f} + y\cdot\frac{g'}{g} = 1$, па

$$x\cdot\frac{f'}{f} = 1 - y\cdot\frac{g'}{g} = k;$$

$$x\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} = k \Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{k}{x} \Rightarrow f = C_1x^k,$$

$$1 - y\cdot\frac{g'(y)}{g(y)} = k \Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{1-k}{y} \Rightarrow g = C_2y^{1-k}.$$

Значи, бараното решение е:

$$u = Cx^ky^{1-k}.$$

(Да забележиме дека $u=x.x^{k-1}.y^{1-k}$, т.е. $\frac{u}{x} = (\frac{y}{x})^{1-k}$ е партикуларно решение на дадената парцијална ДР, што може да се види од примерот 2 во §8.2.) ||

Овој метод може да се примени и за ПДР од повисок ред.

Пример 2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = u$.

Ставаме $u = f(x)g(y)$, наоѓаме $u_x' = f'(x)g(y)$, $u_{xy}'' = f'(x)g'(y)$ и, заменувајќи во дадената ПДР, добиваме:

$$f'(x)g'(y) = f(x)g(y), \text{ од каде што}$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{g}{g'} = k;$$

$$\frac{f'}{f} = k \Rightarrow f = C_1e^{kx};$$

$$\frac{g}{g'} = k \Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{1}{k} \Rightarrow g = C_2e^{y/k}.$$

Значи, $u = Ce^{kx+y/k}$ е бараното решение. ||

Задачи: 8.18–8.19; 8.92–8.97.

§ 8.6. НЕКОИ НЕЛИНЕАРНИ ПДР ОД ПРВ РЕД. РАВЕНКИ НА ПФАФ

Даден е системот ПДР:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A(x,y,z), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B(x,y,z), \tag{1}$$

каде што $A(x,y,z)$ и $B(x,y,z)$ се непрекинато диференцијални функции во некоја околина на дадена точка (x_0,y_0,z_0). Се бара услов што треба да го задоволуваат функциите A и B, за системот (1) да има решение. (Во тој случај системот (1) се вика решлив, а равенките во него - согласни.)

За таа цел ја диференцираме по y првата, а по x втората од равенките (1) и добиваме:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Бидејќи за функцијата $z = z(x,y)$ се задоволени претпоставките од теоремата за мешаните изводи, тие се еднакви, па

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A. \tag{2}$$

Овој е, значи, нужен услов за системот ПДР (1) да е решлив. Може да се покаже дека тој е и доволен, т.е. ако е исполнет условот (2), тогаш дадените равенки (1) имаат заедничко решение, кое зависи од една произволна константа.

Пример 1. $\frac{\partial z}{\partial x} = z^2\cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z^2.$ $(б_1)$

Бидејќи

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = 2z\cos x, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 2z,$$

имаме:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = 2z^3\cos x = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A,$$

што значи дека условот (2) е исполнет, т.е. дадениот систем е решлив.

Втората од дадените равенки дава $\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 1$, па:

$$-\frac{1}{z} = y + \phi(x); \tag{б$_2$}$$

за да ја определиме неопределената функција $\phi(x)$, ќе ја диференцираме $(б_2)$ по x, па имајќи ја предвид првата равенка од $(б_1)$, добиваме:

$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \phi'(x), \quad \frac{1}{z^2}\cdot z^2\cos x = \phi'(x),$$

па $\phi(x) = \sin x + C$. Следствено:

$$-\frac{1}{z} = y + \sin x + C, \quad \text{т.е.} \quad z = \frac{-1}{y+\sin x+C}. \;||$$

<u>Равенка на Пфаф</u> е секоја равенка со облик

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0. \tag{3}$$

Ние ќе претпоставуваме дека P,Q,R се непрекинато диференцијабилни функции во некоја околина на дадена точка (x_o,y_o,z_o) и барем една не е нула во таа точка; нпр. $R \neq 0$. Тогаш (3) може да се напише во форма $dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$, од каде што се добива:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}. \tag{4}$$

Значи, решавањето на една равенка од обликот (3), во тој случај, се сведува на (4), т.е. на систем од обликот (1).

<u>Пример 2</u>. $y^3dx + (2z - y)dy - ydz = 0$ (a_1)

$$dz = y^2dx + \frac{2z-y}{y}dy, \text{ па}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2z-y}{y}.$$

Од $z'_x = y^2$, интегрирајќи по x, добиваме:

$$z = xy^2 + \phi(y). \tag{a_2}$$

За да ја определиме непознатата (диференцијабилна) функција $\phi(y)$, последната равенка ја диференцираме по y и вршиме изедначување со $z'_y = \frac{2z-y}{y}$:

$$2xy + \phi'(y) = \frac{2z-y}{y}; \quad 2xy + \phi'(y) = 2xy + \frac{2\phi(y)}{y} - 1,$$

$$\phi'(y) - \frac{2}{y}\phi(y) = -1;$$

оваа е обична линеарна ДР од прв ред, па:

$$\phi(y) = y^2(C + \frac{1}{y}) = Cy^2 + y. \tag{a_3}$$

Од (a_2) и (a_3) добиваме дека решение на (a_1) е

$$z = xy^2 + Cy^2 + y. ╢$$

<u>Задачи</u>: 8.20-8.21; 8.98-8.106

§ 8.7. КОМПЛЕТНИ ИНТЕГРАЛИ НА ПДР; МЕТОД НА ЛАГРАНЖ-ШАРПИ

Наоѓањето на комплетен или полн интеграл на ПДР

$$F(x,y,z,p,q) = 0 \quad (p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}), \tag{1}$$

во некои специјални случаи, не претставува тешкотија. Ќе разгледаме неколку такви случаи.

1°. ПДР (1) не ги содржи x,y,z, т.е.

$$F(p,q) = 0 \quad \text{или} \quad p = f(q). \tag{I}$$

Ставајќи $q = a$, каде што a е произволна константа, добиваме

$$p = f(a), \quad dz = pdx + qdy = f(a)dx + ady,$$
$$z = f(a)x + ay + b,$$

каде што b е произволна константа; оваа функција е полн интеграл на (I).

Пример 1. Да најдеме полн интеграл на ПДР $p=q^2+q$. Имаме:

$$q = a, \quad p = a^2 + a, \quad dz = (a^2+a)dx + ady,$$
$$z = (a^2+a)x + ay + b. \;\|$$

2°. Во ПДР (1) се раздвојуваат x,p и y,q:

$$f_1(x,p) = f_2(y,q). \tag{II}$$

Ставајќи $f_1(x,p) = f_2(y,q) = a$, каде што a е произволна константа, и решавајќи (ако може) по p и q добиваме:

$$p = g_1(x,a), \quad q = g_2(y,a),$$
$$dz = pdx + qdy = g_1(x,a)dx + g_2(y,a)dy;$$
$$z = \int g_1(x,a)dx + \int g_2(y,a)dy + b.$$

е полн интеграл на ПДР (II).

Пример 2. За $pq = xy^2$ имаме:

$$\frac{p}{x} = \frac{y^2}{q} = a, \quad p = ax, \quad q = \frac{y^2}{a},$$
$$dz = axdx + \frac{y^2}{a}dy, \quad z = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^3}{3a} + b. \;\|$$

3°. ПДР (1) не ги содржи x и y:

$$F(z,p,q) = 0. \tag{III}$$

Ставајќи $z = z(u)$, каде што $u = ax + y$, добиваме

$$F(z, a\frac{dz}{du}, \frac{dz}{du}) = 0,$$

т.е. обична диференцијална равенка по $\frac{dz}{du}$. Интегрирајќи ја, добиваме $z = \Phi(u,a,b)$, каде што b е произволна константа, т.е.

$$z = \Phi(ax + y,a,b)$$

е полн интеграл на (III).

Пример 3. Да најдеме полн интеграл на ПДР $p+q=z$. Имаме:

$$z = z(u), \quad u = ax + y, \quad p = a\,\frac{dz}{du}, \quad q = \frac{dz}{du},$$
$$a\,\frac{dz}{du} + \frac{dz}{du} = z, \quad \frac{dz}{z} = \frac{du}{1+a},$$
$$\ln|z| = \frac{u}{1+a} + \ln b, \quad z = b\,e^{(ax+y)/(1+a)}. \;||$$

4°. Ако ПДР (1) има вид што потсеќава на клероовата ДР,

$$z = px + qy + \phi(p,q), \tag{IV}$$

тогаш со директна замена се проверува дека

$$z = ax + by + \phi(a,b)$$

е нејзин полн интеграл. На пример, за

$$z = px + qy + pq$$

полн интеграл е $z = ax + by + ab$. ||

5°. Комплетен интеграл на линеарна ПДР

$$P\,\frac{\partial z}{\partial x} + Q\,\frac{\partial z}{\partial y} = R, \tag{V}$$

каде што P,Q,R се дадени функции од x,y,z.

Ако за соодветниот симетричен систем $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ најдеме два независни први интеграли $\psi_1(x,y,z) = C_1$, $\psi_2(x,y,z) = C_2$, тогаш

$$\psi_2(x,y,z) = a\cdot\psi_1(x,y,z) + b$$

е комплетен интеграл на (V).

На пример, за ПДР: $xp+yq=1$ имаме ψ_1: $z - \ln x = C_1$, ψ_2: $y/x = C_2$, па $z = \ln x + ay/x + b$ е нејзин комплетен интеграл.

** Да забележиме дека и $z = a\ln x + (1-a)\ln y + b$ е комплетен интеграл на ПДР: $xp+yq=1$, добиен како за ПДР со облик (II). Значи, една ПДР може да има и повеќе различни комплетни интеграли. **

Во посложени случаи се применува т.н. метод на Лагранж-Шарпи.

6°. Метод на Лагранж-Шарпи. Тој е општ метод за наоѓање комплетни интеграли и се состои во следново. Нека е дадена ПДР

$$F(x,y,z,p,q) = 0, \tag{1}$$

каде што $p = z'_x$, $q = z'_y$. Сакаме да определиме ПДР

$$\Phi(x,y,z,p,q) = a, \tag{2}$$

која со равенката (1) има заедничко решение што зависи од една произволна константа a; p и q се сметаат за функции од x,y,z.

Да претпоставиме дека од F и Φ можеме да ги изразиме p и q:

$$p = A(x,y,z,a), \quad q = B(x,y,z,a). \tag{3}$$

Системот (3) има решение ако и само ако (§ 8.5)

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q\,\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\,\frac{\partial q}{\partial z} \tag{4}$$

Ако ги диференцираме равенките (1) и (2) по x,y,z и ако ги означиме изводите $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial p}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial q}$ со $F_x, F_p, \ldots, \Phi_q$ соодветно, ќе ги добиеме следниве три системи равенки:

$$\{ F_x + F_p\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + F_q\cdot\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \Phi_x + \Phi_p\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \Phi_q\cdot\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \},$$

$$\{ F_y + F_p\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + F_q\cdot\frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \Phi_y + \Phi_p\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \Phi_q\cdot\frac{\partial q}{\partial y} = 0 \},$$

$$\{ F_z + F_p\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + F_q\cdot\frac{\partial q}{\partial z} = 0, \quad \Phi_z + \Phi_p\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \Phi_q\cdot\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \}.$$

Од првиот систем се определува $\frac{\partial q}{\partial x}$, од вториот $\frac{\partial p}{\partial y}$, а од третиот $\frac{\partial p}{\partial z}$ и $\frac{\partial q}{\partial z}$:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix} F_p & -F_x \\ \Phi_p & -\Phi_x \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix} -F_y & F_q \\ -\Phi_y & \Phi_q \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix} -F_z & F_q \\ -\Phi_z & \Phi_q \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix} -F_p & F_z \\ -\Phi_p & \Phi_z \end{vmatrix},$$

каде што $D = \begin{vmatrix} F_p & F_q \\ \Phi_p & \Phi_q \end{vmatrix}$ и, заменувајќи ги во (4), добиваме:

$$\begin{vmatrix} F_y & F_q \\ \Phi_y & \Phi_q \end{vmatrix} - q\cdot\begin{vmatrix} F_z & F_q \\ \Phi_z & \Phi_q \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} F_p & F_x \\ \Phi_p & \Phi_x \end{vmatrix} - p\cdot\begin{vmatrix} F_p & F_z \\ \Phi_p & \Phi_z \end{vmatrix}$$

По средувањето, ја добиваме следнава хомогена ПДР по непознатата функција Φ:

$$F_p\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x} + F_q\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y} + (pF_p+qF_q)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - (F_x+pF_z)\frac{\partial\Phi}{\partial p} - (F_y+qF_z)\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0. \tag{5}$$

На таа ПДР ѝ одговара следниов симетричен систем ДР:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p+qF_q} = -\frac{dp}{F_x+pF_z} = -\frac{dq}{F_y+qF_z}. \tag{6}$$

Ако од системот (5) определиме еден прв интеграл $\Phi_1(x,y,z,p,q)=a$, тогаш од него и од (1) минуваме на (3) и натаму го решаваме тој систем.

Ако, пак, успееме да определиме два независни интеграли Φ_1 и Φ_2, тогаш елиминирајќи ги p и q од:

$$\Phi_1(x,y,z,p,q) = a, \quad \Phi_2(x,y,z,p,q) = b, \quad F(x,y,z,p,q) = 0,$$

добиваме комплетен интеграл на дадената ПДР (1).

Пример 4. Да најдеме комплетен интеграл на ПДР

$$xp + yq + z = 0. \tag{a$_1$}$$

Го формираме системот (5):

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{px+qy} = -\frac{dp}{p+p} = -\frac{dq}{q+q},$$

од каде што добиваме:

$$\frac{dp}{2p} = -\frac{dx}{x}, \quad \frac{dq}{2q} = -\frac{dy}{y}, \text{ т.е. } p = \frac{a}{x^2}, \quad q = \frac{b}{y^2} \tag{a$_2$}$$

– два независни први интеграли на системот (a$_2$). Елиминирајќи ги p и q од равенките (a$_2$) и (a$_1$), го добиваме бараниот интеграл:

$$z = -\frac{a}{x} - \frac{b}{y}. \;||$$

За упростување на изразите во системот (5), често пати е можно корисно да се употреби дадената ПДР.

Пример 5. Да најдеме комплетен интеграл на ПДР

$$xzq^2 - p = 0. \tag{б$_1$}$$

Го формираме системот (5):

$$\frac{dx}{-1} = \frac{dy}{2x} = \frac{dz}{-p+2xzq^2} = -\frac{dp}{zq^2+xpq^2} = -\frac{dq}{xq^3}. \tag{б$_2$}$$

Користејќи ја дадената ПДР (б$_1$), го упростуваме именителот во третиот однос во (б$_2$) и ја добиваме интеграбилната комбинација

$$\frac{dz}{xzq^2} = -\frac{dq}{xq^3}, \text{ т.е. } \frac{dq}{q} = -\frac{dz}{z}$$

од каде што добиваме еден прв интеграл на (б$_1$):

$$q = \frac{a}{z}. \tag{б$_3$}$$

Од равенките ($б_1$) и ($б_3$) наоѓаме:

$$q = \frac{a}{z}, \quad p = \frac{xa^2}{z}, \qquad dz = \frac{xa^2}{z}\,dx + \frac{a}{z}\,dy,$$

па, множејќи ја последната равенка со 2z, го добиваме полниот интеграл на ПДР ($б_1$) $z^2 = a^2x^2 + 2ay + b$. ||

** Ако за ПДР (1): $F(x,y,z,p,q)=0$ е познат комплетниот интеграл

$$\Phi(x,y,z,a,b) = 0,$$

постои метод за определување интегрална површина на (1) којашто минува низ дадена крива

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{6}$$

(Кошиев проблем). Таа интегрална површина може да се најде на следниов начин.

Ја определуваме функцијата $b=b(a)$, така што обвивната површина (анвелопата) на еднопараметарската фамилија површини $\Phi(x,y,z,a,b(a))=0$, определена со равенките

$$\Phi(x,y,z,a,b(a)) = 0, \ \Phi_a + \Phi_b \cdot b'(a) = 0 \tag{7}$$

(Φ_a, Φ_b се парцијалните изводи на Φ по a и b) да минува низ дадената крива (7).

За определување на функцијата $b=b(a)$ се користи фактот што во точките на дадената крива (7), двете равенки (7) по t се идентично задоволени. Функцијата $b=b(a)$ се определува, наместо од (7), сепак поедноставно; со елиминација на t, од системот равенки

$$\begin{gathered}\Phi(x(t),\ y(t),\ z(t),\ a,\ b(a)) = 0\\ \Phi_x\, x'(t) + \Phi_y\, y'(t) + \Phi_z\, z'(t) = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

при што се добива зависност од облик

$$G(a,b) = 0$$

и b се изразува како функција од a.

Со елиминација на параметарот a од равенките (7) се добива бараната интегрална крива. **

Задачи: 8.22-8.26; 8.107-8.130

Глава 9

ЛИНЕАРНИ ПДР ОД ВТОР РЕД

Линеарните парцијални диференцијални равенки (ПДР) од втор ред по една непозната функција(од два аргумента)ја сочинуваат најважната класа ПДР во смисла на нивните примени во разни области, особено во физиката. (Поради тоа, некои од тие ПДР се наречени равенки на математичката физика.)

Во оваа глава прво ќе ја разгледаме можноста за решавање хомогени и нехомогени ПДР со константни коефициенти, а потоа ќе се задржиме кратко на класификацијата на ПДР од втор ред и на основните равенки на математичката физика.

§9.1. ХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ПДР ОД ВТОР РЕД СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Една ПДР од втор ред по непознатата функција $z=z(x,y)$ што е линеарна по z и по сите парцијални изводи на z, се вика линеарна ПДР. ПДР од втор ред со облик

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = h(x,y), \tag{1}$$

каде што A,B,C (наречени коефициенти на (1), од кои барем еден не е нула) и $h(x,y)$, наречена слободен член на (1), се дадени функции од x и y, ќе ги викаме хомогени. (Да споменеме дека има несогласувања за употребата на овој термин: во некои книги тој се употребува за една друга класа ПДР.)

Ако коефициентите A,B,C во (1) се константи (барем еден различен од нула), тогаш (1) се вика ПДР со константни коефициенти. Ставајќи

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad D' \equiv \frac{\partial}{\partial y},$$

ПДР (1) можеме да ја запишеме во операторска форма

$$(A\cdot D^2 + B\cdot DD' + C\cdot D'^2)z = h(x,y). \tag{1'}$$

Ќе ги разгледаме прво хомогените ПДР со константни коефициенти "без слободен член", т.е. при кои $h(x,y) \equiv 0$:

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Нека ϕ е неполиномна функција од $y+mx$. Ако $z=\phi(y+mx)$ ја задоволува (2), тогаш заменувајќи ги во (2) парцијалните изводи

$$D\phi = m\phi', \quad D^2\phi = m^2\phi'', \quad DD'\phi = m\phi'', \quad D'^2\phi = \phi'',$$

го добиваме равенството

$$(Am^2 + Bm + C)\phi''(y+mx) = 0,$$

коешто ќе биде задоволено ако

$$Am^2 + Bm + C = 0. \tag{3}$$

Равенката (3) се вика <u>карактеристична равенка</u> за (2).

За да добиеме општо решение на ПДР (2) ќе постапиме на следниов начин. Ќе ставиме

$$X = y + m_1 x, \quad Y = y + m_2 x,$$

каде што m_1 и m_2 се корените на равенката (3). Тогаш:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x} = m_1\cdot\frac{\partial z}{\partial X} + m_2\cdot\frac{\partial z}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = m_1^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + 2m_1m_2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y} + m_2^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = m_1\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + (m_1+m_2)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y} + m_2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2},$$

па, заменувајќи ги овие изрази во (2) и имајќи предвид дека m_1 и m_2 се корени на (3), т.е.

$$Am_1^2 + Bm_1 + C = 0 = Am_2^2 + Bm_2 + C, \quad m_1+m_2 = -\frac{B}{A}, \quad m_1m_2 = \frac{C}{A},$$

добиваме:

$$AD^2z + BDD'z + CD'^2z = (Am_1^2+Bm_1+C)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} +$$
$$+ \{2m_1m_2A + B(m_1+m_2) + 2C\}\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y} + (Am_2^2+Bm_2+C)\,\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} =$$
$$= A[2m_1m_2 - (m_1+m_2)^2 + 2m_1m_2]\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y} = -A(m_1-m_2)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y} = 0.$$

Ако $m_1 \neq m_2$, тогаш

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y} = 0$$

Интегрирајќи прво по X, а потоа по Y, добиваме:

$$z = f_1(X) + f_2(Y) = f_1(y+m_1x) + f_2(y+m_2x), \tag{4}$$

каде што f_1 и f_2 се произволни, двапати диференцијабилни функции. Значи,

(4) е решение на ПДР (2), коешто содржи две (независни) произволни функции, па тоа е општо решение на (2).

Ако карактеристичната равенка (3) има еднакви корени, $m_1=m_2=m$, тогаш (се покажува дека) општото решение на (2) е:

$$z = xf_1(y+mx) + f_2(y+mx). \tag{4'}$$

⌈** Можно е да се покаже дека резултатите (4) и (4') се проширувааат на соодветен начин за хомогена ПДР од повисок ред. **⌋

Пример 1. Да го најдеме општиот интеграл на ПДР

$$D^2z - 2DD'z - 3D'^2z = 0.$$

Корените на карактеристичната равенка $m^2-2m-3=0$ се $m_1=-1$ и $m_2=3$, па општиот интеграл е:

$$z = f_1(y-x) + f_2(y+3x). \quad ||$$

Да ги разгледаме, ПДР (1) "со десна страна", т.е. случајот кога $h(x,y) \not\equiv 0$ во (1). Ако (1) ја напишеме во операторска форма како

$$F(D,D')z = h(x,y), \tag{1"}$$

тогаш можеме да ставиме

$$z = \frac{1}{F(D,D')}\, h(x,y) \tag{5}$$

и да продолжиме како за обични ДР (Додаток, стр. 198). Општото решение на (1), слично како кај нехомогените обични ДР (§2.4 и §3.7), се добива како збир на општото решение на (2), наречено комплементарна функција z_o на (1), и еден партикуларен интеграл z_p на (1), $z=z_o+z_p$. Ќе разгледаме, прво, еден пример во кој слободниот член $h(x,y)$, е полиномна функција.

Пример 2. Да ја решиме ПДР

$$(D^2 - 6DD' + 9D'^2)z = x^2.$$

Бидејќи корените на карактеристичната равенка $m^2-6m+9=0$ се $m_1=m_2=3$, комплементарната функција е

$$xf_1(y+3x) + f_2(y+3x).$$

Според (5), еден партикуларен интеграл на дадената ПДР е

$$\frac{1}{D^2-6DD'+9D'^2}(x^2) = \frac{1}{D^2}\left[1 - \frac{6D'}{D} + \frac{9D'^2}{D^2}\right]^{-1}(x^2) =$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 + \frac{6D'}{D} + \dots\right](x^2) = \frac{x^4}{12}.$$

Значи, општото решение е:

$$z = xf_1(y+3x) + f_2(y+3x) + x^4/12. \quad ||$$

За случај на поопшти функции h(x,y) од десната страна на (1), на пример, експоненцијални, тригонометриски или нивни збирови, се применува еден поопшт метод. Имено, ако

$$\frac{\partial z}{\partial x} - m\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y),$$

тогаш соодветниот симетричен систем е:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{h(x,y)}$$

и еден прв интеграл е $y+mx=c$. Од првиот и третиот однос добиваме

$$z = \int h(x,y)dx = \int h(x,c-mx)dx,$$

при што c, по интегрирањето, ќе се замени со $y+mx$. Значи,

$$\frac{1}{D-mD'}\cdot h(x,y)$$

може да се земе како $\int h(x,c-mx)dx$, при што c се заменува со $y+mx$ по интегрирањето.

