МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 11 (2024), 43 – 62
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-11.html

ФИЛОЗОФСКИТЕ ПЕСНИ СВИРЕНИ ОД МАТЕМАТИЧКАТА ТРУБА НА АРХАНГЕЛ ГАВРИЛ

Никола Ристевски [1]

1. ВОВЕД

Филозофијата и математиката имаат многу тесна врска, историја и пракса. A priori судовите во математиката или судовите за кои што не е потребно искуството за да се утврди нивната вистинитосна вредност и да го збогатат знаењето, го заокружуваат Новиот век со Кант, но присутни се уште од времето на Платон, кога математичките форми добиваат засебен ентитет, веднаш под начелата (архе) или идеите, согласно Платоновиот реализам, а продолжуваат и со неокантијанците и логичките позитивисти. Филозофските расправи за поимите и судовите влијаат врз математиката и математичките пресметки и размислувања влијаат врз филозофијата. Врската меѓу овие две дисциплини е разгледувана од многу аспекти, а можеби еден од најинтересните е поимот на парадоксот. Филозофите секогаш се трудат да најдат нов парадокс, а пак математичарите да решат стар, и обратно. Парадоксот, дефиниран како тврдење коешто самото си противречи (логички невозможна ситуација), од една страна е една незавидна ситуација, но од друга страна можност за да се реобмислат начините на мислењето и размислувањето. Филозофските и математичките пристапи кон решавањето на парадоксите создаваат нови, што значи дека целта е исполнета – да се трага по знаењето.

Еден од интересните математички парадокси е парадоксот именуван како „Трубата на Архангел Гаврил“, откриен од италијанскиот математичар од XVII-ти век Евангелиста Торичели. Самото име на парадоксот доаѓа од проблемот на спојот на конечното и бесконечното, иманентното и трансцендентното, односно световното и божественото, спор што во Средниот век се расправал нашироко низ целата академска јавност, а пак Архангелот Гаврил е еден од седумте архангели, кои седат на престолот Божји, и го најавува Судниот ден со дување во труба. Таа досетливост го прави овој парадокс уште попривлечен за разгледување. Трубата на Гаврил, дефинирана од Торичели, всушност претставува геометриско тело со бесконечна површина и конечен волумен. Тоа е физички цврсто тело, што се добива кога кривата $y = \frac{1}{x}$ ќе се ротира околу замислената оска x, за $x \geq 1$. Вака замислена, оваа геометриска фигура има бесконечна површина (∞) и волумен еднаков на π. Парадоксот, популарно се поставува вака: „Како може тело со конечен волумен да собере доволно количество боја за да се бојадиса неговата бесконечно голема површина?“, а во суштина го претставува проблемот конечност – бесконечност, проблем што е пред сè филозофски, логички и дијалектички, а може да се прелее и низ сите дисциплини, во овој случај во математиката.

Во овој труд ќе се претстави историскиот пат до „Трубата на Архангел Гаврил“, што се случувало на филозофски план во периодот кога е поставен овој парадокс, ќе се претстави самиот математички парадокс без да се навлегува во стручно-математичките начини на сметање и решавање на парадоксот, како и нивно докажување, туку да се претстави тоа што може да се нарече филозофско и теоретско толкување на овој парадокс и конечно ќе се дадат филозофски толкувања за проблемот конечност-бесконечност и начините на кои што човекот мисли за поврзаноста на конечноста и бесконечноста. Со помош на логичкиот апарат ќе се претстави едно можно мислење за нулата, константата и бесконечноста. Ќе се тежнее да се докаже тезата дека спојот на конечното и бесконечното е константа или парадокс, тоа што дава хармонија.

2. ИСТОРИЈА НА ИЗУЧУВАЊЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТА

Без разлика колку му се мали можностите на човекот да се впушти во потрага по новото, политичките, физичките, техничките, човекот не е помирен со неговата позиција во Светот. Тој трага да открива, се прашува, се мисли кој е тој, што е Светот, има ли некаков логички ред... Почетоците на некакво критичко мислење за овие прашања се врзуваат со почетокот на филозофијата како дисциплина, а со тоа и со првите филозофи од Милетската школа, меѓу кои и Анаксимандар кој го претставува неговото учење за апејронот како архе (прапочеток) на Светот. „Она што е неопределено (апејрон) нема почеток... но, се чини дека тоа е почеток на другите нешта, тоа ги опфаќа сите нешта и кормилари со сè, како што велат оние што покрај апејронот не утврдуваат други причини, на пример, ум или љубов. А тој (апејронот) е нешто божествено и тоа затоа што е бесмртен и непропадлив, како што вели Анаксимандар, но и повеќето други филозофи на природата.“ [1, стр. 133] Ова учење несомнено упатува на концептот за бесконечноста во раната Антика, периодот кога се поставуваат основите на геометријата и аритметиката. Тоа што е почеток за другите нешта, самото не може да се определи (нешто што наликува на прашањето каде е усникот на трубата на Гаврил?) чија што површина е толку голема што тежи кон бесконечноста, а волуменот толку мал.

