Методи Главче
Катерина Аневска
Ристо Малчески

ПРАКТИКУМ ПО МЕТОДИКА НА НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА ОД ПРВО ДО ПЕТТО ОДДЕЛЕНИЕ

Скопје, 2022

Рецензенти:
Д-р Алит Ибраими, вон. проф. на ДУ, Тетово
Д-р Валентина Гоговска, вон. проф. на ПМФ, Скопје

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.091.3:51(075.8)(076)

ГЛАВЧЕ, Методи
Практикум по методика на наставата по математика од прво до петто одделение / Методи Главче, Катерина Аневска, Ристо Малчески.- Скопје :2022. - 188 стр. илустр; 25 см

Библиографија: стр. 187-188

ISBN 978-608-66881-1-0

1. Аневска, Катерина [автор] 2. Малчески, Ристо [автор]
а) Методика на наставата -- Математика -- Основно образование --Високошколски учебници -- рактикуми

COBISS.MK-ID 57506565

СОДРЖИНА

IV ДРОПКИ

V ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

VI ГЕОМЕТРИЈА

VII ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

ПРЕДГОВОР

Предметнава книга е наменета за студентите од Педагошките факултети кои го слушаат предметот Методика на наставата по математика. Книгава всушност е наменета за практичниот дел од предметот, односно за реализирање на вежбите.

Истата е поделена на седум дела, од кои првиот дел е посветен на математичките задачи и нивната улога во наставата по математика. Во овој дел се разработени поимот за математичка задача, функциите на задачите, методиката на решавање задачи, методите за решавање задачи и контрапримерите во наставата по математика. Овој дел всушност и не се разликува од општата методика на наставата по математика, па затоа и примерите не се исклучиво од делот на наставата по математика од прво до петто одделение.

Во следните шест дела:

- Множества. Венови дијаграми,
- Природни броеви,
- Дропки,
- Текстуални задачи,
- Геометрија,
- Логика и комбинаторика

се дадени вкупно 737 задачи, од кои 385 се решени. Притоа, на решенијата на задачите не е извршена соодветна методска анализа, како што е тоа направено во решените примери од првиот дел. Затоа е потребно студентите на вежбите по математика, под раководство на наставникот, односно асистентот или пак самостојно истата да ја направи за секоја решена задача. Сметаме дека ова е потребно да се направи и при решавањето на нерешените задачи, што сигурно ќе придонесе за подобра подготовка на студентите за нивната идна работа како учители по математика од прво до петто одделение. Понатаму, додека решените задачи се систематизирани според видот, истото не е целосно направено за нерешните задачи. Последното има за цел студентите самостојно да увидат на кој вид припаѓа дадена задача, се со цел подобро да се оспособат за изборот на методот за решавање на истата.

Се надеваме дека нашиот напор ќе придонесе за подобрување на оспособеноста на студентите во делот на методиката на наставата по математика, а особено во практичната реализација на истата. Воедно, им се заблагодаруваме на рецензентите проф. д-р Алит Ибраими и проф. д-р Валентина Гоговска кои внимателно ја прочитаа книгава и со своите забелешки придонесоа за нејзиното подобрување.

На крајот, и покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа книга, па затоа сме однапред благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија.

Скопје, Авторите
13.01.2022 година

I МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАЧИ

1. ПОИМ ЗА МАТЕМАТИЧКА ЗАДАЧА

Најважно средство за формирање на математичката култура кај учениците и нивно активно учество во наставата по математика е ефективното организирање и управување на наставниот процес при решавањето математички задачи. Притоа, учениците сознателно и трајно го усвојуваат системот на математичките знаења, умеења и навики.

Основна содржина на училишниот курс по математика се математичките поими и тврдењата поврзани со нив. Меѓутоа, нивно успешно усвојување е можно само преку решавање соодветни задачи. Оттука произлегува и важноста на задачите во наставата по математика, како и оспособеноста на учителот за ефективно организирање и управување на наставниот процес при решавањето математички задачи. Може да се каже дека учителот е оспособен да ја реализира оваа важна задача ако:

- успешно ги посочува целите при решавањето конкретна задача,
- врши правилен избор и подредување на задачите во дадена лекција, тема, учебен предмет и во целиот училишен курс, и
- успешно ја организира работата на учениците при решавањето конкретна задача.

Многу често во математиката се поставува барањето: *Од дадено множество математички објекти* U *да се оддели подмножество* S*, чии елементи имаат дадени својства.* Притоа, велиме дека со ова барање е поставена *математичка задача* или едноставно *задача*.

Во овој дел подетално ќе се осврнеме на поимот математичка задача. Но, пред тоа ќе разгледаме неколку примери.

Пример 1. Определи ги сите подредени парови на прости броеви (p,q) така што $p^2+q=101$.

Со оваа задача описно е зададено множеството S (тоа е множеството прости броеви кои се решенија на равенката $p^2+q=101$) и се бара тоа множество да се зададе конструктивно, односно со непосредно посочување на неговите елементи. Притоа треба да се има предвид дека множеството S е подмножество од некое множество броеви U, кое се нарекува множество на дозволиви вредности на непознатата и во овој случај $U=\mathrm{P}\times\mathrm{P}$, каде P е множеството прости броеви. ■

Пример 2. Раскажувајќи ги своите приказни 1001 ноќ, Шехерезада поставила древен математички проблем. Имено, се поставува прашањето колку ноќи Шехерезада би раскажувала 1001 бајка, ако во текот на некои ноќи таа раскажувала по 5 бајки, а во текот на другите по 3 бајки? Што мислите, колку најмногу, а колку најмалку ноќи ѝ се биле потребни на Шехерезада да ги раскаже сите 1001 бајка?

Во оваа задача, преку низа од мисли, описно се задава множеството S, кое има два елементи, а се бара множеството S да се зададе конструктивно. Притоа, S е подмножество од множеството $U=\mathbb{N}$. ■

Пример 3. Аглите $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ се „соседни“ и заедно формираат рамен агол. Ако е познато дека секои два несоседни агли се комплементни и уште дека $\gamma=\frac{3}{5}\beta$, определи ја големината на секој од овие агли.

Со оваа задача описно е зададено множеството S од четворки агли кои ги задоволува дадените услови. Се бара множеството S да се зададе конструктивно, т.е. да се посочи секој елемент на S. ■

Претходните размислувања ја наметнуваат следнава дефиниција за математичка задача:

Математичка задача е низа од мисли со кои, на некој начин, се задава подмножество S на дадено множество U од математички објекти и притоа треба:

- ако множеството S е конечно, тоа да се најде конструктивно, или
- да се докаже дека S е подмножество на веќе зададено подмножество на множеството U, или
- да се докаже дека $S=S'$, каде S' е дадено множество, или
- да се докаже дека елементите на S можат да се добијат со конечна користење на правилата за примена на шестар и линијар.

Притоа, за секој од начините за задавање на S велиме дека е *претставување* на S, а за задачата дека е *определена* во множеството U. Множество S го нарекуваме *множество решенија* на задачата во U.

Со поимот задача се поврзани и следниве термини:

- *текст на задачата* е низата од зборови од говорниот јазик и математичките симболи со кои се задаваат множеството U, својствата на елементите од множеството S и барањето за претставување на S,
- *услов на задачата* (A) е текстот со кој S се задава описно, а U се задава описно или конструктивно,

- *заклучок на задачата* (B) е делот од задачата со кој се посочува бараното претставување на S,
- *решавање на задачата* е дејност со која од даденото задавање на S во текстот се оди кон бараното претставување на S. Притоа, како резултат на таа дејност се формира конечна низа од начините на задавање на S, што овозможува да се добие бараното претставување на S и секое такво претставување го нарекуваме *решение на задачата* (R), и
- *база на решението на задачата* (C) е множеството од тврдења (теореми, аксиоми), дефиниции и др., со чија помош се наоѓа решението на задачата.

Во основа, секоја математичка задача е составена од компонентите A, C, R, B, кои ќе ги илустрираме на еден елементарен пример.

Пример 5. Определи ги сите подредени парови на прости броеви (p, q) така што $p^2 + q = 101$.

A) *Услов на задачата:* дадена е Диофантова равенка со непознати (p, q), кои се содржат во полином по p и q. Левата страна на равенката содржи еден полином, а десната страна е бројот 101.

B) *Заклучок на задачата:* непознат и тоа е таква вредност на x, со чија замена на местото на x, условното равенство ќе премине во точно бројно равенство.

R) *Решение на задачата:* низа од равенки поврзани со релациите $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$:

1) Ако $p = 2$, тогаш $q = 101 - 4 = 97$, што е прост број.

2) Ако $p \geq 3$, тогаш $q = 101 - p^2$. Бидејќи p е прост број поголем од 3, заклучуваме дека q е непарен број, па тогаш q е парен број, значи $q = 2$. Значи $p^2 = 99$, што е невозможно во множество прости броеви. Значи, единственото решение е $(2,97)$.

Проверка: $2^2 + 97 = 101$, т.е. $(2,97)$ е решение на равенката.

C) *База на решението:* поим за прост број и теоремите за еквивалентност на равенките. ■

2. ВИДОВИ МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАЧИ

Ако се искористи карактеризацијата на задачите поврзана со четирите основни компоненти A, C, R, B, задачите можат да се типизираат според бројот на непознатите компоненти. Непознатите компоненти ќе ги означуваме со буквите $X, Y, Z, \ldots$. Поаѓајќи од стационарната положба $ACRB$ можеме да ги определиме следниве типови задачи:

- *Прв тип,* кога е непозната само една компонента: $XCRB$, $AXRB$, $ACXB$, $ACRX$. Задачите од овој тип ја образуваат содржината речиси на секој учебник и за нив можеме да кажеме дека се *задачи за обучување (осознавање)*.
- *Втор тип*, кога се непознати две компоненти: $AXYB$, $XCRY$, $XYRB$, $ACXY$, $AXRY$, $XCYB$. Задачите од овој тип се поставуваат на натпреварите по математика и, обично тие се од видот $AXYB$, што значи дека јавно се одделени условот и заклучокот на задачата, а непознати се не само решението, туку и теоријата на која тоа се заснова. Според тоа, за овие задачи може да се каже дека се *творечки.*
- *Трет тип,* кога се непознати три компоненти: $XYZB$, $AXYZ$, $XCYZ$, $XYRZ$. Задачите од овој тип речиси и не се среќаваат во наставата по математика, но тоа не значи дека тие не постојат и не се корисни за наставата. Доколку задачите од овој тип се користат во наставата по математика, пожелно е тие да се од типот $AXYZ$. На пример, ако паралелопипедот се дефинира како вид на призма, тогаш може да се постави следнава задача: „*Да се испита паралелопипедот и да се определат неговите својства*“, која очигледно е од типот $AXYZ$. Задачите од овој тип можеме да ги типизираме како *проблемски* задачи.

Да забележиме дека ако учителот сака да ја реши почетната задача, тогаш тој може да почне од некоја од преформулираните задачи, усно да ги соопшти можните варијанти и подетално да се осврне на почетната задача или на некоја задача слична на неа, но формулирана од учениците.

Покрај веќе направената поделба на задачите, можат да се извршат и низа други поделби, од кои ќе ги спомнеме поделбите според: *условот, барањето, структурата, содржината, видот на мислењето и дидактичките цели*.

Според *условот,* задачите се делат на *определени, неопределени и преопределени*.

- Задачата во која условот (A) содржи доволно и само доволно податоци за исполнување на заклучокот (B) ја нарекуваме *определена задача.*
- Ако од условот (A) на некоја определена задача се испушти некој податок, тогаш велиме дека станува збор за *неопределена задача.*
- Ако пак во условот (A) на некоја определена задача се додаде некој податок кој не бил во (A), тогаш се добива *преопределена задача.* Притоа, ако новиот податок следува од условот (A), тогаш новата задача останува определена, а ако новиот податок е во спротивност со условот (A), тогаш новата задача нема решение и велиме дека станува збор за *противречна задача.*

Пример 6. а) Даден е рамнокрак трапез со основи $a=13cm,$ $b=7cm$ и висина $h=4cm$. Да се пресмета периметарот на трапезот.

Јасно, оваа задача е определена, бидејќи условот содржи доволно и само доволно податоци за исполнување на барањето.

б) Да се пресмета периметарот на трапезот со основи $a=13cm,$ $b=7cm$ и висина $h=4cm$.

Оваа задача е добиена од претходната, со испуштање на условот рамнокрак трапез и таа е неопределена, бидејќи постојат бесконечно многу трапези со дадените податоци и меѓу нив има трапези со различни периметри.

в) Даден е рамнокрак трапез со основи $a=13cm,$ $b=7cm$, висина $h=4cm$ и крак $c=5cm$. Да се пресмета периметарот на трапезот.

Оваа задача е добиена од задачата под а), со додавање на податокот „крак $c=5cm$“ и таа е преопределена, но останува определена бидејќи додадениот податок следува од претходните податоци.

г) Даден е рамнокрак трапез со основи $a=13cm,$ $b=7cm$, висина $h=4cm$ и крак $c=7cm$. Да се пресмета периметарот на трапезот.

Оваа задача е добиена од задачата под а), со додавање на податокот „крак $c=7cm$“ и таа е преопределена, но и противречна бидејќи новиот податок противречи на претходните податоци (проверете!). ■

Според *барањето,* задачата може да биде: *нумеричка, конструктивна и теориска.*

Во почетното образование според *содржината,* што значи според припадноста кон определена математичка дисциплина, задачите можат да бидат:

- *аритметички* како, на пример, задачите кои ги вклучуваат основните операции во множеството природни броеви, задачите од елементарната теорија на броеви и слично,
- *алгебарски,* во кои спаѓаат задачите со решавање на равенки и неравенки и нивни системи итн.,
- *геометриски,* во кои спаѓаат задачите од планиметрија и стереометрија,
- *логички и комбинаторни задачи.*

Според *структурата* задачите можат да бидат:

- *едноставни* и тоа се задачи кои не можат или нема потреба да бидат разбиени на повеќе помали задачи, и
- *сложени* и тоа се задачи кои задолжително се разбиваат на две или на повеќе подзадачи од дадената задача.

Според *видот на мислењето* кој преовладува при решавањето, задачите се делат на:

- *алгоритамски* и тоа се задачите кај кои решавањето е еднозначно определено со помош на точно определена постапка (формула, правило или алгоритам),
- *полуалгоритамски,* во кои спаѓаат задачите чие решавање не е определено со строго ориентациона шема и за решавање на овие задачи е потребен дополнителен интелектуален напор (случајот со геометриските задачи во кои, по правило, е потребно доцртување на дополнителни елементи на зададениот цртеж), и
- *евристички,* во кои спаѓаат нестандардните задачи, т.е. задачите од третиот тип во првичната класификација.

Според *дидактичките цели,* задачите се делат на:

- *задачи за осознавање,* во кои спаѓаат задачите за усвојување нови знаења,
- *задачи за увежбување,* кои се применуваат за здобивање на трајни знаења, умеења и навики, и
- *творечки задачи,* т.е. задачи во кои изразено се застапени елементите на творечкото мислење и кои, по правило, се нестандардни и посеопфатни од гледна точка на базата на решението.

На крајот од овој дел да забележиме дека претходните класификации на задачите како такви можат да се прифатат само условно, бидејќи во текот на последниве десетина години, во завршните одделенија на основното и во текот на средното образование, постои тенденција за обработка на нестандардни задачи за увежбување на обработуваниот материјал. Овие задачи се компонирани на тој начин што тешко може строго да се класифицираат, дури и според еден од наведените критериуми.

3. ФУНКЦИИ НА ЗАДАЧИТЕ

До неодамна функциите на задачите се поврзуваа само со изучувањето на конкретни теми од наставната програма, т.е. се формулираа само од гледна точка на наставата. Но, во последно време на задачите им се посветува внимание и во дидактиката, психологијата и кибернетиката, со што прашањето на функциите на задачите почна посебно да се разгледува и во методиката на наставата по математика.

Ќе наведеме неколку принципи од кои ќе се раководиме при разгледувањето на функциите на училишните математички задачи.

1. Практиката на наставата по математика покажува дека секоја конкретна задача, која се поставува и се решава во една или во друга етапа од наставата, има разновидни функции, кои во дадените конкретни услови се пројавуваат јавно или скриено. Поради тоа има смисла да се говори за една или за друга водечка функција на задачата во дадена конкретна ситуација.