Пример 3. Да го најдеме општиот интеграл на ПДР

$$(D^2 + DD' - 6D'^2)z = y\cos x.$$

Равенката може да се напише во вид

$$(D + 3D')(D-2D')z = y\cos x$$

и комплементарната функција е:

$$f_1(y-3x) + f_2(y+2x),$$

а еден партикуларен интеграл е $\frac{1}{(D+3D')(D-2D')}\,y\cos x$. Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{1}{D-2D'}\,y\cos x &= \int(c-2x)\cos x dx = c\sin x - 2x\sin x - 2\cos x = \\ &= (y+2x)\sin x - 2x\sin x - 2\cos x = \\ &= y\sin x - 2\cos x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{D+3D'}\,(y\sin x-2\cos x) &= \int[(c+3x)\sin x - 2\cos x]dx = \\ &= -c\cos x - 3x\cos x + 3\sin x - 2\sin x = \\ &= -(y-3x)\cos x - 3x\cos x + \sin x = \\ &= -y\cos x + \sin x.\end{aligned}$$

Значи, општиот интеграл е:

$$z = f_1(y-3x) + f_2(y+2x) - y\cos x + \sin x. \quad ||$$

** Горните разгледувања се прошируваат директно на хомогени ПДР со константни коефициенти од произволен ред:

$$F(D,D') \equiv a_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + a_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0$$

Се решава карактеристичната равенка

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

и натаму се постапува како во (4) и (4') за случајот n=2. **

Задачи: 9.1-9.2; 9.36-9.46; 9.55-9.61

§ 9.2. НЕХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ПДР ОД ВТОР РЕД СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Линеарните ПДР од втор ред од обликот

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x} + B_1 \frac{\partial z}{\partial y} + C_1 \cdot z = h(x,y), \tag{1}$$

каде што A,B,C,A_1,B_1,C_1 се дадени броеви и $h(x,y)$ е дадена функција, при што барем еден од броевите A,B,C и барем еден од броевите A_1,B_1,C_1 не е нула, се викаат <u>нехомогени</u>.

Ако $h(x,y) \equiv 0$, како и во § 9.1, за (1) ќе велиме дека е <u>без слободен член</u>; во спротивниот случај ќе велиме дека (1) е <u>со слободен член</u>.

И тука ќе ги користиме ознаките: $D = \frac{\partial}{\partial x}$, $D' = \frac{\partial}{\partial y}$.

Една нехомогена равенка се вика <u>редуцибилна</u>, ако таа може да се претстави како производ од множители, линеарни по D и D'; во спротивниот случај таа се вика <u>иредуцибилна</u>. На пример, ПДР $(D^2-DD'-2D'^2+6D-9D'+5)z = x+y$ е редуцибилна, зашто $(D+D'+5)(D-2D'+1)z = x+y$, додека ПДР $(D^2+D+D')z = 0$ е иредуцибилна.

Да ја разгледаме редуцибилната нехомогена ПДР од втор ред

$$F(D,D')z \equiv (a_1D+b_1D'+c_1)(a_2D+b_2D'+c_2) = 0, \tag{2}$$

каде што a_i, b_i, c_i се константи. Секое решение на линеарната ПДР од прв ред

$$(a_iD + b_iD' + c_i)z = 0 \tag{3}$$

е решение и на (2). Соодветниот симетричен систем за (3) е

$$\frac{dx}{a_i} = \frac{dy}{b_i} = \frac{dz}{-c_i z}, \tag{4}$$

за кој два први интеграли се: $a_iy-b_ix = K_1$ и

$$z \cdot e^{c_i x/a_i} = K_2 \quad (\text{ако } a_i \neq 0) \text{ или } z \cdot e^{c_i y/b_i} = K_3 \quad (\text{ако } b_i \neq 0).$$

Според тоа, општо решение на (3) е

$$z = e^{-c_i x/a_i} f(a_i y - b_i x), \quad a_i \neq 0 \tag{5}$$

или

$$z = e^{-c_i y/b_i} g(a_i y - b_i x), \quad b_i \neq 0 \tag{5'}$$

каде што f и g се произволни функции.

Според тоа, ако множителите во (2) се линеарно независни (т.е. едниот множител не се содржи во другиот), тогаш општото решение на (2) е збир на две произволни функции од обликот (5) или (5').

Пример 1. Да ја решиме ПДР

$$(D+3D'+5)(2D-D'+1)z = 0. \tag{a_1}$$

Од горната дискусија, според (5) и (5'), следува дека

$$z = e^{-5x} f(y-3x) + e^{y} g(2y+x) \tag{a_2}$$

е општо решение на дадената ПДР.

Да забележиме дека првиот собирок од десната страна на (a_2) можеме да го замениме со $e^{-5y/3} f_1(y-3x)$, а вториот - со $e^{-x/2} g_1(2y+x)$. ||

Ако множителите во (2) се линеарно зависни, т.е. ако имаме

$$F(D,D')z \equiv (aD+bD'+c)^2 z = 0, \tag{6}$$

тогаш општото решение на (6) има вид

$$z = e^{-cx/a}[f(ay-bx) + xg(ay-bx)] \text{ ако } a \neq 0;$$

ако $b \neq 0$, тогаш множителот $e^{-cx/a}$ може да се замени со $e^{-cy/b}$.

Пример 2. Општото решение на ПДР

$$(2D+3D'-5)^2 z = 0$$

има облик $z = e^{5x/2}[f(2y-3x) + xg(2y-3x)]$. ||

Општото решение на ПДР со слободен член

$$F(D,D')z \equiv (a_1 D+b_1 D'+c_1)(a_2 D+b_2 D'+c_2)z = h(x,y) \tag{7}$$

е $z = z_o + z_p$ - збир на општото решение z_o на ПДР (2) (наречено комплементарна функција на (7)) и еден партикуларен интеграл z_p на (7):

$$z_p = \frac{1}{F(D,D')} h(x,y). \tag{8}$$

Општата постапка (како и некои пократки постапки за посебни облици на $h(x,y)$) за пресметување на (8) се истите како во претходниот параграф (в. Пр. 3 и зад. 9.4, 9.6).

** Горните разгледувања се прошируваат директно на произволни редуцибилни нехомогени линеарни ПДР со константни коефициенти $F(D,D')z = h(x,y)$ од n-ти ред, по непознатата функција $z=z(x,y)$, т.е. на ПДР што се линеарни по сите изводи на z и по самата функција z.

За <u>случај на иредуцибилни линеарни ПДР</u>, претходно опишаната постапка не може да се примени и <u>неопходен е друг пристап</u> - поопшта постапка што ќе служи за решавање и на иредуцибилни равенки.

Да ја разгледаме ПДР (1) без слободен член,

$$F(D,D')z = 0. \tag{9}$$

Бидејќи $D^rD'^s(c\cdot e^{ax+by}) = ca^rb^se^{ax+by}$, каде што a,b,c се константи, резултатот од заменувањето на функцијата

$$z = c\cdot e^{ax+by} \tag{10}$$

во (9) е $c\cdot F(a,b)\cdot e^{ax+by}=0$. Значи, (10) е решение на (9) ако (и само ако)

$$F(a,b) = 0, \quad \text{т.е.} \quad Aa^2 + Bab + Cb^2 + A_1a + B_1b + C_1 = 0 \tag{11}$$

(при што c е произволен број, $c\neq 0$). Равенката (11), наречена <u>карактеристична равенка</u> на (9), зависи од две променливи (a и b), па постојат безброј многу парови (a_i,b_i) што ја задоволуваат (11). Уште повеќе,

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_ie^{a_ix+b_iy}, \quad \text{при} \quad F(a_i,b_i) = 0, \tag{12}$$

е решение на (9).

Ако $F(D,D')z = (D+rD'+s)g(D,D')z$, тогаш секој пар (a,b), за кој $a+rb+s = 0$, ја задоволува (11). Да ги разгледаме сите парови $(a_i,b_i)=(-rb_i-s,b_i)$. Според (12),

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_ie^{-(rb_i+s)x+b_iy} = e^{-sb}\sum_{i=1}^{\infty} c_ie^{b_i(y-rx)}$$

е решение на (9) во однос на линеарниот множител $(D+rD'+s)$ од $F(D,D')$. Тоа е, всушност, функцијата $e^{-sx}f(y-rx)$ (при f - произволна) од (5).

Ако $F(D,D')$ нема линеарни фактори, тогаш функцијата (12), која содржи произволни константи наместо произволни функции, ќе ја викаме решение на (9).

<u>Пример 3</u>. Равенката

$$F(D,D')z \equiv (D'^2-D+D')z = 0$$

е иредуцибилна. Овде: $F(a,b)=b^2-a+b=0$, така што за кој било $b=b_i$ имаме $a_i=b_i(b_i+1)$, па

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_ie^{a_ix+b_iy} = \sum_{i=1}^{\infty} c_ie^{b_i(b_i+1)x+b_iy},$$

каде што c_i и b_i се произволни константи, е решение на дадената ПДР. ||

За добивање партикуларен интеграл на иредуцибилна ПДР со слободен член, $F(D,D')z=h(x,y)$, може да се применат претходно разгледаните постапки.

Ако $F(D,D')$ е од n-ти ред и има m линеарни множители, $m<n$, тогаш се запишува делот од решението што содржи произволни функции (што одговара на линеарните множители) и остатокот што содржи произволни константи.

Пример 4. Да ја решиме ПДР

$$(D-3D')(D+2D'+5)(D^2+D')z = 0.$$

За линеарните множители, имаме

$$f(y+3x) \text{ и } e^{-5x}g(y-2x),$$

а за иредуцибилниот множител D^2+D' имаме $a^2+b=0$, т.е. $b=-a^2$. Бараното решение е:

$$z = f(y+3x) + e^{-5x}g(y-2x) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i(x-a_i y)}. \quad ** \|$$

Задачи: 9.4–9.8; 9.47–9.51; 9.62–9.64

§9.3. КЛАСИФИКАЦИЈА НА ЛИНЕАРНИ ПДР ОД ВТОР РЕД

Посебно значење за примената имаат парцијалните ДР од втор ред, по непознатата функција $u = u(x,y)$, линеарни по вторите изводи:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \tag{1}$$

каде што A,B,C се дадени функции од x и y, (притоа, барем една од тие функции е ненулта), дефинирани во некоја област G и со непрекинати парцијални изводи од втор ред заклучно, а F е непрекината функција од своите аргументи. Како и во §9.2, ако F е линеарна функција од u,u_x,u_y, т.е. ако $F = A_1u_x + B_1u_y + C_1u + f(x,y)$, тогаш ПДР (1) се вика линеарна (Притоа: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ итн.)

Во зависност од природата на решенијата, ПДР (1), во дадена точка (x_0,y_0) од областа G, се класифицира според дискриминантата

$$\delta = B^2 - AC, \tag{2}$$

како равенка од:

1) хиперболичен тип, ако $\delta > 0$,

2) параболичен тип, ако $\delta = 0$,

3) елиптичен тип, ако $\delta < 0$,

при што е земено $\delta = \delta(x_0,y_0)$.

Ако во некоја област $G_1 \subseteq G$ дискриминантата δ е позитивна, нула, негативна, тогаш (1) се вика равенка од хиперболичен, параболичен, елиптичен тип во G_1, соодветно.

Пример 1. Да се класифицираат ПДР:

а) $u_{tt} = a^2u_{xx}$; б) $u_t = a^2u_{xx}$; в) $u_{xx} + u_{yy} = 0$

(бранова равенка; равенка на топлоспроводливост; лапласова равенка, споменати во §8.1).

За дискриминантата $\delta = B^2 - AC$ имаме:

а) $\delta = 0 - 1\,(-a^2) = a^2 > 0$, па ПДР е од хиперболичен тип.

б) $\delta = 0 - 0\,(-a^2) = 0$ - параболичен тип.

в) $\delta = 0 - 1\cdot 1 = -1 < 0$ - елиптичен тип. ||

Пример 2. Да се определат областите на хиперболичност, елиптичност и параболичност на ПДР

$$2xu_{xx} - yu_{yy} - 3y^2u_x + x^2y = 0.$$

Имаме: $A = 2x$, $B = 0$, $C = -y$, па $\delta = 2xy$.

Според тоа, равенката е:

-хиперболична во областа $xy > 0$,

-елиптична во областа $xy < 0$,

-параболична по правите $x = 0$, $y = 0$. ||

Во врска со ПДР (1), од интерес е решението на задачата: со помош на смена на независно променливите x,y, да се сведе (1) на најпрост можен вид, т.е. на канoничен вид.

За таа цел се воведуваат нови променливи

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y). \tag{3}$$

при што се бара функциите ξ,η да бидат двапати непрекинато диференцијабилни и јакобијанот (во G) да биде

$$J\left(\frac{\xi,\eta}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0; \tag{4}$$

Тој услов е доволен за егзистенција на инверзната трансформација

$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta). \tag{3'}$$

Со помош на новите променливи ξ и η, ПДР (1) се трансформира во следнава ПДР

$$\bar{A}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\bar{B}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \bar{C}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \bar{F}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0, \tag{5}$$

каде што

$$\begin{aligned}\overline{A}(\xi,\eta) &= A(\frac{\partial\xi}{\partial x})^2 + 2B\,\frac{\partial\xi}{\partial x}.\frac{\partial\xi}{\partial y} + C(\frac{\partial\xi}{\partial y})^2,\\ \overline{C}(\xi,\eta) &= A(\frac{\partial\eta}{\partial x})^2 + 2B\,\frac{\partial\eta}{\partial x}.\frac{\partial\eta}{\partial y} + C(\frac{\partial\eta}{\partial y})^2,\\ \overline{B}(\xi,\eta) &= A\,\frac{\partial\xi}{\partial x}.\frac{\partial\eta}{\partial y} + B(\frac{\partial\xi}{\partial x}.\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}.\frac{\partial\eta}{\partial x}) + C\,\frac{\partial\xi}{\partial y}.\frac{\partial\eta}{\partial y}.\end{aligned} \tag{6}$$

Со директно заменување, лесно се проверува дека

$$\overline{B}^2 - \overline{A}.\overline{C} = (B^2-AC)(\frac{\partial\xi}{\partial x}.\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}.\frac{\partial\eta}{\partial x})^2,$$

од каде што гледаме дека дискриминантите $\delta = B^2-AC$ и $\overline{\delta} = \overline{B}^2-\overline{A}.\overline{C}$ имаат исти знаци, т.е. ПДР (1) и (5) се од ист тип.

Користејќи го фактот што барем еден од коефициентите A,B,C не е нула, а поради (4), се покажува дека не е можно сите три коефициенти (6): $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ во (5) истовремено да се нули. Може да се покаже дека функциите $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ во трансформацијата (3´) може да се изберат така што да биде исполнет само еден од условите:

1° $\overline{A} = 0$, $\overline{C} = 0$; 2° $\overline{A} = 0$, $\overline{B} = 0$; 3° $\overline{A} = \overline{C}$, $\overline{B} = 0$.

Јасно е дека, во тој случај, трансформираната равенка (5) ќе добие најрпост вид.

За да ја упростиме ПДР (5) така што $\overline{A} = \overline{C} = 0$, треба десните страни од првата и втората формула во (6) да ги изедначиме со нула, т.е. функциите ξ и η од (3) треба да бидат решенија на следнава ПДР по непознатата функција $\omega = \omega(x,y)$:

$$A(\frac{\partial\omega}{\partial x})^2 + 2B\,\frac{\partial\omega}{\partial x}.\frac{\partial\omega}{\partial y} + C(\frac{\partial\omega}{\partial y})^2 = 0. \tag{7}$$

Можеме да сметаме дека, во точката (x_o,y_o), во чија околина равенката (1) ќе ја сведуваме во канонич ен вид, или $A\neq 0$ или $C\neq 0$.

Да земеме $A\neq 0$. Решавајќи ја (7) како квадратна равенка по $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, добиваме

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{1}{A}\,[-B \pm \sqrt{B^2-AC}\,].\frac{\partial\omega}{\partial y},$$

т.е.

$$A\,\frac{\partial\omega}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2-AC})\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0$$

$$A\,\frac{\partial\omega}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2-AC})\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0$$

Решенијата на секоја од овие равенки се решенија и на (7). За интегрирањето на последниве две равенки го составуваме системот (обични) ДР

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B+\sqrt{B^2-AC}}, \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B-\sqrt{B^2-AC}}$$

или

$$\begin{aligned} Ady - (B+\sqrt{B^2-AC})dx &= 0, \\ Ady - (B-\sqrt{B^2-AC})dx &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

којшто може да се запише во една ДР

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0. \tag{9}$$

Општите интеграли на (8)

$$\phi(x,y) = c_1, \quad \psi(x,y) = c_2, \tag{10}$$

се викаат карактеристики на ПДР (1), а (8) односно (9), равенки на карактеристиките.

Сведувањето на ПДР (1) на каноничен вид, за секој од спомнатите типови ПДР, се врши откако ќе се најдат (10) на следниов начин:

1) Равенки од хиперболичен тип

Бидејќи $B^2-AC>0$, општите интаграли (10) ќе бидат реални и различни, т.е. тие определуваат две различни фамилии реални карактеристики.

Воведувајќи наместо x,y нови независно променливи

$$\xi = \phi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y)$$

равенката (1) се сведува на ПДР

$$u_{\xi\eta} = F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \tag{11}$$

наречена каноничен вид на равенка од хиперболичен тип.

2) Равенки од параболичен тип

Бидејќи $B^2-AC=0$, равенките (8) се совпаѓаат, па добиваме само еден општ интеграл: $\phi(x,y)=c$. Ставајќи

$$\xi = \phi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y),$$

каде што $\eta=\eta(x,y)$ е функција, за која јакобијанот $J(\frac{\xi,\eta}{x,y})\neq 0$ во разгледуваната област, ПДР (1) се сведува на

$$u_{\eta\eta} = F_2(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta). \tag{12}$$

Тоа е каноничниот вид на равенка од параболичен тип.

3) Равенки од елиптичен тип

Во овој случај, $B^2-AC<0$, па општите интеграли на равенката (8) се конјугирано комплексни и тие определуваат две фамилии имагинарни карактеристики.

Нека општиот интеграл на првата равенка од (8) е

$$\phi(x,y) + i\,\psi(x,y) = c,$$

каде што $\phi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ се реални функции. Тогаш, ставајќи

$$\xi = \phi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y)$$

(1) се сведува на ПДР

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F_3(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta); \tag{13}$$

тоа е каноничниот вид на равенка од елиптичен тип.

Пример 3. Да се сведе на канонички облик ПДР

$$u_{xx} + 6u_{xy} - 7u_{yy} - 2u_x + 2u_y + 32u = 0 \qquad (a_1)$$

Бидејќи $B^2-AC=3^2-1\cdot(-7)=16>0$, следува дека (a_1) е од хиперболичен тип, па нејзиниот канонички облик е од видот (11). Равенката (5) на нејзините карактеристики е

$$dy^2 - 6dydx - 7dx^2 = 0, \text{ т.е. } y'^2 - 6y' - 7 = 0,$$

од каде што добиваме $y'_{1,2}=3\pm 4$, т.е. ги добиваме равенките на две фамилии карактеристики: $y+x=C_1$, $y-7x=C_2$.

Воведуваме нови независно променливи:

$$\xi = y + x, \quad \eta = y - 7x \qquad (a_2)$$

и ги изразуваме парцијалните изводи од (a_1) со парцијални изводи по новите променливи:

$$u_x = u_\xi\cdot\xi_x + u_\eta\cdot\eta_x = u_\xi - 7u_\eta;$$
$$u_y = u_\xi\cdot\xi_y + u_\eta\cdot\eta_y = u_\xi + u_\eta;$$
$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi) - 7\frac{\partial}{\partial x}(u_\eta) =$$
$$= u_{\xi\xi}\cdot\xi_x + u_{\xi\eta}\cdot\eta_x - 7(u_{\eta\xi}\cdot\xi_x + u_{\eta\eta}\cdot\eta_x) = u_{\xi\xi}-14u_{\xi\eta}+49u_{\eta\xi};$$

работејќи како погоре добиваме:

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} - 7u_{\eta\eta};$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Заменувајќи во (a_1), по средувањето, добиваме

$$-64u_{\xi\eta} + 16u_{\eta} + 32u = 0, \text{ т.е. } u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\eta}+2u),$$

што претставува каноничниот облик на (a_1). ‖

Задачи: 9.9-9.12; 9.64-9.69

§9.4. ОСНОВНИ РАВЕНКИ НА МАТЕМАТИЧКАТА ФИЗИКА

При решавањето задачи од физиката со помош на парцијални ДР основен е следниов факт: наместо да се испитува вистинскиот физички процес, се испитува некој негов модел ("идеален процес") којшто ги има основните црти на разгледуваната физичка појава и е доволно едноставен за изучување со математички методи. При изучувањето на идеалниот процес може да се издвојат следниве главни чекори:

1) се избира величина што го карактеризира процесот; обично, таа е функција од положбата $(x_1,\ldots,x_n)$ и од времето t:

$$u = u(x_1,x_2,\ldots,x_n,t);$$

2) се изведува ПДР во однос на функцијата $u(x_1,\ldots,x_n,t)$ врз основа на законите што важат за тој идеален процес;

3) се издвојуваат уште некои дополнителни услови што го карактеризираат процесот, за да се издвојат оние решенија на ПДР што го опишуваат тој процес; тие дополнителни услови најчесто се: почетни услови, што се однесуваат на моментот од времето кога започнува процесот, и гранични услови, т.е. услови што се зададени на границата од разгледуваната средина.

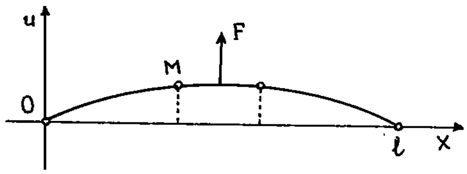
Диференцијалната равенка и дополнителните услови претставуваат математичка формулација на физичката задача и се викаат задача на математичката физика.

Основни равенки на математичката физика се: брановата равенка, равенката на распространување на топлината и равенката на Лаплас.

