РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА, ОДРЖАН ВО 1959 ГОД.

Трети клас

1. Даден е правоаголник со страни a и b. Од една произволна точка на една од неговите дијагонали спуштени се нормали x и y до двете негови соседни страни, што се наоѓаат од истата страна на дијагоналата. Ако е збирот од тие нормали рамен на некој број s, да се изразат x и y со помош на a, b и s и врз основа на тоа да се покаже меѓу кои вредности може да варира s.

2. Каков услов треба да задоволуваат броевите a и b, за да равенката

$$1+\log_b(2\lg a-x)\log_x b=\frac{2}{\log_b x}$$

има барем едно реално решение?

Да се реши дадената равенка.

3. Во пресечен конус со радиуси на основите R и r и висина H се поставени други два конуса така што базисот на секој од нив се поклопува со по еден базис на пресечениот конус, а врвовите на тие конуси паѓаат во центрите на спротивните базиси на пресечниот конус. Да се одреди големината и положбата на пресекот од двата впишани конуси.

Четврти клас

1. Дадена е квадратната равенка

$$x^2-(3a+1)x-a+b+2=0,$$

каде што a и b се координати на една точка $M(a,b)$ во рамнината aOb.

Треба да се најде:

а) По каква крива ќе се движи точката M, ако корените на квадратната равенка ја задоволуваат релацијата

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=1.$$

б) Какво треба да биде a, ако е $b=2a$, а корените на равенката треба да го задоволуваат неравенството

$$\frac{x_1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>2.$$

2. Катетите на правоаголен триаголник ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) се $\overline{AC}=4$ и $\overline{BC}=3$. Од произволна точка M на хипотенузата спуштена е нормала MN на катетата AC и подножјето на таа нормала N е сврзано со темето B. Треба да се одредат:

а) Должините на страните и плоштина на триаголникот MNB во функцијата од CN=x;

б) Должината на CN=x така што површината на телото, кое се добива кога триаголникот MNB се врти околу правата BC да биде 14π пати поголема од површината на триаголникот MNB.

3. Дадена е параболата $y^2=2px$. Да се најде геометриското место од срединиите на тетивите на таа парабола кои минуваат: а) низ темето на таа парабола и б) низ фокусот на таа парабола.

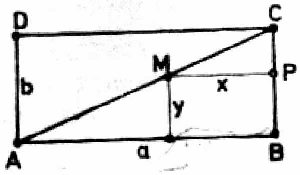
Дали дадената парабола со овие две криви ограничува некоја геометриска слика?

РЕШЕНИЈА

Трети клас

1. Составуваме систем од две равенки со две непознати. Едната равенка е $x+y=s$, а другата следува од сличноста на триаголниците ABC и MPC и гласи

$$b:a=(b-y):x.$$



Сл.12

Решенија на овој систем се:

$$x=\frac{a(s-b)}{a-b},\quad y=\frac{b(a-s)}{a-b}.$$

Ако е $a>b$, тогаш, за да биде $x>0$, треба да е $s>b$, а за да биде $y>0$, треба да е $s<a$. Од тоа следува дека s може да варира меѓу b и a, т.е. $b\leqslant s\leqslant a$. Ако е пак $a<b$, тогаш е $a\leqslant s\leqslant b$.

2. Имајќи предвид дека е

$$\log_x b = \frac{1}{\log_b x},$$

од дадената равенка се добива:

$$1+\log_b(2\lg a-x)=\frac{2}{\log_b x},$$

$$\log_b x+\log_b(2\lg a-x)=2,\quad \log_b x(2\lg a-x)=2,$$

$$2x\lg a-x^2=b^2,\ \ x^2-2x\lg a+b^2=0,$$

$$x_{1,2}=\lg a\pm\sqrt{\lg^2 a-b^2}.$$

Следува дека потребен услов за да има равенката реални решенија е $\lg^2 a-b^2\geqslant 0$, односно $|\lg a|\geqslant|b|$. Ако е $a\geqslant 10^b$, двата корена се реални и позитивни и, како што тоа може лесно да се провери, ја задоволуваат равенката. Ако е $a<10^b$, равенката нема реални корени.

3. $\triangle DO_1O_2\sim\triangle MOO_1\sim\triangle MOO_2$.(сл.13) .

Следува:

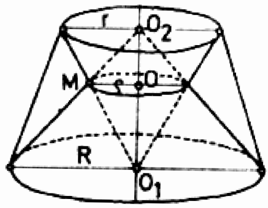
$$r:H=\rho:x,\ \ R:H=\rho:(H-x).$$

Со решавање на овој систем равенки се добива:

$$x=\frac{RH}{R+r},\quad \rho=\frac{Rr}{R+r}.$$

Површината на пресекот е

$$S=\pi\rho^2=\frac{\pi R^2r^2}{(R+r)^2}.$$



Сл.13

Четврти клас

1.а) Дадената релација може да се напише во вид:

$$(x_1+x_2)^2=3x_1x_2. \qquad (1)$$

Од дадената равенка и Виетовите формули следува:

$$x_1+x_2=3a+1,\ \ x_1x_2=-a+b+2.$$

Ако се изврши замена во релацијата (1) се добива:

$$(3a+1)^2=3(-a+b+2),$$

$$b=3\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{29}{12}.$$

Точката $M(a,b)$ ќе се движи по една парабола, чиј параметар е $p=\frac{1}{6}$, а чие теме е $T\left(-\frac{1}{2},\ \frac{-29}{12}\right)$.