2. Водечката положба на една или на неколку функции на задачата има динамичен карактер. Имено, во зависност од конкретните услови некоја скриена функција на дадена задача може да стане водечка, а нејзината претходно декларирана водечка функција може да остане нереализирана. Често пати, во практиката учителот не ја согледува водечката функција на една задача (според замислата на авторите на учебникот) и затоа нејзиното решавање не ја постигнува саканата цел, и обратно, чести се случаите кога при решавањето на дадена задача инвентивната работа на учителот открива и реализира пошироки и покорисни функции од оние, кои ги предвиделе авторите на учебникот.

3. Системот од училишни математички задачи треба да соодветствува со целите на наставата по математика во училиштето. Затоа секоја одделна задача или систем од задачи треба да е насочен кон реализирањето на една или на друга конкретна цел на наставата.

4. Бидејќи образовната, воспитната и развојната компонента се основни во наставата по математика, можеме да сметаме дека основни водечки функции на задачите се тие да образуваат, воспитуваат и да ги развиваат творечките способности на учениците.

5. Секоја од основните функции на задачите практично никогаш не е изолирана од другите, па затоа за неа можеме да зборуваме само како водечка при решавањето на една задача или на систем од задачи. Јасно, учителот прво треба да се грижи да се реализира водечката функција на задачата, но истовремено треба да има предвид дека ненавременото потенцирање на другите функции на задачата може негативно да се одрази на ефектите од решавањето на соодветната задача во рамките на наставната единица.

Природно е да постојат и такви задачи кои во себе содржат повеќе водечки функции. Во нашите разгледувања нема да се задржиме на овие прашања, туку ќе ги разгледаме функциите на задачите во наставата по математика.

Под *образовни функции* на задачите се подразбираат оние функции кои се насочени кон формирање на систем од математички знаења, умеења и навики кај учениците. Образовните функции можат да бидат од заеднички, посебен и конкретен карактер.

Под *заеднички образовни функции* ги подразбираме оние функции на задачите кои се важни не само во наставата по математика, туку и во наставата од сите дисциплини на природно-математичкото подрачје. Под *посебни образовни функции* на математичките задачи ги подразбираме функциите од општ карактер кои се важни само за наставата по математика. Под *конкретни образовни функции* на задачите ги подразбираме поединечните специјални функции.

На пример, формирањето на некои поими на ниво на претстави е заедничка образовна функција; формирањето претстава за природен број е посебна функција, а формирањето претстава за бројот 2 е конкретна образовна функција.

Заради нивното значење, подетално ќе ги разгледаме само заедничките образовни функции на задачите, а тоа се:

1. повторување на поимите, со цел тие правилно и трајно да се усвојат,

2. констатирање на врските меѓу поимите (од род кон вид и обратно, внатрешнопредметните и меѓупредметните врски),

3. усвојување на основните правила за заклучување и оспособување за нивна правилна примена,

4. формирање на поимот *математички модел*,

5. откривање на процесите и разбирање на соодносите,

6. формирање на умеења и навики за правилно усно и писмено изразување, како на говорен, така и на симболички јазик, и

7. формирање на умеења и навики за работа со прибор, инструменти, користење на литература и слично.

Познато е дека образованието, пред сè, воспитува преку содржините, односно преку фактите и нивното толкување. Меѓутоа, остварувањето на воспитната функција зависи и од тоа како пред учениците е презентирана наставната материја и од самата организацијата на работата на часот, како со целата паралелка, така и со секој ученик поединечно.

Всушност, секоја задача во себе содржи една или друга воспитна функција, а од учителот и од авторот на учебникот или на збирката зависи дали таа ќе се оствари и во која мера. Притоа, изучуваниот материјал и наставниот процес, што значи и секоја задача, треба целисходно да се искористи за:

1. кај учениците да се побудува и да се развива интересот за математиката,

2. воспитување за одговорно однесување кон наставниот предмет,

3. формирање навики за континуирано и планско работење.

На крај, под функции кои ги развиваат творечките способности на учениците (развојни функции) ги подразбираме оние кои се насочени кон развивање на мислењето на учениците, кон формирање квалитети својствени за научното мислење и совладување на пристапи за ефективна умствена работа.

Во заедничките развојни функции на задачите спаѓаат:

1. совладувањето на методите на научното сознавање,

2. развивањето на способностите за индуктивно и за дедуктивно заклучување,

3. развивањето на умеењата да се извршува елементарно моделирање и да се користат постојните или да се составуваат нови модели за изучување на својствата на објектите,

4. развивањето на умеењата да се класифицираат изучуваните објекти, да се систематизираат знаењата, да се откриваат причинско-последователните и структурните врски меѓу објектите на ниво на стекнатите знаења,

5. развивањето на умеењата да се врши избор на средства и на методи за реализирање на поставената цел, согласно конкретните услови,

6. развивањето на умеењата да се открива поврзаноста на изучуваниот материјал со практичната дејност на човекот, и

7. совладувањето на основните квалитети, својствени на научното мислење.

Во посебните развојни функции на задачите спаѓаат:

1. формирањето и развојот на знаења и умеења дедуктивно да се докажуваат или да се негираат математичките тврдења,

2. развивањето на умеења да се планира решавањето на дадена задача, да се исклучат непотребните податоци од условот, условот да се дополни со податоци кои недостасуваат, да се изберат методи, средства и операции за решавање на задачата и да се проверат точноста и смислата на добиеното решение,

3. формирањето јасна претстава за логичката структура на курсот по математика, за фактот дека апстрактниот карактер на математиката како наука е основна причина за нејзините многубројни примени во останатите науки, во техниката и воопшто во животот,

4. формирањето умеења да се дефинираат математичките поими,

5. развивањето и усовршувањето на умеењата брзо и точно да се извршуваат најразлични пресметувања, со или без помош на технички помагала, и

6. усовршувањето на умеењата да се користи јазикот на математичката симболика.

4. МЕТОДИКА ЗА РЕШАВАЊЕ ЗАДАЧИ

Во досегашните разгледувања се задржавме на прашањата:

- Што е тоа математичка задача?
- Какви видови математички задачи има?
- Кои се функциите на математичките задачи?

Во овој дел ќе се осврнеме на методската работа, поврзана со конкретно решавање на дадена задача и како со решавањето конкретна задача кај учениците се формираат умеењата за решавање задачи.

При обработката на методиката за решавање на дадена задача ќе се задржиме на четирите етапи, кои според многу автори се среќаваат при решавањето на дадена задача, иако активностите во нив секогаш не се подредени по дадениот редослед.

А) ПРВА ЕТАПА - РАЗБИРАЊЕ НА ЗАДАЧАТА

Во оваа етапа се прави елементарна анализа на задачата, односно се детализираат условот и заклучокот, при што се детализираат сите искази кои се дадени во условот и заклучокот, се забележува кои од објектите во задачата се познати, а кои се непознати, т.е. што во задачата треба да се пресмета, докаже или конструира. Со еден збор, спомнатата елементарна анализа е во функција на оценка на информацијата на задачата, која може да биде:

1. *Основна информација.* Оваа информација го карактеризира типот на задачата и ги насочува учениците кон заедничките идеи и методи за решавање задачи од определениот тип. Одделувањето на оваа информација има за цел учениците да го согледаат суштественото во задачата, кое е претпоставка за воопштување на знаењата. Ако учителот не го надмине конкретното во дадената задача и не се осврне на нејзините суштествени елементи, тогаш може да се каже дека при решавањето на дадената задача е занемарена образовната функција.

2. *Специфична информација.* Тоа е информација која е карактеристична за конкретната задача, но не и за типот задачи. Оваа информација ја определува индивидуалноста на задачата и ги насочува учениците кон конкретизирање на заедничките идеи и методи, определени со основната информација и кон составување план за решавање на конкретната задача. Одделувањето на специфичната информација ги насочува учениците во секоја задача, покрај општото, да бараат и низа специфичности, со што се формираат навики за внимателно набљудување на објектите и за суштинско проучување на релациите меѓу објектите и податоците поврзани со нив.

3. *Несуштествена информација.* Тоа е информација која не влијае на решението на задачата, но може да влијае на педагошката вредност на задачата. На пример, преку содржините на т.н. текстуални задачи може да се зајакне воспитната компонента, потоа да се изврши корелација со другите наставни предмети и слично.

Разбирањето на задачата го раководи учителот. Притоа се користат различни пристапи, како што е читањето на целиот текст на задачата или на негови одделни делови, илустрирање на задачата со цртеж, шема, скица или модел, симболичко запишување на задачата и слично. Без оглед на тоа кој пристап ќе се избере важно е учениците добро да ја разберат задачата. Имено, учителите кои веднаш преминуваат на втората етапа во решавањето на задачата, без таа добро да биде разбрана, прават груба методска грешка.

Б) ВТОРА ЕТАПА - ГРАДЕЊЕ ИДЕЈА И СОСТАВУВАЊЕ ПЛАН ЗА РЕШАВАЊЕ НА ЗАДАЧАТА

За да се реши дадена задача, покрај тоа што таа треба да биде добро разбрана, потребни се знаења и умеења, искуство и упорност. Оваа етапа, која по својата содржина е најбогата со интелектуална дејност, почнува паралелно со разбирањето на задачата. При реализирањето на оваа етапа учителот треба постепено да го открива патот на сознавањето, патот до решението. Меѓутоа, во интерес на времето, често пати учителот или некој ученик презентира готово решение, со што се анулираат значењата на градењето на идеја и составувањето план за решавање на задачата. Се разбира, ваквиот пристап методски е погрешен. Имено, на разбирањето на задачата и на составувањето план за решавање треба да им се посвети најмногу време, бидејќи при остварувањето на овие етапи најдобро се остваруваат функциите на задачите. Да напомнеме дека само ако задачата се задава за проверка на знаењата и умеењата на учениците и за нивно оценување, тогаш можат да се занемарат овие две важни етапи во решавањето на една задача. При реализирањето на оваа етапа можни се следниве два случаја:

1. Решаваната задача е од познат тип, позната е структурата на решението и познат е методот на решавање. Во овој случај планот за решавање се состои во конкретизација на познатите структура и метод и нивна примена. При решавањето задачи од овој тип ученикот ги реализира следните активности: *го распознава видот задача, го избира соодветниот алгоритам и го применува на конкретната задача, го формулира одговорот и го коментира.*

Јасно, задачите од овој тип се користат за усвојување на важни алгоритми, кои се компоненти на посложени задачи. Поради тоа задолжително е нивно целосно и трајно усвојување.

2. Дадената задача е со непозната структура на решението, не е познат алгоритмот за нејзино решавање. За овие задачи не постои шема со чие реализирање сигурно се решава задачата, така што за нив може да се каже

дека имаат најголема образовна и развојна вредност. При решавањето задачи од овој тип корисно е да се имаат предвид следниве упатства:

- Формулирајте ги односите меѓу непознатото и дадените елементи.
- Трансформирајте го непознатото (или воведете ново), приближувајќи го кон даденото.
- Обидете се со аналитичкиот метод да најдете доволен услов за да биде исполнет заклучокот на задачата или блиска последица. Внимавајте, бидејќи најчесто постојат повеќе доволни услови, можни се повеќе планови за решавање на дадената задача. Изборот на најдобриот план зависи, како од знаењата и умеењата на ученикот, така и од неговото искуство.
- Побарајте аналогија со познати задачи и искористете ја идејата за решавање на аналогната задача.
- Дали можете задачата да ја формулирате поинаку: да составите аналогна, но поедноставна задача која можете да ја решите или да составите поопшта задача од дадената?
- Направете дополнителни конструкции, прегрупирања на броевите и на изразите, воведете нови непознати со цел да се доближат дадените и непознатите елементи и да се откријат познати задачи (компоненти).
- Обидете се дадената задача да ја поделите на низа помошни задачи, од чии решенија можете да го составите решението на дадената задача.
- Направете определени измени на некои елементи на задачата и согледајте како тие измени ќе се одразат на другите елементи. Врз основа на претходните согледувања и на добиените резултати, обидете се да искажете хипотеза во врска со разгледуваната задача.
- Разгледајте ги граничните случаи за одделни елементи и согледајте како тие влијаат на задачата во целина.
- Обидете се да најдете индиректен доказ, на пример, со допуштање на спротивното итн.

В) ТРЕТА ЕТАПА - ПРАКТИЧНА РЕАЛИЗАЦИЈА НА СОСТАВЕНИОТ ПЛАН ЗА РЕШАВАЊЕ НА ЗАДАЧАТА

При реализирањето на оваа етапа учениците се среќаваат со најмалку тешкотии, но во практиата за неа се одделува најмногу време. Имено, се бара решението да биде точно, целосно и по можност најкратко, па затоа во определени периоди повеќе внимание треба да се посвети на обучувањето на учениците да ги оформуваат решенијата на задачите. Пожелно е на овој проблем да му се посвети внимание од V одделение во основното образование до I година во средното образование, кога учениците го усвојуваат поголемиот дел од математичката симболика и терминологија, кога се обучуваат да оформуваат решенија и докази на теореми, односно кога се оформуваат умеења за подредување на расудувањата во логичка последователност. На оваа етапа треба да и се посвети поголемо внимание, бидејќи токму при нејзиното реализирање најинтензивно се утврдуваат знаењата и умеењата на учениците и тие се учат на правилно писмено изразување.

Г) ЧЕТВРТА ЕТАПА - ДОПОЛНИТЕЛНА РАБОТА ОТКАКО ЗАДАЧАТА Е РЕШЕНА

По наоѓањето на решението на задачата брзо се намалува интересот на учениците за неа. Точно тука може да дојде до израз мајсторството на учителот, да го задржи или дури и да го засили вниманието на учениците кон решената задача, со цел да ги искористи можностите кои таа ги нуди. Дополнителната работа на задачата по нејзиното решавање не следува од логиката на решението, туку од логиката на наставниот процес. Во оваа етапа решената задача треба да се разгледува како претставник на определена класа задачи. Затоа, по решавањето на задачата или по решавањето на група сродни задачи пожелно е да се разгледаат некои од следниве прашања:

- Дали добиениот резултат е точен и зошто? (Ако има можност да се направи проверка.)
- Дали за сите вредности на параметрите може да се искористи применетиот метод за решавање на задачата?
- Кои други задачи можат да се решат со најдениот метод за решавање на дадената задача?
- Со кои други методи може да се реши оваа задача и кој метод е најекономичен во случајот?
- Што е интересно и важно во решението?
- Дали оваа задача може да се воопшти?
- Што друго може да се најде во задачата, освен бараното?
- При какви други податоци можат да се најдат бараните елементи?

Со други зборови, во оваа етапа треба да се реализира творечката работа по преформулирањето на задачата, за што претходно зборувавме. Обемот и длабочината на работата во оваа етапа многу зависи од одделението во кое се реализира наставата и учителот треба многу внимателно да им приоѓа на учениците при реализирањето на оваа не помалку важна етапа.

На крај од овој дел да забележиме дека учениците треба да ја усвојат изнесената дидактичка шема за решавање задачи преку нејзино повеќекратно повторување. Притоа, имајќи предвид дека најважна етапа во процесот на решавање на задачата е градењето на идеја и составувањето план за решавање, која е поврзана со разбирањето на задачата, уште еднаш да напоменеме дека на овие две етапи треба да им се посветува поголемо внимание, а не во интерес на времето на учениците да им се нудат готови решенија.

5. МЕТОДИ ЗА РЕШАВАЊЕ ЗАДАЧИ

Во претходниот параграф зборувавме за методиката на решавање на задачите. Притоа издвоивме четири етапи кои се среќаваат при решавањето на една задача. Во овој дел ќе се осврнеме на методите кои се користат при решавањето на задачите.

Решавањето на една сложена задача најчесто се сведува на решавање на неколку поелементарни задачи, од кои е составена почетната задача. Притоа, основен проблем е задачата да се подели на елементарни задачи, со чие решавање всушност ќе ја решиме почетната задача.

При решавањето на една задача, покрај поделбата на елементарни задачи, важен елемент е и методот со кој се бара решението на задачата. Во основа, постојат два метода за решавање на задачите, и тоа:

- синтетички, и
- аналитички метод.

5.1. СИНТЕТИЧКИ МЕТОД

Дадена е задача која е запишана во условна форма $A \Rightarrow X$. Основата на синтетичкиот метод се состои од следново:

- се зема некој податок од условот A на задачата и кон него се придружува друг податок,
- ако земените податоци формираат елементарна задача, тогаш таа се решава и со тоа се добива нов помошен податок,

- потоа се составува нова елементарна задача, при што може да се користи и новиот помошен податок, па и таа се решава, со што се добива нов помошен податок,
- постапката се повторува сè додека не се состави елементарна задача, со чие решавање се добива решението на почетната задача.

Синтетичкиот метод ќе го илустрираме на следниот пример, при што нема да ги одделуваме елементарните задачи. Тоа му го препуштаме на читателот за вежба.