Филозофските расправи за овој однос конечност – бесконечност не секогаш се однесуваат на бесконечно малите или бесконечно големите нешта, туку и на односот сега – секогаш, нешто што дијалектички е разгледувано кај Темниот Хераклит од Ефес, кој смета дека сè во светот настанува низ борба, а со тоа упатува на еден друг аспект на бесконечноста, на страна од апстрахираната, односно логичко-математичката, туку на дијалектичката позиција на бесконечноста. Оваа линија на резонирање за статусот на бесконечноста во конечноста на човекот нема секогаш да се следи, но ќе биде појдовна точка за аргументите pro и contra што ќе се јавуваат како резултат на борбата, таа на бидувањето и таа на мислењето. Па, може да се забележи дека расправата за бесконечноста иако ги надминува временските и просторните карактеристики, сепак времето и просторот се испреплетуваат низ човековите мисли кога се зборува за овие важни теми. Некои од обидите за надминување на проблемот со бесконечната големина или деливост може да се согледаат кај еден првите, условно кажано, логичари Зенон од Елеја.

Зенон од Елеја е пожртвуваниот ученик на Парменид, кој го поставил учењето за Едното, а Едното како вечно, непроменливо, бестреперно, неделиво, непропадливо, целосно и обединето сосем. Така, Зенон ги поставил четирите познати апории (апорија – безизлезна ситуација) за да може аргументациски да го докаже учењето за Едното на неговиот учител Парменид. Во контекст на парадоксот што се разгледува во овој текст ќе се претстави втората Зенонова апорија „Ахил и желката“, што впрочем има доста популарни изменувања, веројатно затоа што од неа можат да се извлечат доста различни поуки. За оваа апорија дознаваме од Аристотел, [2:169-180] кој коментира дека Зенон смета дека Ахил не ја стигнува желката затоа додека да стигне до желката треба да стигне барем до половината од патот, а додека да стигне до полвината, барем до половината на половината, односно тоа што може да се прикаже како $\frac{1}{2^x}$, а чија што крајна вредност е $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2^x} = 0$, други зборови Ахил не може да ја стигне желката, а со тоа Зенон со контрадикција заклучува дека Парменид е во право и дека Едното е неделиво. Без разлика на тоа што ова Зеноново докажување не било нашироко прифатено, доста е важно при разгледувањето на деливоста на просторот, ergo на позиционирањето на броевите како π во некоја замислена точка од кружницата или оската.

Аристотел го дава толкувањето дека треба да се разликува потенцијалност од актуалност, односно дека Ахил има можност да ги поминува сите тие точки што стојат на половина од траекторијата на желката, на половината на половината итн., но тој никогаш не ги актуализира со запирање. Може да се спекулира (расправа) дека апоријата за Ахил и желката има корени во проблемот на континуум, па без теорија на мера, бесконечноста на поделби на растојание кое е конечно, не ја исклучува можноста да се помине тоа растојание, бидејќи поделбите немаат стварно постоење освен ако не им се направи нешто, во овој конкретен случај да се запре кај нив. Но она што е важно за Аристотеловата метафизика е учењето за односот конечно – бесконечно. „Верата во тоа да постои нешто неограничено би произлегла во истражувачот во главно од пет разлози: (1) од времето (затоа што тоа е неограничено); (2) од делбата која е во величините (затоа што и математиката се служи со неограничените); (3) затоа што само така не престанува настанувањето и исчезнувањето ако биде неограничено она од што се создава стварта која настанува; (4) затоа што ограниченото секогаш се ограничува спрема нешто, па затоа е неопходно да нема ограничување, ако секогаш мора да се ограничува едното спрема другото; (5) што е најмногу од сѐ и најважно, разлогот [3: 93 – 123] што е за сите заедничка тешкотија: затоа што во мислењето нема крај, и бројот се чини неограничен и математичките величини и она што е над небото." [2: 69] За да може понатаму да елаборира дека неограниченото (бесконечното) не може да е, затоа што тогаш ќе има недостатоци, како и сите конечни и ограничени работи, или, ете може да се каже и актуални. Така, Аристотел вешто заклучува дека бесконечното е нешто кон што може да се тежнее, а не и да се оствари, а со тоа му дава некаква, слободно кажано, трансцендентна природа.

Во физиката на важност останува Аристотел иако неговите филозофски учења не биле нашироко прифатени. Во математиката, како дисциплина најважен е Евклид, особено во геометријата, чија што аксиоматизација опстојуваше како единствена сѐ до откривањето на проблемот со постулатот со паралелните прави и поставувањето на основите на пангеометријата од Лобачевски дури во XVIII век. Оваа напомена се однесува за да може јасно да се утврди дискурсот на науката во Средниот век, што ќе се расправа на полето на термините, поточно во рамки на логиката, а со тоа уште поблиску до теоретската математика, научните расправи за поимите, обемот, судовите. Иако навидум може да се забележи дека тоа не е во доменот на науката, науката, исто како и филозофијата, следи некакви парадигми и со тоа е од важност да се следат наративите што се пласираат. Ништото, бесконечното, константното се важни поими и за филозофијата и за математиката, па добро е да се разгледа на каков начин овие прашања се третираат кај филозофите од Средниот век и Ренесансот, периодот во кој што е откриен парадоксот што се анализира во текстот.