I. Бранова равенка. Оваа равенка се добива при изучување на треперењето на еластична жица што е прицврстена на двата краја (црт. 1). Процесот ќе биде окарактеризиран со една скаларна величина

$$u = u(x,t)$$

- отклон од рамнотежната положба на точка од жицата со апсциса x во моментот t. При секоја фиксирана вредност на t, графикот на функцијата $u=u(x,t)$ ја дава формата на жицата во тој момент t. Ако на жицата дејствува сила



Црт. 1

$$F = F(x,t),$$

нормално на оската OX, тогаш равенката на движењето на жицата е

$$\rho u_{tt} = T\cdot u_{xx} + F, \tag{1}$$

каде што константата T е напрегнувањето, а $\rho = \rho(x)$ е линеарната густина на жицата. (Притоа:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{итн.)}$$

Ставајќи $a^2 = T/\rho$ и $f = F/\rho$ се добива равенката на принудни напречни осцилации на жицата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f. \tag{1'}$$

Ако отсуствува надворешна сила F, тогаш $f=0$ и се добива равенката на слободни осцилации на жицата:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{2}$$

За определување на законот на движењето, заедно со (2), неопходно е да бидат зададени и дополнителни услови. Бидејќи жицата е прицврстена во точките со апсциси $x=0$ и $x=\ell$, ги имаме следниве гранични услови:

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0. \tag{3}$$

Секако, процесот на осцилирање битно ќе зависи и од начинот на кој жицата се изведува од рамнотежната положба. Тоа значи дека во почетниот момент $t=0$ точките од жицата ќе имаат некоја положба и брзина. Тоа доведува до следниве, почетни услови:

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \ell. \tag{4}$$

Така, физичката задача на треперење на жицата се сведува на следнава математичка задача: да се најде она решение $u(x,t)$ на (1), што ги задоволува граничните услови (3) и почетните услови (4).

Теориски е можно да се разгледува треперењето на доволно долга ("бесконечна") жица; во тој случај, за решавањето на таа задача, доволна е равенката (1) и почетните услови (4). (Оваа задача се вика задача на Коши.)

Равенката (1) опишува осцилаторни процеси во случај на еднодимензионални тела. Голем број осцилаторни процеси (електромагнетни, звучни и други осцилации) во тридимензионалниот случај доведуваат до бранова равенка:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x,y,z,t). \tag{5}$$

Со помош на симболот Δ, наречен Лапласов оператор,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \text{*)} \tag{6}$$

равенката (5) може да се напише кратко:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f.$$

Ако u не зависи од z, тогаш се добива дводимензионална бранова равенка, наречена равенка на осцилирање на мембрана:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t), \tag{7}$$

а ако u не зависи од y и z, тогаш се добива равенката (1´), односно (2).

За ПДР (2), којашто е хомогена, може да се најде општото решение со помош на методот од §9.1:

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at) \tag{8}$$

(наречено решение на Даламбер). Специјално, за $f_1(x-at)=A\sin k(x-at)$ и $f_2(x+at)=A\sin k(x+at)$ се добива партикуларното решение

$$u(x,t) = 2A\cos kat\cdot\sin kx, \tag{9}$$

кое се применува во задачи од електротехниката.

II. Телеграфска равенка. Равенката

$$w_{xx} = LCw_{tt} + (LG+RC)w_t + RGw \tag{10}$$

се вика телеграфска равенка (R е отпорност, L - индуктивност, C - капацитивност, G - загуба на изолацијата). Со смената

$$w(x,t) = e^{-\mu t}u(x,t),$$

каде што u(x,t) е нова функција, а μ е константа која треба да се избере така што да исчезне членот што го содржи u_t, се доаѓа до равенката (при $\mu = R/L$):

$$u_{tt} = a^2u_{xx} \quad (a^2 = \frac{1}{LC}),$$

т.е. до еднодимензионалната бранова равенка (2).

*) Во некои книги, наместо Δ, се употребува симболот ∇^2.

Равенката (10), која се јавува и во други форми (в. §8.1: $u_{xx}=RCu_t$, $i_{xx}=RCi_t$ кога G се занемари) има основно значење при изучувањето на квазистационарните електрични осцилации по кабли.

III. Равенка на топлоспроводливост. При разгледување на задачата за распространување на топлината во загреано цврсто тело се јавува ПДР

$$c\rho u_t = (ku_x)_x + (ku_y)_y + (ku_z)_z + F(x,y,z,t), \qquad (11)$$

наречена <u>равенка на топлоспроводливоста</u>; притоа, со $u=u(x,y,z,t)$ е означена температурата во точката (x,y,z) во моментот t, со k - коефициентот на внатрешната топлоспроводливост ($k>0$), со c - специфичната топлина, со ρ - густината на материјалот и со F - густината на изворите на топлина во телото, т.е. F е количеството топлина што се издвојува или апсорбира во единица волумен и единица време.

Ако телото е хомогено, тогаш c,ρ и k се константи, па ставајќи $a^2 = k/c\rho$, $f = F/c\rho$, (11) добива вид:

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,y,z,t). \qquad (12)$$

Ако температурата u зависи само од координатите x,y,t (во случај на тенка хомогена плоча), тогаш равенката (12) има вид:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t), \qquad (13)$$

а во случај на (еднодимензионална) прачка:

$$u_t = a^2u_{xx} + f(x,t). \qquad (14)$$

Ако во телото нема извори на топлина, тогаш $F=0$, па (12), (13) и (14) имаат вид соодветно:

$$u_t = a^2\Delta u; \quad u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy}); \quad u_t = a^2u_{xx}. \qquad (15)$$

IV. Равенка на Лаплас. Во специјалниот случај, при задачата за распространување на топлината во хомогено тело, кога температурата е стационарна (т.е. не се менува со времето), имаме $u=u(x,y,z)$. Тогаш $u_t \equiv 0$, па равенката (12) добива вид:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Phi(x,y,z), \qquad (16)$$

$\Phi = -f/a^2$; ако, покрај тоа, во телото нема извори на топлина се добива равенката:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \text{ т.е. } \Delta u = 0. \qquad (17)$$

Равенката (16) се вика <u>равенка на Пуасон</u>, а (17) - <u>равенка на Лаплас</u>.

Аналогно, од (13) се добиваат дводимензионалните равенки на Пуасон и Лаплас:

$$u_{xx} + u_{yy} = \Phi(x,y), \qquad u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{18}$$

Кон граничните задачи на равенките на Пуасон и Лаплас се сведуваат и многу други стационарни задачи од: електростатиката, магнетостатиката, хидродинамиката и од други области.

Задачи: 9.15-9.17; 9.88-9.102

§9.5. МЕТОДИ ЗА РЕШАВАЊЕ ЛИНЕАРНИ ПДР

Постојат многу методи за решавање проблеми со гранични услови за линеарни ПДР. Ќе наведеме неколку од најважните.

I. Општи решенија. Според овој метод, прво се наоѓа општо решение (в. §9.1 и §9.2), а потоа се бара она партикуларно решение што ги задоволува дадените гранични и почетни услови. За илустрација, в. зад. 9.15.

II. Раздвојување на променливите. При овој метод се претпоставува дека бараното решение може да се претстави како производ од непознати функции, а секоја од нив зависи само од по една од независн променливите. Ефикасноста на овој метод зависи од тоа дали ќе успееме новодобиената равенка да ја напишеме така што едната страна да зависи само од една променлива, а другата страна да зависи од преостанатите; во тој случај, секоја страна мора да биде константа. Со повторување на оваа постапка непознатите функции ќе се определат, па производот на тие решенија ќе може да се искористи за да се најде бараното решение.

За илустрација, види ја дискусијата во §8.5 и примерите решени таму.

Овој метод често користи: Фурјеови редови, фурјеови интеграли, беселови функции, лежандрови функции.

III. Методи на лапласова трансформација. В. §10.5.

Задачи: 9.13, 9.14; 9.70-9.86

Глава 10

ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Во оваа глава ќе се запознаеме со основните елементи на операционото сметање, чија примена во електротехниката, автоматското управување и други важни применети науки е мошне голема. Операционото сметање се јавува како метод за решавање линеарни диференцијални равенки, чија важност за примените ја истакнавме и порано. Основната идеја на овој метод е решавањето на една ДР да се сведе на решавање алгебарска равенка.

Меѓу повеќето трансформации т.е. методи што го сочинуваат операционото сметање, најраспространета во примената е лапласовата трансформација. Овде ќе се запознаеме, прво, со нејзините основни својства (користејќи елементи од теоријата на комплексните функции), а потоа ќе разгледаме некои примени за решавање линеарни ДР. На крајот, накратко ќе се осврнеме на лапласовите трансформации на некои специјални функции.

§10.1. ДЕФИНИЦИЈА НА ЛАПЛАСОВАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Нека функцијата $f(t)$ од реалниот аргумент t е непрекината по делови во интервалот $[0,+\infty)$, (т.е. $f(t)$ е непрекината на тој интервал или на секој конечен подинтервал има конечен број прекини од прв вид). Ако несвојствениот интеграл

$$I = \int_0^{\infty} e^{-st}|f(t)|dt$$

е конвергентен за даден реален број s, тогаш тој е конвергентен за секој број што е поголем од s. За интегралот I постојат следниве три можности:

1) постои реален број s_0, таков што I е конвергентен за секој $s > s_0$, а е дивергентен за секој $s < s_0$; во тој случај бројот s_0 ќе го викаме показател на растот на функцијата $f(t)$;

2) I е конвергентен за секој реален број s; во тој случај ќе сметаме дека показател на растот на $f(t)$ е $-\infty$;

3) I е дивергентен за секој реален број s; тогаш ќе сметаме дека показателот на растот на $f(t)$ е $+\infty$.

Ако показателот на растот на $f(t)$ е помал од $+\infty$, тогаш ќе велиме дека $f(t)$ има ограничен раст; во тој случај $f(t)$ е апсолутно интеграбилна на секој сегмент $[0,a]$, $a > 0$.

<u>Дефиниција</u>. Една функција $f(t)$ од еден реален аргумент t, којашто е непрекината по делови и има ограничен раст, ќе ја наречеме <u>оригинал</u>.

Комплексната функција $F(p)$ од комплексниот аргумент p ($p=s+i\tau$, каде што s и τ се реални броеви) определена со формулата $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$, при $\mathrm{Re}p > s_0$, каде што s_0 е показател на растот на $f(t)$, ќе ја наречеме <u>слика</u> на оригиналот $f(t)$.

Трансформацијата којашто на оригиналот $f(t)$ му ја придружува неговата слика $F(p)$,

$$\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}p > s_0,} \tag{1}$$

ја викаме <u>лапласова трансформација</u>. Притоа пишуваме:

$$f(t) \doteq F(p) \quad \text{или} \quad \mathscr{L}(f(t))=F(p).$$

Се употребуваат и ознаките: $F(p) \dashrightarrow f(t)$, $f(t) \leftarrow F(p)$.

<u>Теорема</u> (за егзистенција на сликата). а) Ако една функција $f(t)$ е непрекината по делови во интервалот $[0,+\infty)$ и го задоволува условот

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t}, \tag{2}$$

каде што M и α се реални константи, тогаш лапласовата трансформација $F(p)$ на $f(t)$ постои за секој $p=s+i\tau$ таков што $s = \mathrm{Re}p > \alpha$.

б) Уште повеќе, функцијата $F(p)$ е аналитична во полурамнината $\mathrm{Re}p > s_0$, каде што s_0 е показател на растот на $f(t)$.

<u>Доказ</u>. а) При направените претпоставки, функцијата $e^{-pt}f(t)$ е интеграбилна на секој конечен сегмент $[0,a]$, па за $s > \alpha$ имаме:

$$\left|\int_0^a e^{-pt}f(t)dt\right| \le \int_0^a |e^{-pt}||f(t)|dt \le M\int_0^a e^{(\alpha-s)t}dt = \\ = \frac{M}{\alpha-s}\cdot e^{(\alpha-s)t}\Big|_0^a,$$

од каде што, поради $\alpha-s<0$, кога $a \to +\infty$:

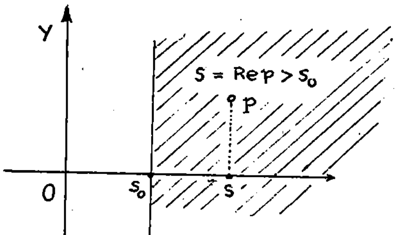
$$\int_0^\infty |e^{-pt}f(t)|dt \le M\int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}dt = \frac{M}{s-\alpha}. \tag{3}$$

Тоа значи дека несвојствениот интеграл во (1) е апсолутно конвергентен, т.е. $F(p)$ постои за $s=\mathrm{Re}p > \alpha$.

б) Доказот на овој дел е малку посложен (в. нпр. [AP], стр. 194).

Бројот s_0 за кој неравенството (2) е исполнето за кој било $\alpha=s_0+\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и не е исполнето за $\alpha=s_0-\varepsilon$ (т.е. s_0 е инфимумот на броевите

α за кои важи (2)) е показател на растот на $f(t)$; тој се вика, уште, апсциса на конвергенцијата на несвојствениот интеграл во (1). Значи, $F(p)$ е определена за секој p од полурамнината $\mathrm{Re}\,p > s_0$, а не е определена за p со $\mathrm{Re}\,p < s_0$ (црт. 1).



Црт. 1

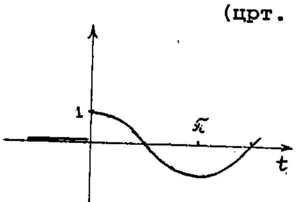
Често е потребно оригиналот $f(t)$ да се дефинира и за негативни вредности на t; во тој случај се става

$$f(t) = 0 \text{ за } t < 0.$$

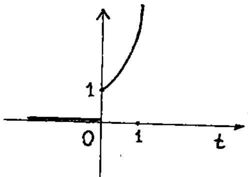
Според тоа, кога ќе кажеме дека функцијата а) $\cos t$, б) e^t е оригинал, тогаш мислиме на функцијата

$$\text{а) } f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \qquad \text{б) } f(t) = \begin{cases} e^t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

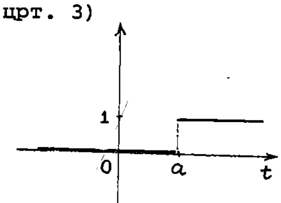
(црт. 2) (црт. 3)



Црт. 2



Црт. 3



Црт. 4

За натаму, една функција ќе ја викаме оригинал, ако:

i) $f(t)$ е непрекината по делови во $[0,+\infty)$,

ii) $f(t)$ има ограничен раст,

iii) $f(t) = 0$ за $t < 0$.

Да забележиме дека оригиналот $f(t)$ може да биде и комплексна функција (а не само реална функција) од реален аргумент. Во тој случај, за да биде оригинал функцијата $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$, треба условот i) да го задоволуваат и реалниот дел $f_1(t)$ и имагинарниот дел $f_2(t)$; условите ii) и iii) се исти како за реални, така и за комплексни функции (од реален аргумент).

Пример 1. Да се најде лапласовата трансформација на функцијата $\eta(t-a)$, $a \geq 0$ е даден реален број, определена со:

$$\eta(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a; \end{cases} \qquad \text{специјално: } \eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

($\eta(t)$ се вика хевисајдова единична функција; црт. 4.)

Условите i)-iii) за $\eta(t-a)$ очигледно се исполнети, т.е. таа е оригинал. Имаме:

$$\mathscr{L}(\eta(t-a)) = \int_0^\infty e^{-pt}\eta(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_a^\infty = \frac{e^{-ap}}{p},$$

за $\mathrm{Re}p > 0$. (Да забележиме дека показател на растот на η е $s_0=0$, т.е. (2) е задоволено при $\alpha=0$ и, на пример, $M=1$.)

Пример 2. Да се најде лапласовата трансформација на комплексната функција (од аргумент t):

$$f(t) = e^{at}, \quad a = a_1+a_2i \quad \text{е даден комплексен број.}$$

Согласно со условот iii), $f(t)$ е нула при $t<0$. Условите i) и ii) се исполнети, при што, поради

$$e^{at} = e^{a_1t}.(\cos a_2t+i\sin a_2t),$$

имаме $|e^{at}| = e^{a_1t}$, па во (2) можеме да ставиме $M=1$ и $\alpha=a_1$. Значи, лапласова трансформација на $f(t)$ постои. Имаме:

$$\int_0^\infty e^{-pt}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t}dt = -\frac{1}{p-a}.e^{-(p-a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p-a},$$

само ако $e^{-(p-a)t} \to 0$ при $t\to\infty$, а тоа важи при $\mathrm{Re}(p-a) = \mathrm{Re}p-a_1 > 0$, т.е. при $\mathrm{Re}p > a_1$. Значи;

$$\mathscr{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a} \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}p > \mathrm{Re}a.$$

Специјално:

1) за $a=0$, $\mathscr{L}(1) = \frac{1}{p}$, $\mathrm{Re}p > 0$;

2) за $a=a_1+0i$, $\mathscr{L}(e^{a_1t}) = \frac{1}{p-a_1}$, $\mathrm{Re}p > a_1$;

3) $a=0+ia_2$, $\mathscr{L}(e^{ia_2t}) = \frac{1}{p-a_2i}$, $\mathrm{Re}p > 0$.

** Забелешка. Условот $\mathrm{Re}p > \alpha$ во теоремата 1 за егзистенција на лапласовата трансформација на дадена функција $f(t)$ е доволен, но не е неопходен. На пример, во добиената формула (4): $e^{at} \fallingdotseq 1/(p-a)$ десната страна е аналитична функција за сите вредности на p, освен за $p=a$, каде што таа има пол. Така е и во многу други случаи: функцијата $F(p)$ е определена и аналитична не само во полурамнината $\mathrm{Re}p > \alpha$ (каде што интегралот во (1) е апсолутно конвергентен), туку и во знатно поголем дел од комплексната рамнина, најчесто во целата рамнина, освен во изолираните сингуларни точки на $F(p)$.

Да забележиме дека која било слика $F(p)$ се стреми кон нула кога $p\to\infty$ во насока на реалната оска, т.е. кога $s=\mathrm{Re}p \to \infty$. Навистина, од неравенството (3) имаме

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\right| \le \frac{M}{s-\alpha} \longrightarrow 0 \quad \text{кога} \quad s\to\infty. \tag{4}$$

Специјално, ако $F(p)$ е аналитична во бесконечната точка, тогаш $F(p)\to 0$ кога $p\to\infty$ по која било насока (а не само кога $s\to\infty$), т.е.

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = 0.$$

Со други зборови, ако $F(p)$ е аналитична во $p=\infty$, тогаш таа има нула во бесконечната точка. **

§10.2. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ЛАПЛАСОВАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА

1° (Теорема за линеарност). Ако $f_1(t)$ и $f_2(t)$ се оригинали, а c_1 и c_2 константи, тогаш:

$$\mathscr{L}(c_1f_1+c_2f_2) = c_1\mathscr{L}(f_1) + c_2\mathscr{L}(f_2).$$

За докжување се користи дефиницијата (1) од §10.1 и добро познатото својство на адитивност кај интегралите (интеграл од збир е збир од интеграли, а константа се извлекува пред знакот за интеграл). □

Пример 1. $\mathscr{L}(2\eta(t) + 3e^{-4t}) = 2\mathscr{L}(\eta(t) + 3\mathscr{L}(e^{-4t}) =$

$$= 2\cdot\frac{1}{p} + 3\cdot\frac{1}{p+4} = \frac{2}{p} + \frac{3}{p+4}.\ \|$$

Пример 2. Како примена на теоремата 1° ќе ги најдеме сликите на тригонометриските и хиперболичните функции. По формулите на Ојлер:

$$\sin at = \frac{1}{2i}(e^{iat}-e^{-iat}),\quad \cos at = \frac{1}{2}(e^{iat}+e^{-iat}), \tag{1}$$

за $a\in\mathbb{R}$. Користејќи ја формулата(3) во примерот 2 од §10.1: $e^{at} \risingdotseq 1/(p-a)$ и применувајќи ја теоремата за линеарност, добиваме:

$$\mathscr{L}(\sin at) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia}\right) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$\mathscr{L}(\cos at) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia}\right) = \frac{p}{p^2+a^2},\quad \operatorname{Re}p>0.$$

Аналогно, од $\operatorname{sh}at = \frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at})$, $\operatorname{ch}at = \frac{1}{2}(e^{at}+e^{-at})$, $a\in\mathbb{R}$, добиваме:

$$\mathscr{L}(\operatorname{sh}at) = \frac{a}{p^2-a^2},\quad \mathscr{L}(\operatorname{ch}at) = \frac{p}{p^2-a^2},\quad \operatorname{Re}p>a.\ \|$$

2° (Диференцирање на оригиналот). Ако $f'(t)$ е оригинал и $f(t)\risingdotseq F(p)$, тогаш:

$$\mathscr{L}(f'(t)) = p\mathscr{L}(f) - f(0) = pF(p) - f(0).$$

Специјално, ако $f(0) = 0$, тогаш $\mathscr{L}(f') = p\mathscr{L}(f)$.

Доказ. $\mathscr{L}(f') = \int_0^\infty e^{-pt}f'dt$ = [со делумна интеграција] =

$$= e^{-pt}f(t)\,\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -pe^{-pt}fdt = -f(0) + p\int_0^\infty e^{-pt}fdt =$$

$$= p\mathscr{L}(f) - f(0) = pF(p) - f(0).\ □$$

Од 2°, со индукција по n, добиваме:

2'. Ако $f^{(n)}(t)$ е оригинал, тогаш

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n\mathcal{L}(f) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \square$$

Пример 3. Да ја решиме ДР

$$f' + 4f = 0, \quad f(0) = 3; \quad f = f(t).$$

Според 2°, имаме:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0) = pF(p) - 3;$$

$$(pF(p)-3) + 4F(p) = 0, \quad (p+4)F(p) = 3, \quad F(p) = \frac{3}{p+4};$$

според примерот 1, имаме: $f(t) \doteq 3e^{-4t}$. ||

Како последица од 2°, добиваме:

3° (Интегрирање на оригиналот). Нека $f(t) \doteq F(p)$ и нека $g(t) = \int_0^t f(t)dt$. Тогаш:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f) = \frac{1}{p}F(p).$$

Доказ. Бидејќи $g'(t) = f(t)$, користејќи го 2°, имаме:

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g') = p\mathcal{L}(g) - g(0) = p\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right),$$

од каде што следува горниот заклучок. $\square$

Со индукција по n се покажува дека:

3' (n интегрирања на оригиналот).

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \ldots \left(\int_0^t f(t)dt\right)\ldots dt\right] = \frac{1}{p^n}\mathcal{L}(f). \ \square$$

Да забележиме дека операциите диференцирање и интегрирање (кај оригиналите), според 2° и 3°, се сведуваат на обично множење и делење (кај сликите).

Пример 4. Со помош на 3°, добиваме:

$$\mathcal{L}(c) = c\int_0^t e^{-pt}dt = \frac{c}{p} \quad (c = \text{конст.}); \ \mathcal{L}(1) = \frac{1}{p};$$

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t dt\right) = \frac{1}{p}\cdot\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p^2};$$

$$\mathcal{L}(t^2) = \mathcal{L}\left(2\int_0^t t\,dt\right) = \frac{2}{p}\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{2!}{p^3};$$

....

$$\mathcal{L}(t^n) = \mathcal{L}\left(n\int_0^t t^{n-1}dt\right) = \frac{n\cdot(n-1)!}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}. \ ||$$

4° (Теорема на сличност - промена на размерот). За кој било реален број $a>0$:

$$f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Доказ. Имаме:

$$f(at) \doteq \int_0^\infty f(at)e^{-pt}dt = [at=u,\ dt = \frac{1}{a}du] = $$
$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)e^{-(p/a)u}du = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right). \ \square$$

Пример 5. Со помош на 4°, а знаејќи дека (в. Пр. 2) $\mathscr{L}(\sin t) = 1/(p^2+1)$, да најдеме $\mathscr{L}(\sin at\cdot\cos bt)$.