Пример 1. *Збунет математичар на таблата ги напишал природните броеви* 1, 2, 3, ... *по ред еден после друг без при тоа да користи запирки. Така го добил записот* 123456789101112131415.... *Целта му била да ја открие цифрата која е запишана на* 2011-*тото место. Тој броел и според него тоа е цифрата 9. Дали збунетиот математичар бил во право и дали овој одговор можел да дојде на пократок начин*?

Решение. *Секако дека ова можел пократко да го реши. Едноцифрени броеви има 9, двоцифрени 90, троцифрени 900 итн. Претпоставуваме дека математичарот ги испишал сите едноцифрени и сите двоцифрени броеви, па затоа тој употребил точно* $9\cdot 1+90\cdot 2=189$ *цифри. Бидејќи* 2011>189, *математичарот морал да испише и троцифрени броеви. Нека претпоставиме дека ги испишал и сите троцифрени, а тоа значи дека дека употребил* $9\cdot 1+90\cdot 2+900\cdot 3=2889$ *цифри. Бидејќи* $2889>2011$, *тоа значи дека цифрата на 2011-тото место е некаде помеѓу троцифрените броеви. Забележуваме дека е*

$$2011=9\cdot 1+90\cdot 2+607\cdot 3+1.$$

Од ова заклучуваме дека се употребени сите едноцифрени броеви, сите двоцифрени и 607 *троцифрени броеви, вклучувајќи ја и првата цифра од троцифрениот број* 608.

Шестотиот троцифрен број е 699, *па тогаш шестотини и седмиот троцифрен број е* 706. *Од ова заклучуваме дека шестотини и осмиот троцифрен број е троцифрениот број* 707, *па бараната цифра е 7. Збунетиот математичар очигледно бил расеан тој ден.* ■

Да забележиме дека ако дадената задача е запишана во условна форма $A\Rightarrow X$, а решенијата на првата и на последната задача во конечната низа елементарни задачи, од кои се добива решението на почетната задача, ги означиме со $A_1, A_2, ..., A_k$, соодветно, тогаш постапката за решавање задачи со помош на синтетичкиот метод најчесто може да се запише во обликот $A\Rightarrow A_1, A_1\Rightarrow A_2, ..., A_k\Rightarrow X$, од каде што според правилото за хипотетички силогизам (можно е да се користат и други правила за логичко заклучување), добиваме дека е точна импликацијата $A \Rightarrow X$.

На крајот од овој дел да забележиме дека елементарните задачи во синтетичкиот метод најчесто ја даваат *структурата на решението на соодветната задача.* Во тој случај, оваа структура е разгледувана кај синтетичкиот метод, но треба да се напомне дека таа е со поопшт карактер бидејќи се јавува кај системите задачи, а како што ќе видиме и кај аналитичкиот метод, како и кај методот на алгебарска анализа.

5.2. АНАЛИТИЧКИ МЕТОД

При аналитичкиот метод на решавање задача се поаѓа од барањето во задачата. Основното прашање кое ученикот треба да си го постави е:

Што треба да се знае за да се исполни барањето на задачата?

На ова прашање може правилно да се одговори само ако добро се разбере условот на задачата и ако се согледаат релациите кои него го поврзуваат со поставеното прашање.

Пример 2. *На првата автобуска постојка во автобусот влегле неколку патници. На втората постојка слегле половина од нив и се качиле двајца. На третата постојка слегле половината патници, а се качиле тројца. На четвртата постојка повторно се симнале половината од патниците, а се качиле уште четворица и во тој момент бројот на патниците бил седум. Колку патници се качиле во автобусот на првата постојка?*

Решение. Оваа задача можеме да ја решиме со користење на аналитичкиот метод. Имено, ќе појдеме од бројот на патниците по четвртата постојка и ќе се враќаме наназад, со што последователно ќе определуваме колку патници имало во автобусот по третата, втората и првата постојка.

На четвртата постојка се качиле 4 патници и бидејќи потоа имало 7 патници, заклучуваме дека пред да се качат овие патници во автобусот имало 3 патници и тоа е половина од бројот на патниците кои патувале меѓу третата и четвртата постојка, што значи дека овој број е еднаков на 6. Според тоа, имаме $7 \to 3 \to 6$.

На третата постојка слегле половина од патниците и се качиле тројца, а бидејќи имало 6 *патници добиваме* $6 \to 3 \to 6$. *Значи, пред третата постојка бројот на патниците бил 6.*

На втората постојка слегле половината патници и се качиле двајца, така што имаме $6 \to 4 \to 8$. *Конечно, бројот на патниците кои патувале меѓу првата и втората постојка е* 8, *што значи дека на првата постојка се качиле 8 патници.*

Претходно изнесеното можеме да го запишеме со помош на следнава шема

$$7 \to 3 \to 6 \to 3 \to 6 \to 4 \to 8 . \blacksquare$$

Како што можеме да видиме, изложувањето на решението со аналитичкиот метод не е така концизно како со синтетичкиот метод. Но, сепак може да се каже дека аналитичкиот метод има низа предности, како што се:

- учениците самостојно го откриваат решението на задачата, процес кој придонесува да се развива математичкото мислење на учениците,
- наоѓање на различни патишта за решавање на иста задача итн.

Аналитичкиот метод се јавува во повеќе варијанти, од кои овде ќе ги разгледаме методот на алгебарска анализа и методот на анализа при решавањето конструктивни задачи во геометријата.

5.2.1. МЕТОД НА АЛГЕБАРСКА АНАЛИЗА

Под *метод на алгебарска анализа* ги подразбираме сите методи за решавање на задачи во алгебрата. Во оваа група методи најважен е методот на равенки и токму затоа често пати под метод на алгебарска анализа се подразбира всушност овој метод. Методот на равенки може да се подели на три етапи.

Во *првата етапа* се воведуваат една или повеќе непознати и врз основа на условот и на барањето во задачата се составува равенка или систем равенки (помошна задача). Според тоа, во првата етапа основната задача се трансформира во помошна задача.

Втората етапа на овој метод содржи низа трансформации на помошната задача, со чија помош се добиваат корените на првобитната равенка, односно решенијата на првобитниот систем.

Во *третата етапа* се врши проверка дали се совпаѓаат бараното и добиеното множество решенија. Ако овие множества не се совпаѓаат, тогаш се бараат условите кои треба да бидат исполнети при низата трансформации на почетната равенка или системот равенки за да се добие множеството решенија на основната задача. Со други зборови, треба да се провери дали секоја од добиените равенки е еквивалентна на почетната.

Дадена е основна задача $A \Rightarrow X$ и нека е составена равенка или систем равенки $A(X)$. Ако во низата трансформации се запазува еквиваленција, тогаш процесот на решавање на помошната задача може да се запише во обликот

$$A(X) \Leftrightarrow A_1(X) \Leftrightarrow A_2(X) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow A_{k-1}(X) \Leftrightarrow A_k(X) \qquad (1)$$

и во овој случај се совпаѓаат бараното и добиеното решение.

Меѓутоа, во практиката новодобиените равенки најчесто се последица од почетната. Имено, ако во шемата (1) на решавање на помошната задача еквиваленцијата $A_r \Leftrightarrow A_{r+1}$ се замени со импликацијата $A_r \Rightarrow A_{r+1}$, тогаш последната равенка ги содржи сите решенија на основната задача, но може да содржи и решенија кои не се решенија на почетната равенка, а со тоа и на почетната задача. Поради тоа треба да се изврши проверка на секое решение со условите на почетната задача. Во практиката е особено важно учителот да инсистира учениците да ја разберат неопходноста од таквата проверка и да умеат да ја направат.

Пример 3. Бегајќи од кучето лисица направила 60 скокови пред кучето да потрча по неа. Лисицата прави 3 скока, додека кучето направи 2 скока. Освен тоа, познато е дека 7 скокови на лисицата имаат иста должина колку и 3 скокови на кучето. Колку скокови треба да направи кучето за да ја стигне лисицата?

Решение. *Прва етапа.* Нека кучето направи x скокови додека ја стигне лисицата. За тоа време лисицата ќе направи $\frac{3}{2}x$ скокови, што заедно со предноста која ја имала на почетокот се $\frac{3}{2}x+60$ скокови. Знаеме дека 7 скокови на лисицата имаат иста должина колку и 3 скокови на кучето, па затоа

$$\frac{\frac{3}{2}x+60}{7} = \frac{x}{3}. \qquad (2)$$

Втора етапа. Од равенката (2) со еквивалентни трансформации последователно добиваме:

$$\frac{3x+120}{14} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow 3(3x+120) = 14x \Leftrightarrow 9x+360 = 14x \Leftrightarrow 5x = 360 \Leftrightarrow x = 72.$$

Трета етапа. Ако кучето направи 72 скока, тогаш тие ќе имаат должина колку и $(72:3)\cdot 7 = 24\cdot 7 = 168$ скокови на лисицата. За тоа време лисицата ќе направи $(72:2)\cdot 3 = 36\cdot 3 = 108$ скокови, а бидејќи на почетокот таа имала предност од 60 скокови, добиваме дека таа ќе се најде на оддалеченост од $108+60=168$ свои скокови и местото каде што на почетокот се наоѓало кучето. Значи, кучето треба да направи 72 скока за да ја стигне лисицата. ■

5.2.2. МЕТОД НА АНАЛИЗА ПРИ РЕШАВАЊЕ КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

Како што кажавме, една варијанта на аналитичниот метод се јавува и при решавањето конструктивни задачи. Иако, со мали исклучоци, конструктивните задачи не се предмет на разработка во почетното образование, сепак заради комплетност на излагањата ќе се осврнеме и на методот на анализа при решавање на конструктивните задачи.

Ако една конструктивна задача е сложена и патот до нејзиното решавање не е очигледен, тогаш се спроведува следнава постапка за нејзино решавање, која е составена од четири етапи: анализа, конструкција, доказ и дискусија.

Анализата е првата етапа во решавањето на конструктивните задачи, а се состои во тоа што бараната фигура ќе ја нацртаме како да ни е позната. Цел на оваа етапа е да се открие врската меѓу дадените и бараните елементи на фигурата која треба да ја нацртаме. Истовремено се наоѓа по која постапка или метод може најцелисходно да се реши задачата. Обично, анализата почнува со скицирање на цртеж, и тоа речиси секогаш со зборовите: *„Да претпоставиме дека задачата е решена“*. Потоа на направената скица се воочуваат познатите елементи, се одделуваат попрости фигури (или се формираат со дополнување на цртежот) и меѓу нив се бара таква помошна фигура која ќе ги задоволува следниве два услова:

1) *таа фигура може да се конструира од дадените елементи на основната задача и*
2) *поаѓајќи од неа може да се конструира бараната задача.*

Конструкцијата е втората етапа која се реализира врз основа на извршената анализа и често пати таа непосредно следува од анализата.

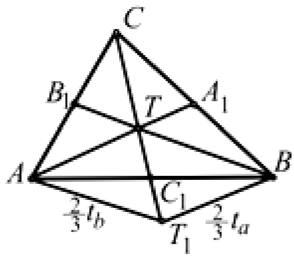
Доказот е третата етапа во овој метод и негова цел е да се докаже дека фигурата која сме ја конструирале ги задоволува условите на задачата.

Дискусијата е четвртата етапа во овој метод, во која се проверува како решението на задачата зависи од дадените елементи и дали тоа е еднозначно или повеќезначно т.е. дали со дадените елементи можат да се конструираат само една или повеќе нескладни фигури, кои се решение на задачата.

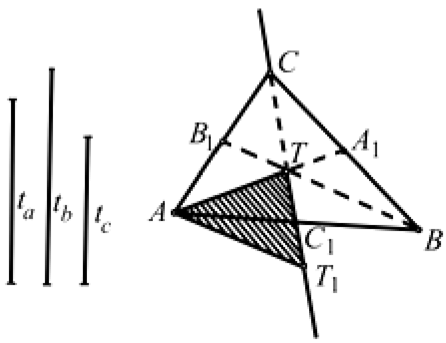
Пример 4. Конструирајте триаголник со дадени тежишни линии t_a, t_b и t_c.

Решение. *Анализа.* Нека бараниот триаголник ABC со тежишни линии t_a, t_b и t_c е конструиран и T е негово тежиште (цртеж десно).

Познато е дека тежиштето T ги дели тежишните линии во однос $2:1$ (поаѓајќи од темето). Да ја продолжиме тежишната линија t_c преку точката C_1 за $\frac{1}{3}t_c$. Ако добиената точка T_1 ја поврземе со темињата A и B, ќе добиеме паралелограм AT_1BT, за кој страните се $\frac{2}{3}t_a$ и $\frac{2}{3}t_b$, а дијагоналите се $\frac{2}{3}t_c$ и $\overline{AB} = c$.



Конструкција. Го конструираме $\triangle AT_1T$ со страни $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$ и $\frac{2}{3}t_c$ и повлекуваме тежишна линија AC_1, која е половина од страната AB, па од овој услов го наоѓаме темето B. Темето C ќе се добие ако страната TT_1 ја продолжиме преку темето T за должина $\overline{TT_1} = \frac{2}{3}t_c$ (цртеж лево).



Доказ. Доволно е да докажеме дека добиениот триаголник има тежишни линии t_a, t_b и t_c. Бидејќи $\overline{TT_1} = \frac{2}{3}t_c$ и C_1 е средина на TT_1 добиваме дека точката T ја дели тежишната линија на $\triangle ABC$ во однос $2:1$. Од $\overline{BT} = \overline{AT_1} = \frac{2}{3}t_b$ и $\overline{AT} = \overline{BT_1} = \frac{2}{3}t_a$ следува дека $\triangle ABC$ има тежишни линии t_a, t_b и t_c.

Дискусија. Ако со тежишните линии t_a, t_b и t_c може да се конструира триаголник, тогаш $\triangle AT_1T$ е еднозначно определен, така што задачата има единствено решение. ■

6. КОНТРАПРИМЕРИТЕ ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Усвојувањето на поимите, решавањето на задачи, усвојувањето на аксиомите и докажувањето на теоремите се основните дејства во наставата по математика. Притоа под формулација „*да се докаже дека ...*“ учениците најчесто ја подразбираат следнава задача „*да се констатира, дека дадено тврдење е точно*“. Последното се должи на фактот, дека како теоремите, така и задачите во кои се бара да се докаже определено тврдење, најчесто се со барање да се докаже дека тврдењето е точно, т.е. во основа учениците се среќаваат со општи потврдни тврдења, многу ретко со делумни потврдни тврдења, а општите и делумните одречни тврдења скоро и да не се застапени во наставата по математика.

Имајќи го предвид претходно кажаното, ќе разгледаме три начини кои најчесто се користат при докажување дека дадено тврдење не е точно.

Прв начин за докажување дека дадено тврдење не е точно е користењето на дефинициите, аксиомите и претходно докажаните тврдења, при што заклучувањето се реализира користејќи го правилото *модус толенс*.

Втор начин кој се користи при докажување на општите одречни тврдења е користењето на потполната индукција, како што е во следниов пример.

Пример 5. Дали постои трицифрен број A, на кој цифрите можат да се разместат така, што збирот на дадениот и новодобиениот број да е 999.

Бројот на трицифрените броеви е 900, па затоа може да се направат сите проверки, што се разбира бара многу време и не е целисходно. Меѓутоа, задачата може да се реши ако трицифрениот број го запишеме во видот $\overline{abc}$ и од него со разместување на цифрите ги добиеме следниве пет броеви: $\overline{acb}$, $\overline{bca}$, $\overline{bac}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. Понатаму, за дадениот број и за секој од добиените пет броеви треба да се провери бараното равенство, на пример

$$\overline{abc}+\overline{acb}=999.$$

Лесно се гледа дека ниту едно од петте равенства не е можно, со што се докажува дека за секој трицифрен број $\overline{abc}$ и секој број $\overline{xyz}$, добиен на опишаниот начин, равенството $\overline{abc}+\overline{xyz}=999$ не е можно. ■

Третиот начин се користи при докажување на делумните одречни тврдења и истиот подразбира наоѓање на елемент x кој го има својството $S(x)$ и го нема својството $P(x)$. Притоа, најдениот елемент x го нарекуваме контрапример и во практиката ваквиот начин на докажување на математичко тврдење е познат под името „оповргнување на тврдење со посочување на контрапример“.

6.1. ФОРМИРАЊЕ УМЕЕЊА КАЈ УЧЕНИЦИТЕ ЗА КОРИСТЕЊЕ КОНТРАПРИМЕРИ

Формирањето умеења кај учениците за користење на контрапримерите како средство за расудување, може да се направи на два начина и тоа:

a) преку учество на ученикот во колективните размислувања, раководени од учителот во случаи, во кои учителот ги користи контрапримерите и
b) преку целенасочено обучување на учениците при решавање на задачи, кои се поврзани со конкретна наставна содржина, во текот на целата учебна година.