Често во академските расправи има негативен став кон Средниот век поради тоа што централна тема во филозофските расправи е Бог. Тоа секако укажува на религискиот карактер на тоа општество и тој дел од Западната историја, но ако тој факт се земе предвид и се надминат стереотипите поврзани со поимот за Бог, тогаш многу подобро може да се согледаат импликациите од тие расправи и врз траекторијата на научната мисла. Онтолошкиот доказ за Божјото постоење на Свети Анселм Кантербериски е прекрасен пример за тоа колку е слично човечкото размислување за Бог и за бесконечноста. „Не може да се замисли дека не постои Бог. – Бог е она од што ништо поголемо не може да се замисли. – Тоа што може да се замисли дека не постои не е Бог.“ [4, стр. 4], поедноставно срочено, е ставот на Анселм. Тој во „Прослогион“ II и III се обидува да го покаже точно тоа – дека тоа од што поголемо не може да се замисли постои. [5, стр. 18 – 23; стр. 32 – 41] Се разбира дека Анселм тоа го расправа во метафизичка смисла, односно за Бог, но поврзувањето со бесконечно големите вредности и во математиката не може да се одмине кога станува збор за овие поврзани прашања. Тука треба да е јасно дека се мисли на начинот на мислење и аргументирање и докажување, а не на прашањето дали Бог постои или не. Во таа смисла и знакот за бесконечност „∞“, што патем е измислен од Џон Волис во XVII-тиот век упатува на сличен начин на резонирање, овој пат во математичка смисла. Така, во математиката не се сретнува „∞ + 1“ затоа што и користењето на „∞“ е сосема доволно за да се сфати смислата на одреден суд. Овој пасус од друга страна не смее да го вознемирува научникот дека ова е научно или фактичко поврзување на овие два поими, напротив ова е една спекулација што овозможува да се замислуваат релации и зависности меѓу начините на мислење во филозофијата и размислувањата во логиката и математиката. Сепак, бесконечноста во математичка смисла е in intellectu и со тоа е сосема оправдано да се истражуваат вака специфични прашања поврзувајќи ги во дисциплини што сосема различно ги третираат.

Како што е редот кога се спекулира за одредени прашања што навидум немаат поврзано се случува да треба да се споменат личности кои не се секому познати. Еден од важните ренесансни германски филозофи е Никола од Куза, кој во својата „De Docta Ignorantia“ зборува за преклопувањето на Минимумот и Максимумот во Вселената, нешто особено важно кога се зборува за нулата, бесконечноста и константата. Но пред да се објасни неговото метафизичко учење за трансцендентното преклопување треба да се спомене примерот како Кузански ја разгледува можноста човекот да замисли бесконечно голем триаголник. Имено тој смета дека човекот кога би замислил бесконечно голем триаголник, тој би бил една проста права линија затоа што пред сѐ триаголникот би требало да има три страни, потоа барем едната би требало да е бесконечна, а тоа значи дека збирот на другите две би требало да е поголем од неа. Ова доведува до апсурд затоа што не може да има нешто поголемо од бесконечноста. „И бидејќи тоа е највистинскиот триаголник – нешто што не може да биде без три линии – нужно тоа ќе биде дека една бесконечна линија е три линии и дека трите линии се една најпроста линија.“ [6, стр. 22]. Слично расправа и за бесконечноста на броевите „Сѐ од коешто поголемо или помало не може да се постави не може да се именува. Затоа што со движењето на се доделуваат имиња на нешта, што во некоја корелациска врска, можат да бидат споредени како поголеми или помали. И бидејќи сите нешта постојат на најдобар начин на кој што се способни да постојат, не може да има мноштво суштества независно на број. Зашто, ако бројот се отстрани, различноста, редоследот, компаративната врска и хармонијата на нештата престануваат; и самата плуралност на суштествата престанува. Но, ако самиот број е бесконечен – во кој во случај тоа да биде всушност максимално, а минимумот да се совпадне со него – сите овие исто така би престанале, бидејќи се и бесконечен број и да биде минимален [т.е., воопшто да не биде број] износ на истото.“ [6, стр. 10] Така, може да се заклучи и тоа што тој на почетокот на својата книга го кажува дека кога би се апстрахирале од споредба Максимумот и Минимумот се преклопуваат. Ова учење на Кузански иако се однесува на метафизиката и доцно-средновековните расправи за Бог се преминува и во полето на математичката теорија, нулата иако е одамна измислена, сепак полемиките за нејзината дефиниција и денес опстојуваат, ако не во математичките, тогаш барем во филозофските кругови. Во однос на „Трубата на Гаврил“, радиусот на усникот на трубата тежнее кон нула, а тоа ѝ овозможува на површината да тежнее кон бесконечност. Дали тие се преклопуваат, метафизички се разбира, останува да се разгледа.