б) Аналогно како под а), даденото неравенство ќе го трансформираме во вид

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-x_1^2x_2^2>0.$$

Од дадената равенка и Виетовите формули се добива

$$(3a+1)^2-2(-a+b+2)-(-a+b+2)^2>0.$$

За $b=2a$,се добива:

$$(3a+1)^2-2(a+2)-(a+2)>0,$$
$$8a^2-7>0,\quad 8a^2>7,\quad |a|>\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Корените на равенката го задоволуваат неравенството ако е:

$$a<-\frac{\sqrt{14}}{4}\quad \text{или}\quad a>\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

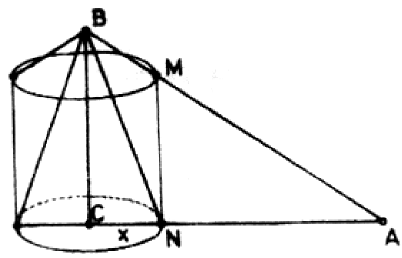
2.а) $\overline{MN}=\overline{AN}\,tg\alpha=(4-x)\cdot\frac{3}{4}$ (сл.14)

$$\overline{MN}=\frac{3(4-x)}{4}.$$

$\overline{MB}=\overline{AB}-\overline{AM}=5-\frac{AN}{\cos\alpha}=5-(4-x)\cdot\frac{5}{4}=\frac{5x}{4},$

$\overline{BN}=\sqrt{BC^2+CN^2}=\sqrt{9+x^2}.$

$P_{\triangle MNB}=P_{\triangle ABC}-P_{\triangle ANM}-P_{\triangle BCN}=\frac{12x-3x^2}{8}.$



Сл.14

б) Површината на телото,што се добива со ротација на $\triangle MNB$ околу BC ,е збир од:обвивката на еден цилиндер со радиус на основата x и висина MN,обвивката на конус со радиус на основата x и страна MB и обвивката на конус со радиус на основата x и страна BN.

Според тоа е:

$$S=2\pi x\overline{MN}+\pi x\overline{MB}+\pi x\overline{BN}$$

$$S=2x.\frac{3(4-x)}{4}+\frac{5x^2}{4}+x\sqrt{9+x^2}=\frac{x}{4}(24-x+4\sqrt{9+x^2}).$$

Според поставеното барање треба да биде:

$$\frac{x}{4}(24-x+4\sqrt{9+x^2})=14\cdot\frac{12x-3x^2}{8}.$$

Оваа равенка може да се трансформира во облик

$$\sqrt{9+x^2}=15-5x,$$

од која,ако се квадрират двете нејзини страни,се добива равенката

$$12x^2-75x+108=0.$$

Корени на оваа равенка се $x_1=4$, $x_2=\frac{9}{4}=2,25$. Според условите на задачата треба да се земе предвид само вториот корен, $x_2=2,25$.

3.а) Нека е $M_0(x_0,y_0)$ точка од параболата $y^2=2px$. Средина на отсечката OM_0 е $M(x,y)$, чии координати се:

$$x=\frac{x_0}{2},\quad y=\frac{y_0}{2}. \qquad (1)$$

Бидејќи точката $M_0(x_0,y_0)$ лежи на параболата, нејзините координати ја задоволуваат равенката на параболата, т.е.

$$y_0^2=2px_0. \qquad (2)$$

Ако од равенките (1) и (2) ги елиминираме x_0 и y_0 со помош на x и y, се добива

$$y^2=px.$$

Добиената равенка е равенка на параболата чија оска е x-оската, чие теме е во $O(0,0)$ и чиј параметар е $\frac{p}{2}$.

б) Равенката на тетивата што минува низ фокусот $F(\frac{p}{2},0)$ на параболата $y^2=2px$ е

$$y=k(x-\frac{p}{2}).$$

Пресечни точки на оваа права и параболата се

$$M_1\left(\frac{2p+2p\sqrt{1+k^2}+pk^2}{2k^2},\ \frac{p+p\sqrt{1+k^2}}{k}\right)$$

и

$$M_2\left(\frac{2p-2p\sqrt{1+k^2}+pk^2}{2k^2},\ \frac{p-p\sqrt{1+k^2}}{k}\right).$$

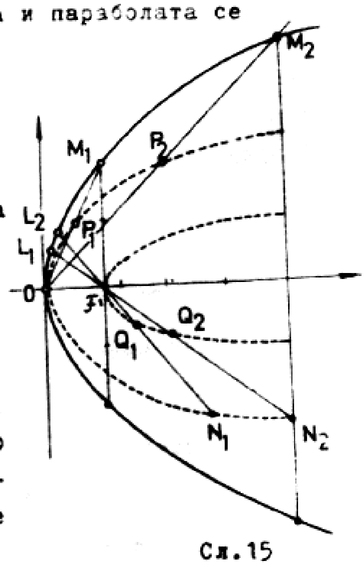
Координатите на средината на тетивата M_1M_2 се:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2p+pk^2}{2k^2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{p}{k}.$$

Равенките

$$x=\frac{2p+pk^2}{2k^2},\quad y=\frac{p}{k}$$

се параметарски равенки на бараното геометриско место. Ако од тие равенки го елиминираме параметарот k, се добива



Сл.15

$$y^2=p(x-\frac{p}{2}) .$$

Добиената равенка е равенка на парабола,чија оска е x - оска,темето е во $F(\frac{p}{2},0)$,а параметарот е $\frac{p}{2}$.

Дадената парабола и најдените параболи под а) и б) не ограничуваат геометриска слика.

Задачите се превземени од книгата
Десет години натпревари по математика, подготвена од П. Димиќ и Е. Бубески