Во случајот под а) ќе наведеме неколку можности во кои контрапримерите можат умешно да се искористат.

а1) При откривање на грешки во формулирање на тврдењата. Имено, тврдењата можат да бидат нецелосно формулирани, да содржат непотребни услови, да содржат противречни услови и да имаат неправилна логичка структура (спореди со поделбата на задачите според условот).

Пример 6. Да го разгледаме тврдењето: *ако краците на еден агол се паралелни со краците на друг агол, тогаш или аглите се еднакви, или нивниот збир е* 180°.

Забележуваме, дека при формулацијата на ова тврдење е искористена исклучна дисјункција, т.е. тоа има неправилна логичка структура. Затоа најдобро е да се нацртаат два прави агли со паралелни краци, од што ќе се види дека постои пример кој го задоволува условот на тврдењето но не и заклучокот, во случајов аглите се и еднакви и нивниот збир е 180°. ■

а2) При утврдување дека обратното тврдење не е теорема.

Пример 7. За теоремата:

Ако два агли се соседни, тогаш нивниот збир е еднаков на 180°.
Обратното тврдење гласи:

Ако збирот на два агли е еднаков на 180°*, тогаш тие се соседни.*
Јасно, обратното тврдење не е теорема, што учениците може сами да го заклучат, доколку им се предочат два спротивни агли во правоаголник. ■

а3) При откривање грешки во дефинирањето на поимите. Во случајов најчесто се среќаваат грешки од следниве видови: непотребни услови, нецелосни услови, неправилен избор на родовиот поим итн.

Пример 8. Во „дефиницијата“:

Средна линија на триаголник ја нарекуваме линијата, која поврзува теме на триаголникот со средината на страна на триаголникот.

Имаме случај на нецелосни услови и на неправилен избор на родовиот поим. Имено, наместо *отсечка* искористен е поимот *линија*, а исто така наместо *средината на спротивната страна* даден е условот *средината на страна*. Учениците лесно ќе увидат дека станува збор за грешка во дефинирањето на поимот, доколку едно теме на триаголникот се поврзе со искршена линија со средината на една од страните на која лежи темето. ■

Пример 9. Во „дефиницијата“:

Паралелограм се нарекува многуаголник на кој спротивните страни му се две по две паралелни.

имаме неправилен избор на родовиот поим, кој треба да биде четриаголник. Учениците лесно ќе увидат дека станува збор за грешка, ако како контрапример се даде правилен шестаголник. ■

Пред да преминеме на натамошните разгледувања, овде само ќе споменеме дека откривањето на грешките во формулациите на тврдењата или дефинициите е поврзано со прецизирањето на нивната структура, што од своја страна значи и нивно продлабочено осмислување и усвојување.

а4) При откривање на грешки во формулациите на задачите.

Пример 10. Во задачата:

Да се докаже, дека a^8+3a^4+4 *се дели со* 100, *каде* a *е природен број, кој не е делив со* 5.

е направена грешка во формулацијата. Имено, наместо изразот

$$a^8+3a^4+4$$

треба да стои

$$a^8+3a^4-4\,.$$

Последново може да се воочи ако последователно се земе $a=1,2,3$ и 4 при што изразот a^8+3a^4+4 ги прима вредностите $8,308,6808$ и 66308, соодветно и тоа се броеви кои при делење со 100 даваат остаток 8. Меѓутоа, доколку со учениците на се разгледуваат вакви и слични примери, природно е учениците првенствено да се посомневаат во сопствените знаења, т.е. да помислат дека тие направиле грешка при решавањето на задачата. ■

Последниот пример јасно укажува на потребата за користење на контрапримерите во случајот б), т.е. за целенасочено обучување учениците да користат контрапримери при решавање на задачи, кои се поврзани со конкретна наставна содржина, во текот на целата учебна година. Притоа, задачите треба да бидат избрани така, што ќе се постигнат и следниве дополнителни цели.

б1) Определување дали дадено тврдење искажано со помош на квантификатори е точно или не е точно.

Пример 11. Дадено е множеството $A = \{84, 201, 224\}$. Кои од следниве тврдења се точни:

Секој број кој припаѓа на A е делив со бројот 7.

Множеството A содржи барем еден парен број.

Множеството A содржи најмногу еден број, кој е делив со бројот 3. ■

б2) Негирање на тврдење искажано со помош на квантификатори.

Пример 12. Дадено е множеството $E = \{27, 29, 37, 57, 58\}$. Негирајте ги следниве тврдења и определете кој од трите искази е точен, а кој не е точен.

Во множеството E се содржи барем еден број кој завршува на цифрата 7.

Во множеството E се содржи барем еден број, кој е делив со бројот 5.

Во множеството E постои барем еден број, кај кој цифрата на десетките е 5. ■

б3) Анализирање на текстот на задачата, информацијата во неа и оформување на решението на задачата. Имено, за да можат учениците да се здобијат со умеења за користење на контрапримерите како средство за решавање задачи, целесообразно е на часовите да се решаваат задачи кои учениците ќе ги насочуваат кон различните алтернативи, докажување на точноста на тврдењето или негово оповргнување. Ќе разгледаме неколку примери од овој вид.

Пример 13. Нека $M = \{6k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ и со P да го означиме множеството прости броеви. Дали е точно тврдењето:

Множеството M е подмножество од множеството P.

При решавањето на оваа задача пожелно е да се искористи табелата:

k	1	2	3	4	5	6	...
$6k-1$	5	11	17	23	29	35	...

Од табелата се гледа дека за $k=6$ се добива бројот $6 \cdot 6 - 1 = 35$, кој не прост број. Според, даденото тврдење не е точно. ■

Пример 14. Нека $k \in \mathbb{N}$, а $P_k = k^2 + 3k + 1$. Оповргнете го тврдењето:

За секој $k \in \mathbb{N}$ *бројот од видот* P_k *е прост број.*

При решавањето на задачата може да се искористи табелата:

k	1	2	3	4	5	6	...
P_k	5	11	19	29	41	55	...

Од табелата се гледа дека за $k = 6$ бројот $P_6 = 6^2 + 3 \cdot 6 + 1 = 55 = 5 \cdot 11$ е сложен број, т.е постои $k \in \mathbb{N}$ таков, што бројот P_k е сложен, со што е оповргнато даденото тврдење. ♦

Пример 15. Дали е точно тврдењето:

За секој $n \in \mathbb{Z}$ *важи* $4n^2 + 40n + 99 > 0$.

Очигледно дека за секој позитивен цел број n неравенството е исполнето. Меѓутоа, ако $n < 0$, тогаш од табелата

n	-1	-2	-3	-4	-5	...
$4n^2 + 40n + 99$	63	35	15	3	-1	...

Се гледа, дека за $n = -5$ неравенството не е исполнето. Оттука следува дека одговорот на поставеното прашање е: Тврдењето не е точно. ■

Пример 16. Да се докаже или оповргне тврдењето: *Секој природен број, за кој збирот на делителите е непарен број е точен квадрат.*

Природниот број 2 има два делители: 1 и 2, чиј збир на делители е еднаков на $1 + 2 = 3$ и бројот 2 не е точен квадрат. Според тоа, даденото тврдење не е точно. ■

На крајот од овој дел да споменеме дека умешното користење на контрапримерите во наставата по математика во голема мера придонесува за негување на својствата на мислењето. Последното посебно се однесува на: длабочината, целесообразноста и критичноста на мислењето. Исто така, да забележиме дека барањето на контрапримери најчесто претставува сериозна задача, која претпочита наведените својства на мислењето да се посебно развиени и се разбира продлабочени математички знаења. Покрај тоа, во многу случаеви наоѓањето контрапримери е поврзано и со неформален пристап во расудувањето за даден проблем и го насочува ученикот кон елементарна евристичка дејност.

II МНОЖЕСТВА. ВЕНОВИ ДИЈАГРАМИ

1. Множества и Венови дијаграми

Множеството е основен поим во математиката кој не се дефинира, туку се објаснува преку примери. За решавање на следните задачи потребно е да се потсетиме дека:

1) Елемент a може да припаѓа на даденото множество, се означува со $a \in$ A, или да не припаѓа на истото множество, се означува со $a \notin$ A.
2) Множество кое нема елементи се нарекува празно множество и се обележува со $\emptyset$.
3) Множеството A е *подмножество* на множеството B (пишуваме $A \subset$ B) ако секој елемент од множеството A му припаѓа и на множеството B, во тој случај се вели и дека B е надмножество на множеството A.
4) Две множества A и B се *еднакви*, ако секој елемент од множество A му припаѓа и на множество B и секој елемент од множеството B му припаѓа и на множеството A, т.е. Ако $A \subset$ B и $B \subset$ A
5) *Унија* на множествата A и B (се означува со A $\cup$ B) е множество составено од сите елементи кои се елементи на множество A или на множеството *B*.
6) *Пресек* на множествата A и B (се означува со A $\cap$ B) е множество составено од сите елементи кои припаѓаат и на множество A и на множество B истовремено. Ако е A $\cap$ B $= \emptyset$, тогаш за множествата A и B велиме дека се *дисјуктни* множества.
7) *Разлика* на два множества A и B (се означува со $A \setminus$ B, A разлика B) преставува множество составено од сите елементи кои припаѓаат на множество A, а не припаѓаат на множество B. Обратно $B \setminus$ A (B разлика A) е множество кој ги содржи само оние елементи кои припаѓаат на множеството B, а не припаѓаат на множеството A.
8) *Симетрична разлика* на множество A и B е унија на множествата $A \setminus$ B и $B \setminus$ A и се означува со AΔB, т.е. AΔB $= (A \setminus$ B$) \cup (B \setminus$ A$)$
9) Комплемент на множеството A во однос на множеството B каде е $A \subset$ B е множеството $A_B^c =$ A $\setminus$ B.

10) За графичко претставување на множествата се користат *Венови дијаграми*.
11) Вкупниот број елементи на дадено множество А се означува со $|A|$
12) Нека А и В се две непразни множества.Тогаш важи:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

13) Бројот на сите различни подмножества на дадено множество А е $2^{|A|}$

1. Дадени се множество:

$$A = \{x|x \text{ е буква од името } MIRA\},$$
$$B = \{y|y \text{ е буква од името } TINA\},$$
$$C = \{z|z \text{ е буква од името } TAMARA\},$$

Запиши ги овие множество со набројување на елементите, а потоа прикажи ги со помош на Веновиот дијаграм.

Решение: $A=\{m,i,r,a\}$, $B=\{t,i,n,a\}$, $C=\{t,a,m,r\}$. Во едно множество ги ставаме само различните елементи.

2. Во едно одделение има 32 ученика, од кои 18 ученици се претплатени за весникот „Другарче", а 13 се претплатени за весникот „Развигор". Ако е познато дека 8 ученици не се претплатени на ниту едно списание, тогаш колку ученици ги земаат двете списанија истовремено?

Решение: Прв начин. Нека x е бројот на ученици претплатени на двете списанија. Тогаш $18 - x + x + 13 - x = 32 - 8$, па $x = 7$.

Втор начин. Со користење Венов дијаграм каде А е множеството ученици кои земаат Другарче, а В е множеството ученици кои земаат Развигор.

3. Од 1050 ученици 870 сакаат скијање, 480 фудбал, а 65 не сакаат ниту еден од овие два спорта. Колку ученици сакаат истовремено и скијање и фудбал ?

Решение: Со користење на Венов дијаграм или со решавање на едноставна равенка се добива $65 + 870 - x + x + 480 - x = 1050$, односно $x = 365$.

4. Во училиштето има 60 наставници, од кои 39 пијат кафе, 28 пијат чај, а 16 пијат и чај и кафе. Дали постојат наставници кои не пијат ниту кафе ниту чај и ако има колкав е нивниот број?

Решение: Бидејќи $60 - (23 + 16 + 12) = 60 - 51 = 9$, заклучуваме дека 9 наставници не пијат ниту чај ниту кафе.

5. На еден натпревар освоени се вкупно 46 медали. Од тоа 35 се сребрени и бронзени и 27 се златни и сребрени медали.

Колку златни, колку сребрени и колку бронзени медали се освоени на натпреварот?

Решение: 11 златни, 16 сребрени и 19 бронзени. Се решава со систем на равенки. Понекогаш задачата може да излаже, наликува на задача која се решава со користење на Венов дијаграм.

6. Пополни го Веновиот дијаграм врз основа на следниот текст. 150 почетници на музичкото училипте се прашани дали знаат да свират клавир, тапани или гитара. Добиени се следните одговори:

18 лица не свират на ниту еден инструмент;

10 лица свират на сите три инструменти;

77 лица можат да свират само гитара или тапани, но не можат да свират клавир;

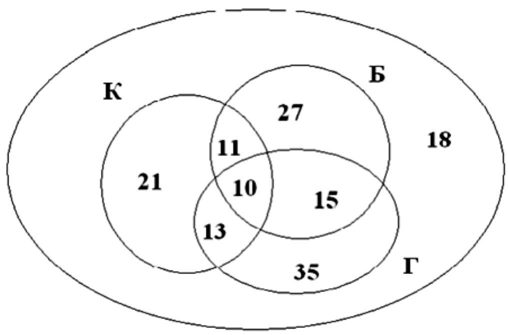
73 лица свират гитара;

49 лица свират барем два од наведените инструменти;

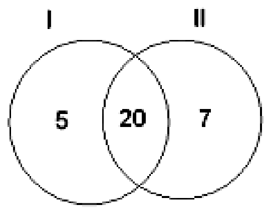
13 лица можат да свират клавир и гитара, но не можат да свират тапани;

21 лице свири клавир и тапани.

Решение: Погледни ја сликата:



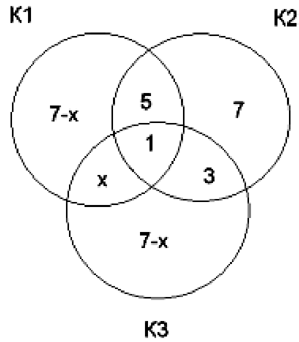
7. На писмената работа по математика поставени се 3 задачи. Секој ученик решил барем една задача, и ниту еден од учениците не ја решил третата задача. Првата задача ја решиле 25 ученици, втората 27 ученици, а двете задачи ги решиле 20 ученици. Колку ученици биле присутни на писмената работа по математика? Колку од нив ја решиле само првата задача?



Решение: Бидејќи $5 + 20 + 7 = 32$, заклучуваме дека на писмената работа по математика имало 32 ученици. Само првата задача ја решиле $25-20=5$ ученици.

8. Во едно одделение од 29 ученици, 13 ја прочитале првата книга, 16 втората книга и 11 третата. Истовремено тројца од нив не прочитале ниту една книга. 6 од оние кои ја прочитале втората книга во исто време ја прочитале и првата книга, а 4 ученици и третата книга. Само еден ученик ги прочитал сите три книги. Колку ученици од одделението ја прочитале само првата книга, а колку само третата книга?

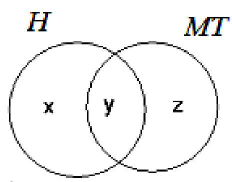
Решение: Според цртежот, вкупниот број на ученици што прочитале некоја од книгите е следниот:



$7-x+7-x+x+7+5+1+3=30-x$.
Според условот на задачата 3 ученици не прочитале ниту една книга, па така вкупниот број на ученици кои читале е $29-3=26$. Сега, $26=30-x$ т.е. $x=4$. Значи, 3 ученици ја прочитале само првата, а 3 само третата книга.

9. Во едно одделение $\frac{4}{5}$ од учениците се претплатени за математичко списание Нумерус или Математички талент. Математички талент замаат двојно повеќе ученици отколку Нумерус. А бројот на учениците кои се претплатени за двете списанија е $\frac{1}{2}$ од бројот на ученици кои се претплатени за Нумерус. Знаејќи дека 5 ученици не се претплатени за ниту едно математичко списание определи го бројот на ученици кои ги земаат двете списанија истовремено, како и бројот на ученици кои го земаат секое од списанијата поединечно.

Решение: Според условот на задачата $\frac{1}{5}$ од учениците не е претплатена за ниту едно списание, а тоа се 5 ученици, од каде заклучуваме дека во одделението има $5\cdot 5=25$ ученици. Значи $y+z=2(x+y)$. Слично, $2y=x+y$, т.е. $x=y$. Заради тоа, $z=3y$, а вкупниот број на ученици кои биле претплатени за едно од двете математички списанија е $\frac{4}{5}\cdot 25=20$. Од друга страна, $x+y+z=y+y+3y=5y$, $5y=20$ т.е. $y=4$. Значи, Нумерус земаат 8 ученици, а Математички талент 16 ученици.