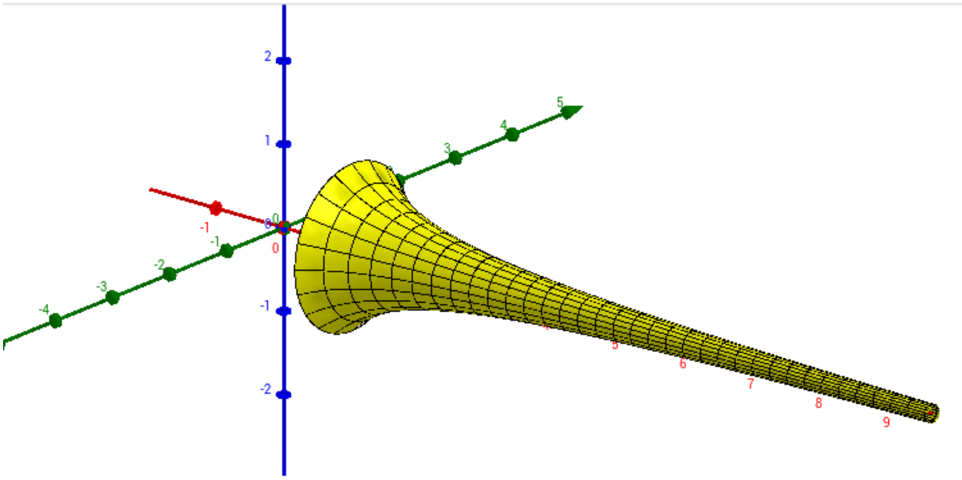
Рационалистичкиот дуализам на Декарт со сигурност не е на линија со учењето на Никола Кузански, но тоа раздвојување на духовната од телесната супстанција овозможи друга спојка – линеарната алгебра со аналитичката геометрија, можноста одредени геометриски проблеми алгебарски да се решаваат и обратно. Увереноста на Декарт за вроденоста на поимите, одлика и на сите други рационалисти, неговото учење за јасноста и разделноста на идеите, како таа за Бог или таа за триаголникот, дека триаголникот секогаш има три страни, што патем произлегува од аналитичката дефиниција за поимот триаголник го трасираа патот и за линеарната алгебра со аналитичката геометрија. Декартовиот правоаголен координатен систем овозможи низа на математички и физички иследувања што помогна во олеснување на пресметките во астрономијата иако Декарт живее по Коперниканскиот пресврт кон Хелиоцентричен систем, а самиот пресврт не е изведен со негова помош. Отфрлајќи ја варијантата Земјата да биде центар на Светот и барајќи нови потенцијални референтни точки – Сонцето, човекот повторно започна да сонува за бесконечноста. На забелешките против овие аналогии треба да се аргументира дека ова треба повеќе да бидат корелации низ историјата на мислата (и науката), отколку што треба да претставуваат директни причинско-последични врски низ текот на филозофирањето и научното иследување. Декарт овозможи од аналитичките дефиниции во геометријата да се пређе и на нивните алгебарски форми. Тоа е значаен напредок што дава поврзување на временскиот и просторниот концепт за бесконечноста, нешто што во математичка смисла не се третира (затоа што во математиката судовите се a priori, односно не е потребно искуството за да се утврди нивната вистинитосна вредност), но ова спојување овозможува да се апстрахираат од друга појдовна позиција, имено да се ослободи изборот на точката.

Декартовиот координатен систем ги олесни подоцнежните пресметки за движењата на планетите околу Сонцето иако е поставен по пресвртот. Спротивно на Галилеевиот телескоп чијшто очник лесно се наоѓа, но не се дофаќа тоа што се гледа, Торичели го открива и поставува парадоксот „Трубата на Гаврил", таа чијшто усник не се наоѓа, а звукот татни од неа. Сличноста на овие две нешта телескопот и Гавриловата труба едноставно не може да се отфрли, па макар и тоа да може да се кажува само од денешна дистанца. На овој начин историски се стигна до поставувањето на овој парадокс, а сега е значајно тој да се претстави и со математичкиот апарат, другата страна на рационализмот за да може да се бараат импликациите што овој математички парадокс може да ги создаде врз филозофското и здраворазумското мислење, односно размислување.

3. МАТЕМАТИЧКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ПРОБЛЕМОТ

Евангелиста Торичели бил филозоф, физичар и математичар, кој живеел од 1608 до 1647 година на Апенинскиот Полуостров. Во својот краток живот активно се занимавал со математички и физички проучувања. Во физиката и астрономијата бил следбеник на Коперник и ученик на Галилеј, современик на Брахе и го измислил барометарот. На математички план имал трудови во областа на дефинирањето на бесконечноста и импликациите од можните дефиниции за поимот на бесконечноста во математичка смисла. Истовремено со овие научни иследувања имал и филозофски ставови поврзани со тоа што може да се нарече „комплетна бесконечност“, а што може да биде и contradicttio in adjecto. Овие бранувања во филозофијата потекнувале од парадоксот „Трубата на Гаврил“, што бил поставен од самиот Торичели. Сега треба да се прејде кон математичкото на парадоксот за да може да се разгледаат импликациите што произлегуваат од него.

Торичели ја добива трубата со ротација на графот $y = \frac{1}{x}$, ротирајќи го околу x-оската, замислена како физички цврсто тело. Доменот на вредности за x го поставува меѓу $x \geq 1$ и $x = a$, каде што $a > 1$ и така се добива фигурата прикажана на слика 1. Пресметувањето на плоштината на ова тело секогаш давало резултат што тежнее кон бесконечност, а пак пресметките за волуменот давале резултат еднаков на π, кога $a \to \infty$. Ова се разбира дека претставува парадокс зашто како може едно физички цврсто тело да има конечна зафатнина, а бесконечна плоштина. Така, Торичели се обидел неколку пати да понуди доказ дека и плоштината не тежнее кон бесконечност, но тие обиди не дале успех. Разгледувајќи го овој парадокс од денешна перспектива треба да се знае дека во тој период Торичели пресметките ги извршувал со математички апарат што историски претходи на диференцијалното и интегралното сметање, поставени од Лајбниц и Њутн, а подоцна се востановени во математичката пракса. Тука равенствата за површината и волуменот ќе се претставаат со современиот математички апарат, без да се докажуваат за да може да се има полесен увид во тоа што теоретски и филозофски се расправа.



Слика 1. Приказ на Трубата на Архангел Гаврил.