Бидејќи $\sin at\cdot\cos bt = \frac{1}{2}[\sin(a-b)t + \sin(a+b)t]$ и

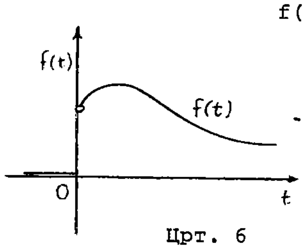
$$\mathscr{L}[\sin(a-b)t] = \frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{a-b}\right)^2+1} = \frac{1}{a-b}\cdot\frac{(a-b)^2}{p^2+(a-b)^2} = \frac{a-b}{p^2+(a-b)^2}$$

$$\mathscr{L}[\sin(a+b)t] = \frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{a+b}\right)^2+1} = \frac{a+b}{p^2+(a+b)^2},$$

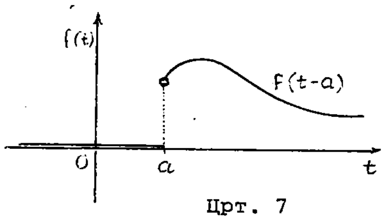
$$\mathscr{L}(\sin at\cdot\cos bt) = \frac{a(p^2+a^2-b^2)}{[p^2+(a-b)^2][p^2+(a+b)^2]}. \ \|$$

5° (Реална транслација - задоцнување). За кој било $a>0$

$$f(t-a) \doteq e^{-pa}F(p).$$



Црт. 6



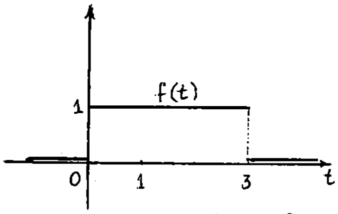
Црт. 7

Доказ. $f(t-a) \doteq \int_0^\infty f(t-a)e^{-pt}dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-pt}dt =$

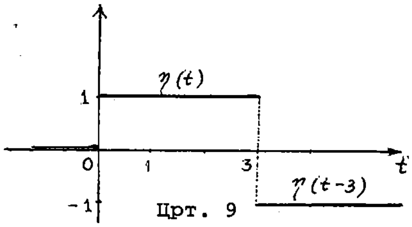
$$= [u=t-a] = \int_0^\infty f(u)e^{-p(u+a)}du = e^{-pa}\int_0^\infty f(u)e^{-pu}du = e^{-pa}F(p). \ \square$$

Врз основа на оваа теорема може да се најдат сликите на многу функции, специјално на функции што опишуваат импулсни процеси.

Пример 6. Да ја примениме теоремата 5° за наоѓање сликата на единичниот импулс $f(t)$, којшто дејствува во интервал на време од 3 (сек.): $f(t) = 1$ ако $0 \le t < 3$, $f(t) = 0$ за $t<0$ и $t \ge 3$ (црт. 8). Оваа функција може да се разгледува како збир на две компонентни функции,



Црт. 8



Црт. 9

претставени со единичната функција, како на црт. 9. Значи $f(t) = \eta(t) - \eta(t-3)$, па:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\eta(t)) - \mathcal{L}(\eta(t-3)) = \frac{1}{p} - e^{-3p}.\frac{1}{p}. \parallel$$

<u>6°</u> (<u>Комплексна транслација</u>). За кој било $a \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a).$$

За $a \in \mathbb{R}$ и $a > 0$, 6° се вика <u>теорема на придушување</u>.

<u>Доказ</u>. $e^{-at}f(t) \doteq \int_0^\infty e^{-pt}e^{-at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(p+a)t}f(t)dt = F(p+a)$. □

<u>Пример 6</u>. Користејќи ја теоремата за комплексна транслација, да ги најдеме сликите на функциите: а) $e^{at}t^n$, б) $e^{-at}\cos bt$.

а) $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$ (Пр. 4); $e^{at}t^n \doteq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $n=0,1,2,\ldots$

б) $\cos bt \doteq \frac{p}{p^2+b^2}$ (Пр. 2); $e^{-at}\cos bt \doteq \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$. $\parallel$

<u>7°</u> (<u>Периодичен оригинал</u>). Ако $f(t)$ е периодичен оригинал со период T, тогаш $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt}f(t)dt.$ (2)

<u>Доказ</u>. Бидејќи: $f(t) = 0$ за $t < 0$, $f(t) - f(t-T) = f(t)$ за $0 < t < T$ и $f(t) - f(t-T) = 0$ за $t > T$, имаме:

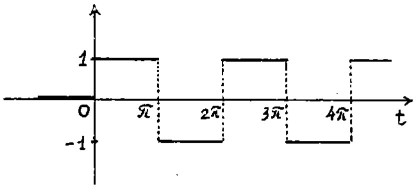
$$\mathcal{L}[f(t) - f(t-T)] = \int_0^\infty [f(t) - f(t-T)]e^{-pt}dt = \int_0^T f(t)e^{-pt}dt,$$

$$\mathcal{L}(f) - e^{-pT}\mathcal{L}(f) = \int_0^T fe^{-pt}dt,$$

од каде што, по средувањето, ја добиваме (2). □

<u>Пример 7</u>. Со помош на (2), да ја најдеме сликата на:

$$f(t) = f(t+2\pi) = \frac{\sin t}{|\sin t|} = \begin{cases} 1, & 2k\pi < t < (2k+1)\pi, \\ -1, & (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Црт. 10

$k=0,1,2,\dots$ (црт. 10); оваа функција е наречена <u>правоаголен синус</u>.

Имаме:

$$f(t) \doteq \frac{1}{1-e^{-2\pi p}} \int_0^{2\pi} e^{-pt} f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left[\int_0^{\pi} e^{-pt}dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-pt}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left[\frac{1}{p}(-e^{-\pi p}+1+e^{-2\pi p}-e^{-\pi p})\right] = \frac{(1-e^{-\pi p})^2}{p(1-e^{-2\pi p})} =$$

$$= \frac{1}{p}\cdot\frac{1-e^{-\pi p}}{1+e^{-\pi p}} = \frac{1}{p}\ \mathrm{th}\ \frac{\pi p}{2}.$$

<u>Задачи</u>: 10.7-10.15; 10.34-10.52

Значи: $\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{|\sin t|}\right] = \frac{1}{p}\cdot \mathrm{th}\ \frac{\pi p}{2}$. ||

§10.3. НАТАМОШНИ СВОЈСТВА

За добивање поголеми можности за наоѓање на сликите, се покажува за згодно да се разгледуваат оригинали и слики што зависат од параметар.

Нека функцијата $f(t,a)$ при секоја фиксирана вредност на a е оригинал и нејзината слика е

$$F(p,a) \doteq \int_0^{\infty} f(t,a)e^{-pt}dt. \tag{1}$$

Ќе претпоставиме дека функцијата $f(t,a)$ е непрекината на множеството D: $t \geq 0$, $c \leq a \leq d$ и дека интегралот $\int_0^{\infty} f_a'(t,a)dt$ е униформно конвергентен на сегментот $[c,d]$. Тогаш во (1) можеме да диференцираме по параметарот a под знакот за интеграл (в. [ЧУ], кн. III, стр. 128, теорема 22^0), т.е. точно е равенството:

$$\frac{\partial F(p,a)}{\partial a} = \int_0^{\infty} \frac{\partial f(t,a)}{\partial a} e^{-pt}dt \tag{2}$$

Овој резултат дава можност да се формулира следнава теорема:

<u>8^0</u> (<u>Диференцирање по параметар</u>). Ако при која било вредност на a, на оригиналот $f(t,a)$ му одговара слика $F(p,a)$, тогаш:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial f(t,a)}{\partial a}\right) = \frac{\partial F(p,a)}{\partial a}. \quad \square$$

** <u>Забелешка</u>. За утврдување дали еден несвојствен интеграл е униформно конвергентен, може корисно да послужи следниот резултат.

Нека $g(x)$ е позитивна, непрекината функција во интервалот $[a,+\infty)$ и нека $|f(x,y)| \leq g(x)$ за секој $x \geq a$ и секој $y \in [c,d]$. Ако $f(x,y)$ е интеграбилна по x на секој сегмент $[a,b]$, $b > a$, и ако интегралот $\int_a^{\infty} g(x)dx$ е конвергентен, тогаш, интегралот

$\int\limits^{\infty} f(x,y)dx$ е униформно конвергентен на сегментот $[c,d]$ (в. [ФИ], кн. II, стр. a 685; в. и [ЧУ], кн. III, стр. 128). **]

Пример 8. Да ги најдеме сликите на функциите $t\sin at$ и $t\cos at$. Од

$$\cos at \risingdotseq \frac{p}{p^2+a^2}; \quad \sin at \risingdotseq \frac{a}{p^2+a^2},$$

диференцирајќи одлево и оддесно по параметарот a, добиваме

$$-t\sin at \risingdotseq -\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}; \quad t\cos at \risingdotseq \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}. \ \|$$

$\underline{9^0}$ (Диференцирање на сликата, т.е. множење на оригиналот со t).

Ако $f(t) \risingdotseq F(p)$, тогаш

$$\mathscr{L}(-tf(t)) = F'(p); \quad (-1)^n t^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p). \qquad (3)$$

Доказ. Го диференцираме по p равенството

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt:$$

$$F'(p) = \int_0^\infty e^{-pt}[-tf(t)]dt = \mathscr{L}(-tf(t)).$$

Применувајќи го овој резултат последователно, добиваме:

$$t^2f(t) = -t(-tf(t)) \risingdotseq F''(p), \ -t^3f(t) \risingdotseq F'''(p), \dots$$

и, индуктивно, $(-1)^n t^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p)$. □

Пример 9. Да ја најдеме $\mathscr{L}(t^2 \operatorname{sh} at)$.

Имајќи го предвид примерот 2, според (3), имаме

$$(-1)^2 t^2 \operatorname{sh} at \risingdotseq \left(\frac{a}{p^2-a^2}\right)'' = \left(-\frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}\right)' = -\frac{2a(p^2-a^2)-8ap^2}{(p^2-a^2)^3}$$

па

$$\mathscr{L}(t^2f(t)) = \frac{2a^2(3p^2-a^2)}{(p^2-a^2)^3}. \ \|$$

$\underline{10^0}$ (Интегрирање на сликата, т.е. делење на оригиналот со t).

Ако $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\frac{f(t)}{t}$ е оригинал, тогаш

$$\mathscr{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^\infty F(z)dz \quad \left(\text{каде што } \int_p^\infty = \lim_{\operatorname{Re}P\to\infty} \int_p^P\right). \qquad (4)$$

Доказ. Нека $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \phi(p)$. Тогаш, според 9^0, $f(t) \risingdotseq -\Phi'(p)$, па значи, $-\phi'(p) = F(p)$. Интегрирајќи го ова равенство во границите од p до P, добиваме

$$\Phi(p) - \phi(P) = \int_p^P F(z)dz.$$

Следствено, земајќи лимес од двете страни кога $\operatorname{Re}P \to +\infty$ и имајќи предвид дека $\phi(P) \to 0$ (в. (4) од §10.1), ќе добиеме

$$\Phi(p) = \int_p^{\infty} F(z)dz. \; \square$$

Теоремата 10° има и друга форма:

10´. Ако $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t}$ постои, тогаш важи (4). $\square$

Пример 10. Да најдеме $\mathcal{L}(\frac{\sin t}{t})$.

Од $\sin t \risingdotseq 1/(p^2+1)$, според 10°, добиваме

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg}\Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p;$$

значи, $\mathcal{L}(\frac{\sin t}{t}) = \operatorname{arctg}\frac{1}{p}$. ||

Од теоремата 2° (диференцирање на оригиналот) се добиваат наредните две последици.

11° (Почетна вредност). Ако $f(t) \risingdotseq F(p)$, $f'(t)$ е оригинал и постои $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0)$, тогаш

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p). \tag{5}$$

Доказ. Бидејќи $f'(t)$ е оригинал, според 2°, имаме

$$f'(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t)dt = pF(p) - f(0),$$

па бидејќи $\lim_{p\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t)dt = 0$, добиваме

$$0 = \lim_{p\to\infty} [pF(p) - f(0)], \text{ т.е. (5).} \; \square$$

Според тоа, почетната вредност на оригиналот $f(0)$ може да се најде по неговата слика $F(p)$ од равенството

$$f(0) = \lim_{p\to\infty} pF(p). \tag{5´}$$

Аналогно се докажува теоремата

12° (Крајна вредност). Ако $f(t) \risingdotseq F(p)$, $f'(t)$ е оригинал и постои $\lim_{t\to\infty} f(t)$, тогаш

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t). \; \square \tag{6}$$

Значи, за непериодични процеси, вредноста на стабилизираниот оригинал, $f(\infty)$, може да се најде од неговата слика со помош на равенството

$$f(\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p). \tag{6´}$$

Пример 11. За функцијата $f(t) = 3e^{-2t}+e^{-t}$ почетната вредност е $f(0) = 3e^{-2\cdot 0} + e^{-0} = 4$, а крајната вредност е $f(\infty) = 0$. Истите резултати се добиваат и по формулите во 10° и 11°.

Да забележиме дека почетната вредност на функцијата cost е 1, но крајната вредност не постои, зашто $\lim_{t\to\infty} \cos t$ не постои (т.е. формулата од 12° не може да се примени). ||

За наоѓање на оригиналот, којшто одговара на производ од слики, се воведува поимот конволуција.

Конволуција на две непрекинати функции f(t) и g(t), $0 \le t < \infty$ (се означува со $f(t)*g(t)$ или со $f*g$) се вика функцијата $f*g$, определена со интегралот:

$$f*g \underset{=}{\mathrm{Df}} \int_0^t f(u)g(t-u)du. \tag{7}$$

Пример 12. Да се најде конволуцијата а) $f*g$, б) $g*f$ за функциите $f(t) = t$ и $g(t) = e^t$.

а) $f*g = \int_0^t ue^{t-u}du = -ue^{t-u}\Big|_0^t - \int_0^t e^{t-u}du =$

$= -t - e^{t-u}\Big|_0^t = -t - 1 + e^t.$

б) $g*f = \int_0^t e^u(t-u)du = (t-u)e^u\Big|_0^t + \int_0^t e^u du =$

$= - t - e^u\Big|_0^t = - t + e^t - 1.$

Значи, $f*g = t*e^t = e^t - t - 1 = e^t*t = g*f.$ ||

** Се покажува, општо, дека:

а) $f*g = g*f$; б) $f*(g*h) = (f*g)*h$;

в) $f*(g+h) = f*g + f*h$.

г) Ако f(t) и g(t) се оригинали (со показатели на растот s_1 и s_2 соодветно), тогаш и $f*g$ е оригинал (со показател на растот $s = \max(s_1,s_2)$. **

На крајот, во врска со поимот конволуција, ќе наведеме уште една важна теорема.

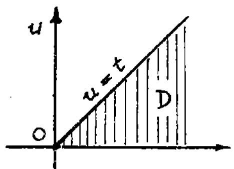
13° (Множење на сликите). Ако $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$, тогаш на конволуцијата $f*g$ ѝ одговара производот $F(p)G(p)$ на сликите, т.е.

$$\mathscr{L}(f*g) = \mathscr{L}(f)\mathscr{L}(g). \tag{8}$$

Доказ. Имаме:

$\mathscr{L}(f*g) = \int_0^\infty e^{-pt}f*g\, dt =$

$= \int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right]dt.$



Црт. 11

Последниот израз ќе го разгледуваме како двоен интеграл по областа D: $0 \le t < \infty$, $0 \le u \le t$ (црт. 11); тој конвергира апсолутно во D, па може да се смени редоследот на интегрирањето

$(0 \le u < \infty,\ u \le t < \infty)$:

$$f*g \doteq \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-pt} f(u) g(t-u) dt\right) du.$$

Со смената $t-u = v$, $dt = dv$, добиваме

$$\mathcal{L}(f*g) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-p(u+v)} f(u) g(v) dv\right) du =$$

$$= \left(\int_0^\infty e^{-pu} f(u) du\right) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-pv} g(v) dv\right) = F(p) G(p). \ \Box$$

Ограничувајќи се на веќе познати слики, теоремата за множење на сликите може да се искористи за наоѓање оригиналот.

Пример 13. Да се најде оригиналот чија слика е $H(p) = \dfrac{1}{p^2(p-1)}$.

Имајќи предвид дека $\dfrac{1}{p^2} \doteq t$ и $\dfrac{1}{p-1} \doteq e^t$, според 13° и примерот 12, добиваме

Задачи: 10.16-10.21
10.53-10.59

$$H(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1} \doteq t*e^t = e^t - t - 1. \ ||$$

§10.4. ИНВЕРЗНА ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Да ја разгледаме, сега, обратната задача: за дадена функција $F(p)$ да се најде функцијата $f(t)$, така што $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$.

Може да се покаже дека:

Ако $f(t)$ и $g(t)$ се непрекинати функции за $t > 0$ и ако $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, тогаш $f(t) = g(t)$.

Според тоа, ако за дадена функција $F(p)$ постои непрекината функција $f(t)$, таква што $\mathcal{L}(f) = F(p)$, тогаш $f(t)$ е единствена непрекината функција со тоа својство; затоа пишуваме

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$$

и велиме дека $f(t)$ е *инверзна* лапласова трансформација на $F(p)$.

** Ако $f(t)$ е оригинал, а $F(p)$ нејзината слика, тогаш во точките во кои $f(t)$ е непрекината, важи

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dt, \tag{1}$$

каде што се интегрира по која било права $\text{Re}\,p = s$ $(p = s + i\infty)$, којашто лежи во полурамнината во која лапласовиот интеграл е конвергентен (црт. 1, §10.1). (Формулата (1) се вика *формула за инверзија*; в. нпр. [AH], стр. 522.) **

Теориски, ако $F(p)$ е позната, инверзната трансформација $f(t)$ може да се определи со помош на (1). Меѓутоа, во практиката е далеку полесно да се определи $f(t)$ со разложување на $F(p)$ во збир од попрости функции по p, чии лапласови трансформации може да се "препознаат".

Тоа е особено згодно во случаите кога $F(p)$ е дробнорационална функција,

$$F(p) = \frac{U(p)}{V(p)} \tag{2}$$

каде што полиномот $U(p)$ има помал степен од полиномот $V(p)$, а $U(p)$ и $V(p)$ немаат заеднички корени.

Наоѓајќи ги корените на $V(p)$, т.е. претставувајќи го $V(p)$ со: $V(p) = c(p-a)^k(p-b)^m\ldots$, $F(p)$ можеме да ја претставиме во обликот:

$$F(p) = \frac{A_1}{(p-a)^k} + \frac{A_2}{(p-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{p-a} + \frac{B_1}{(p-b)^m} + \frac{B_2}{(p-b)^{m-1}} + \ldots \tag{3}$$

Откако ќе ги определиме $A_i, B_j, \ldots$ (нпр. по методот на неопределени коефициенти), ќе добиеме:

$$\mathscr{L}^{-1}(F(p)) = e^{at}(A_1+A_2t+\ldots) + e^{bt}(B_1+B_2t+\ldots) + \ldots \tag{4}$$

Коефициентите $A_i, B_j, \ldots$ во (3) можеме да ги најдеме како остатоците на една комплексна функција. Имено, ако

$$V(p) = (p-a)^k W(p), \quad (W(a) \neq 0,$$

тогаш $A_1, \ldots, A_k$ се определуваат со:

$$A_1 = \frac{U(a)}{W(a)}, \quad A_2 = \frac{1}{1!}\left[\frac{U(p)}{W(p)}\right]'_{p=a}, \ldots, A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{U(p)}{W(p)}\right]^{(k-1)}_{p=a}. \tag{5}$$

Слично за $B_1, \ldots, B_m, \ldots$

(Формулите (3)-(5) ја прават основата на т.н. <u>теорема за разложување и инверзија</u>.)

<u>Пример 1</u>. Да ја најдеме $\mathscr{L}^{-1}(F(p))$, каде што

$$F(p) = \frac{p^2-p+7}{(p-2)(p+1)^2}$$

Во овој случај $U(p) = p^2-7p+7$ и $V(p) = (p-2)(p+1)^2$ што значи дека $\mathrm{st}\, U = 2 < 3 = \mathrm{st}\, V$ и V има еден прост корен, $a=2$, и еден двоен корен, $b=-1$; $F(p)$ ја претставуваме во обликот (3):

$$\frac{p^2-p+7}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{A}{p-2} + \frac{B_1}{(p+1)^2} + \frac{B_2}{p+1} \;/\cdot (p-2)(p+1)^2$$

$$p^2-p+7 \equiv A(p+1)^2 + B_1(p-2) + B_2(p-2)(p+1).$$

Ставајќи последователно $p = 2$, $p = -1$ и $p = 0$, добиваме:

$$9 = 9A, \quad 9 = -3B_1, \quad 7 = A - 2B_1 - 2B_2$$

од каде што $A = 1$, $B_1 = -3$, $B_2 = 0$. Значи, па:

$$F(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{3}{(p+1)^2},$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2}\right) - 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)^2}\right) = e^{2t} - 3te^{-t}.$$

Коефициентите A, B_1 и B_2 можевме да ги најдеме и по формулите (5).||

§10.5. ПРИМЕНА ЗА РЕШАВАЊЕ ДР

Лапласовата трансформација наоѓа најголема примена при решавањето на линеарните ДР со константни коефициенти. Имено, користејќи ја теоремата за диференцирање на оригиналот (2^o и $2'$, §10.2), една линеарна ДР со константни коефициенти, при дадени почетни услови, се сведува на обична, алгебарска равенка (која во принцип е полесна за решавање од соодветната ДР). Применувајќи инверзна лапласова трансформација на решението од таа алгебарска равенка, се добива решението на дадената ДР при дадените почетни услови.

Ситуацијата е аналогна кај линеарните системи ДР, а извесни олеснувања се постигнуваат и кај линеарните парцијални ДР со константни коефициенти.

За илустрација ќе ја земеме нехомогената линеарна ДР од втор ред со константни коефициенти

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = f(t) \tag{1}$$

и ќе го најдеме решението при почетните услови

$$x(0) = x_o, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_o \tag{2}$$

Според теоремата за диференцирање (2^o од §10.2) имаме:

$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad \dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - x_o, \quad \ddot{x}(t) \risingdotseq p^2X(p) - x_o - \dot{x}_o.$$

Применувајќи ја теоремата за линеарност, од оригиналите во (1) преминуваме кон нивните слики и ја добиваме операторската равенка

$$p^2X(p) - px_o - \dot{x}_o + a_1[pX(p) - x_o] + a_2X(p) = F(p), \tag{3}$$

којашто е алгебарска равенка по непознатата функција $X(p)$. Решавајќи ја, наоѓаме:

$$(p^2+a_1p+a_2)X(p) = F(p) + px_o + \dot{x}_o + a_1x_o,$$

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2} + \frac{px_o+\dot{x}_o+a_1x_o}{p^2+a_1p+a_1}. \tag{4}$$

(Во случај на нулти почетни услови, т.е. $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$, вториот собирок од десната страна на (4) е 0.)

Натаму, користејќи ги теоремите за разложување и инверзија (§10.4), од (4) преминуваме на оригиналот $x(t)$. Постапката е сосема иста за линеарните ДР од n-ти ред.

(Нема потреба да се помни формулата (4), нужно е само да се запомни постапката.)