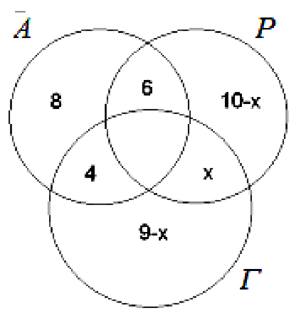


10. Во едно одделение со 35 ученици, секој ученик задолжително учи барем еден, но не повеќе од два странски јазици: 18 ученици учат англиски, 16 руски и 13 германски јазик. 4 ученици учат англиски и германски јазик, 6 англиски и руски. Колку ученици учат само еден јазик, а колку руски и германски истовремено?

Решение: Цртежот покажува дека само англиски учат $8+6+4=18$ ученици. Вкупниот број на ученици што учат било кој од јазиците е 35. Од друга страна тој број е еднаков на

$$18+9-x+10-x+x=37-x,$$

односно $37-x=35$ т.е. $x=2$. Само еден странски јазик учат $8+8+7=23$ ученици, а 2 ученика учат и руски и германски истовремено.



11. На Балканскиот конгрес на математичари, секој од 100-те учесници зборува барем еден од трите странски јазици: англиски, француски и руски. Руски јазик зборуваат 57 математичари, француски и руски 28, англиски и француски 34, и само француски 5 математичари; само два странски јазика зборуваат 49 учесници и сите три јазици ги зборуваат 11 математичари. Колку учесници зборуваат само англиски, а колку само руски јазик?

Решение: Од цртежот

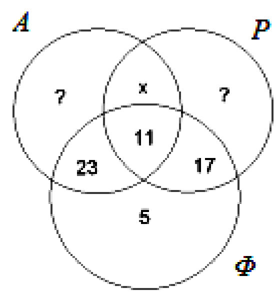
$$x+34-11+28-11=40+x$$

учесници зборуваат точно два странски јазика, што според условот на задачата е 49, т.е. $49=40+x$, доносно $.x=9$. Само англиски зборуваат

$$100-57-(5+34-11)=15$$

математичари, и само руски

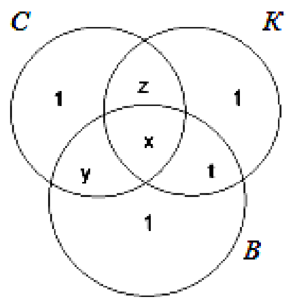
57 - (28 - 11) - 11 - 9 = 20 математичари.



12. На еден курс по странски јазици секој слушател учи барем еден од трите светски јазици (англиски, француски и германски) и тоа: 18 слушатели учат француски, 22 учат англиски, 15 германски, 6 слушатели учат англиски и француски, 11 слушатели учат англиски и германски и 1 слушател ги учи сите три јазици. Колку слушатели има на тој курс и колку од нив учат само два јазика?

Решение: Најдобро е да се употреби Веновиот дијаграм со три множества (него го пополнуваме така што прво го пополнуваме пресекот на сите три множества, потоа пресекот на секои две множества и на крајот елементите кои припаѓаат на само едно од множестват). Значи, прво впишуваме 1 во пресекот на сите три множества. Потоа, пресекот на француски и англиски, но тука не пишуваме 6, туку $6-1=5$, а потоа пресекот англиски и германски $11-1=10$. Понатаму $18-5-1=12$ слушатели учат само француски, $22-10-5-1=6$ слушстели учат само англиски и на крајот $15-10-1=4$ слушатели учат само германски. Вкупниот број на слушатели е $12+5+6+1+10+4=38$, а бројот на оние кои учат само два јазика е $10+5=15$.

13. Во нашата населба има 8 улици, од кои секоја има барем по една комунална инсталација. Струја имаат 6 улици, канализација 4 и 6 улици имаат водовод. Дали има улица која што ги има сите три инсталации, ако се знае дека точно три од улиците имаат само по една и тоа различна комунална инсталација?



Решение: Од цртежот можеме да видиме дека $x+y+z=5$; $x+y+t=5$, т.е. $z=t$ и $x+z+t=3$. Сега од тоа што $x+y+2t=5$ и $x+y+t=5$ следува дека $t=0$. Значи, $x=3$, т.е. има 3 улици со сите три комунални инсталации.

14. На излет тргнале 60 ученици. $\frac{2}{3}$ од нив пијат само кока-кола, а $\frac{4}{15}$ кока кола и фанта. Колку ученици пијат само фанта?

Решение: Само кока кола пијат $\frac{2}{3}.60=40$ ученици, а фанта и кока кола истовремено пијат $\frac{4}{15}.60=16$ ученици. Останатите

$$60-40-16=4$$

ученици пијат само фанта.

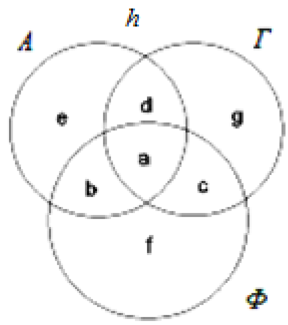
15. Во едно училиште има 450 ученици. Со спорт не се занимаваат само 20 од нив. Останатите играат кошарка, одбојка или фудбал и притоа сите се занимаваат само со еден спорт. Кошарка или одбојка заедно играат 215 ученика, а фудбал или одбојка 323 ученика. Колку ученици се занимаваат со секој од овие спортови?

Решение: Вкупно спортуваат $450 - 30 = 420$ ученици. Само со фудбал се занимаваат $430 - 215 = 215$ ученици, а $430 - 323 = 107$ само со кошарка. Само со одбојка пак се занимаваат $430 - 215 - 107 = 108$ ученици.

16. На еден конгрес на кој учествувале 2000 учесници, секој од учесниците бил или филозоф или математичар, а еден дел од нив биле и филозофи и математичари. По колку учесници во секоја категорија имало на конгресот, ако меѓу филозофите секој осми бил и математичар, а меѓу математичарите секој тринаесетти бил и филозоф?
Решение: Нека е x бројот кои се само филозофи, z е бројот кои се само математичари, а y број на оние кои се и филозофи и математичари. Ако секој осми филозоф бил и математичар, тогаш $x + y = 8y$ односно $x = 7y$. Ако секој 13 математичар е и филозоф тогаш важи $y + z = 13y$ односно $z = 12y$. Ако вкупниот број на учесници е $2000 = x + y + z = 7y + y + 12y = 20y$ тогаш $y = 100$. Вкупниот број на филозофи е 800, а на математичари 1300.

17. На еден собир имало 20 луѓе. Од нив 16 зборувале англиски, 15 француски и 17 германски јазик. Докажи дека најмалку 8-мина од учесниците на собирот ги зборувале сите три јазика.
Решение: Согласно цртежот имаме:

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 20,$$
$$a + b + d + e = 16$$
$$a + b + c + f = 15$$
$$a + c + d + g = 17$$



Ако првото равенство го помножиме со 2 и го одземеме од збирот на последните три равенства, ќе добиеме:

$$a - (e + f + g + 2h) = 8,$$

односно $a = e + f + g + 2h + 8$ односно, а бидејќи e, f, g, h се ненегативни броеви, најмалку 8 луѓе од тој собир ги зборувале сите три странски јазици.

18. Во едно основно училиште постојат драмска, математичка и спортска секција. Од 27 ученици во одделението 14 членуваат во драмската секција, 3 ученици се членови само на математичката секција, додека 5 ученика членуваат во сите три секции. Колку ученици има во секоја секција, ако само во спортската и драмската секција членуваат 6 уче-

ници и сите ученици се членови на некоја од секциите, а при тоа само со спорт и само со глума не се занимава ниту еден од учениците?
Одговор: Драмска 14, спорт 17 и математичка 26 ученици.

19. Во две одделенија секој ученик е член на фудбалскиот тим или на дебатниот клуб. 10 ученици учествуваат во работата на дебатниот клуб, 31 ученик игра само фудбал и 12 ученици учествуваат во работата на двете секции. Колку ученици има во овие две одделенија?
Одговор: 51 ученик.

20. Тренерот на фудбалскиот тим го пратил својот помошник да купи сендвичи на играчите после напорниот тренинг. Од 44 играчи, 28 како прилог сакале кечап, 20 сенф, 10 кечап и сенф, 11 кечап и мајонез, 8 сенф и мајонез и 6 ги сакале сите три прилога. Колку играчи како прилог сакале:
А. Само кечап?
Б. Сенф или мајонез?
В. Мајонез, но не и сенф?
Г. Мајпнез и сенф, ама не и кечап?
Д. Ниту еден од прилозите?
Решение: Одговорите се: 13, 18, 12, 11, 5, соодветно.

21. Во истражувањето за најпопуларни цртани, направена е анкета и добиени се следните резултатите:
39 деца ја сакаат „Малата сирена“;
43 деца сакаат „101 далматинец“;
56 деца го сакаат „Мики Маус“;
7 деца ја сакаат „Малата сирена“ и „101далматинец“;
10 деца ја сакаат „Малата сирена“ и „Мики Маус“;
16 сакаат „101 далматинец“ и „Мики Маус“;
4 деца ги сакаат сите три цртани;
6 деца не сакаат ниту еден од понудените цртани филмови.
Одговори на следните прашања:
Колку деца биле анкетирани?
Колку деца ја сакаат само „Малата сирена“?
Колку деца сакаат само „101 далматинец“?
Колку деца го сакаат само „ Мики Маус“?
Решение: Одговорите се: 115, 36, 24, 34, соодветно.

22. Определи ги елементите на множеството B ако:

$$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, m, n, p, q\}, A \backslash B = \{e, m\},$$
$$A \cap C = \emptyset, C \backslash B = \{c, p\}.$$

Решение: Од условот $A \cap C = \emptyset$ може да се воочи дека

$$(A \backslash B) \cap (C \backslash B) = \emptyset.$$

Потоа и

$$(A \backslash B) \cup (C \backslash B) \cup B = A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, m, n, p, q\},$$

откаде конечно $B = \{a, b, d, n, q\}$.

23. На една права една по друга се нанесени точките A, B, C, D. Определи:

$$(AC \backslash BD) \cap \ (AC \cap AB).$$

Решение: Од тоа што

$$AC \cap AB = AB \text{ и } AC \backslash BD = AB \backslash \{B\}$$

следува дека

$$(AC \backslash BD) \cap (AC \cap AB) \ = \ (AB \backslash \{B\}) \cap AB \ = AB \backslash \{B\},$$

или поинаку кажано тое е отсечката AB, освен точката B.

24. Дадени се множествата: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 4, 6\}, C = \{2, 5, 6, 7\}$ и $D = \{1, 6, 7, 8\}$. Определи го множеството S ако $S \subset A, S \cap (B \cup D) =\emptyset$ и$\{3\}$\S=$\{3\}$.

Решение: Прво одредуваме $B \cup D = \{1, 4, 6, 7, 8\}$. Бидејќи $S \subset A$ и S нема заеднички елементи со $B \cup D$, заклучуваме дека $S \subset \{2, 3, 5\}$. Бидејќи множеството S не го содржи елементот 3, добиваме дека бараното множество е $S = \{2, 5\}$.

25. Дадени се множествата: А $= \left\{x \in \mathbb{N}_0 \middle| \frac{15}{2x+1} \in \mathbb{N}\right\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} | y^2 < 16\}$. Определи ги елементите на множествата:

$$A, B, A \cup B, A \cap B, A \backslash B \text{ и } B \backslash A.$$

*Решение:*Нека најпрво ги определиме елементите на множеството A. Бидејќи $\frac{15}{2x+1} \in \mathbb{N}$, заклучуваме дека $2x + 1 \in \{1,3,5,15\}$ односно $x \in \{0,1,2,7\}$. Значи, $A = \{0, 1, 2, 7\}$. Со проверка на првите неколку природни броеви се добива дека само броевите 1, 2, 3 ја задоволуваат неравенката $y^2 < 16$, односно $B = \{1,2,3\}$. Заради тоа

$$A \cup B = \{0,1,2,3,7\} \text{ и } A \cap B = \{1,2\} \text{ и } A/B = \{0,7\} \text{ и } B/A = \{3\}.$$

26. Познатиот писател за деца Lewis Caroll чие вистинско име е Dodgsn кој по занимање е математичар, во една книга ја дава следната задача:

„Во жестока битка 70 од 100 пирати загубиле по еденоко, 75 по едно уво, 80 по една рака и 85 по една нога. Колку најмалку пирати истовремено изгубиле и око, и уво, и рака и нога?

Решение: Нека O е множество од сите пирати кои изгубиле едно око, U е множество од сите пирати кои изгубиле едно уво, R множество од сите пирати кои изгубиле една рака и N множество од сите пирати кои изгубиле една нога. Најпрвин да го одредиме бројот на пирати кои изгубиле едно око и едно уво, што е $|O \cap U| = 70 + 75 - 100 = 45$. Најмалиот број на гусари кои имаат изгубено едно око, едно уво и една рака е $|(O \cap U) \cap R| = 45 + 80 - 100 = 25$. И на крајот најмалиот број на пирати кои изгубиле едно око, едно уво, една рака и една нога е $|(O \cap U \cap R) \cap N| = 25 + 85 - 100 = 10$.

27. Дадени се множествата

$$A = \{a|a \in \mathbb{N},\ 14 \leq 3a + 2 \leq 32\}, B = \{b|b \in \mathbb{N},\ 4 \leq b < 9\}.$$

Определи го бројот на елементи од множеството C ако

$$C = \{c|c \in \mathbb{N},\ c = a - b, a \in A, b \in B\}.$$

Решение: Ги наоѓаме сите природни броеви што ја задоволуваат неравенката $14 \leq 3a + 2 \leq 32$, од каде елементите на множеството

$$\mathrm{A} = \{4,5,6,7,8,9,10\},$$

додека елементите на множеството

$$B = \{4,5,6,7,8\}.$$

Забележуваме дека $B \subset A$, т.е множеството

$$C = \{c|c \in \mathbb{N},\ c = a - b, a \in A, b \in \mathrm{A}\}.$$

Бројот на елементи на множеството C е $|\mathrm{A}| - 1$, бидејќи разликата $r = |x - y|$, за $x, y \in A$ е во интервалот $1 \leq r \leq 6$.

28. Нека се дадени множествата

$$A = \{1, 3, 5, \ldots, 2n - 1\} \text{ и } B = \{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n\},$$

каде n е природен број. Определи го бројот на елементите во множествата $A, B, A \cap B, A \cup B$, како и бројот на подмножества.

Решение: Множеството A го претставува множеството на сите непарни природни броеви помали од $2n$. Па така, бројот на елементи на множеството A е $|A| = n$. Секој елемент $b \in B$ може да се запише во облик 2^k, каде $0 \leq k \leq n$. Бројот k може да прими n различни вредности, па $|B| = n + 1$. Лесно се забележува дека $A \cap B = \{1\}$, бидејќи множеството A е множество од непарни природни броеви, а множеството B е множество во кое сите елементи освен бројот 1 се парни броеви. Значи, $|A \cap B| = 1$, па затоа

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = n + n + 1 - 1 = 2n.$$

Бројот на подмножества од множеството A е $|A| = 2^n$, од множеството B е $|B| = 2^{n+1}$, од множеството $A \cap B$ е $|A \cap B| = 2$, од множеството $A \cup B$ е $|A \cup B| = 2^{2n} = 4^n$

29. На табла се испишани првите 1200 броеви. Прво ги бришеме оние кои завршуваат на нула, потоа сите оние кои се деливи со 6 и на крајот оние кои се деливи со 9. Колку броеви остануваат неизбришани?

Решение: Нека A е множество од сите броеви што завршуваат на 0, односно множество од сите броеви деливи со 10. Нека B е множество од сите броеви деливи со 6, а C множество на сите броеви деливи со 9. Бројот на броеви деливи со 10, 6 и 9 истовремено е $1200:90 = 13$, бидејќи $\text{НЗС}(10,9,6) = 90$. Бројот на броеви деливи со 6 и 9 е $1200:18 = 66$, бидејќи $\text{НЗС}(9,6) = 18$, а бројот на оние кои се деливи со 6 и 9, но не и со 10 е $66 - 13 = 53$. На сличен начин се добива дека бројот на броеви деливи со 6 и 10, но не и со 9 е 27, додека броеви деливи со 9 и 10, но не и со 6 не постојат. Бројот на броеви деливи со 6 е $1200:6 = 200$, а броеви деливи со 6, но не и со 9 и 10 има

$$200 - 13 - 53 - 27 = 107.$$

Аналогно, бројот на броеви деливи со 9, но не со 6 и 10 е 67, а бројот на броеви деливи со 10, но не со 6 и 9 е 80.