Во математичката анализа оваа површина може да се парамет–ризира со следните равенства:

$$x(u,v) = u\,, \qquad (1)$$

$$y(u,v) = \frac{\cos v}{u}\,, \qquad (2)$$

$$z(u,v) = \frac{\sin v}{u}\,, \qquad (3)$$

и да се претстави со равенството:

$$x^2 = \frac{1}{y^2 + z^2}\,. \qquad (4)$$

Така, плоштината на оваа труба математички се изразува на следниот начин:

$$P = 2\pi\int_1^a \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\right)dx > 2\pi\int_1^a \frac{dx}{x} = 2\pi\cdot\ln x\,|_1^a = 2\pi\ln a\,, \qquad (5)$$

што кога *a* би тежело кон бесконечност би се добил следниот лимес:

$$\lim_{a \to \infty} P \geq \lim_{a \to \infty} 2\pi \ln a \to \infty . \qquad (6)$$

Со ова веќе е јасно дека плоштината на Гавриловата труба тежнее кон бесконечност, додека пак кај волуменот се добиваат следните две равенства:

$$V = \pi \int_1^a \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right), \qquad (7)$$

што кога *a* би тежело кон бесконечност би се добил следниот лимес за волуменот на трубата:

$$\lim_{a \to \infty} V = \lim_{a \to \infty} \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right) = \pi . \qquad (8)$$

Овие решенија се контраинтуитивни. Не е очекувано физички цврсто тело да има површина што тежнее кон бесконечност и волумен ограничен на π. Но, веројатно таа е и причината самиот Торичели да се впушти во филозофски расправи за бесконечноста за да може да се придвижи расправата кон некакво решение што ќе даде задоволителни резултати за овој парадокс. Пред да се прејде кон појаснување на решенијата на овој парадокс треба да се каже уште дека тоа што е контрадикција во еден систем не нужно е контрадикција и во некој друг систем, а тука алудирајќи на Евклидовата аксиоматизација на геометријата, што била единствена во периодот на Торичели, а и денес се користи, барем во доменот на општата (елементарната) геометрија.

Иако од труба се очекува гласна музика, овој парадокс можеби тивко започна да ја турка до тогаш единствената Евклидова геометрија. Риман и Лобачевски се едни од првите математичари кои го критикуваат петтиот постулат од „Елементи“ на Евклид, тој за паралелните прави. Постулатот е дека при дадени точка и права, низ точката може да се повлече само една права што е паралелна на дадената, односно дека аголот меѓу двете прави е 180 °, [7, стр. 7]. И двајцата Риман и Лобачевски го критикуваат ова решение, се разбира на различен начин. Риман ја става релативноста во преден план, а Лобачевски ограниченоста на овој постулат. Стојалиштето што може да се каже дека е заедничко за нив е дека ако веќе математичките судови се a priori, тогаш не би требало самата математика да се потпира на искуственото, туку да најде начини истото да го надмине. Ова надминување на искуството ќе обезбеди нови интерпретации за парадоксот „Гаврилова труба“.

Риман, филозофски е на иста линија со Мелис од Самос, кој за Едното на Парменид поучува дека нужно е сфера. „Во сфаќањето на концептот на површина, покрај внатрешните својства кои ги даваат должините на патеките на површината, постојат надворешни својства кои се однесуваат на позициите на точките по површината во однос на точките надвор од неа. Сепак, можеме да ги апстрахираме овие последни својства, во исто време со дадената површина, сите оние површини во кои движењето се остварува преку трансформација, која што ги остава непроменети должините на линиите што лежат целосно во рамките на површината и во однос на таквите површини како еквивалентни. Ние мислиме на такви површини како изведени со превиткување, а не со растегнување.“, [8, стр. 265] што навестува на можностите просторот да треба да се разгледува и на начини различни од Евклидовиот. Ова учење помага во пресметките на површините на различните тела, но и во концепциите за тоа дека трансформацијата од три димензии во две никогаш не е без вакви предизвици. Римановите пресметки овоможиле да се стигне до равенствата (5), (6), (7) и (8).

Останува да се направи осврт кон пангеометријата или хиперболичната геометрија на Лобачевски, една геометрија што на ова прашање со Гавриловата труба му овозможува задоволувачко решение, наместо да го смета за парадокс. Така, на почетокот на „Пангеометрија“ Лобачевски, на некој начин како веќе да ги има надминато и сите претходни филозофски заблуди во расправата за просторот, како на пример теоријата за триаголникот-права на Кузански, што беше претходно спомената. „Така, на пример, признаваме дека круг со бесконечен радиус се совпаѓа со права линија, дека сфера со бесконечен радиус се совпаѓа со рамнина и дека аглите на произволен праволиниски триаголник зависат само од односот на неговите рабови, а не од актуелните рабови, или, конечно, како што вообичаено се прави во елементарната геометрија, дека од дадена точка во рамнина можеме да повлечеме само една права паралелна на друга дадена права, додека сите други линии извлечени од истата точка и во истата рамнина нужно мора, доколку се доволно продолжени, да ја пресечат дадената линија.“, [9, стр. 3], а со ова веќе започнува расправата за начините на кои што може да се размислува за просторот при гранични големини, што тежат кон бесконечноста. Овие математички, но и филозофски мисли неминовно влијаат и врз целокупниот подоцнежен развој на филозофијата и науката.