<u>Пример 1</u>. Да го најдеме решението на ДР:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = (-18t + 15)e^{-t}$$

при $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=-1$. Имаме:

$$\mathcal{L}(x) = X, \quad \mathcal{L}(\dot{x}) = pX-1, \quad \mathcal{L}(\ddot{x}) = p^2X - p + 1,$$

$$\mathcal{L}(-18te^{-t}) = -\frac{18}{(p+1)^2}, \quad \mathcal{L}(15e^{-t}) = \frac{15}{p+1},$$

па операторската равенка за дадената ДР ќе биде:

$$(p^2-3p+2)X - p + 4 = -\frac{18}{(p+1)^2} + \frac{15}{p+1},$$

$$X = \frac{p^3-2p^2+8p-7}{(p+1)^2(p-2)(p-1)} = \frac{p^2-p+7}{(p+1)^2(p-2)}.$$

Според примерот 1 од §10.4, имаме:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X) = e^{2t} - 3te^{-t}. \;\|$$

<u>Линеарен систем ДР</u> со константни коефициенти, со помош на лапласовата трансформација, се сведува на линеарен систем од обични равенки.

<u>Пример 2</u>. Да го решиме системот ДР:

$$\begin{cases} \dot{x} + x - y = e^t, \\ \dot{y} - x + y = e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Ќе ги искористиме: теоремата за диференцирање и за линеарност,

$$\mathcal{L}(x) = X, \quad \mathcal{L}(\dot{x}) = pX-1, \quad \mathcal{L}(y) = Y, \quad \mathcal{L}(\dot{y}) = pY-1.$$

па за дадениот систем ДР го добиваме системот оператоски равенки:

$$\begin{cases} pX - 1 + X - Y = \dfrac{1}{p-1}, \\ pY - 1 - X + Y = \dfrac{1}{p-1}; \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} (p+1)X - Y = \dfrac{p}{p-1}, \\ -X + (p+1)Y = \dfrac{p}{p-1}, \end{cases}$$

а тоа е систем од две линеарни равенки по X и Y. Решението на овој систем е:

$$X = \frac{1}{p-1} = Y;$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) = e^t = y(t).$$

Значи, решение на дадениот систем ДР, при дадените почетни услови, е $x(t) = e^t$, $y(t) = e^t$. ||

Лапласовата трансформација може да се примени и за решавање парцијални ДР.

Пример 3. Ќе ја разгледаме задачата за распространувањето на топлината во полубесконечна прачка, при температура: v_o во точката $x = 0$ и нула за $x > 0$.

Полубесконечната прачка се зема $x \geq 0$; диференцијалната равенка е:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (a > 0) \tag{a_1}$$

со условите:

1) $v(x,0) = 0$ при $x > 0$ (почетен услов)

2) $v(0,t) = v_o$ (граничен услов)

3) $\lim\limits_{x\to\infty} v(x,t) = 0.$

Ќе сметаме дека бараното решение $v(x,t)$ при кој било фиксиран $x (x > 0)$ е оригинал по променливата t:

$$v(x,t) \risingdotseq V(x,p). \tag{a_2}$$

Според теоремата за диференцирање на оригиналот, како и 1), имаме:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \risingdotseq pV - v(x,0) = pV,$$

а според теоремата за диференцирање по параметар (8^o, §10.3) сметајќи го x за параметар, од (a_2) добиваме:

$$\frac{\partial v}{\partial x} \risingdotseq \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \risingdotseq \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Заменувајќи ги сликите за изводите во (a_1), ја добиваме операторската равенка:

$$pV = a^2 \frac{d^2 V}{dx^2}, \tag{a_3}$$

при што на десната страна пишуваме обичен (втор) извод наместо парцијален, зашто p ја сметаме за константа.

Значи, земајќи лапласова трансформација на секоја страна од ДР (a_1), добиваме:

$$\int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial t} e^{-pt}dt = a^2 \int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{-pt}dt,$$

$$\left[ve^{-pt}\right]_0^\infty + p \int_0^\infty ve^{-pt}dt = a^2 \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty ve^{-pt}dt;$$

првиот член одлево, поради 1) е 0, па ја добиваме:

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{p}{a^2} V = 0. \qquad (a_4)$$

Општото решение на обичната линеарна ДР (a_4) е:

$$V = Ae^{x\sqrt{p/a}} + Be^{-x\sqrt{p/a}}. \qquad (a_5)$$

Од условот 3) константата A=0, а од условот 2):

$$V(0,t) = v_0 \int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{v_0}{p}. \qquad (a_6)$$

Според тоа, $B=v_0/p$. Така, (a_5) станува:

$$V = \frac{v_0}{p} e^{(-x/a)\sqrt{p}}. \qquad (a_6)$$

Од (a_6), преминувајќи на оригиналите, имаме

$$v(x,t) = v_0 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} e^{(-x/a)\sqrt{p}}\right). \qquad (a_7)$$

Како за $\mathrm{erf}\sqrt{t}$, каде што $\mathrm{erf}(t)$ е функција на грешката (в. IV во §10.6), може да се покаже дека

$$\left(1-\mathrm{erf}\,\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{p} e^{\alpha\sqrt{p}}.$$

Според тоа, од (a_7) го добиваме бараното решение $v(x,t)$:

$$v(x,t) = v_0\left(1-\mathrm{erf}\,\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \quad \|$$

§10.6. ЛАПЛАСОВИ ТРАНСФОРМАЦИИ НА НЕКОИ СПЕЦИЈАЛНИ ФУНКЦИИ

Во гл. 4 разгледавме некои специјални функции, како: гама-функцијата, беселоваите функции и други. Се разбира, класата специјални функции е далеку поширока отколку спомнатите таму. Со оглед на значителната примена на специјалните функции во техниката, ќе се задржиме кратко на лапласовите трансформации на некои од нив.

I. Ќе ја разгледаме, прво, функцијата

$$f(t) = t^r,$$

каде што r е даден реален број и $r > -1$. Имаме:

$$\mathcal{L}(t^r) = \int_0^\infty e^{-pt}t^r dt = [pt=u,\ pdt=du] =$$
$$= \int_0^\infty e^{-u}(\frac{u}{p})^r \frac{1}{p}\, du = \frac{1}{p^{r+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^r du,$$

а бидејќи

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{k-1}dx = \Gamma(k) \qquad (\text{в. } §4.6),$$

добиваме

$$\mathcal{L}(t^r) = \frac{\Gamma(r+1)}{p^{r+1}}, \quad p>0. \tag{1}$$

Специјално, за $r=1/2$ добиваме (в. и §4.6):

$$\mathcal{L}(t^{1/2}) = \frac{\Gamma(3/2)}{p^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}. \tag{1'}$$

II. Да најдеме $\mathcal{L}(J_o(t))$, каде што $J_o(t)$ е беселовата функција од прв вид со ред нула. Ставајќи $r=0$ во редот (в. §4.7)

$$J_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{r+2k}}{k!2^{r+2k}\Gamma(r+k+1)} \tag{2}$$

и имајќи предвид дека за $к=0,1,2,\ldots$ важи $\Gamma(к+1)=к!$, добиваме

$$J_o(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{t^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots$$

(уочи дека $2^{2к}(к!)^2 = 2^2\cdot 4^2\ldots(2к)^2$). Тогаш, имајќи го предвид (1) и $\Gamma(к+1)=к!$ при $к=0,1,2,\ldots$, добиваме:

$$\mathcal{L}(J_o(t)) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{2!}{p^3} + \frac{1}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{4!}{p^5} - \frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\frac{6!}{p^7} + \ldots$$
$$= \frac{1}{p}\left[1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{p})^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(\frac{1}{p})^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(\frac{1}{p})^6 + \ldots\right].$$

Забележуваме дека редот во средните загради е (биномниот) ред на функцијата

$$(1+1/p^2)^{-1/2} = p/\sqrt{p^2+1},$$

па

$$\mathcal{L}(J_o(t)) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{3}$$

Користејќи ја теоремата за сличност (4^o од §10.2), за кој било $a>0$, добиваме:

$$\mathcal{L}(J_o(at)) = \left[\frac{1}{a}\cdot F(\frac{p}{a})\right] = \frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}. \tag{3'}$$

Начинот на кој дојдовме до резултатот (3) се вика <u>метод на степенски редови</u>. Тој резултат може да се добие и со т.н. метод на диференцијални равенки.

Имајќи ја предвид врската

$$J_1(t) = -J_0'(t)$$

и теоремата за диференцирање на оригиналот (2^o од § 10.2), добиваме

$$\mathcal{L}(J_1(t)) = -\mathcal{L}(J_0'(t)) = -[p\,\mathcal{L}(J_0(t))-1] = 1-p/\sqrt{p^2+1},$$

т.е.

$$\mathcal{L}(J_1(t)) = \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{p^2+1}. \tag{4}$$

Може да се покаже дека

$$J_n(at) = \frac{\sqrt{p^2+a^2}-p}{a^n\sqrt{p^2+a^2}}. \tag{5}$$

III. <u>Интегрален синус</u> $Si(t)$, <u>интегрален косинус</u> $Ci(t)$ и <u>експоненцијален интеграл</u> $Ei(t)$ се дефинираат со:

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du, \tag{6}$$

$$Ci(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du, \quad Ei(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

Ќе покажеме дека

$$\mathcal{L}(Si(t)) = \frac{1}{p}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{p}. \tag{7}$$

Да ја означиме со $f(t)$ десната страна на (6). Тогаш:

$$f(0) = 0, \quad f'(t) = \frac{\sin t}{t}, \text{ т.е. } tf'(t) = \sin t.$$

Според 9^o од §10.3, а потоа 2^o од §10.2, имаме:

$$\mathcal{L}(tf'(t)) = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}(f'(t)) = -\frac{d}{dp}[pF(p)-f(0)];$$

земајќи $\mathcal{L}(tf'(t)) = \mathcal{L}(\sin t)$, добиваме:

$$-\frac{d}{dp}[pF(p)] = \frac{1}{p^2+1},$$

а по интегрирањето

$$pF(p) = -\mathrm{arctg}\,p + C. \tag{8}$$

Според теоремата за почетна вредност (11^o од §10.3) имаме:

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0) = 0,$$

така што од (8) имаме $C=\pi/2$. Следствено, од (8),

$$pF(p) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,p = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{p},$$

од каде што се добива (7).

Со помош на овој метод може да се покаже дека:

$$\mathscr{L}(\mathrm{Ci}(t)) = \frac{1}{2p}\ln(p^2+1), \qquad \mathscr{L}(\mathrm{Ei}(t)) = \frac{1}{p}\ln(p+1). \tag{9}$$

Формулите (7) и (9) можеме да ги добиеме и со помош на методот на степенски редови, аналогно како во II за беселовите функции.

IV. Функцијата

$$\Phi(t) = \mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du \tag{10}$$

се вика функција на грешката (error function), а

$$\mathrm{erfc}(t) = 1 - \mathrm{erf}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-u^2}du \tag{11}$$

се вика комплементарна функција на грешката.

Да најдеме $\mathscr{L}(\mathrm{erf}\sqrt{t})$, со помош на редови. Имаме:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}du\} &= \{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} (1-u^2+\frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \dots)du\} = \\
&= \mathscr{L}\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}(t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3} + \frac{t^{5/2}}{5\cdot 2!} - \frac{t^{7/2}}{7\cdot 3!} + \dots)\} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\{\frac{\Gamma(3/2)}{p^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3\cdot p^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5\cdot 2!p^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7\cdot 3!p^{9/2}} + \dots\} = \\
&= \frac{1}{p^{3/2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^{5/2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{p^{7/2}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{p^{9/2}} + \dots \\
&= \frac{1}{p^{3/2}}\{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{p^3} + \dots\} = \\
&= \frac{1}{p^{3/2}}(1 + \frac{1}{p})^{-1/2} = 1/p\sqrt{p^2+1}.
\end{aligned}$$

Значи:

$$\mathscr{L}(\mathrm{erf}\sqrt{t}) = \frac{1}{p\sqrt{p+1}}. \tag{12}$$

Може да се покаже дека

$$\mathscr{L}(\mathrm{erf}t) = \frac{1}{p}e^{p^2/4}\cdot\mathrm{erfc}(\frac{p}{2}). \tag{13}$$

V. Нул-функција се вика секоја функција $\mathcal{N}(t)$ таква што за секој $t > 0$ важи

$$\int_0^t \mathcal{N}(t)dt = 0. \tag{14}$$

На пример, функцијата f(t) определена со

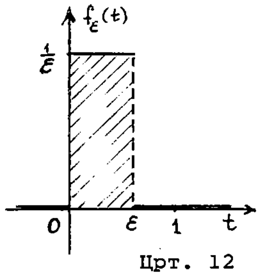
$$f(1) = 1/2, \quad f(2) = 1, \quad f(t) = 0 \quad \text{за} \quad t \neq 1;2$$

е нул-функција. За која било нул-функција $\mathcal{N}(t)$ важи:

$$\mathscr{L}(\mathcal{N}(t)) = 0. \tag{15}$$

VI. Диракова делта-функција. Да ја разгледаме функцијата

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon, \end{cases}$$



Црт. 12

каде што $\varepsilon > 0$ (црт. 12). Геометриски е очигледно дека, ако $\varepsilon \to 0$, тогаш висината на исшрафираниот правоаголник расте неограничено, но плоштината на правоаголникот, S, останува секогаш 1: $S = \varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon} = 1$, т.е.

$$S = \int_0^\infty f_\varepsilon(t)dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}dt = \frac{1}{\varepsilon}\cdot t\Big|_0^\varepsilon = 1.$$

Функцијата $f_\varepsilon(t)$ се вика правоаголен импулс.

Да забележиме дека $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty f_\varepsilon(t) = 1$, а $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t) = \infty$.

Да најдеме $\mathcal{L}(f_\varepsilon(t))$. Имаме:

$$\mathcal{L}(f_\varepsilon(t)) = \int_0^\infty e^{-pt}f_\varepsilon(t)dt = \int_0^\varepsilon e^{-pt}\cdot\frac{1}{\varepsilon}dt + \int_\varepsilon^\infty e^{-pt}\cdot 0dt =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\Big[-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big]\Big|_0^\varepsilon = \frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}.$$

Користејќи го правилото на Лопитал, добиваме:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{L}(f_\varepsilon(t)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{pe^{-p\varepsilon}}{p} = 1.$$

Да уочиме дека знаците lim и $\mathcal{L}$ во горното разгледување не може да си ги разменат местата, т.е. $\mathcal{L}(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t))$ не е дефинирано, зашто $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t)$ не постои. Сепак, се покажало корисно да се разгледува последниот лимес.

Имено, нека $g(t)$ е непрекината функција во интервалот $[0,+\infty)$. Според теоремата за средна вредност имаме

$$\int_0^\infty f_\varepsilon(t)g(t)dt = \int_0^\infty f_\varepsilon(t)g(t)dt = g(c)\int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon}dt = g(c),$$

за некој $c\in(0,\varepsilon)$. Ако $\varepsilon \to 0$, тогаш и $c \to 0$, па поради непрекинатоста на $g(t)$, $g(c) \to g(0)$. Значи:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty f_\varepsilon(t)g(t)dt = g(0).$$

Ќе го воведеме симболот $\delta(t)$ со следново значење:

$$\int_0^\infty \delta(t)g(t)dt \stackrel{Df}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty f_\varepsilon(t)g(t)dt = g(0). \tag{16}$$

Слободно речено, $\delta(t)$ „ја заменува" $f_\varepsilon(t)$ кога $\varepsilon \to 0$, т.е.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t). \tag{17}$$

Поради важноста за примените, $\delta(t)$ добил и посебно име: диракова делта функција или единична импулсна функција.

Зборувајќи математички, $\delta(t)$ не е функција во обична смисла, но дејствата со неа може да се направат строги, коректни, како со обичните функции. (Оваа "функција" спаѓа во класата обопштени функции.)

Од (16), за $g(t)=1$, добиваме дека

$$\int_0^\infty \delta(t)dt = 1, \tag{18}$$

а од претходните разгледувања следува дека

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1. \tag{19}$$

Исто така, според теоремата за реална транслација, за $a > 0$:

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-ap}. \tag{20}$$

*§10.7. ИНТЕГРАЛНИ ТРАНСФОРМАЦИИ И ОПЕРАЦИОНО СМЕТАЊЕ

Лапласовата трансформација спаѓа во класата на т.н. интегрални трансформации. Во најрпоста, но доволно општа форма, интегрална трансформација може да се дефинира на следниов начин.

Нека е дадена функција $f(t)$, дефинирана на интервалот (a,b), којшто, специјално, може да се совпаѓа со целата реална оска ($a = -\infty$, $b = +\infty$) или полуоска (на пример, $a=0$, $b=+\infty$). Интегрална трансформација на функцијата $f(t)$ се вика функцијата

$$F(\omega) = \int_a^b K(t,\omega)f(t)dt, \tag{1}$$

каде што $K(t,\omega)$ е функција, фиксирана за дадената транформација; $K(t,\omega)$ се вика јадро на трансформацијата. Ако јадрото прима комплексни вредности, тогаш и $F(\omega)$ ќе биде комплексна функција од аргументот ω. На пример, јадрото на лапласовата трансформација, $K(t,p) = e^{-pt}$, е комплексна функција од комплексниот аргумент p (и реалниот аргумент t).

За егзистенција на интегралот во (1), функцијата $f(t)$ треба да задоволува некои услови, коишто зависат од својствата на јадрото K и од интервалот (a,b).

Основната идеја за примена на лапласовата трансформација се состои во следново: со лапласовата трансформација се воспоставува соодветство меѓу оригиналите $f(t)$ и нивните слики $F(p)$, така што на определени операции над оригиналите одговараат соодветни операции над сликите, при што операциите над сликите обично се поедноставни. Така, на пример, на диференцирањето одговара обичното множење, па наместо диференцијална равенка (при оригиналот) се решава обична алгебарска равенка (при сликата).

Оваа ситуација е аналогна со основната идеја на примената на логаритмите во елементарната математика: улогата на оригинали ја имаат броевите, а улогата на сликите - нивните логаритми; притоа, на операцијата множење на броеви одговара операцијата собирање на логаритми, на делењето - одземање на логаритми итн.

Таа идеја е основа за т.н. операционо сметање. Под операционо сметање се подразбираат методи за решавање задачи, основани на следниве етапи:

1) од бараните функции се преминува на некои други функции - нивните слики;

2) над сликите се вршат операции, соодветни на некои операции над првобитно бараните функции (оттаму доаѓа и името операционо сметање);

3) по извршување на некои дејствија над сликите и по добивањето на соодветен резултат, "се враќаме назад", кон првобитно бараните функции.

Покрај лапласовата трансформација, се применуваат и други такви трансформации. Ќе наведеме некои од нив.

1. Карсон-хевисајдова трансформација. Целта на оваа трансформација е изучувањето на парот функции f(t) и F(p), сврзани со релацијата

$$F(p) = p\int_0^{\infty} e^{-pt}f(t)dt. \tag{2}$$

Сличноста на оваа трансформација со лапласовата трансформација е очигледна (разликата е само во множителот p пред интегралот), па и нејзините својства се исти како кај лапласовата трансформација. (Во техниката, сепак, се применува, скоро исклучително, лапласовата трансформација.)

2. Фурјеова трансформација. Фурјеова трансформација на функцијата f(t) се вика функцијата F(w) определена со

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt}f(t)dt \tag{3}$$

(подробно види §11.5). Нејзиното јадро е

$$K(t,w) = e^{-iwt}$$

Оваа интегрална трансформација има големи примени во техниката, а посебно во електротехниката.

3. Беселови трансформации. Интегралните трансформации од видот

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} K(\lambda t)f(t)dt, \tag{4}$$

каде што K(z) е беселова функција, се познати под името беселови трансформации. Во овој вид спаѓаат: ханкеловата

$$F_\nu(u) = \mathcal{H}_\nu[f(t)] = \int_0^{\infty} t\, J_\nu(ut)f(t)dt$$

$(0 < u < +\infty)$, маеровата и други.

4. Дискретна лапласова трансформација (z-трансформација). Во теоријата на линеарните импулсни системи, т.е. системи чијашто работа е сврзана со пренос и трансформација на низи од импулси, наоѓа примена т.н. дискретна лапласова трансформација. Карактеристично за таа трансформација е тоа што за оригинали служат низи, т.е. функции од целоброjна(т.е. дискретна) независно променлива.

За подетално запознавање со повеќе прашања од операционото сметање и неговите примени може да се консултираат книгите [АР], [ДИ].

Г л а в а 11

ФУРЈЕОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Меѓу интегралните трансформации, покрај лапласовата, важно место во примените зазема фурјеовата трансформација. Откако ќе се потсетиме на основните факти за фурјеовите редови, ќе наведеме една нивна примена, а потоа ќе се запознаеме со фурјеовиот интеграл и фурјеовата трансформација.

§11.1. КОМПЛЕКСНА ФОРМА НА ФУРЈЕОВ РЕД

Ако $f(t)$ е дадена реална функција од реална независно променлива, интеграбилна на сегментот $[-s,s]$, тогаш нејзе можеме да ѝ го придружиме редот

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nt}{s} + b_n\sin\frac{\pi nt}{s}\right), \tag{1}$$

каде што коефициентите a_n, b_n се определени со формулите

$$a_n = \frac{1}{s}\int_{-s}^{s} f(t)\cos\frac{\pi nt}{s}\,dt,\quad b_n = \frac{1}{s}\int_{-s}^{s} f(t)\sin\frac{\pi nt}{s}\,dt. \tag{2}$$

Притоа, (1) се вика <u>фурјеов ред</u> на функцијата $f(t)$, а a_n и b_n, определени со (2), се викаат <u>фурјеови коефициенти</u> за $f(t)$.

Природно се наметнува следново прашање: при кои услови функцијата $f(t)$ е збир на својот фурјеов ред? Пред да одговориме на тоа прашање, ќе воведеме еден помошен термин.

За една функција $f(t)$ дефинирана на сегментот $[a,b]$ ќе велиме дека ги задоволува <u>условите на Дирихле</u> на $[a,b]$, ако:

(i) функцијата $f(t)$ е непрекината по делови на $[a,b]$ (в.§10.1),

(ii) $f(t)$ е монотона на $[a,b]$ или на тој сегмент има конечен број екстремуми.

(Условите (i) и (ii) често се заменуваат со условот:

(i*) $f(t)$ е глатка по делови, т.е. $f(t)$ и $f'(t)$ се непрекинати по делови, на сегментот $[a,b]$.)

Овие услови ги задоволуваат повеќето функции што се среќаваат во практиката.

Следната теорема е основна во теоријата на Фурјеовите редови.

Теорема на Дирихле. Ако $f(t)$ е периодична функција со период $2s$ и на сегментот $[-s,s]$ ги задоволува условите на Дирихле, тогаш:

1^{0}. Фурјеовиот ред (1) е конвергентен за секој реален број t,

2^{0}. Збирот на редот (1) е $f(t)$ во сите точки на непрекинатост на $f(t)$,

3^{0}. Збирот на редот (1) во која било точка t_0, во која $f(t)$ има прекин, е $\frac{1}{2}[f(t_0-0) + f(t_0+0)]$. □

** Дирихлеовите услови се доволни, но не и неопходни за една функција да може да се развие во Фурјеов ред. На пример, функцијата $\ln|2\cos\frac{t}{2}|$ не ги задоволува тие услови (таа има прекини од втор вид во точките $t = (2k+1)\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$), а сепак може да се развие во Фурјеов ред:

$$\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{3}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos 4t + \ldots \quad **$$

Фурјеовиот ред (1) на $f(t)$ може да се напише во позбиена форма. Имено, нека функцијата $f(t)$ е периодична, со период $2s$ и нека ги задоволува условите на Дирихле. Ставајќи

$$w_n = \frac{\pi n}{s} \tag{3}$$

и применувајќи ги Ојлеровите формули

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it}),$$

од (1) ќе добиеме:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\frac{1}{2}(e^{iw_nt}+e^{-iw_nt}) + b_n\cdot\frac{1}{2i}(e^{iw_nt}-e^{-iw_nt})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[(a_n-ib_n)e^{iw_nt} + (a_n+ib_n)e^{-iw_nt}\right].$$

Ставајќи $w_{-n} = -w_n$ и

$$c_0 = a_0, \quad c_n = a_n - ib_n, \quad c_{-n} = a_n + ib_n, \tag{4}$$

последната формула добива облик

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{iw_nt}. \tag{5}$$

Формулата (5) се вика комплексна форма на Фурјеовиот ред (1) на функцијата $f(t)$. (Од (4) имаме: $a_n = \frac{1}{2}(c_n+c_{-n})$, $b_n = \frac{1}{2i}(c_{-n}-c_n)$.)