Конечно добиваме дека се изришани

$$67 + 53 + 13 + 0 + 27 + 53 + 107 + 80 = 347$$

броеви, од што заклучуваме дека се останати $1200 - 347 = 853$ броеви.

30. Определи ги елементите на множествата A, B и C, а потоа и бројот на елементите на секое од множествата, ако:

$$A \cup B \cup C = \{1,2,3, \ldots .. n\},$$
$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset,$$
$$A \backslash B = \{x | x = 2k - 1 \wedge x < n, k \in \mathbb{N}\},$$
$$C \backslash B = \{y | y = 2k \wedge y < n, k \in \mathbb{N}\} \text{ и}$$
$$(A \cap B) \backslash C = \{n\}$$

Решение: Користејќи го фактот дека операциите $\cup$ и $\cap$ се дистрибутивни една на друга, записот $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$ можеме да го трансформираме како $(A \cup B) \cap C = \emptyset$. Елементи на множеството $A\backslash$

B се сите непарни природни броеви помали од n, па $A\backslash B = \{1,3,5,\dots\dots..\}$, а елементи на множеството $C\backslash B$ се сите парни природни броеви помали од n, т.е. $C\backslash B = \{2,4,6,\dots\dots..\}$. Бидејќи $(A\cap B)\backslash C = \{n\}$, заклучуваме дека $n\in A\cap B$, односно $n\in A$ и $n\in B$. Јасно, множествата $A\cup B$ и C се дисјунктни множества, па заради тоа и множествата A и C , и B и C се по парови дисјунктни меѓу себе. Заради тоа што множеството A го сочинуваат сите непарни природни броеви помали од n, а множеството C сите парни природни броеви помали од n заклучуваме дека во множеството B се наоѓа само елементот n, додека

$$A = \{x|x = 2k-1 \wedge x < n, k\in\mathbb{N}\}\,,$$

т.е. сите непарни броеви помали од n вклучувајќи го и n, и

$$C = \{y|y = 2k \wedge y < n, k\in\mathbb{N}\},$$

т.е. сите непарни броеви помали од n. Со тоа ги определивме елементите на секое од множествата.

Сега, ако n е парен број,

$$|\mathrm{A}| = \frac{n}{2}+1,\ \ |C| = \frac{n}{2}-1, |B| = 1\,,$$

а ако n е парен број тогаш

$$|\mathrm{A}| = \frac{n-1}{2}+1,\ \ |C| = \frac{n-1}{2}, |B| = 1$$

31. Колку непразни подмножества од множеството {1, 2, 3, ..., 12} постојат такви што збирот од најмалиот и најголемиот елемент во подмножеството е 13?

Решение: Сите можни збирови од два броја што даваат 13 се:

1 + 12, 2 + 11, 3 + 10, 4 + 9, 5 + 8, 6 + 7.

Секој пар броеви што имаат збир 13 едновремено се најмалиот и најголемиот елемент на потребното подмножество, додека останатите елементи на подмножеството се сите броеви кои се наоѓаат помеѓу овие два броја. Множеството кое ги содржи броевите 1 и 12 може да има максимум уште 10 елементи, што значи дека може да има вкупно 2^{10} подмножества. Потоа, вкупниот број на подмножества што ги содржи елементите 2 и 11 е 2^8 подмножества итн. Значи, вкупниот број на сите подмножества е

$$2^{10}+2^8+2^6+2^4+2^2+1 = 1365.$$

2. Нерешени задачи

32. Нека $P = \{1, \{2,3\}, 3\}$. Кои тврдења се точни:

$$\{1\} \in P, 1 \in P, \{3,2\} \in P, \{2,3\} \subset P, 2 \in P, 3 \in P?$$

33. Множеството A има 2009 елементи, множеството B има 2010, а нивната унија има 2011 елементи. Колку елементи има нивниот пресек ?

34. Во една организација има 35 службеници, од кои 20 зборуваат странски јазик, а 11 ја знаат техниката на слепо куцање, додека 10 не знаат ниту едно ниту друго. Колку службеници ги поседуваат двете вештини?

35. Во едно преведувачко биро, работат 10 преведувачи кои зборуваат француски, шпански и англиски јазик. Секој јазик го знаат точно по 5 преведувачи, а само по еден јазик зборуваат по 2 преведувачи. Колку преведувачи зборуваат по два јазика?

36. Во едно одделение од 30 ученици, 19 ученици одоварале математика, 17 ученици физика, 11 ученици историја, 12 ученици математика и физика, 7 ученици историја и и математика, 5 ученици физика и историја и 2 ученика одговарале по сите три предмети. Колку ученици одговарале само по еден предмет?

37. Во населбата се 8 нови улици: a, b, c, d, e, f, g, h. Електрична енергија имаат 6 улици, канализација 4 улици, а водоводна инсталација 6 улици. Првите три улици: a, b, c имаат само по една од комуналните инсталации. Колку улици ги имаат сите три комунални инсталации?

38. На туристички собир, секој од учесниците зборувал барем еден од три странски јазици: англиски, француски и руски. Сите три јазици ги зборувале 2 учесници, 9 зборувале само француски и англиски, 13 само француски и руски, 12 само руски и англиски, 29 само англиски, 6 само француски и 7 само руски јазик. Колку вкупно учесници имало на собирот?

39. Во петто одделение во едно училиште имало 90 ученици. Познато е дека 22 ученици учеле англиски јазик, 28 руски јазик, а 35 француски јазик.

Англиски и руски учеле 5, француски и англиски 7, а руски и француски 9, а само англиски 12 ученици. Колку ученици ги учеле сите три јазика, а колку ученици не изучувале ниту еден странски јазик?

40. Во едно претпријатие има 35 работници. Од нив, 20 зборувале странски јазици, 11 знаеле да програмираат, а 10 ниту едното ниту другото. Колку работници знаеле и програмирање и странски јазици?

41. Сите ученици од едно одделение се членови барем на една секција: кошаркарска, рецитаторска или математичка. Во сите три секции биле зачленети 6 ученици, други 6 биле членови во две секции, а по 6 ученици биле членови само во по една секција. Колку ученици има во тоа одделение?

42. Во едно училиште било испитувано кое од три овошја сакаа сите 600 ученици. Јаболка сакале 240 ученици, банани 180, а мандарини 360 ученици. Јаболката и мандарините ги сакале 120 ученици, јаболката и бананите 70 ученици. Колку ученици ги сакаат сите три видови на овошје?

43. 120 ученици на тестот решавале две задачи. Првата задача ја решиле 65 ученици. 70 ученици не ја решиле втората, а 20 ученици ги решиле двете задачи. Колку ученици решиле точно една задача?

44. Определи ги сите множества X за кои важи $\{2,3,4,5\} \cup X = \{2,3,4,5\}$.

45. Нека
$M \cup N \cup P = \{1,2,3,4,5\}$, $M \cap N \cap P = \{1,4\}$, $N \backslash P = \{2,5\}$, $P \backslash M \neq \emptyset$.
Одреди ги елементите на множеството P.

46. Дали за секои множества A, B, C важи $\big((A \cup B) \backslash C\big) \cap \big(A \backslash (B \cup C)\big) = A \backslash (B \cup C)$ и зошто?

47. Колку природни броеви помали од 3000 не се деливи ниту со 5 ниту со 4, а деливи се со 6?

48. Споредете го бројот на елементи на множеството A и бројот на елементи на множеството B, ако:

$$A = \{(a+b) | a+b=c\}$$
$$B = \{(x+y) | x+y=c\}$$

каде a, b, c се парни природни броеви, а x, y се непарни природни броеви.Дали добиениот заклучок важи за произволен природен број c?

49. Дадено е множеството $S = \{1,2,3, \dots \dots ,99\}$. Одреди ги множествата A и B така што $A \cup B = S,\ A \cap B = \emptyset$ и збирот од броевите што припаѓаат на множеството A е еднаков на збирот на броевите што припаѓаат на множеството B.

50. Дадени се множествата

$$A = \{-5, -4, -2,1,3\} \text{ и } B = \{-3, -1, 0, 2\}.$$

Определи ги елементите на множеството

$$C = \{c | c = |a + b|,\ a \in A,\ b \in B\}\ .$$

51. Елементи на множеството E се вредностите на изразите:

$$40: 5 - 1 \cdot 2\ ; \quad (40: (5 - 1)\ ) \cdot 2; \quad 40: ((5 - 1) \cdot 2\ )$$

Елементи на множеството M се вредностите на изразите:

$$40 - 10 + 10; \quad 40: (10 + 10) \cdot 2; \quad 40 - 10 - 10$$

Определи ги множествата $E \cup M$, $E \cap M$, $E \backslash M$

52. Определи ги елементите на множествата A и B ако:
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\},\ A \cap B = \{x | x \in N \text{ и } 3 \leq x < 6\}$ и $\mathrm{A} \backslash \mathrm{B} = \{1,6\}$

53. Дадено е множеството $S = \{1,2,3, \dots \dots ,2005\}$. Дали постојат множества A и B такви што $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$ и збирот на броевите од множеството A да е еднаков на збирот на броевите од множеството B? Образложи го одговорот.

54. Определи ги сите множества X кои ги задоволуваат условите:

$$X \subset \{a, b, c, d, e\} \text{и } X \cap \{a, c, d\} = \{a, d\}\ .$$

55. Дадено е множеството $S = \{1,2,3, \dots ,99\}$. Определи ги множествата A и B такви што $A \cup B = S, A \cap B = \emptyset$ и уште збирот на сите броеви кои се елементи на множеството A е еднаков на збирот збирот на броевите кои припаѓаат на множеството B .

56. За множествата A и B важат релациите:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}, A \backslash B = \{1,2\} \text{ и } B \backslash A = \{4,5\}$$

Определи ги множествата: $A\backslash(A\cap B)$ и $(A\cup B)\backslash B$.

57. Множествата A *и* B имаат еднаков број на елементи. Ако е

$$A\cup B=\{x|x\in\mathbb{N}\ u\ x<18\},\text{ а } A\cap B=\{1,2,7,13,17\},$$

да се определат множествата A и B знаејќи дека секој елемент од множеството $A\backslash B$ е поголем од секој елемент од множеството $B\backslash A$.

III ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Во овој дел ќе се осврнеме на задачи со броеви и цифри, бројните ребуси, на користењето на основните операции за добивање броеви при дадени услови, деливоста, НЗД, НЗС и елементарните Диофантови равенки.

1. Воведни задачи

1. На стара книга недостасуваат првите 142 страни, па така да книгата почнува од 143 страница, а завршува со страница која исто така е напишана со помош на цифрите 1, 3 и 4 , но во друг редослед. Колку страници има старата книга?
Решение: Бројот на страните на книгата мора да биде парен и поголем од 143, затоа последната страна е 314. Бројот на страните на таа книга е $314 - 142 = 172$.

2. За нумерирање на страниците на една книга, цифрата 1 е употребена 100 пати. Колку страници има таа книга?
Решение: За нумерирање на првите 99 страници цифрата 1 е употребена 20 пати. За нумерирање на страниците од 100 до 109 цифрата 1 е употребена 11 пати (вкупно 31). За нумерирање на страните од 110 до 119 цифрата 1 е употребен 21 пат (вкупно 52 пати). Во секоја следна десетка на втората стотка, цифрата 1 се употребува 11 пати: $120 - 129$ (вкупно 63 пати); $130 - 139$ (вкупно 74 пати); $140 - 149$ (вкупно 85 пати); $150 - 159$ (вкупно 96 пати). Останува цифрата 1 да се употреби уште 4 пати и тоа за броевите 160, 161 и 162, па книгата има 162 страни.

3. Збунет математичар на таблата ги напишал природните броеви 1, 2, 3, ... по ред еден по друг без при тоа да користи запирки. Така го добил записот $123456789101112\ldots$. Целта му била да ја открие цифрата која е запишана на 2011 место. Според него тоа е цифрата 9. Дали збунетиот математичар бил во право и дали овој одговор можел да дојде на пократок начин?
Решение: Секако дека ова можел пократко да го реши. Едноцифрени броеви има 9, двоцифрени 90, трицифрени 900 итн. Претпоставуваме дека математичарот ги испишал сите едноцифрени и сите двоцифрени броеви, па затоа тој употребил точно $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$ цифри. Бидеј-

ки 2011>189, математичарот морал да испише и трицифрени броеви. Нека претпоставиме дека ги испишал и сите трицифрени, а тоа значи дека дека употребил $9\cdot 1+90\cdot 2+900\cdot 3=2889$ цифри. Бидејки $2889>2011$, тоа значи дека цифрата на 2011-тото место е некаде помеѓу троцифрените броеви. Забележуваме дека

$$2011=9\cdot 1+90\cdot 2+607\cdot 3+1.$$

Од ова заклучуваме дека се употребени сите едноцифрени броеви, сите двоцифрени и 607 трицифрени броеви, вклучувајки ја и првата цифра од трицифрениот број 608.

Шестотиот трицифрен број е 699, па тогаш шестотини и седмиот трицифрен број е 706. Од ова заклучуваме дека шестотини и осмиот трицифрен број е трицифрениот број 707, па бараната цифра е 7. Збунетиот математичар очигледно бил расеан тој ден.

4. Ако книгите во една библиотека биле нумерирани на следниот начин: $[brknj]$ $[od]$, каде $brknj$ е број на книги во одделот od, да се определи колку пати е употребена цифрата 4 при нумерирањето на книгите во библиотеката. Одделот od се означува со буквите a, b, c, d и e, каде бројот на книгите во одделите по ред е 200, 250, 300, 350, 402. Пример 124 b, или 124 книга во одделот b.

Решение: Најпрво ќе определиме колку пати била употребена цифрата 4 во одделот a. На местото на единиците во едноцифрените броеви цифрата 4 се јавува само еднаш, 9 пати во двоцифрените и 10 пати во троцифрените броеви. На местото на десетките цифрата 4 се јавува 10 пати во двоцифрените броеви и 10 пати во трицифрените броеви. Бидејќи во одделот a има 200 книги, цифрата 4 е употребена $1+9+10+10+10=40$ пати. Аналогно, во оделот b цифрата 4 е употребена $1+9+10+10+10+5+10=55$ пати. Во оделот c $1+9+10+10+10+10+10=60$ пати, додека пак во одделот d $1+9+10+10+10+10+10+5+10=75$ пати. И на крај во одделот e се користи $75+5+3=83$ пати и уште бидејќи цифрата 4 сме ја употребиле три пати на местото стотки, заклучуваме дека цифрата 4 е употребена вкупно $40+55+60+75+83=313$ пати.

5. Прецртај 6 цифри во низата

2012201220122012

така да десетцифрениот број кој се состои од преостанатите цифри биде:

а) најголемиот можен број,

б) најмалиот можен број.

Решение: а) За да се добие најголемиот можен број последователно од лево прецртуваме нули и единици и добиваме 2222222012 ;

б) За да се добие најмалиот можен број од лево прецртуваме до првата единица, а потоа прецртуваме четири двојки и добиваме: 1010122012

6. Шест карти се нумерирани со броевите: $309, 9, 41, 98, 5, 2$.
Кој е најмалиот број, кој може да се формира со редење на овие карти една до друга?
Решение: Најмалиот број е 2309415686. Напомена: картите 98 и 9 се вртат наопаку.

7. Во бројот 275486392839 изоставени се четири цифри, така што новодобиениот број е најмал. Потоа повторно се изоставени уште три цифри и е добиен најголем број. Кој е тој број?
Решение: Ако сакаме да остане најмалиот број, ќе постапиме на следниот начин: ако првата цифра е поголема од втората, ја изоставаме првата. Ако пак првата цифра не е поголема од втората, првата цифра ја оставаме и ги споредуваме втората и третата итн. Во дадениот број $2 < 7$ и двојката останува. Бидејќи е $7 > 5$, ја бришеме цифрата 7 и останува бројот 25486392839. Во новодобиениот број пак ги споредуваме првата и втората цифра, и гледаме дека $2 < 5$, па првата цифра ја оставаме. Понатаму, $5 > 4$, па ја изоставаме цифрата 5, итн. После 4 избришани цифри, најмалиот добиен број е 2439283. Од овој број , после изоставање на три цифри треба да го определиме најголемиот можен број. Постапката е слична како за определување на најмалиот, само што сега доколку првата цифра е помала од втората ја изоставаме првата. На крајот се добива дека бараниот број е 49839.