4. ФИЛОЗОФСКИ ТОЛКУВАЊА ЗА ОДНОСОТ НА ЧОВЕКОТ КОН БЕСКОНЕЧНОСТА

Овие математички и теориски учења треба повторно да се стават во контекст за да се добие синтеза на знаењето за парадоксите и можностите за нивното надминување. Расправата за геометријата, а век-два подоцна и за алгебрата се до некаде производ на Кантовото учење за трансценденталната естетика, односно начинот на кој што синтетичките судови a priori се возможни во геометријата и алгебрата. Ставот е дека просторот и времето се чисти форми на сетилноста, односно дека тие му помагаат на субјектот (човекот) да ги средува надворешните осети што доаѓаат до неговиот разум. „1. Просторот не е емпириски поим кој се апстрахира од надворешните искуства. ... 2. Просторот е нужна претстава a priori која е основа на сите надворешни сетилности. Човекот никогаш не може себеси да си створи претстава дека нема простор, но многу добро може да замисли дека во него не се наоѓаат никакви предмети. ... 3. На оваа нужност се основа a priori аподиктичка извесност на сите геометриски начела и можноста за нивните a priori конструкции. ... 4. Просторот не е дискурзивен или, како се кажува, општ поим за односите на стварите воопшто, туку е чиста сетилност. ... 5. Просторот се претставува како бесконечна величина.“, [10, стр. 35-38], а јасно е дека на оваа линија се учењата за просторот кај Лобачевски затоа што и во „Пангеометрија“ просторот иако има можност да поседува различни својства (карактеристики) е континуиран и не може да не е. Но, што е поважно кај ова учење е дека Кант првата математичка антиномија на умот ја дефинира како „Теза: Светот има почеток во времето, и е ограничен во поглед на просторот. Антитеза: Светот нема почеток, и не е ограничен ниту во просторот ниту во времето.“ [10, стр. 209] и тука можеби се крие одговорот за конечноста на волуменот на Гавриловата труба, се разбира како спекулација, а не како тврдење.

Кантовиот критицизам завладеал со науката, особено што со неговите критики метафизичките прашања се тргаат од науката и се промовира учењето дека епистемологијата е клуч–ната субдисциплина на филозофијата, а не метафизиката. Ова стојалиште е нашироко прифатено, но не и од Хегел и Маркс, кои иако сосема спротивставено, не ја прифаќаат ограни–чувачката карактеристика на можноста на човечкото познание. „Првото или непосредно одредување на природата е апстрак–тната општост на нејзиното битие-надвор-од-себе, - неговата индифе–рентност без посредување, просторот. Ова е пред сè идеален ци–мер, затоа што тој е битие-надвор-од-себе и заправо континуи–ран, затоа што таа надвор-другост е по сè апстрактна и нема во себе никакви одредени разлики“, [11, стр. 212]. Понатаму Хегел го критикува (коментира) концептот за тридимензионал–носта на просторот, укажувајќи на (не)различноста меѓу трите димензии на просторот, но и упатува и на димензиите на вре–мето (минато, сегашно, идно) и неможноста и тие добро да се одредат во релација со течењето на времето или немарно кажано бесконеч–носта. Но, Хегел за разлика од Кант смета дека пара–доксот го движи Светот напред, па макар тоа да е и кон бесконечноста, поим што сè уште не е јасно што точно означува. Како стои Лобачевската геометрија во однос на Хегеловата дијалектика треба дополнително да се истражува, но учењето дека парадок–сот движи затоа што тој предизвикува да се најде нов парадокс во моментот кога човекот се помирува со стариот е нешто што како начин на мислење помогнал да се надмине и ограничувач–киот петти постулат на Евклид.

Кога се разјаснија нештата околу можноста на оваа труба, што без да испушта звук прави толку врева, истовремено да има неограничена површина и ограничен волумен, треба да се нап–рави увид што е тоа што останува исто, константно. Тоа е π. Нема лаик или ерудит кој не се позанимавал со π барем на кратко. Кун во својата „Структура на научните револуции“ [12] посочува дека најмногу време во историјата на науката се трошело на прес–

метување на константите, како оваа, односот на периметарот на кругот со неговиот дијаметар. Без разлика на тоа до која децимала е денес стигната пресметката на π, расправите за самата природа продолжуваат. Тие исто така во различни учења сосема различно се поставуваат, некогаш е тој само ирационален број, некогаш трансцендентален, а современите математички теории од уште поразлични позиции ја разгледуваат оваа константа. Можеби ова ограничување на човечката можност еднаш и засекогаш да ги пресмета константите, како оваа, е тоа што го означува тежнеењето кон бесконечноста.

Друг аспект во оваа расправа за овој парадокс е човечкиот начин за мислење за бесконечноста и за ништото, тоа што беше прва математичка антиномија кај Кант. Кога се замислуваа оваа труба како што се зголемува вредноста на *x*, така се намалува вредноста на радиусот на пречникот на трубата. Додека $x \to \infty$, $r \to 0$, но и за нулата расправиите не се при крај, исто како за π, така и за неа се спори за нејзината природа. На некој начин таа го претставува тоа што филозофски некогаш се нарекува ништо, а за што треба да се прави разлика меѓу ништото и празниот простор. Впрочем, таа разлика веројатно го ограничува волуменот на оваа труба, закривувајќи ги односите меѓу паралелните прави, како што појаснува и Лобачевски.