Од (2) и (4) следува дека коефициентите c_n во (5) се определени со формулата

$$c_n = \frac{1}{s}\int_{-s}^{s} f(t)e^{-iw_n t}dt, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{6}$$

Во случај кога $s=\pi$, добиваме дека $w_n=n$, па редот (5) добива попроста форма:

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \quad c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt. \tag{7}$$

Низата од комплексни броеви c_n се вика __спектрална__ __низа__ за функцијата $f(t)$; реалната низа со општ член $|c_n|$ се вика __амплитуден__ __спектар__, а низата $\psi_n=\text{arctg }(b_n/a_n)$ се вика __фазен__ __спектар__ на $f(t)$.

Да забележиме дека спектралната низа на дадена функција $f(t)$ е наполно определена со (6), а ако е зададена спектралната низа (c_n), тогаш $f(t)$ е еднозначно определена со (5). Затоа, со терминологијата од Гл. 10, можеме да кажеме дека функцијата $f(t)$ игра улога на оригинал, а спектралната низа има улога на слика.

** На крајот ќе наведеме една важна врска меѓу $f(t)$ и коефициентите a_n, b_n, односно c_n. Имено, важи следнава:

__Формула на Парсевал.__ Ако фурјеовиот ред на функцијата $f(t)$ униформно конвергира кон $f(t)$ во сегментот $[-s,s]$, тогаш важи равенството

$$\frac{1}{s}\int_{-s}^{s}[f(t)]^2dt = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2), \tag{8}$$

односно

$$\frac{2}{s}\int_{-s}^{s}[f(t)]^2dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 \tag{8'}$$

при што се претпоставува дека интегралот од левата страна постои.

Да докажеме дека важи, на пример, (8'). За таа цел, да ги помножиме двете страни на (5) со $f(t)$ и да интегрираме од $-s$ до s:

$$\int_{-s}^{s}[f(t)]^2dt = \frac{1}{2}\int_{-s}^{s} f(t)\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{iw_n t}\Big)dt.$$

Поради унирформната конвергенција на редот, можеме да интегрираме член по член, па користејќи ја (6), т.е.

$$\int_{-s}^{s} f(t)e^{-iw_{-n}t}dt = sc_{-n}$$

добиваме:

$$\int_{-s}^{s}[f(t)]^2dt = \frac{s}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_{-n}.$$

Поради $c_n c_{-n} = c_n\bar{c}_n = |c_n|^2$, а по делењето со $s/2$, ја добиваме формулата (8'). **

__Задачи__: 11.1-11.3; 11.19-11.22

§11.2. ПРИМЕНА НА ФУРЈЕОВИ РЕДОВИ ЗА РЕШАВАЊЕ ДР

Фактот што на секоја периодична и разложлива во Фурјеов ред функција $f(t)$ може еднозначно да ѝ се придружи низа од комплексни броеви - нејзината спектрална низа, а и обратно (§11.1), ќе го искористиме за решавање некои линеарни ДР со константни коефициенти. За илустрација ќе разгледаме една задача.

Пример 1. Нека е дадена линеарната ДР

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = f(t), \tag{1}$$

каде што a_1 и a_2 се константи, $f(t)$ е дадена периодична функција со период $2s$, што ги задоволува Дирихлеовите услови и $x=x(t)$. За поедноставно, ќе земеме $s=\pi$. Се бара партикуларно решение X на (1), коешто е периодична функција, со истиот период $s=\pi$.

За таа цел, $f(t)$ ќе ја претставиме со нејзиниот Фурјеов ред и ќе добиеме

$$\ddot{x} = a_1\dot{x} + a_2x = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}. \tag{2}$$

Ќе ја разгледаме, прво, ДР

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = c_n e^{int}. \tag{3}$$

Како и во §2.4, партикуларното решение на нехомогената линеарна ДР (3) ќе го бараме во обликот $K_n e^{int}$, каде што K_n е неопределена константа. Откако ќе замениме во (3) и ќе скратиме со e^{int}, ќе добиеме

$$-n^2K_n + a_1inK_n + a_2K_n = c_n,$$

од каде што

$$K_n = \frac{c_n}{-n^2+a_2+ia_1n}. \tag{4}$$

Значи, бараното партикуларно решение на (3) е $K_n e^{int}$, каде што константата K_n е определена со (4). (Решението е комплексна функција од реалниот аргумент t, но лесно ќе го добиеме во реална форма ако ги групираме собироците што одговараат на индексите $\pm n$.)

Според тоа, партикуларното решение на ДР (1) можеме да го напишеме во вид

$$X = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n e^{int}. \tag{5}$$

Притоа, треба уште да докажеме дека редот (5) е конвергентен. Тоа лесно се докажува во случај кога редот Σc_n е апсолутно конвергентен. Имено, од (4) имаме

$$|K_n| = |c_n| / \sqrt{(a_2-n^2)^2 + a_1^2 n^2},$$

а од тоа јасно е дека за доволно големи n важи неравенството

$$|K_n| < |c_n|, \qquad n \geq n_o.$$

Бидејќи $|e^{int}| = 1$, имаме

$$|K_n e^{int}| < |c_n|, \qquad n \geq n_o,$$

што значи дека редот (5) апослутно конвергира. (Во некои случаи се покажува дека редот (5) може да конвергира и при послаби услови.)

Да забележиме дека формулата (4) може да нема смисла при некој n=m само во случајот кога $a_1=0$ и $a_2=m^2$, при што равенката (2) станува

$$\ddot{x} + m^2 x = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}.$$

Во тој случај партикуларното решение што одговара на собироците со индекси ±m ќе има облик $K_m t e^{int}$ (в. и §2.4), при што

$$K_m = \frac{c_m}{2mi},$$

а партикуларните решенија за собироците со индекс n≠±m имаат облик $K_m t e^{int}$, при што

$$K_n = \frac{c_m}{m^2-n^2} \qquad (n \neq \pm m).$$

При изучувањето на процесите во електрични кола со наизменична струја под дејство на периодична несинусоидна електромоторна сила, овој пример игра мошне важна улога. Ќе го разгледаме посебно.

<u>Пример 2</u>. Познато ни е дека ДР за струјата x=x(t) во RLC-коло има облик (в. IV од §2.5):

$$L \frac{dx}{dt} + Rx + \frac{1}{C} \int_0^t x\,dt = u(t), \tag{6}$$

т.е.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC}\cdot x = \frac{1}{L}\, u'(t). \tag{7}$$

Притоа ќе сметаме дека електромоторната сила u(t) има период T=2π и

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n e^{int}, \tag{8}$$

т.е. дека E_n е спектралната низа на напонот и дека редот (8) може да се диференцира член по член. Во тој случај ДР (6) ќе го добие видот

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC}x = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{in}{L}E_n e^{int}.$$

Како и во примерот 1, бараме партикуларно решение $I = I(t)$ во облик $I_n e^{int}$ за ДР на чија десна страна е собирокот $\frac{in}{L}E_n e^{int}$. Ставајќи во формулата (4)

$$c_n = \frac{in}{L}E_n,\quad a_1 = \frac{R}{L},\quad a_2 = \frac{1}{LC},\quad K_n = I_n,$$

по средувањето ќе добиеме:

$$I_n = \frac{E_n}{R+i(Ln-1/cn)} \tag{9}$$

На тој начин добиваме израз за спектралната низа на "стабилизираната струја", т.е. бараното партикуларно решение $I(t)$ ќе го има обликот

$$I = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n e^{int}.$$

Ако периодот на функцијата $f(t)$ е $T=2s$ (а не 2π), тогаш, користејќи го разложувањето (5) од §11.1, во формулата (9) n треба да го замениме со $w_n = \frac{n\pi}{s}$, па

$$I_n = \frac{E_n}{R+i(Lw_n-1/Cw_n)}. \tag{10}$$

Според тоа, знаејќи ја спектралната низа (E_n) на напонот $u(t)$, со помош на формулата (10) ја наоѓаме спектралната низа (I_n) на стабилизираната струја, а и самата струја

$$I = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n e^{int}.$$

** Формулата (10) има облик на Омовиот закон за постојана струја. Притоа, E_n и I_n не се напон и струја, туку комплексни броеви, коишто ги претставуваат спектралните низи на напонот и струјата. Изразот од именителот на (10) се вика <u>комплексна отпорност</u> и обично се означува со Z_n:

$$Z_n = R + i(Lw_n - \frac{1}{Cw_n}).$$

За разлика од коло со постојана струја, комплексната отпорност зависи од фреквенцијата w_n на соодветниот хармоник. **

<u>Задачи</u>: 11.4; 11.25-11.31

§11.3. ФУРЈЕОВ ИНТЕГРАЛ

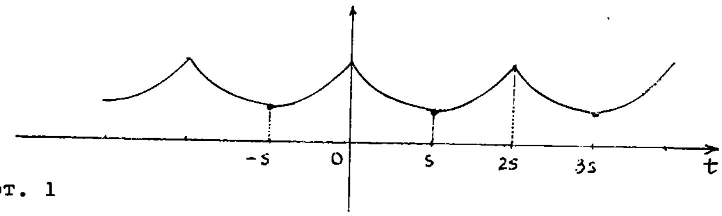
Фурјеовите редови се моќно средство за решавање многу проблеми во кои се работи со периодични функции. Меѓутоа, многу практични проблеми вклучуваат непериодични функции, па е пожелно методот на Фурјеовите редови да се обопшти и за непериодични функции.

Нека $f_s(t)$ е периодична функција со период 2s. Ако s се зголемува и се стреми кон бесконечност, тогаш новодобиената функција $f(t)$, во општ случај, нема да биде периодична.

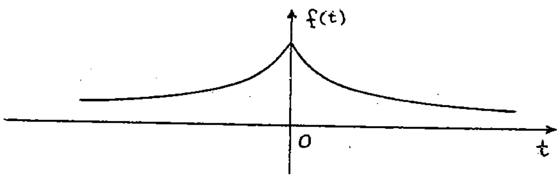
Пример 1. Ако $f_s(t) = e^{-|t|}$ кога $-s < t < s$ и $f_s(t+2s) = f_s(t)$ (црт. 1), тогаш

$$f(t) = \lim_{s\to\infty} f_s(t) = e^{-|t|}, \qquad t \in (-\infty,+\infty),$$

не е периодична функција (црт. 2).



Црт. 1



Црт. 2

Нека $f_s(t)$ е периодична функција со период 2s којашто може да се развие во фурјеов ред:

$$f_s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{s}\, t + b_n \sin \frac{n\pi}{s}\, t\right). \qquad (1)$$

Како и во §11.1, ќе ставиме

$$w_n = \frac{n\pi}{s}; \qquad \Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{\pi}{s},$$

а a_n и b_n во (1) ќе ги замениме од формулите (2) од §11.1, означувајќи ја подинтегралната променлива со x:

$$f_s(t) = \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} f_s(x)dx + \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\cos w_n t \int_{-s}^{s} f_s(x)\cos w_n x dx +$$
$$+ \sin w_n t \int_{-s}^{s} f_s(x)\sin w_n x\, dx\Big].$$

Ставајќи

$$\Delta w = w_{n+1}-w_n = \frac{(n+1)\pi}{s} - \frac{n\pi}{s} = \frac{\pi}{s},$$

добиваме дека $1/s = \Delta w/\pi$ и фурјеовиот ред можеме да го напишеме во форма

$$f_s(t) = \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} f_s(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\cos(w_n t)\Delta w \int_{-s}^{s} f_s(x)\cos w_n x dx +$$
$$+ \sin(w_n t)\Delta w \int_{-s}^{s} f_s(x)\sin w_n x dx\Big]. \tag{2}$$

Ова претставување важи за кој било фиксиран, произволно голем, но конечен број s.

Да претпоставиме, сега, дека $f_s(t)$ има бесконечно голем период (т.е. да пуштиме s да се стреми кон бесконечност) и дека добиената непериодична функција

$$f(t) = \lim_{s\to\infty} f_s(t)$$

е апсолутно интеграбилна на t-оската, т.е. интегралот

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt \tag{3}$$

постои. Тогаш $1/s \to 0$, па првиот собирок од десната страна на (2) се стреми кон нула. Потоа, $\Delta w=\pi/s \to 0$ и редот во (2) станува интеграл од 0 до $+\infty$. Така го добиваме следново претставување на f(t):

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[\cos wt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos wx dx + \sin wt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin wx dx\Big]dw. \tag{4}$$

Воведувајќи ги скратените ознаки

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos wx dx, \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin wx dx, \tag{5}$$

ја добиваме формулата

$$f(t) = \int_0^{\infty}\big[A(w)\cos wt + B(w)\sin wt\big]dw, \tag{6}$$

наречена Фурјеова интегрална формула за f(t). Интегралот во (6) се вика <u>фурјеов интеграл</u> (тој потсеќа на (1), а формулите (5) - на (2) од §11.1.)

(Да забележиме дека овој пристап само го сугерира, но не го установува претставувањето на f(t) со (6), зашто лимесот на редот во (2), кога $\Delta w \to 0$, не е дефиниција на интегралот во (4).)

Доволни услови за претставливост на една функција со Фурјеов интеграл дава следнава теорема.

Интегрална теорема на Фурје. Ако функцијата $f(t)$:

а) е дефинирана на целата оска t;

б) на кој било конечен интервал ги задоволува условите на Дирихле;

в) $f(t)$ е апсолутно интеграбилна (т.е. несвојствениот интеграл (3) е конвергентен),

тогаш за секој t функцијата $f(t)$ може да се претстави со својот фурјеов интеграл, при што:

1° фурјеовиот интеграл на $f(t)$ е еднаков со $f(t)$ во сите точки на непрекинатост на таа функција,

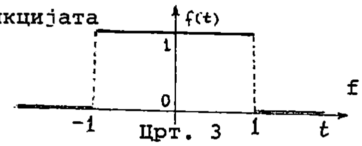
2° во точките на прекин на $f(t)$, фурјеовиот интеграл е еднаков на полузбирот од левиот и десниот лимес на $f(t)$ во тие точки, т.е.

$$\frac{1}{2}\left[f(t-0)+f(t+0)\right]. \quad \square$$

Да забележиме дека условот в) претставува големо ограничување за $f(t)$ и многу функции што често се срекаваат (тригонометриски, степенски, па дури и единичната функција) не се апсолутно интеграбилни во $(-\infty,+\infty)$.

Претставувањето на една функција со фурјеовиот интеграл може да се искористи за пресметување интеграли.

Пример 2. Да се најде претставувањето со фурјеов интеграл на функцијата



Црт. 3

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{за } |t|\leqslant 1,\\ 0 & \text{за } |t|>1.\end{cases}$$

Функцијата $f(t)$ ги задоволува условите од интегралната теорема на Фурје.

Од (5) добиваме

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos wx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos wx\,dx=\frac{2\sin w}{\pi w}$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-1}^{1}\sin wx\,dx=0,$$

па (6) добива вид

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wt\sin w}{w}\,dw \qquad (a_1)$$

Полузбирот на левиот и десниот лимес на $f(t)$ во точката $t=1$ е $\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$, па од (a_1) и од горната теорема добиваме

$$\int_0^\infty \frac{\cos wt \sin w}{w}\,dw = \begin{cases} \pi/2 & \text{за } 0 \le t < 1 \\ \pi/4 & \text{за } t = 1 \\ 0 & \text{за } t > 1. \end{cases}$$

Случајот кога $t=0$ е од посебен интерес. Кога $t=0$, тогаш добиваме

$$\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\,dw = \frac{\pi}{2}; \tag{a_2}$$

овој интеграл е лимес од т.н. интегрален синус

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin w}{w}\,dw$$

кога $t \to \infty$ (в. III во §10.6). ||

Во случај на парна односно непарна функција $f(t)$, се добиваат попрости формули, аналогно како кај Фурјеовите редови.

Ако $f(t)$ е <u>парна функција</u>, тогаш во (5), $B(w) = 0$,

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx \tag{7}$$

и (6) добива попроста форма

$$f(t) = \int_0^\infty A(w)\cos wt\,dw. \tag{8}$$

Ако, пак, $f(t)$ е <u>непарна</u>, тогаш $A(w) = 0$,

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx, \tag{9}$$

па (6) добива вид

$$f(t) = \int_0^\infty B(w)\sin wt\,dw. \tag{10}$$

<u>Пример 3</u> (лапласови интеграли). Дадена е функцијата

$$f(t) = e^{-kt} \text{ за } t \geqslant 0 \text{ и } f(-t) = f(t) \qquad (k>0)$$

(за $k=1$, в. пр. 1). Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите на интегралната теорема на Фурје. Имаме:

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kx}\cos wx\,dx;$$

со делумна интеграција, добиваме

$$\int e^{-kx}\cos wx\,dx = \frac{-k}{k^2+w^2}\,e^{-kx}\left[-\frac{w}{k}\sin wx+\cos wx\right].$$

За $x=0$, десната страна е еднаква со $-k/(k^2+w^2)$, а кога $x \to \infty$, десната страна се стреми кон нула. Според тоа,

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{k}{k^2+w^2}.$$

Заменувајќи го ова во (8), добиваме

$$f(t) = e^{-kt} = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wt}{k^2+w^2}\,dw \qquad (t>0,\ k>0),$$

а оттука добиваме дека

$$\int_0^\infty \frac{\cos wt}{k^2+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2k}\,e^{-kt} \qquad (t>0,\ k>0). \tag{11}$$

Аналогно, за непарната функција

$$f(t) = e^{-kt} \text{ за } t>0 \text{ и } f(-t) = -f(t) \qquad (k>0)$$

од Фурјеовиот интеграл (10) добиваме

$$\int_0^\infty \frac{w\sin tw}{k^2+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}\,e^{-kt} \qquad (t>0,\ k>0). \tag{12}$$

(Интегралите (11) и (12) се познати под името лапласови интеграли.)

§11.4. КОМПЛЕКСНА ФОРМА НА ФУРЈЕОВИОТ ИНТЕГРАЛ

Нека функцијата $f(t)$ може да се претстави со Фурјеов интеграл (на пример, ги задоволува условите од теоремата во §11.3.):

$$f(t) = \int_0^\infty [A(w)\cos wt + B(w)\sin wt]\,dw, \tag{1}$$

каде што

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos wx\,dx, \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin wx\,dx. \tag{2}$$

Фурјеовата интегрална формула (1) за $f(t)$, аналогно како Фурјеовите редови, може да се претстави во комплексна форма

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(w)e^{iwt}\,dw, \tag{3}$$

каде што

$$C(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt. \tag{4}$$

** За таа цел, подинтегралниот израз од (1) ќе го трансформираме со Ојлеровите формули:

$$A(w)\cos wt + B(w)\sin wt = A(w)\,\frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2} + B(w)\,\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{2i} =$$

$$= \frac{1}{2}[A(w) - iB(w)]e^{iwt} + \frac{1}{2}[A(w) + iB(w)]e^{-iwt} =$$

$$= C(w)e^{iwt} + C(-w)e^{-iwt},$$

каде што е ставено

$$C(w) = \frac{1}{2}[A(w) - iB(w)], \quad C(-w) = \frac{1}{2}[A(w) + iB(w)].$$

Бидејќи

$$\int_0^\lambda C(-w)e^{-iwt}dw = \int_{-\lambda}^0 C(w)e^{iwt}dw$$

(притоа w се заменува со $-w$), добиваме

$$\int_0^\lambda [A(w)\cos wt + B(w)\sin wt]dw = \int_0^\lambda [C(w)e^{iwt} + C(-w)e^{-iwt}]dw =$$
$$= \int_0^\lambda C(w)e^{iwt}dw + \int_0^\lambda C(-w)e^{-iwt}dw =$$
$$= \int_0^\lambda C(w)e^{iwt}dw + \int_\lambda^0 C(w)e^{iwt}dw = \int_{-\lambda}^\lambda C(w)e^{iwt}dw.$$

За $C(w)$, користејќи ги (2), ќе добиеме:

$$C(w) = \frac{I}{2}[A(w) - iB(w)] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx dx - \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx dx\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos wx - i\sin wx]dx,$$
$$C(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx. \tag{4'}$$

Оваа формула важи за $w > 0$; бидејќи $C(-w) = \overline{C(w)}$, таа важи и за $w < 0$.

Од формулата (1) сега добиваме:

$$f(t) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda [A(w)\cos wt + B(w)\sin wt]dw =$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\lambda}^\lambda C(w)e^{iwt}dw = \int_{-\infty}^{+\infty} C(w)e^{iwt}dw.$$

Според тоа, во точките во кои $C(w)$ е непрекината, важи формулата (3). **

На фурјеовиот интеграл може да му се даде друга, еквивалентна форма. Имено, заменувајќи го $C(w)$ од (4) во (3), добиваме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx\right]e^{iwt}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iw(t-x)}dxdw. \tag{5}$$

Интегралот во формулата (3) се вика <u>комплексна форма на фурјеовиот интеграл</u> за функцијата $f(t)$, а (5) - <u>фурјеов двоен интеграл</u>. Функцијата $C(w)$ определена со (4) се вика <u>спектрална функција</u> (или спектар) на $f(t)$. По аналогија со §11.1, функцијата $|C(w)|$ се вика <u>амплитуден спектар</u>, а $\psi(w) = -\arg C(w)$ - <u>фазен спектар</u>. Притоа: $C(w) = |C(w)|e^{-i\psi(w)}$.

Да забележиме дека $C(-w) = \overline{C(w)}$, па $|C(-w)| = |C(w)|$, т.е. функцијата $|C(w)|$е парна, а $\arg C(-w) = -\arg C(w)$, т.е. $\arg C(w)$ е непарна.

Значи, периодична функција има дискретен спектар (нејзе ѝ одговара низа - спектралната низа), а непериодична функција има непрекинат спектар (нејзе ѝ одговара функција од "непрекинат аргумент" - спектралната функција).

Како примена на овие резултати, ќе ја разгледаме ДР од примерот 1 во §11.2.

Пример 1. $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = f(x)$,

каде што a_1, a_2 се константи, а $f(t)$ е непериодична функција, за која се знае нејзината спектрална функција $C(w)$.