8. Со римски цифри запиши ги броевите од 95 до 105.?
Решение: Имаме:

$$XCV, XCVI, XCVII, XCVIII, XCVIX, C, CI, CII, CIII, CIV, CV$$

9. Премести само едно кибритче така да добиеш тоно равенство. Определи ги сите решенија.

Решение: Постојат четири решенија:

$$XIV + V = XIX, \quad XV + IV = XIX,$$
$$XVI + IV = XX, \quad XVI + V = XXI$$

10. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $363 + 435$,

б) $910 - 462$,

в) $62 + 8 \cdot 3$.

Решение: Имаме

а) $363 + 435 = 798$,

б) $910 - 462 = 448$,

в) $62 + 8 \cdot 3 = 62 + 24 = 86$.

11. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $8002 - 2008$,

б) $715 + 285 \cdot 3$

Решение. Имаме:

а) $8002 - 2008 = 5994$,

б) $715 + 285 \cdot 3 = 715 + 855 = 1570$.

12. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$12345 - (13456 - 504: 9 - 9876).$$

Решение: Имаме

$$\begin{aligned} 12345 - (13456 - 504: 9 - 9876) &= 12345 - (13456 - 56 - 9876) \\ &= 12345 - 3524 = 8821. \end{aligned}$$

13. Што е поголемо $72504: 36$ или $3292510: 1634$ и за колку?

Решение: Бидејќи

$$72504: 36 = 2014 \text{ и } 3292510: 1634 = 2015,$$

заклучуваме дека вториот количник е поголем од првиот и тоа за 1.

14. Ако е $x - 2012 = 3434$, пресметај:

а) $(x + 2000) - 2012$;

б) $(x - 2000) - 2012$;

в) $x - (2012 - 2000)$.

Решение. а) Имаме:

$$(x + 2000) - 2012 = (x - 2012) + 2000 = 3534 + 2000 = 5434.$$

б) Имаме:

$$(x - 2000) - 2012 = (x - 2012) - 2000 = 3434 - 2000 = 1434;$$

в)Имаме:
$x-(2012-2000)=(x-2012)+2000=3434+2000=5434$.

15. Пополни ги празните полиња во табелата.

+			
	467	546	
500	650		826
208			

Решение: Имаме:

+	**150**	**229**	**326**
317	467	546	**643**
500	650	**729**	826
208	**358**	**437**	**534**

16. Со која цифра завршува производот на првите 2011 непарни броеви?
Решение: Бидејќи меѓу непарните броеви се наоѓа и бројот 5, а производот на бројот 5 и било кој друг непарен број завршува со цифрата 5, заклучуваме дека бараниот производ завршува со цифрата 5.

17. Со која цифра завршува производот на 2010 седмици?
Решение: Забележуваме дека
$$7\cdot 7\cdot 7\cdot 7=2041,$$
односно дека производот на четири седмици завршува со цифрата 1. Производот $7\cdot 7\cdot \dots . .7$, можеме да го напишеме и како
$$(7\cdot 7\cdot 7\cdot 7)\cdot(7\cdot 7\cdot 7\cdot 7)\cdot \dots .(7\cdot 7\cdot 7\cdot 7)\cdot(7\cdot 7),$$
бидејки $2010=502\cdot 4+2$. Секоја заграда од по 4 седмици дава производ кој се завршува со 1, а последната заграда дава производ кој се завршува со цифрата 9. Конечно, последната цифра на бараниот производ е 9.

18. Да се определи последната цифра на производот
$$2^2\cdot 5^5\ \cdot 7^7.$$
Решение: Последната цифра на бројот 5^5 е 5. Производот на број кој завршува со цифрата 5 и било кој друг парен број завршува со цифрата 0. Бидејки е $2^2=4$ парен број, од претходното следи дека последната цифра на бараниот производ е 0.

19. Која петта цифра броејќи од десно се наоѓа во резултатот на следното множење: $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \dots . \cdot 29$?
Решение: Најдобро е да изброиме со колку нули завршува дадениот производ. Секоја нула се добива со множење на бројот 2 и бројот 5, односно на број делив со 2 и 5. Бидејќи $8 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 = 600000$, јасно производот завршува со 5 нули, па бараната цифра е 0.

20. При собирањето на броеви ученикот направил две грешки. Едната цифра на единиците 2 ја заменил со 9, и едната цифра на десетките 4 ја заменил со 7. Така тој го добил збирот 800. Определи го вистинскиот збир.
Решение: Заменувајќи ја цифрата на единица 2 со цифрата 9, добиваме збир кој е зголемен за 7, а заменувајќи ја цифрата на десетките 4 со цифрата 7, добиваме збир кој е зголемен уште за 30**.** Според тоа вистинскиот збир е за 37 помал од добиениот и е еднаков на $800 - 37 = 763$.

2. Бројни ребуси

Во задачите со дешифрирање ќе ги користиме четирите основни операции. Тоа се собирање, одземање, множење и делење. Проблемите кои овде ќе ги решаваме се состојат во откривање на арапските цифри на броеви, врз основа на некои точно извршени операции. Непознатите цифри ќе ги означуваме со (*) или букви. Во случаите кога користиме букви, ќе подразбираме дека на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви различни цифри.

21. Дешифрирај го собирањето: $A + BA + BBA = ABC$
Решение. Веднаш се воочува дека $A > B$. Попрецизно: $A = B + 1$. Имаме и дека $B + B = B$ или $B + B + 1 = B + 10$ или $B + B + 2 = B + 10$. Во првиот случај $B = 0$, но тоа не одговара на условите на задачата. Во вториот случај $B = 9$, а тоа е невозможно, бидејќи тогаш $A = 10$. Значи, $B = 8$, а $C = 7$. Па, зададеното собирање е: $9 + 89 + 889 = 987$.

22. Дешифрирај го следното множење:

$$\begin{array}{cccccc} P & O & P & \cdot & P & O & P \\ \hline & & & & P & O & P \\ & & & 0 & 0 & 0 & \\ & + & P & O & P & & \\ \hline & & P & O & T & O & P \end{array}$$

Решение: Имаме дека $POP \cdot P = POP$. Оттука е $P = 1$. Имаме уште и дека $POP \cdot O = 0$. Од тука $O = 0$. Сега останува уште $T = P + P = 2$. Па зададеното множење е: $101 \cdot 101 = 10201$.

23. Дешифрирај го собирањето:

$$\begin{array}{ccccc} & & S & A & N \\ + & S & T & A & N \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

Решение: Имаме дека $N + N = 6$ или $N + N = 16$. Ако $N + N = 16$, тогаш $\mathrm{A} + \mathrm{A} = 9$, а тоа е невозможно. Значи, $N = 3$. За A имаме два случаи: $\mathrm{A} = 0$ или $\mathrm{A} = 5$. Ако $\mathrm{A} = 0$, тогаш $S + T = 10$ и $S = 1$, па $T = 9$, заради што едното решение на поставениот проблем е $103 + 1903 = 2006$. Ако $\mathrm{A} = 5$, тогаш $S + T = 9$ и $S = 1$, а $T = 8$. Второто решение е: $153 + 1853 = 2006$.

24. Дешифрирај го собирањето:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & B \\ & A & A & A & A \\ + & A & A & A & A \\ \hline B & A & A & A & A \end{array}$$

Решение: Имаме

$$B + A + A = A + 20 \text{ или } B + A + A = A + 10.$$

Во првиот случај $B + A = 20$, а тоа е невозможно, бидејки во прашање се цифри. Ни останува вториот случај, во кој $B + A = 10$. Значи, $A + A + 1 = A + 10$, односно $A = 9$, па $B = 1$. Следиува решението: $1 + 9999 + 9999 = 19999$.

25. Дешифрирај го множењето: $*** \cdot * = 2010$.

Решение: Едноцифрените делители на бројот 2010 се $1, 2, 3, 5$ и 6. Броевите 1 и 2 не ги исполнуваат условите, па решенијата се:

$$670 \cdot 3 = 402 \cdot 5 = 335 \cdot 6 = 2010.$$

26. Определи го природниот број $JOVAN$ (на исти букви одговараат исти цифри, а на различни букви одговараат различни цифри) на кој збирот на цифрите е еднаков на 10, а збирот на тој број и бројот $NAVOJ$ е петцифрен број запишан со исти цифри.

Решение: Како збирот на цифрите на бројот $JOVAN$ е еднаков на 10 и како цифрите J, O, V, A, N различни, имаме дека единствената можност е $0+1+2+3+4=10$. Бараниот збир очигледно е 44444, па

$$JOVAN \in \{10243, 14203, 30241, 34201\}$$

27. Дешифрирај го собирањето $****+***=1998$ ако секој од непознатите собироци има иста вредност независно како го читаме од лево кон десно или од десно кон лево.

Решение: Се работи за собирање $ABBA+CDC=1998$. Значи $A=1$, па добиваме $1BB1+CDC=1998$. Од тука $C=7$. Тогаш $1BB1+7D7=1998$. Јасно, се воочува дека $B=2$ и $D=7$. Значи,

$$1221+777=1998.$$

28. Замени ги буквите со цифри, така да резултатот биде точен ако е познато дека $\overline{\mathrm{MM}}$ е број од четвртата десетка. Различните букви замени ги со различни цифри, а истите букви со исти цифри.

$$\begin{array}{rccc} & & M & M \\ + & & L & L \\ \hline & D & M & S \end{array}$$

Решение: Бројот $\overline{\mathrm{MM}}$ е од четвртата десетка, па затоа $\overline{\mathrm{MM}}=33$. Бидејки збирот на два двоцифрени броја е троцифрен број, тогаш е $L=7$ или $L=8$ или $L=9$. Со проверка добиваме дека $L=9$, па собирањето е $33+99=132$.

29. Со исти букви замени ги истите, а со различни букви различните цифри, така да собирањето

$$AA + A = BCD$$

биде точно. Пресметај ја вредноста на изразот: $A - B + C - D$

Решение: Бидејќи збирот на двоцифрен и едноцифрен број кој се пишува со иста цифра е троцифрен број, единствена можност е $\mathrm{A}=9$. Бидејќи $99+9=108$, тогаш

$$B=1, \mathrm{C}=0, D=8 \quad \text{и} \quad A-B+C-D=0$$

30. Истите букви замени ги со исти, а различните букви со различни цифри, така да собирањето

$$\overline{\mathrm{MC}} + \overline{\mathrm{MC}} + \overline{\mathrm{MC}} = \overline{D\mathrm{M}}$$

биде точно и при тоа во бројот $\overline{\mathrm{MC}}$ цифрата на десетки е поголема од цифрата на единици. Потоа, пресметај ја вредноста на изразот:

$$D + 2 \cdot \mathrm{M} + 3 \cdot \mathrm{C}\,.$$

Решение: Бидејќи е збирот на три исти двоцифрени збира двоцифрен број, тогаш *A* може да биде 1, 2 или 3, а како е $\mathrm{M} > \mathrm{C}$, тогаш *C* може да биде 0, 1 или 2, зависно од вредноста *M*. Бидејки $\mathrm{C} + \mathrm{C} + \mathrm{C} = \mathrm{M}$, тогаш единствена можност е $\mathrm{M} = 3$ и $\mathrm{C} = 1$, па е $D = 9$. Значи,

$$D + 2 \cdot \mathrm{M} + 3 \cdot \mathrm{C} = 18.$$

31. Замени ги буквите со цифри , така да собирањето биде точно. Различните букви замени ги со различни цифри.

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & D & E & F \\ + & G & H & I \\ \hline & 9 & 6 & 3 \end{array}$$

Решение: Задачата има повеќе решенија. Едно решение на дадениот ребус е:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 5 & 6 \\ & 3 & 2 & 7 \\ + & 4 & 8 & 0 \\ \hline & 9 & 6 & 3 \end{array}$$

32. Дешифрирај го собирањето, ако на исти букви одговараат исти цифри, а на различни букви различни цифри.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & A \\ & & & B & A \\ & & C & B & A \\ + & D & C & B & A \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 8 \end{array}$$

Решение: Јасно, A може да биде 2 или 7. Ако А е 2, тогаш при собирање на десетките не може да се добие 0, па затоа $A = 7$. Сега е јасно дека $B = 6, C = 4, D = 1$.

33. Дешифрирај го собирањето: $ML + ML = DMS$, ако исти букви соодветствуваат на исти цифри, а различни букви на различни цифри. Определи ги сите решенија.

Решение: Збирот на два двоцифрена броја е секогаш помал од 200, па $D = 1$. Бидејќи цифрата на десетките на собирокот е еднаква со цифрата на десетките на збирот, тоа е можно само ако постои пренос од местото на едници на собирокот (значи $L > 4$) и ако $M = 9$. Значи, $\overline{9L} + \overline{9L} = \overline{19S}$. Со проверка добиваме дека сите решенија се

95+95=190, 96+96=192, 97+97=194, 98+98=196.

34. Во збирот КУ + КУ + РИ + КУ истите букви претставуваат исти цифри, а различните букви различни цифри. Која е најголемата можна вредност на тој збир?

Решение: Цифрите на десетките во збировите треба да бидат најголеми можни, а бидејќи *К* се појавува три пати, најголемиот збир се добива за $\text{К} = 9$ и $\text{Р} = 8$. Исто така, бидејќи *У* се појавува три пати на местото на единиците, најголемиот збир се добива за $\text{У} = 7$ и $\text{И} = 6$. На тој начин добиваме дека најголемиот можен збир е

$$97 + 97 + 86 + 97 = 377.$$

35. Дешифрирајте го делењето:

$$\begin{array}{cccccccccc}
* & * & 8 & 4 & : & * & 2 & = & 6 & 2 \\
* & * & 2 & & & & & & & \\
\hline
 & & * & * & & & & & & \\
 & & * & * & & & & & & \\
\hline
 & & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Решение: Водејќи сметка за првата цифра на количникот, цифрата 6, можеме да ја дополниме дадената задача на следиот начин:

$$\begin{array}{cccccccccc}
* & * & 8 & 4 & : & * & 2 & = & 6 & 2 \\
* & * & 2 & & & & & & & \\
\hline
 & & 6 & 4 & & & & & & \\
 & & 6 & 4 & & & & & & \\
\hline
 & & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

а бидејќи $*\,2 \cdot 2 = 64$, тогаш дадениот количник е $**\,84: 32 = 62$, односно $1984: 32 = 62$

36. Дешифрирај го множењето:

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & 3 & * & \cdot & * & * & 4 \\
\hline
 & & & * & * & 2 & 4 \\
 & & 1 & * & * & * & \\
+ & 1 & * & * & * & & \\
\hline
 & * & 1 & * & * & * & *
\end{array}$$

Решение: Заради $* \cdot ** 4 = ** 24$ заклучуваме дека првиот множител е бројот 236. (Не може $1 \cdot ** 4$ да даде четирицифрен број). Бидејќи $6 \cdot ** 4 = ** 24$, имаме две можности: $236 \cdot * 04$ и $236 \cdot * 54$. Тоа што $3 \cdot * 04$ и $2 \cdot * 04$ е четирицифрен број со прва цифра 1, значи дека во овој случај $* 04$ ќе биде 504 или 604. Цифрата 1 на втората позиција во производот $(* 1 ****)$ го дава конечниот одговор, а тоа е производот $236 \cdot 504 = 118944$.
Случајот $236 \cdot * 54$ нема решение, бидејќи ниту еден од производите $236 \cdot 554$ и $236 \cdot 654$ не е од облик $* 1 ****$.

3. Формирање на броеви со помош на други броеви и аритметички операции

37. Со помош на броевите 1, 2, 3, 4 и 5 и аритметичките операции запиши го бројот 31 (секоја цифра мора да биде искористена точно по еднаш).
Решение: Имаме
$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} + 1 = 31.$$

38. Со помош на аритметички оперции и броевите 1, 2 и 3 и со најмал број на чекори запиши го бројот 35.
Решение: Имаме
$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 35.$$

39. Со помош на броевите $1, 2, 4, 8, 16$ и аритметичките операции запиши го бројот 58.
Решение: Имаме
$$16 \cdot 4 - (8 - 2) \cdot 1 = 58$$

40. Колку знаци плус и меѓу кои броеви треба да се додадат за да од бројот 123456789 се добие бројот 99?
*Решение:*Имаме
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 99.$$

41. Користејќи го само бројот 2 и аритметичките операции, претстави го бројот 58.

*Решение:*Имаме

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2-(2+2+2)=64-6=58.$$

42. Користејќи ги сите броеви од $1\dots.n$ и аритметичките операции на најкраток можен начин претстави го бројот 80000. Колку изнесува најмалото n?