Овие филозофски и научни расправи за нештата што тешко се замислуваат, а уште потешко можат и физички да се пронајдат се особено важни за напредокот, но и развојот на човечката мисла. Денес Ајнштајновата теорија на релативноста особено се служи со пангеометријата на Лобачевски и на Риман. Какви парадокси ќе се најдат во овие теории пак, останува да покаже тоа што можеби со претерана сигурност тежнее кон бесконечноста – времето. Разгледувајќи колку долго Евклид бил единствениот авторитет во поглед на геометријата (со тоа и просторот) не е чудно таа расправа да се појави доста подоцна од моментот на пишувањето на овој текст. Но, во склад со дијалектичкото мислење важно е да се разгледа како воопшто е можен самиот парадокс, па и како неслучајно е именуван.

Името на Архангелот Гаврил може да се прочита во сите монотеистички свети книги. Во Талмудот или Стариот завет, во Книгата Даниил, тој се јавува како глас кој го советува Даниил.

Во Новиот завет на Светото писмо Библијата се јавува како гласот кој го најавува раѓањето на Исус Христос и Свети Јован Крстител и како најавувач на Судниот ден. Во Куранот Гаврил е гласот што му го дава Божјото слово на Мухамед. Не е случајно што Торичели го избира точно ова име за неговиот парадокс. Имено, површината на оваа труба тежнее кон бесконечност, меѓу другото и затоа што се простира по должината на *x*-оската, а со тоа и не може да се најде усникот од каде што ќе биде кажан зборот. Гласот, пак, без разлика на (не)сигурноста од каде доаѓа (Бог е трасцендентен) е чуен од Даниил, Богородица, Мухамед, па така волуменот што го зафаќа е конечен. Религијата на сосема различен начин, но слично како и науката тежнее да го надмине искуственото, речиси секаде симболот се јавува вака неодредено, незнајно до каде се простира, а со конечни импликации. Метафората не смее да биде ниту метафизичка, а уште помалку математичка шема на решавање на парадоксите, но ова објаснување беше важно за да се разбере улогата што ја има парадоксот (не само овој) во создавањето на начините на мислење. Прашањето како да се излезе од апоријата и да се продолжи со пресметките, со секојдневието е особено важно да се постави. При решавање на овој парадокс, како што беше кажано треба да се разгледаат три работи: ништото, бесконечноста, константата.

Има еден фрагмент, фрагмент 60, што му се припишува на Хераклит, а што поради староста често пати се мисли дека е народна поговорка. „Патот угоре и удолу еден е и ист." [1, стр. 142] Во оваа расправа, а во однос на одредувањето на поимите ништо и бесконечност треба да се размислува во однос на не баш рамноправниот третман што го имаат бесконечноста и нулата. Се знае дека кон бесконечноста (∞) се тежнее, а кон ништото (0) може веднаш да се стигне. Можеби овој однос кон неможноста бесконечно да се дели условно кажано замислениот простор, атомистички – празниот простор треба уште да се расправа. Тука веќе не се коментираат равенствата (7) и (8), туку повеќе се расправа за концептот на т.н. бесконечна делба, нешто што се дава како одговор кон разгледуваниот парадокс, дека за да се бојадиса целата труба (со површина што тежнее кон бесконечност) треба бојата да има толку ситни молекули како дијаметарот на усникот кога $x \to \infty$. Не треба веднаш да се отфрла можноста дека меѓу $0{,}9_{(n)}$ и 1 сепак не може да се дојде до некаква замислена точка. Не е на одмет со иста ревност треба да се мисли дека исто како кон бесконечноста, така може само да се тежнее и кон ништото (нулата), а ако барем се следи античкиот филозофски концепт дека ништото не е. Сепак и во математиката дискусиите за нулата не биле еднозвучни, па така Хобс се спротивставувал на принципот на Кавалиери да постои нешто со должина еднаква на нула.

Од една страна тежнеењето на $x \to \infty$, а од друга страна тежнеењето на другите оски $y \to 0$ и $z \to 0$ даваат можност малку поилустративно да се мисли кон оваа борба меѓу битието и ништото. Хегел, ништото го спротивставува на битието како апстракција, а пак вистината ја одредува низ борбата „Ништото, како овој непосредно на самиот себе еднаков, исто така е обратно на *она истото* што и битието. Вистината на битието и ништото е тоа што го обавуваат единството; тоа единство е *постоењето*.“ [11, стр. 106] Согледувајќи ги овие филозофски толкувања на поимите што се употребуваат при разгледувањето на овој парадокс може да се каже дека точно така се добива конечен волумен на ова физички цврсто тело. Хегеловски кажано, парадоксот овозможува да се придвижува Светот напред, та макар и целта да не е одредена. Па, така сега целта се јавува како парадокс. Можеби и затоа Хегел разликува два вида бесконечност, ‘рѓава и убава. Првата е кога бесконечноста е само негација на нешто конечно, додека пак за убавата бесконечност (вистинската) смета дека таа бесконечност е кога преминувањето на нешто во нешто друго збиднува и како резултат на преминување на нешто друго спрема самото себе, како дообјаснување на неговото спорење логичкиот закон на идентитетот ($p \to p$), тоа што математички се прикажува со $x = x$. Се забележува дека ова учење наликува на Хераклитовското кога тој тврди дека борбата е вечна и бесконечна. Со други зборови, односот што го градат површината на трубата што тежнее кон бесконечност и нејзиниот дијаметар што тежнее кон ништо е точно тоа – нејзиниот конечен волумен, што е π, константата за која што се знае толку долго колку што се знае и за човечката историја, а сѐ уште не може конечно да се одреди. Таа сигурност во нешто константно, а сепак нецелосно (не)одредено на некоја начин може да даде една одредница за тоа како може да се размислува за парадоксите и за нивните можни разбирања, па и решенија. Начините на мислење за тоа што математички се нарекува гранични вредности помагаат при решавањето на овие таканаречени загатки.