За секој фиксиран w, ДР

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = C(w)e^{iwt}$$

има партикуларно решение $x(t)$ од облик $X(w)e^{iwt}$ (каде што $X(w)$ е константа во однос на t), кое ќе го најдеме на ист начин како во §11.2; притоа, формулата (4) се заменува со формулата

$$X(w) = \frac{C(w)}{-w^2+a_2+ia_1w}. \tag{6}$$

На тој начин ќе ја најдеме спектралната функција $X(w)$ на бараното партикуларно решение, а по формулата (3) можеме да го најдеме и самото тоа решение:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{iwt}dw. \tag{7}$$

Апсолутната конвергенција на интегралот (7) лесно се докажува при претпоставката дека е апсолутно конвергентен интегралот од функцијата $C(w)$ и $a_1 \neq 0$. (Тоа означува дека именителот во (6) не е нула при која било вредност на w.) Имено, при тие услови, $X(w)$ е дефинирана за сите вредности на w и

$$|X(w)| = \frac{|C(w)|}{\sqrt{(a_2-w^2)^2+a_1^2w^2}} < |C(w)|$$

за доволно големи w.

Овој пример има посебна важност во електротениката; на добиените резултати може да им се даде физичко толкување, аналогно како во примерот 2 од §11.2, со таа разлика што стабилизираната струја, овде е составена не од дискретни хармоници, туку од хармоници со честота што се менува непрекинато. За разлика од §11.2, каде што напонот $u(t)$ беше заменет со сума од хармоници, овде ќе ставиме

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(w)e^{iwt}dw$$

при што E(w) е спектралната функција на напонот. Претпоставувајќи дека е можно диференцирање под знакот на интегралот, добиваме

$$u'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(w)iwe^{iwt}dw.$$

За да ја најдеме спектралната функција на токот на струјата $x=x(t)$, бараме решение на ДР

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC}x = \frac{1}{L}E(w)iw$$

од обликот $I(w)e^{iwt}$. По соодветните измени во (6), ќе добиеме аналогна формула на (9) од §11.2:

$$I(w) = \frac{E(w)}{Z(w)}, \tag{8}$$

каде што $Z(w) = R + i(Lw - \frac{1}{Cw})$ е комплексна отпорност. Откако спектралната функција I(w) на x(t) е најдена, според формулата (3) добиваме

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{E(w)}{Z(w)}e^{iwt}dw.$$

§11.5. ФУРЈЕОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА; СВОЈСТВА

Во врска со комплексната форма на Фурјеовите интеграли - формулите (3) - (5) од §11.4, во употреба е и друга терминологија, аналогна како кај лапласовата трансформација.

Нека е дадена функцијата f(t), дефинирана на целата реална оска. Фурјеова трансформација на f(t) ќе ја викаме функцијата

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt}f(t)dt, \tag{1}$$

а за функцијата f(t), која се определува со равенството

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{iwt}dw \tag{2}$$

велиме дека е инверзна фурјеова трансформација за функцијата F(w). Поради тоа соодветно пишуваме, и:

$$\mathfrak{F}(f(t)) = F(w), \quad \mathfrak{F}^{-1}(F(w)) = f(t).$$

** Како што споменавме во §10.7, фурјеовата трансформација се определува со јадрото

$$K(t,w) = e^{-iwt}/\sqrt{2\pi},$$

што е пропорционално со функцијата $e^{-iwt} = \cos wt - i\sin wt$. **

Доволни услови за егзистенција на фурјеовата трансформација се дадени со Интегралната теорема на Фурје (§11.3), којашто можеме да ја прераскажеме и на следниов вачин:

Теорема 1. Ако функцијата $f(t)$ е:

а)-апсолутно интеграбилна во интервалот $(-\infty,+\infty)$ (т.е. важи (3) од §11.3),

б)-глатка по делови во секој конечен сегмент од бројната оска,

тогаш фурјеовата трансформација $F(w)$ постои и во секоја точка во која $f(t)$ е диференцијабилна, важи формулата (2) за инверзија на фурјеовата трансформација. □

Ќе направиме тука неколку забелешки.

1) Функцијата $f(t)$ се вика глатка на сегментот $[a,b]$, ако таа има непрекинат извод во сите точки од $[a,b]$ (в. и (i*) во §11.1); $f(t)$ се вика глатка по делови на $[a,b]$, ако се состои од конечен број глатки делови и е или непрекината или има прекини само од прв вид на тој сегмент.

2) Една функција $f(t)$ се вика финитна, ако е нула насекаде освен на некој конечен интервал (таква е $f(t)$ од пр. 2 во §11.3). Очигледно, секоја финитна функција е апсолутно интеграбилна на целата бројна оска, т.е. на $(-\infty,+\infty)$.

3) Константите пред интегралите (1) и (2) се земени $1/\sqrt{2\pi}$. Меѓутоа, тие може да бидат кои било ненулти константи чиј производ е $1/2\pi$ (како во (3) и (4) од §11.4). Формата (1) односно (2) е наречена симетрична форма и таа најчесто се употребува. Од технички причини натаму понекогаш пишуваме q наместо $1/\sqrt{2\pi}$, односно $2q$ наместо $\sqrt{2/\pi}$.

Пример 1. Да најдеме фурјеова трансформација на функцијата

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & \text{за } t>0, \\ 0 & \text{за } t<0. \end{cases}$$

Функцијата $f(t)$ (в. и пр. 3 од §11.3) ги задоволува условите при кои важи формулата (1): таа е интеграбилна на целата бројна оска:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}\,e^{-2t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2}$$

и е глатка по делови на $(-\infty,+\infty)$, зашто е глатка на $(-\infty,0)$, каде што $f'(t) = 0$ и на $(0,+\infty)$, каде што $f'(t) = -2e^{-2t}$. Според (1), добиваме:

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-iwt} e^{-2t} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(2+iw)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-(2+iw)t}}{2+iw} \right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2+iw} . \,\|$$

Ако функцијата $f(t)$ ги задоволува условите од Т.1 на полуоската $[0,+\infty)$, тогаш постојат функциите

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos wt\,dt, \tag{3}$$

$$F_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin wt\,dt, \tag{4}$$

наречени, соодветно: фурјеова косинус-трансформација и фурјеова синус-трансформација на $f(t)$. Ако се исполнети условите за егзистенција на формулата (2), тогаш важат следниве формули за инверзија на фурјеовата косинус- односно синус-трансформација при $x \geq 0$:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_c(w) \cos wt\,dw, \tag{5}$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_s(w) \sin wt\,dw. \tag{6}$$

(Функцијата $f(t)$ е продолжена на негативниот дел од оската Ox парно со (5), а непарно со (6).)

Пример 2. Да ја најдеме фурјеовата косинус-трансформација на

$$f(t) = \begin{cases} 4-2t & \text{за } 0 \leq t \leq 2, \\ 0 & \text{за } t > 2. \end{cases}$$

За $f(t)$ постои фурјеова косинус-трансформација зашто е глатка по делови и е финитна. Според (3), имаме:

$$F_c(w) = 2q \int_{0}^{2} (4-2t) \cos wt\,dt =$$

$$= 2q \cdot \left[\left. (4-2t) \frac{\sin wt}{w} \right|_{0}^{2} + \frac{2}{w} \int_{0}^{2} \sin wt\,dt \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2}{w^2} (1-\cos 2w) . \,\|$$

Фурјеовата трансформација има аналогни својства како лапласовата. За да бидат формулациите пократки и понагледни, ќе го означиме со стрелка преодот од $f(t)$ кон нејзината фурјеова трансформација $F(w): f(t) \to F(w)$. Ако се работи за косинус- односно синус-трансформација, ќе ставаме: $f(t) \overset{c}{\to} F_c(w)$ односно $f(t) \overset{s}{\to} F_s(w)$.

Ќе разгледаме неколку основни својства. Од (1), поради својството на линеарност кај интегралите, имаме:

1° (Линеарност). Ако $f_1(t) \to F_1(w)$, $f_2(t) \to F_2(w)$ и c_1, c_2 се константи, тогаш

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \to c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t). \square$$

Ако во интегралот на $\mathfrak{F}(f(at))$ ја воведеме смената $at=x$, $(a \in \mathbb{R})$, лесно ќе добиеме дека:

2° (Сличност). Ако $f(t) \to F(w)$, тогаш

$$f(at) \to \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right). \square$$

3° Својството на линеарност и својството на сличност се запазуваат и при косинус- односно синус- трансформација. □

Како и во 2°, со смената $t-a = x$, ќе добиеме:

4° (Транслација). Ако $f(t) \to F(w)$, тогаш

$$f(t-a) \to e^{-iwa} F(w). \square$$

Имајќи предвид дека $e^{iat} f(t) \to F(w-a)$ кога $f(t) \to F(w)$, а ставајќи $\cos bt = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2$ (и слично за $\sin bt$), директно од (1) ќе добиеме:

5°. Ако $f(t) \to F(w)$, тогаш

а) $f(t)\cos bt \to \frac{1}{2}[F(w-b) + F(w+b)]$;

б) $f(t)\sin bt \to \frac{1}{2i}[F(w-b) - F(w+b)]$. □

6° (Диференцирање). Ако $f(t) \to F(w)$, тогаш

$$f'(t) \to iwF(w).$$

Имено, според дефиницијата (1), а применувајќи парцијална интеграција, имаме

$$\mathfrak{F}(f'(t)) = q \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt} f'(t)\,dt = \\ = q\, e^{iwt} f(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - q \int_{-\infty}^{+\infty} (-iw) e^{iwt} f(t)\,dt.$$

Бидејќи $f(t)$ е апсолутно интеграбилна на целата бројна оска, следува дека $f(\pm\infty)=0$, па првиот собирок од десната страна на последното равенство е 0 (e^{iwt} има модул 1). Значи, важи формулата во 6°. Поопшто:

6′ (к диференцирања). Ако $f(t) \to F(w)$ и $f'(\pm\infty) = \ldots = f^{(k-1)}(\pm\infty) = 0$, тогаш

$$f^{(k)}(t) \to (iw)^k F(w). \square$$

7° (Диференцирање за c- и s-). Нека $f(t) \overset{c}{\to} F_c(w)$ и $f(t) \overset{s}{\to} F_s(w)$. Ако $f(0) = 0$, тогаш

$$f'(t) \overset{c}{\to} -wF_s(w), \quad f'(t) \overset{s}{\to} wF_c(w).$$

Ако и $f'(0) = f'(\infty) = 0$, тогаш $f''(t) \overset{c}{\to} -w^2F_c(w)$, $f''(t) \overset{s}{\to} -w^2F_s(w)$. □

** На крајот ќе наведеме уште две својства.

Може да се покаже (в. нпр. [ДИ], стр. 19) дека важат следниве формули, аналогни на (8), т.е. (8´) од §11.1:

8° (Формули на Парсевал). Ако $F(w)$ и $G(w)$ се фурјеовите трансформации на $f(t)$ и $g(t)$ соодветно, тогаш

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\overline{G(w)}dw = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dw, \tag{7}$$

каде што $\overline{}$ означува комплексно конјугирање. Специјално, за $g(t) = f(t)$ имаме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2dw = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt. \tag{7´}$$

Аналогни релации на (7) и (7´) важат за фурјеова косинус-трансформација (во случај на парни функции $f(t)$ и $g(t)$):

$$\int_{0}^{\infty} F_c(w)G_c(w)dw = \int_{0}^{\infty} f(t)g(t)dt \tag{8}$$

т.е. за $g=f$:

$$\int_{0}^{\infty} [F_c(w)]^2dw = \int_{0}^{\infty} [f(t)]^2dt. \tag{8´}$$

Аналогни формули важат за синус-трансформација.

Слично како кај лапласовата трансформација (§10.3) се дефинира конволуција на две функции.

9° (Конволуција кај фурјеова трансформација). Ако $F(w)$ и $G(w)$ се фурјеовите трансформации на $f(t)$ и $g(t)$ соодветно, тогаш (в. [ДИ], стр. 17):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)G(w)e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{9}$$

Да ја наречеме конволуција на f и g функцијата $f*g$ (од t) определена со:

$$f*g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Тогаш равенството (9) може да се напише во обликот

$$\mathfrak{F}(f*g) = \mathfrak{F}(f)\cdot\mathfrak{F}(g),$$

т.е. фурјеовата трансформација на конволуцијата од f и g е производ на фурјеовите трансформации од тие две функции. **

Задачи: 11.10-11.12; 11.40-11.45

§11.6. МЕТОДИ ЗА ПРЕСМЕТУВАЊЕ ФУРЈЕОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Непосредното наоѓање на фурјеова трансформација (засновано на директно пресметување интеграли) е можно само во најрпости случаи (како во примерите од §11.3; §11.5). Во посложени случаи се применуваат други методи, како, на пример: со диференцирање под знакот на интегралот, со разложување во степенски ред, со примена на остатоци и др.

А. Метод на диференцирање под знакот на интегралот.

Овој метод се состои во следново: фурјеовата трансформација $F(w)$ (односно $F_c(w)$, $F_s(w)$) прво се диференцира по некој од параметрите под знакот на интегралот, па откако ќе се пресмета интегралот, функцијата $F(w)$ (односно $F_c(w)$, $F_s(w)$) се наоѓа со интегрирање по тој параметар.

Пример 1. Да ја најдеме фурјеовата синус-трансформација на функцијата

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{t}.$$

По дефиниција, имаме

$$F_s(w) = 2q \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} \sin wt\,dt \quad \left(q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right). \tag{a_1}$$

Диференцирајќи по параметарот w, добиваме

$$F_s'(w) = 2q \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} \cdot t \cos wt\,dt = 2q \int_0^\infty e^{-t} \cos wt\,dt.$$

Применуваме делумна интеграција:

$$F_s'(w) = 2q\left[-e^{-t}\cos wt\Big|_0^\infty - w\int_0^\infty e^{-t}\sin wt\,dt\right] =$$
$$= 2q\left[1 - w\int_0^\infty e^{-t}\sin wt\,dt\right];$$

пак со делумна интеграција:

$$F_s'(w) = 2q - 2qw\left[-e^{-t}\sin wt\Big|_0^\infty + w\int_0^\infty e^{-t}\cos wt\,dt\right]$$
$$= 2q - 2qw^2\int_0^\infty e^{-t}\cos wt\,dt = 2q - w^2F_s'(w).$$

Според тоа, $(1+w^2)F_s'(w) = 2q$, т.е. $F_s'(w) = \frac{2q}{1+w^2}$

па

$$F_s(w) = 2q\,\mathrm{arctg}\,w + C. \tag{a_2}$$

Од (a_1) добиваме $F_s(0) = 0$, а од (a_2): $F_s(0) = C$, што значи дека $C=0$. Следствено, бараната синус-трансформација е

$$F_s(w) = 2q\,\mathrm{arctg}\,w \qquad (q=1/\sqrt{2\pi}).$$

Забелешка. Диференцирањето под знакот за (несвојствен) интеграл е допусливо само при одредени услови (види ги претпоставките за формулата (2) и забелешката по својството 8^o во §10.3).

Б. Разложување во степенски ред

Овој метод се состои во разложување на функцијата f(t) што треба да се трансформира или на јадрото на трансформацијата во степенски ред, кој потоа се интегрира член по член на бесконечниот интервал $[0,+\infty)$ (се разбира, доколку се исполнети соодветните услови за тоа; в. [ФИХ], кн. II).

Пример 2. Да ја најдеме фурјеовата косинус-трансформација на функцијата $f(t) = e^{-t^2}$. Имаме:

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} \cos wt \, dt . \qquad (б_1)$$

Ако функцијата $\cos wt$ ја замениме со нејзиниот степенски ред,

$$\cos wt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(wt)^{2n}}{(2n)!} ,$$

тогаш $(б_1)$, по разменувањето на местата на знаците $\int$ и Σ, го добива видот

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n} dt . \qquad (б_2)$$

Имајќи предвид дека

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n} dt = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}, \quad n=1,2,\ldots$$

(в. зад. 4.106 б)), а поради $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!} = \frac{1}{2^n \cdot n!}$, од $(б_2)$ добиваме

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum (-1)^n \frac{w^{2n}\sqrt{\pi}}{n!\,2^{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{w^2}{4}\right)^n ,$$

што значи дека

$$F_c(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-w^2/4} .$$

В. Примена на остатоци

Пресметувањето на $F_c(w)$ и $F_s(w)$ за f(t), во редица случаи, се сведува на пресметување остатоци на f(z), ако f(z) има соодветни добри својства.

Имено, нека f(t) може да се продолжи до комплексна функција f(z) на горната полурамнина $(\mathrm{Im} z \ge 0)$, од комплексната променлива z, така што да ги задоволува следниве услови:

i) $f(z)$ е аналитична во полурамнината $\mathrm{Im}z \geq 0$, освен во конечно многу точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

ii) на реалната оска нема полови;

iii) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ (при $\mathrm{Im}z \geq 0$).

При тие услови, ако $f(t)$ е парна, важи формулата

$$F_c(w) = \sqrt{2\pi}\, i \cdot (B_1+B_2+\ldots+B_n), \tag{1}$$

а ако $f(t)$ е непарна, важи:

$$F_s(w) = \sqrt{2\pi} \cdot (B_1+B_2+\ldots+B_n) \tag{2}$$

каде што B_ν е остатокот на $f(z)e^{iwz}$ во полот a_ν,

$$B_\nu = \operatorname*{Res}_{a_\nu} f(z)e^{iwz},$$

a_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$, се сите полови на $f(z)$ во $\mathrm{Im}z \geq 0$.

Да ја докажеме формулата (1). При дадените услови i) - iii), може да се покаже (в. [ЧУ], кн. III, стр. 363) дека

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}dt = 2\pi i \cdot (B_1+\ldots+B_n).$$

Бидејќи $f(-t) = f(t)$, имаме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{iwt}dt + \int_0^\infty f(t)e^{iwt}dt =$$
$$= \int_0^\infty f(-t)e^{-iwt}dt + \int_0^\infty f(t)e^{iwt}dt = \int_0^\infty f(t)[e^{iwt}+e^{-iwt}]dt$$
$$= \int_0^\infty f(t)\cos wt\, dt.$$

Следствено,

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos wt\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi i(B_1+\ldots+B_n)$$
$$= \sqrt{2\pi}\, i \cdot (B_1+\ldots+B_n).$$

т.е. (1). Аналогно се докажува и (2). □

Да го илустрираме овој метод со еден пример.

<u>Пример 3</u>. Да ја најдеме $F_s(w)$ за $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$.

Функцијата $f(t)$ е непарна и ги задоволува условите i) - iii), па можеме да ја примениме формулата (2). Полови на $f(z) = z/(z^2+1)$ се $z_{1,2} = \pm i$ (од прв ред), од кои само $z_1=i$ е во горната полурамнина и

$$\operatorname*{Res}_{i} \frac{ze^{iwz}}{z^2+1} = \left(\frac{ze^{iwz}}{2z}\right)_{z=i} = \frac{e^{-w}}{2}.$$

Според (2) имаме

$$F_s(w) = \sqrt{2\pi}\cdot\frac{e^{-w}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}\,e^{-w}}{2}. \;\|$$

Можностите за наоѓање фурјеова трансформација може значително да се зголемат ако се користат некои од нејзините својства што ги разгледавме во претходниот параграф.

** Г. Со помош на лапласова трансформација

Врската меѓу фурјеовата и лапласовата трансформација дава уште еден, згоден начин за наоѓање фурјеови трансформации. Имено (в. [AP], стр. 256):

Ако оригиналот $f(t)$ при лапласовата трансформација го задоволува и условот за конвергенција на интегралот $\int_0^\infty |f(t)|dt$, тогаш постои фурјеова трансформација на $f(t)$ и сите нејзини својства се добиваат од својствата на лапласовата трансформација кога комплексната променлива p се замени со чисто имагинарната величина iw и сликата се помножи со $1/\sqrt{2\pi}$, т.е.

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p) \Rightarrow \mathscr{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,F(iw). \tag{3}$$

Специјално, тоа ќе биде исполнето кога показателот на растот е негативен ($s_0 < 0$) или кога оригиналот $f(t)$ е финитна функција (види 2) во §11.5).

Ќе наведеме два примера за наоѓање фурјеова трансформација со помош на (3).

Пример 4. Нека $k>0$ и $f(t) = \begin{cases} e^{-kt} & \text{за } t\geq 0, \\ 0 & \text{за } t<0. \end{cases}$

За функцијата $f(t)$ постои фурјеова трансформација (в. пр. 1 од §11.5). Да ја најдеме, прво, лапласовата трансформација на $f(t)$:

$$\mathscr{L}\{e^{-kt}\} = \frac{1}{p+k}.$$

Го заменуваме p со iw и, според (3), ја добиваме фурјеовата трансформација на $f(t)$

$$\mathscr{F}\{e^{-kt}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{k+iw}. \;\|$$

Пример 5. Нека $f(t) = t$ на интервалот $(0,1)$, а $f(t) = 0$ за сите други t.

Функцијата $f(t)$ е финитна и глатка, па има фурјеова трансформација. Лапласовата трансформација е:

$$\mathscr{L}(f(t)) = \int_0^1 t\,e^{-pt}dt = \frac{1}{p^2}\,(1-e^{-p}-pe^{-p}).$$

Заменувајќи p со iw, според (3), добиваме

$$\mathscr{F}(f(t)) = \frac{(1+iw)e^{-iw} - 1}{\sqrt{2\pi}\cdot w^2}. \quad **$$

Задачи: 11.13-11.14; 11.49-11.50

* Додаток

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИОТ ОПЕРАТОР D

За наоѓање партикуларни решенија на нехомогени линеарни диференцијални равенки (кратко нехомогени ЛДР) со константни коефициенти во многу случаи е згоден и еден друг операторски метод, различен од лапласовата трансформација. Со помоша на операторот $D^K \equiv d^K/dx^K$ и својствата на полиномите по D, дадена ЛДР се трансформира во алгебарска равенка од чии решенија, според одредени правила, се добиваат партикуларни решенија на дадената нехомогена ЛДР.

§1. Дефиниција и својства на операторот D

За изводите од к-ти ред ќе ја воведеме ознаката D^k, т.е.

$$D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k=1,2,\ldots \tag{1}$$

За к=1 ставаме $D^1 y = Dy$, а симболот D^0 ќе ни го означува идентичниот оператор, т.е. $D^0 y = y$. Значи,

$$D^k y = D(D^{k-1} y), \quad k=1,2,\ldots \tag{1'}$$

Од својствата на изводите, јасно е дека:

1°. $D^k(cy) = cD^k y$ (c=конст.),

2°. $D^k(y_1+y_2) = D^k y_1 + D^k y_2$,

а со директна проверка лесно се покажува дека:

3°. $D^k(e^{rx}) = r^k e^{rx}$; 4°. $D^{2k}(\sin ax) = (-1)^k a^{2k} \sin ax$;

5°. $D^{2k}(\cos ax) = (-1)^k a^{2k} \cos ax$; 6°. $D^k(x^k) = k!$;

7°. $D^k(x^m) = m(m-1)\ldots(m-k+1)x^{m-k}$ за $m > k$;

8°. $D^k(x^m) = 0$ за $m < k$ $(m \in \mathbb{N})$.

Да го пресметаме изразот $D^k(e^{rx}y)$, каде што r е константа, а $y=y(x)$ е функција. Имаме:

$$D^k(ye^{rx}) = (ye^{rx})^{(k)} = \binom{k}{0} y^{(k)} e^{rx} + \binom{k}{1} y^{(k-1)} re^{rx} + \ldots + \binom{k}{k} yr^k e^{rx} =$$

$$= e^{rx}[D^k y + \binom{k}{1} rD^{k-1} y + \ldots + \binom{k}{k} r^k D^0 y] = e^{rx}(D+r)^k y.$$ Значи:

9°. $D^k(e^{rx}y) = e^{rx}(D+r)^k y$.