Значи, волуменот е конечен, но со неконечно одреденото π. Тоа не дозволува ништо друго освен да се спомене Маркс, филозофот кој спори за конечноста. Во неговиот дипломски труд Маркс дава едно толкување на разликите меѓу Демокритовото и Епикурејското учење за атомите и така сфаќа дека Епикур на атомите им дал и можност да скршнат од патеките (праволиниски и реакциски) што строго им ги одредил детерминистот Демокрит, [13]. Така, кометата станува потполно слободен и реализиран атом, но редот (тоа што Хераклит го нарекува хармонија) дава други услови за суштествување. Марксовото учење дека ресурсите се конечни и дека со конечни ресурси не може да се направи бесконечен раст до некаде дава одговор на расправаниот парадокс. Волуменот е π и покрај тоа што заинтересиранот трубач нема никогаш да го најде усникот за да може да отсвири некоја хармонична мелодија. Неговото помирување веројатно треба да го бара во бесконечните можности за одредување на (бес)конечно (не)одреденото π.

5. ЗАКЛУЧОК

Безизлезните ситуации како апориите или парадоксите, односно ситуациите во кои што човекот не знае кој пат да го фати, знаел или не каде сака да стигне се моменти што го одбележуваат неговото човекување. Мислењето ги опфаќа овие т.н. нерешливи ситуации и се обидува на некаков начин да ги надмине. Парадоксот „Трубата на Архангел Гаврил“ е еден таков парадокс што се јавува во Евклидовата геометрија, а што низ историјата на човечката мисла се покажало дека во Лобачевската геометрија е надминат. Наоѓањето на нов парадокс можеби претставува поголем чин од решавањето на стар, па затоа и тука беше разгледуван парадоксот како нов. Начините на кои се размислува за одредени проблеми секако се опфатени во некои парадигми и надминувањето на проблемите е можно само со филозофско и научно полемизирање.

Евклидовата геометрија и трите димензии до некаде се искус–твени, но не и целосно, па затоа и за овој парадокс се продла–бочи расправата за тоа како треба да се мисли за да се дојде до одговор како се стига до парадоксот, но и да се најде некое помирливо решение во однос на постојаната присутност на пара–доксите кога нешто се мисли, се размислува. Може да се каже дека тука повеќе се дискутираше помирувањето со парадоксот отколку неговото можно решение во рамки на Евклидовата гео–метрија, што е утврдено поинаку.

Расправајќи за поимите за битие, бесконечност, нула, ништо, константа се дојде до потврдување на тезата дека парадоксот е тоа што придвижува, без разлика на (не)одреде–носта на целта. Филозофијата и науката секогаш ќе имаат тесна врска со која што ќе настануваат парадокси од првата и ќе се решаваат со втората, и обратно. Парадоксот ја дава борбата, а борбата хармонијата...

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Митевски, *Претсократовци*. Скопје: Матица македонска, 2006.

[2] Aristotel, *Fizika,* Prev. Tomislav Ladan, Zagreb: Globus, 1988.

[3] Г. В. Лајбниц, *Расправа за метафизика; Монадологија,* Прев. Ана Димишковска Трајаноска, Скопје: Магор, 2002.

[4] А. Плантинга, *Онтолошкиот аргумент во историјата на филозофијата: Од Свети Анселм до современите филозофи,* Скопје: Арс студио, 2017.

[5] Anselm, Saint of Canterbury, *The Major Works,* Ed. Brian Davies and G. R. Evans, Oxford: University Press, 1998.

[6] Nicholas of Cusa, *On Learned Ignorance*, Book 1, Chapter 14, Trans. Paul Wilpert, Minneapolis: The Arthur J. Banning Press, 2007.

[7] Euclid, *Elements,* Trans. Richard Fitzpatrick. Richard Fitzpatrick, 2007.

[8] B. Riemann, *Collected Papers*. Trans. Roger Baker, Charles Christenson, Henry Orde, Heber City: Kendrick Press, 2004.

[9] N. I. Lobachevsky, *Pangeometry*. Trans. Athanase Papdopoulos, European Mathematical Society, 2007.

[10] I. Kant, *Kritika čistoga uma,* Prev. Viktor D. Sonnenfeld. Zagreb: Nakladni zavod Matice hrvatske, 1984.

[11] G. W. F. Hegel, *Enciklopedija filozofskih znanosti*. Prev. Viktor D. Sonnenfeld, Sarajevo: Veselin Masleša, 1987.

[12] Т. Кун, *Структурата на научните револуции*. Прев. Виолета Панзова, Скопје: Магор, 2002.

[13] Ф. Енгелс, К. Маркс, *Избор од раната мисла*. Скопје: Заедница за издавачка дејност, 1974.

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Филозофски факултет, Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: nikola.shindre@gmail.com

Примен: 8.2.2023
Поправен: 13.6.2023
Одобрен: 19.9.2023
Објавен на интернет: 24.12.2023