Со помош на (1), линеарната ДР

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} +\ldots+ a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$$

може да се запише во обликот

$$a_o D^n y + a_1 D^{n-1} y +\ldots+ a_{n-1}Dy + a_n y = f(x),$$

т.е. $$[a_o D^n + a_1 D^{n-1} +\ldots+ a_{n-1}D + a_n]y = f(x). \tag{2}$$

Изразот во средните загради се вика операторски полином (по D) и кратко се означува со P(D) или само со една буква: A,B,... Значи:

$$P(D) = a_o D^n + a_1 D^{n-1} +\ldots+ a_{n-1}D + a_n. \tag{3}$$

Неговите коефициенти a_i може да бидат функции од аргументот x или, пак, константи. За натаму ќе сметаме дека коефициентите a_i се константи.

Секој операторски полином (3): A=P(D) ќе го викаме диференцијален оператор. Со помош на (3), ЛДР (2) може да се запише во операторска форма:

$$P(D)y = f(x). \tag{2'}$$

Како и за својствата 3^o-9^o, со непосредна проверка, лесно се установува точноста на следниве идентитети:

10^o. $P(D)e^{rx} \equiv e^{rx}P(r)$.

11^o. $P(D^2)\sin ax \equiv \sin ax\cdot P(-a^2)$.

12^o. $P(D^2)\cos ax \equiv \cos ax\cdot P(-a^2)$.

13^o. $P(D)e^{rx}y \equiv e^{rx}P(D+r)y, \quad y=y(x)$.

Да го докажеме, на пример, 12^o. Имаме:

$$\begin{aligned} P(D^2)\cos ax &= (a_o D^{2n}+a_1 D^{2n-2}+\ldots+a_{n-1}D^2+a_n)\cos ax = \\ &= a_o(-a^2)^n+a_1(-a^2)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(-a^2)+a_n \cos ax = \\ &= \cos ax\cdot P(-a^2). \ \square \end{aligned}$$

Нека $P_1(D)$ и $P_2(D)$ се два оператора со облик (3) и нека y=y(x) е функција, диференцијабилна доволен број пати.

Збир на $P_1(D)$ и $P_2(D)$ се вика операторот $P_1(D)+P_2(D)$ чие дејство на y=y(x) се дефинира со равенството

$$[P_1(D) + P_2(D)]y = P_1(D)y + P_2(D)y, \tag{4}$$

а <u>производ</u> на $P_1(D)$ и $P_2(D)$ се вика операторот $P_1(D)\cdot P_2(D)$ чие дејство на $y=y(x)$ се определува со равенството

$$P_1(D)\cdot P_2(D)y = P_1(D)[P_2(D)y]. \tag{5}$$

Од (4) односно од (5) лесно се увидува дека правилото за собирање односно за множење на операторски полиноми е исто со правилото за собирање односно множење на обични полиноми. Така, на пример, ако

$$P_1(D) = 3D^2 - 4D + 2, \quad P_2(D) = 2D^3 - D,$$

тогаш

$$P_1(D) + P_2(D) = 2D^3 + 3D^2 - 5D + 2,$$

$$P_1(D)\cdot P_2(D) = 6D^5 - 8D^4 + D^3 + 4D^2 - 2D.$$

Ако $A=P_1(D)$, $B=P_2(D)$, $C=P_3(D)$ се диференцијални оператори, тогаш:

а) $A+B = B+A$, б) $(A+B) + C = A + (B+C)$,

в) $(AB)C = A(BC)$, г) $A(B+C) = AB + AC$

и, само за случајот на оператори со константни коефициенти,

д) $AB = BA$.

Накратко, за собирањето и множењето на оператори важат исти правила како од обичната алгебра.

Да забележиме дека 13° може да се запише и во видот

<u>13′</u>. $e^{-rx}P(D)(e^{rx}y) = P(D+r)y$,

<u>13″</u>. $e^{rx}P(D)y = P(D-r)(e^{rx}y)$.

Некои корисни и интересни резултати се добиваат од пресметувањето на $P(D)(x^m e^{rx})$ за константен r и ненегативен цел број m. За $m=0$ се добива 10°. Ќе го разгледаме специјалниот случај $(D-r)^m(x^m e^{rx})$. Имаме:

<u>14°</u>. $(D-r)(x^m e^{rx}) = mx^{m-1}e^{rx} + rx^m e^{rx} - rx^m e^{rx} = mx^{m-1}e^{rx}$,

<u>14′</u>. $(D-r)^2(x^m e^{rx}) = m(D-r)(x^{m-1}e^{rx}) = m(m-1)x^{m-2}e^{rx}$;

продолжувајќи, добиваме:

<u>14″</u>. $(D-r)^m(x^m e^{rx}) = m!e^{rx}$,

<u>15°</u>. $(D-r)^n(x^m e^{rx}) = 0$, за $n > m$.

Горните својства овозможуваат да се докаже следнава теорема:

Теорема 1. Ако карактеристичната равенка на една хомогена ЛДР со константни коефициенти има к-кратен корен r, тогаш

$$y = (c_o+c_1x+\ldots+c_{k-1}x^{k-1})e^{rx} \tag{6}$$

(каде што $c_o, c_1, \ldots, c_{к-1}$ се константи) е решение на таа ЛДР.

Доказ. Линеарната ДР може да се напише во обликот $P(D)y = 0$. Бидејќи r е к-кратен корен на равенката $P(D) = 0$, следува дека

$$P(D) = Q(D)(D-r)^k.$$

Диференцијалната равенка

$$P(D)y \equiv Q(D)(D-r)^k y = 0$$

е задоволена ако

$$(D-r)^k y = 0.$$

Според 13°, имаме: $(D-r)^k(x^s e^{rx})=0$ за $s=0,1,2,\ldots,k-1$, т.е. за $k > s$. Следствено, $y=x^s e^{rx}$ за $s=0,1,\ldots,k-1$ се решенија на дадената хомогена ЛДР, па решение е и нивната линеарна комбинација (6). □

За илустрација на дефинициите и својствата, дискутирани погоре, ќе наведеме неколку примери и вежби.

Примери. Да се извршат назначените операции.

1) $D^3e^{2x} = D^2(De^{2x}) = D^2(2e^{2x}) = D(4e^{2x}) = 8e^{2x}$;

$= 2^3e^{2x}$ според 3°.

2) $D^4\cos 2x = D^3(D\cos 2x) = -2D^3\sin 2x = -2^2D^2\cos 2x =$

$= 2^3D\sin 2x = 2^4\cos 2x$;

$= (-1)^2 2^4\cos 2x$ според 5°.

3) $(D-a)e^{ax} = ae^{ax} - ae^{ax} = 0$;

$= 0$ според15° $(m=0,\ n=1)$.

4) $(D^2-2aD+a^2)(x^2e^{ax}) = (D-a)^2(x^2e^{ax}) =$

$= 2!e^{ax}$ според14°, $r=a$.

5) $D^2(e^{-4x}x^3) =$ [според13°] $= e^{-4x}(D-4)^2x^3 =$

$= e^{-4x}\cdot(D^2-8D+16)x^3 = e^{-4x}(16x^3-24x^2+6x)$.

6) $(D+a)^2(x^3e^{-ax}) = 6xe^{-ax}$ (според 14΄).

7) $D^2(D+D^2)(2e^{rx}) = 2(D^3+D^4)e^{rx} = 2(r^3+r^4)e^{rx}$.

Нека $P(D)=D^3-3D^2+2D-5$. Да се извршат назначените операции:

8) $P(D)e^{4x}$ (Одг. $19e^{4x}$).

9) $P(D)\sin 2x$ (Одг. $7\sin 2x-4\cos 2x$).

10) $P(D)3x^2$ (Одг. $-18+12x-15x^2$).

11) $P(D)x^2e^x$ (Одг. $-(2x+5x^2)e^x$).

Да се извршат назначените операции:

12) $(D-1)^2(x^3e^x)$ (Одг. $6xe^x$).

13) $(D^2+2D-3)(e^{-x}\sin 2x)$ (Одг. $8e^{-x}\sin 2x$).

14) $(D^3+1)(x^3e^{-x})$ (Одг. $3e^{-x}(3x^2-6x+2)$)

§2. ИНВЕРЗЕН ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН ОПЕРАТОР И ПРИМЕНА

Ќе дефинираме, сега, оператор $\frac{1}{D}$ односно $\frac{1}{P(D)}$ што ќе го наречеме инверзен оператор на D односно на P(D).

За таа цел, ако f(x) е непрекината функција, ќе ставиме:

$$\frac{1}{D} f(x) = y, \quad \text{ако} \quad Dy = f(x)$$

и поопшто, за $\frac{1}{D^n}$:

$$\frac{1}{D^n} f(x) = y, \quad \text{ако} \quad D^n y = f(x), \tag{1}$$

т.е. дејството на $\frac{1}{D^n}$ врз f(x) е функција y што се добива со n интегрирања на f(x):

$$y = \int \dots \int f(x)\,dx^n, \tag{1΄}$$

зашто, според (1), y треба да биде решение на диференцијалната равенка $y^{(n)}=f(x)$. (Поради тоа, $\frac{1}{D^n}$ се означува и со D^{-n}.)

<u>Пример 1)</u> Да најдеме: $y = \frac{1}{D^2}\cos x$. Според (2) имаме:

$y'' = \cos x$; $y'=\sin x+C_1$; $y=-\cos x+C_1x+C_2$. ||

На тој начин го определуваме и операторот $\frac{1}{P(D)}$:

$$\frac{1}{P(D)} f(x) = y, \quad \text{ако} \quad P(D)y = f(x), \tag{2}$$

т.е. резултатот на дејството на операторот $\frac{1}{P(D)}$ врз некоја непрекината функција f(x) е решение y на линеарната ДР P(D)y=f(x). Според тоа,

$$P(D)\left[\frac{1}{P(D)}\,f(x)\right] \equiv f(x). \tag{3}$$

Може да се смета дека $\frac{1}{P(D)}\,f(x)$ е решение на ЛДР во (2), $P(D)y=f(x)$, определено со некои конкретни, на пример нулти, почетни услови. Меѓутоа, позгодно е да сметаме дека $\frac{1}{P(D)}\,f(x)$ е е д н о о д р е ш е н и ј а т а на ДР во (2); според тоа, дејството на операторот $\frac{1}{P(D)}$ на $f(x)$ натаму ќе биде определено само со т о ч н о с т д о с о б и р о к, еднаков на (кое било) решение на соодветната хомогена ЛДР, $P(D)y=0$.

Во таа смисла, во пр. 1 можеме да ставиме: $\frac{1}{D^2}\cos x=-\cos x$.

Сфаќајќи го дејството на $\frac{1}{P(D)}$ така, ќе имаме

$$\frac{1}{P(D)}\left[P(D)f(x)\right] = f(x), \tag{4}$$

зашто $f(x)$, очигледно, е решение на ДР: $P(D)y=P(D)f(x)$.

Производ (состав) на операторите $Q(D)$ и $\frac{1}{P(D)}$ се дефинира како во §1, (5):

$$Q(D)\,\frac{1}{P(D)}\,f(x) = Q(D)\left[\frac{1}{P(D)}\,f(x)\right];$$

аналогно:

$$\frac{1}{P(D)}\,Q(D)f(x) = \frac{1}{P(D)}\left[Q(D)f(x)\right].$$

Затоа, во формулите (3) и (4) може да се изостават средните загради.

Ќе наведеме неколку својства на операторот $\frac{1}{P(D)}$.

<u>1°</u>. $\frac{1}{P(D)}\,cf(x) = c\,\frac{1}{P(D)}\,f(x)$, c=конст. □

<u>2°</u>. $\frac{1}{P(D)}\,e^{cx} = \frac{e^{cx}}{P(c)}$ ако $P(c)\neq 0$ (c=конст.).

<u>Доказ</u>. Според (2), $\frac{e^{cx}}{P(D)}$ е решение на равенката $P(D)y=e^{cx}$, зашто, според формулата 10° од §1,

$$P(D)\,\frac{e^{cx}}{P(c)} \equiv \frac{e^{cx}}{P(c)}\cdot P(c) \equiv e^{cx}. \ \square$$

На сличен начин, користејќи ја формулата 11° односно 12° од §1 се докажува дека:

<u>3°</u>. $\frac{1}{P(D^2)}\sin ax = \frac{\sin ax}{P(-a^2)}$, ако $P(-a^2)\neq 0$;

<u>4°</u>. $\frac{1}{P(D^2)}\cos ax = \frac{\cos ax}{P(-a^2)}$, ако $P(-a^2)\neq 0$. □

Како последица од принципот на суперпозиција (стр. 46), имаме:

$\underline{5^o}$. $\frac{1}{P(D)}\left[f_1(x) + f_2(x)\right] = \frac{1}{P(D)} f_1(x) + \frac{1}{P(D)} f_2(x)$. □

Наредното својство е наречено экспоненцијално помсетување.

$\underline{6^o}$. $\frac{1}{P(D)} e^{rx}u(x) = e^{rx} \frac{1}{P(D+r)} u(x)$.

Доказ. Според (2), десната страна на 6^o е решение на диференцијалната равенка $P(D)y=e^{rx}u(x)$. Навистина, според 13^o од §1, имаме:

$$P(D)e^{rx} \frac{1}{P(D+r)} u(x) = e^{rx}P(D+r) \frac{1}{P(D+r)} u(x) \equiv e^{rx}u(x). \ \square$$

$\underline{7^o}$. $\frac{1}{P(D)\cdot Q(D)} f(x) = \frac{1}{P(D)} \frac{1}{Q(D)} f(x)$,

т.е.

$$y = \frac{1}{P(D)}\left[\frac{1}{Q(D)} f(x)\right] \tag{5}$$

е решение на равенката $P(D)Q(D)y=f(x)$. Навистина, заменувајќи ја (5) во неа, а имајќи предвид дека $P(D)\cdot Q(D)=Q(D)\cdot P(D)$ (како операторски полиноми со константни коефициенти; в. §1), добиваме

$$Q(D)P(D) \frac{1}{P(D)}\left[\frac{1}{Q(D)} f(x)\right] \equiv Q(D) \frac{1}{Q(D)} f(x) \equiv f(x). \ \square$$

Од дефиницијата на инверзен оператор, имаме:

$\underline{8^o}$. $D^{-1}x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $D^{-2}x^n = \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$, $D^{-k}x^n = \frac{x^{n+k}}{(n+1)\dots(n+k)}$.

Пресметувањето на

$$\frac{1}{P(D)} x^n$$

може да се изврши со разложување на $\left[P(D)\right]^{-1}$ во формален бесконечен ред по степените на D. Општата идеја ќе ја илустрираме со пример.

$\underline{9^o}$. $\frac{1}{D(D^2+1)} x^3 = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + 6$.

Навистина, бидејќи

$$\frac{1}{D(D^2+1)} = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{1+D^2} = D^{-1}(1-D^2+D^4-\dots) = D^{-1}-D+D^3-\dots$$

имаме:

$$\frac{1}{D(D^2+1)} x^3 = D^{-1}x^3 - Dx^3 + D^3x^3 - D^5x^3 + \dots = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + 6. \ \|$$

Да забележиме дека во редот се јавуваат само конечен број членови, зашто $D^kx^n = 0$ за $k > n$.

Ќе наведеме неколку примери за наоѓање партикуларни решенија на нехомогени ЛДР со константни коефициенти.

<u>Пример 2</u>. $y'' - 2y' + y = e^{3x}$, т.е. $(D^2-2D+1)y = e^{3x}$. Имаме:

$$y = \frac{1}{D^2-2D+1}\, e^{3x} = \frac{e^{3x}}{4} \quad \text{(според } 2^\circ\text{)}.$$

<u>Пример 3</u>. $y^{iv} - y'' = \sin 3x$, т.е. $(D^4-D^2)y = \sin 3x$.

Имаме:

$$y = \frac{1}{D^4-D^2}\sin 3x = \frac{\sin 3x}{(-9)^2-(-9)} = \frac{1}{90}\cdot\sin 3x \quad \text{(според } 3^\circ\text{)}.$$

<u>Пример 4</u>. $y''' - y' = e^{2x} + 5x^4$, т.е. $(D^3-D)y = e^{2x} + 5x^4$. Имаме:

$$y = \frac{1}{D^3-D}(e^{2x}+5x^4) = \frac{1}{D^3-D}\, e^{2x} + \frac{1}{D(D^2-1)}\, 5x^4 =$$

$$= \frac{e^{2x}}{6} - D^{-1}(1+D^2+D^4+D^6+\ldots)(5x^4) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot e^{2x} - (D^{-1}+D+D^3+D^5+\ldots)(5x^4) =$$

$$= \frac{1}{6}\, e^{2x} - x^5 - 20x^3 - 120x, \text{ според: } 5^\circ,\ 2^\circ,\ 9^\circ,\ 8^\circ.$$

<u>Пример 5</u>. $y'' - 9y' + 9y = x^2e^{3x}$, т.е. $(D-3)^2y = x^2e^{3x}$;

$$y = \frac{1}{(D-3)^2}\, x^2e^{3x} = e^{3x}\,\frac{1}{D^2}\, x^2 = e^{3x}\cdot\frac{x^4}{12}, \text{ според } 6^\circ.$$

<u>Пример 6</u>. $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$, $(D+1)^3y = e^{-x}$, $y = \dfrac{1}{(D+1)^3}\, e^{-x}$.

Бидејќи $P(c) = (-1+1)^3 = 0$, формулата 2° не може да се примени. Затоа ќе ја примениме формулата 6°, разгледувајќи ја e^{-x} како производ $e^{-x}\cdot 1$:

$$y = \frac{1}{(D+1)^3}\, e^{-x}\cdot 1 = e^{-x}\,\frac{1}{D^3}\, 1 = e^{-x}\,\frac{x^3}{6} = \frac{1}{6}\, x^3e^{-x}.$$

<u>Пример 7</u>. $y''' + y = \cos x$, $(D^3+1)y = \cos x$. $\qquad (a_1)$

Бидејќи операторскиот полином D^3+1 содржи непарни степени на D, не е можно да се искористи формулата 4°. Затоа, наместо дадената равенка, ќе ја разгледаме равенката

$$(D^3+1)y = e^{ix}, \quad \text{т.е.} \quad (D^3+1)y = \cos x + i\sin x. \qquad (a_2)$$

Реалниот дел на решението на (a_2) ќе биде решение на (a_1):

$$y = \frac{1}{D^3+1}\, e^{ix} = \frac{e^{ix}}{i^3+1} = \frac{e^{ix}}{1-i} = \frac{1}{2}\cdot(1+i)(\cos x+i\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x-\sin x) + \frac{i}{2}(\cos x+\sin x).$$

Реалниот дел $\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$ е решение на (a_1).

Пример 8. $y'' + y = \sin x$, $(D^2+1)y = \sin x$, $y = \frac{1}{D^2+1}\sin x$.

Формулата 3° не може да се примени, зашто $P(-a^2)=0$. Затоа, наместо дадената равенка, ќе ја разгледаме ДР

$$(D^2+1)y = e^{ix}, \quad \text{т.е.} \quad (D^2+1)y = \cos x + i\sin x$$

и ќе гоземеме имагинарниот дел на нејзиното решение:

$$y = \frac{1}{D^2+1}e^{ix} = \frac{1}{(D-i)(D+i)}e^{ix} = \frac{1}{D-i}\,\frac{1}{D+i}\,e^{ix} =$$

$$= \frac{1}{D-i}\,\frac{e^{ix}}{2i} = \frac{e^{ix}}{2i}\cdot\frac{1}{D}[1] = \frac{e^{ix}}{2i}\cdot x = -\frac{ix}{2}(\cos x + i\sin x).$$

Имагинарниот дел $-\frac{x}{2}\cdot\cos x$ е решение на дадената ДР.

Пример 9. $y'' + y = x\sin x$, $(D^2+1)y = x\sin x$. Преминуваме кон ДР $(D^2+1)y = xe^{ix}$ и потоа го земаме имагинарниот дел на решението

$$y = \frac{1}{D^2+1}xe^{ix} = e^{ix}\frac{1}{D(D+2i)}x = e^{ix}D^{-1}\left(\frac{1}{2i} + \frac{D}{4}\right)x =$$

$$= e^{ix}D^{-1}\left(\frac{1}{2i}x + \frac{1}{4}\right) = e^{ix}\left(\frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4}\right) =$$

$$= (\cos x + i\sin x)\left(\frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4}\right).$$

Имагинарниот дел $\frac{x}{4}\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x$ е решение на дадената ДР.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[АН] Анго А.: Математика для электро- и радиоинженеров; Москва 1964

[АР] Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э.: Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория ўсоичивости; Москва 1968

[ДИ] Диткин В.А., Прудников А.П.: Интегральные преобразования и операционное исчисление; Москва 1974

[ЖЕ] Жевержеев В.Ф., Кальницкий А.Л., Сапогов Н.А.: Специальный курс высшей математики для втузов; Москва 1970

[КР] Крикунов М.Ю.: Лекции по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям; Казанский ун-т, 1970

[МА] Матвеев Н.М.: Диференциальные уравнения; Минск 1968

[ПЕ] Пејовић Т.: Диференцијалне једначине I и II, Београд 1974

[ПИ] Пискунов Н.С.: Дифференциал ьное и интегральное исчисления, Т.1 и 2; Москва 1964

[РО] Романовский П.И.: Ряды Фурье... Преобразование Лапласа; Москва 1964

[СМ] Смирнов В.И.: Курс высшей математики, Т.II, Т.III ч. 2; Москва 1950

[ТО] Толстов Г.П.: Элементы математического анализа, Т.II, Москва 1966

[УИ] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.: Курс современного анализа ч. II (трансцендентные функции); Москва 1963

[ФИ] Фихтенгольц Г.М.: Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II и III, Москва 1966

[ЧУ] Чупона Ѓ., Трпеновски Б., Целакоски Н.: Предавања по виша математика, кн. I, II, III; Скопје 1977

[ЭЛ] Эльсгольц Л.Э.: Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление; Москва 1970

[CH] Chan Shu-Park, Chan Shu-Yun, Chan Shu-Gar: Analysis of linear networks and systems; Addison-Wesley, Reading Mass. 1972

[KA] Kaplan W., Lewis D.J.: Calculus and linear algebra, Vol. 2; John Wiley; New York 1971

[KR] Kreyszig E.: Advanced engineering mathematics; John Wiley; New York 1967

[MI] Mitrinović D.S., Djoković D.Ž.: Specijalne funkcije; Beograd 1964

[NI] Nielsen K.L.: Differential equations; Barnes and Noble; New York 1965

[SP] Spiegel M.R.: Theory and problems of advanced mathematics for engineers and scientists; Mc Graw-Hill, New York 1971.

И Н Д Е К С

CIP-Каталогизација во публикација,Народна и универзитетска библиотека "Климент Охридски",Скопје

517.9(075.8)
517.4(075.8)

ЦЕЛАКОСКИ, Наум
Диференцијални равенки : со примери и задачи / Наум Целакоски. - 2.изд. - Скопје : Универзитет "Кирил и Методиј", 1986- . - 2 св. ; 24 см

1.изд.,1982.
1 : [Скрипта]. - 1986. - VI,219 стр. : илустр.

Библиографија:стр. 217. - Регистар.