Решение:

$$\frac{(1+9)\cdot(2+8)\cdot(3+7)\cdot(4+6)\cdot 10\cdot(14-12+13-11)}{5}=80000.$$

Значи, најмалиот број кој ги задоволува условите на задачата е 14.

43. Користејќи ги наизменично броевите 2 и 3, како и аритметичките операции и заградите, запиши го бројот 516.

*Решение:*Имаме

$$((2\cdot 3-2)\cdot 3+2)\cdot(2\cdot 3+2\cdot 3)\cdot 3+2\cdot 3\cdot 2=516.$$

44. Користејќи ги броевите $1,3,5,7\dots\dots$, (броевите мора да се користат по истиот редослед) на најкраток начин претстави го бројот 144.

Решение: Имаме

$$(1+3)\cdot(5\cdot 7)-9+11-13+15=144.$$

45. На кој начин треба да се пермутираат (преместат) цифрите во броевите во изразот $94\cdot 67\cdot 58$ за да неговата вредност биде најголема?

Решение: Логично е поголемите цифри од секој од броевите да бидат цифри на десетките, односно $94\cdot 85\cdot 76=607240$.

46. Кој е најголемиот број кој може да се добие со помош на аритметичките операции и цифрите 0,1,2,....9, ако секоја од цифрите се употреби точно по еднаш?

Решение: Тоа е бројот 9876543210. Овој број е поголем од сите кои може да се добијат со помош на аритметичките операции, затоа што додавањето цифри на крајот од бројот е еквивалентно на множење со 10 и додавање на дадената цифра. Од друга страна , множењето со даден број би придонело резултатот да е помал од множењето со 10, бидејќи секоја од овие цифри е помала од 10.

47. Дадени се броевите 192, 64, 32, 16 и 8. Користејќи ги овие броеви и аритметичките операции собирање, одземање, множење и делење, може да се формираат различни изрази чии вредности се природни броеви. Кој е:

а) најмал,

б) најголем природен број

кој може да се добие на тој начин? Секој од дадените броеви мора да се користи само еднаш и секоја аритметичка операција само еднаш. Не е дозволено да се употребуваат загради.

Решение: Имаме:

а) $192:64 \cdot 8 + 16 - 32 = 8$

б) $192 \cdot 64 + 32 - 16:8 = 12318$.

48. Броевите 7, 24 и 336 со помош на четири цифри 3 и некои аритметички операции може да се запишат на следниот начин:

$$7 = 3 + 3 + 3:3, \quad 24 = 33 - 3 \cdot 3, \quad 336 = 333 + 3$$

а) Користејќи четири бројки 3 на сличен начин запиши го бројот 39.

б) Кој е најголемиот број од третата стотка кој на сличен начин може да биде запишан со помош на четири цифри 3?

Решение. а) Имаме

$$39 = 33 + 6 = 33 + 3 + 3 .$$

б) Бидејќи

$$33 \cdot 100 = 330 > 300 > 297 = 33 \cdot 9 = 33 \cdot 3 \cdot 3$$

заклучуваме дека бараниот најголем број е 297.

4. Деливост

При решавањето на задачите од деливост на целите броеви, најчесто покрај општите критериуми ги користиме посебните критериуми, од кои најмногу се среќаваме со следниве критериуми:

1) Еден број е делив со 2 ако и само ако е парен.
2) Еден број е делив со 3, ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3.
3) Еден број е делив со 9, ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 9.
4) Еден број е делив со 4, ако и само ако неговиот двоцифрен завршеток е делив со 4.
5) Еден број е делив со 5, ако и само ако неговата последна цифра е 0 или 5.

6) Еден број е делив со 10, ако и само ако неговата последна цифра е 0.
7) Еден број е делив со 8, ако и само ако неговиот троцифрен завршеток е делив со 8.
8) Еден број е делив со 11, ако и само ако разликата од збирот на цифрите на непарните позиции и збирот на цифрите на парните позиции е делива со 11.
9) Еден број е делив со 25, ако и само ако неговиот двоцифрен завршеток е делив со 25.

49. Докажи дека збирот од три последователни природни броеви од кои само еден е парен е секогаш делив со 6.

Решение: Нека се тоа броевите $n, n+1, n+2$. Збирот на овие броеви е $3n+3$, што значи збирот е делив со три. Исто така збирот мора да биде парен број, бидејќи имаме два непарни броја, кои даваат збир парен број, и кога на тој збир ќе додадеме уште еден парен број, повторно добиваме збир парен број. Тогаш овој збир е делив со 2 и со 3, што значи дека мора да биде делив и со 6.

50. Докажи дека производот на четири последователни природни броја е секогаш делив со 24.

Решение: Меѓу нив мора да има два парни броја. Но кога имаме два последователни парни броеви, еден од нив е секогаш делив со 4. Тоа значи дека производот на овие четири броја е сигурно делив со 8. Исто така, еден од овие 4 броеви мора да биде делив со три, помеѓу 3 последователни природни броеви еден секогаш мора да биде делив со 3. Остатоците што ги добиваме при делење со 3 се 1 или 2, а тоа значи од кој број и да започнеме еден од следните броеви ќе биде делив со 3. Значи, производот мора да биде делив со 24.

51. Определи ја цифрата a така што изразот $17 \cdot \overline{16a} + 2010 \cdot 2012$ е делив со 12.

Решение: Еден број е делив со 12 ако е делив и со 3 и со 4. Број 2010 е делив со 3 и 2012 е делив со 4, па така производот $2010 \cdot 2012$ е делив со 12. Ова значи дека изразот $17 \cdot \overline{16a}$ исто така мора да биде делив со 12. За да овој број биде делив со 4, ги имаме следните можности за a, $a \in \{0,4,8\}$. За $a = 0$, имаме $1+6+0=7$, што не е деливо со 3. За $a = 4$, имаме $1+6+4=11$, што не е деливо со 3. За $a = 8$, имаме

$1+6+8=15$, што е деливо со 3, што значи изразот е делив со 12. Значи $a=8$.

52. Определете го количникот и остатокот при делење на изразот

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+75$$

со бројот 35.

Решение: Овој израз може да се запише како $35\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+2\cdot 35+5=35\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+2)+5$. Од тука гледаме дека остатокот е 5, а количникот е

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+2=13685762.$$

53. Производ на пет последователни природни броеви е $\overline{95*4*}$. Кои се тие броеви?

Решение: Од пет последователни природни броеви, барем еден мора да биде делив со 2, барем еден со 3 и барем еден со 5, па производот на тие пет броеви мора да биде делив со 10 и со 3. Заради тоа цифрата на единици мора да биде 0. Ако цифрата на стотките ја обележиме со a, тогаш збирот $9+5+a+4+0$ мора да биде делив со 3. Следи дека $a\in\{0,3,6,9\}$. Со директна проверка на секое a, следи дека единствено за $a=0$ добиен е производ од пет последователни природни броеви и тоа: $95040=8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12$.

54. Природниот број n при делење со 6 дава остатокот 4, и при делење со 15 остаток 7. Колку е остатокот при делење на бројот n со 30?

Решение: Од условите на задачата имаме $n=6a+4$, $n=15b+7$, $a,b\in\mathbb{N}_0$.. Треба да го определиме $r\in\mathbb{N}_0$, така што $n=30z+r$, $z\in\mathbb{N}_0$. Ако првиот израз го помножиме со 5, а вториот со 2 и потоа ги одземеме добиваме дека $3n=30(a-b)+6$, од каде $n=10(a-b)+2$. Значи, последната цифра на r е 2 и уште $r<30$, што значи $r=2$ или $r=12$ или $r=22$. Нека $r=2$. Од тоа што $30z+2=15b+7$, односно $5=30z-15b$, десната страна на оваа равенка е делива со 15, а левата не. Значи оваа можност ја исклучуваме. Ако $r=12$, тогаш $n=30z+12$, па добиваме дека бројот n е делив со 6, што е контрадикција со условот на задачата. Ни останува уште можноста $r=22$. За да постои таков број n земаме $z=1$, од каде $n=52$, ги исполнува сите услови.

55. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 72 и збирот на неговите цифри е 72.

Решение: За бројот да биде делив со 72, мора да биде делив со 8 и со 9. Деливоста со 9 е задоволена, бидејќи збирот на неговите цифри е 72, а тоа е деливо со 9. Значи ни останува уште деливоста со 8. Бидејќи сакаме да имаме што е можно помалку цифри (така бројот ќе биде помал), ги разгледуваме троцифрените завршетоци со најголеми цифри, кои се деливи со 8. Последната цифра секако е парна, а бидејќи треба да е најголема заклучуваме дека тоа е цифрата 8. Најголемата вредност на претпоследната цифра е 9, но тогаш двоцифрениот завршеток е 98, број кој не е делив со 4, па затоа не е делив ниту со 8. Заради тоа двоцифрениот завршеток е 88. Аналогно, бидејќи 988 не е број кој е делив со 8, останува дека трицифрениот завршеток е 888. Заради тоа, збирот на останатите цифри од бараниот број е 48, а бидејќи $48 = 9 \cdot 5 + 3$, бараниот број е 399999888.

56. Определи го најмалиот четирицифрени број чиј производ на цифри е 180.

Решение: Со разложување на бројот 180 на прости множители добиваме $180 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Изборот на цифри за најмал број мора да биде од множеството $\{1,4,5,9\}$ или $\{1,5,6,6\}$. Бројот 1459 не е делив со 9 (збирот на неговите цифри е 19), бараниот број е 1566.

57. Даден е седумцифрениот број 9874512.

а) Во записот на тој број, изоставете една цифра така што новодобиениот број ќе биде делив со 11.

б) Во записот за новодобиениот шестцифрен број, заменете ги местата на цифрите така што ќе формирате најмал број кој е делив со 25.

Решение: а) Со изоставување на една цифра одејќи одлево–надесно редоследно се добиваат броевите: 874512, 974512, 984512, 987512, 987412, 987452 и 987451. Со непосредна проверка се покажува дека од добиените броеви само бројот 974512 е делив со 11. Навистина

$$9 - 7 + 4 - 5 + 1 - 2 = 0,$$

т.е разликата на збиротвите на броевите запишани на прните и непарните места е делива со 11.

б) Двоцифрениот завршеток на бараниот број мора да биде 25. За да бројот биде најмал останатите четири цифри мора да се подредат од лево на десно во растечки редослед почнувајќи од најмалата. Според тоа, бараниот број е 147925.

58. Пет природни броеви се напишани во круг, така што ниту едни два соседни и ниту едни три соседни броја не даваат збир кој е делив со 3. Колку од тие пет броеви се деливи со 3?

Решение: Броевите при делење со три даваат остаток 0, 1 или 2. Кога во кругот би имало 3 или повеќе броеви кои се деливи со три, два од нив сигурно би морале да бидат соседни, па и збирот на тие два соседни броја ќе биде делив со3. Значи има 0, 1 или 2 броја од кругот кои се деливи со 3. Ако во кругот нема ниту еден број делив со 3, тогаш не можеме да ги ставиме заедно броевите што даваат остаток 1 и 2, бидејќи тие два броја како соседни би дале збир делив со 3. Значи сите броеви во кругот при делење со 3 треба да даваат исти остаток. Но, збирот на три броја кои при делење со 3 даваат ист остаток е број делив со 3.

Доколку еден од броевите е делив со 3, повторно не можеме да ги споиме броевите кои при делење со 3 даваат остатокот 1 и 2, бидејќи нивниот збир би бил број делив со 3. Ако пак секој од нив даде ист остаток при делење со 3, повторно ќе имаме три соседни со ист остаток, кои кога би се собрале даваат збир делив со 3.

Значи, одговорот е 2, и навистина можеме да направиме круг, примерот е $3-2-2-3-2$, само поврзете ги првите и последните и направете круг.

59. Кој непарен број поголем од 501 и помал од 599 е делив и со 5 и со 9?

Решение: Најмалиот број делив и со 5 и со 9 е: $5 \cdot 9 = 45$, а бидејќи:

$$10 \cdot 45 = 450, 11 \cdot 45 = 495, 12 \cdot 45 = 540,$$
$$13 \cdot 45 = 585, 14 \cdot 45 = 630,$$

добиваме дека бараниот број е 585.

60. Дешифрирај го множењето:

$$*7 \ \cdot \ 30 \ = *0**.$$

Решение: Последната цифра на производот е 0. Понатаму дешифрираме $*7 \cdot 3 = *0*$. Последната цифра на овој производ е 1. Бројот $\overline{*01}$ треба да е делив со 3 и количникот да биде двоцифрен број $\overline{*7}$. Овие барања ги задоволува бројот 201. Значи, решението е

$$67 \cdot 30 = 2010.$$

61. На бројот 2012 допиши од левата и од десната страна една иста цифра, така да добиениот шестцифрен број биде делив со 12.

Решение: Нека од левата и од десната страна на бројот 2012 е допишана цифрата a. За да бараниот шестцифрен број $\overline{a2012a}$ биде делив со 12, тој мора да биде делив со 3 и со 4. Заради деливоста со 4, неговиот двоцифрен завршеток може да биде само 24 или 28, па како можни решенија се броевите 420124 и 820128. Збирот на цифрите од првиот број е 13 и не е делив со 3. Бројот 820128 има збир на цифри 21 и делив е со 3, па единствено решение е бројот 820128.

62. Дешифрирајте го следново множење:

$$*4*\cdot 15 = 3*9*.$$

Решение: Очигледно е дека производот мора да биде делив со 15, односно со 3 и со 5. Знаеме дека бројот е делив со 3 ако збирот на неговите цифри е делив со 3, а делив е со 5 ако последната негова цифра е 0 или 5. Затоа ги разгледуваме и двата случаи. Првиот случај кога последната цифра на производот е 0, односно производот има облик $3*90$. Овој број мора да биде делив со 3, т.е. $3|3+9+0+*$. Од тука вредностите што може да ги прими $*$ се $0,3,6,9$ односно можни вредности за производот се: $3090, 3390, 3690, 3990$. При делење со 15 ги даваат следниве количници: $206, 226, 246, 266$, соодветно. Поради условот втората цифра во првиот множител да биде 4, заклучуваме дека единствено решение е 246. Вториот случај кога последната цифра на производот еднаков на 5 се работи слично. Производот е од облик $3*95$, па поради условот производот да е делив со 3, $*$ може да ги прими следните вредности: 1,4,7 т.е. можните вредности на производот се: $3195, 3495, 3795$. Овие броевите при делење со 15 даваат количници: $213, 233, 253$, соодветно. Ниту еден од овие броеви не го исполнува условот на задачата втората цифра да биде 4. Конечно единствено решение на задачата е $246\cdot 15 = 3690$.

5. Прости броеви

Во основното образование посебно внимание се посветува на теоријата на броеви, при што покрај деливоста се решаваат задачи за прости и сложени броеви. Притоа најчесто се доволни следниве предзнаења:

1) Броеви кои имаат точно два делители се нарекуваат прости броеви (деливи се само со бројот 1 и со самиот себе).

2) Броевите кои имаат повеќе од два делители се нарекуваат сложени.
3) Бројот 1 не е ниту прост, ниту сложен број.

63. Колку броеви може да се напишат со помош на елементите од множеството M кое го сочинуваат простите делители на бројот 2310, ако бараните броеви содржат по 2 прости делители?

Решение: Множеството прости делители на бројот 2310 е

$$M=\{2, 3, 5, 7, 11\}.$$

Бараните броеви се:

$6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$, $14 = 2 \cdot 7$,
$22 = 2 \cdot 11$, $15 = 3 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$,
$33 = 3 \cdot 11$, $35 = 5 \cdot 7$, $55 = 5 \cdot 11$,
$77 = 7 \cdot 11$.

64. За кои прости броеви p и природни броеви n важи равенството $\frac{1}{p} = \frac{n}{2010}$?

Решение: Бидејќи $pn = 2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, бројот p може да биде $2, 3, 5$ или 67. За $p = 2$, вредноста на $n = 1005$, за $p = 3$ добиваме дека $n = 670$, за $p = 5$, $n = 402$, и за $p = 67$, $n = 30$.

65. Докажете дека секој прост број поголем од 5 може да се запише во облик $6k + 1$ или $6k + 5$, каде што k е природен број.

Решение: Најмалиот број во бараниот облик е 7. Ги разгледуваме остатоците што бројот ги дава при делење со 6. Секој природен број поголем од 5 може да се запише во еден од следните облици:

$$6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5.$$

Сите броеви од облик $6k$ се делат со 6 и затоа се сложени. Сите броеви од облик $6k + 2$ се парни, и поголеми од 2, така што тие се сложени. Сите броеви од облик $6k + 3$ се деливи со 3, значи се сложени. Сите броеви од облик $6k + 4$ се парни и поголеми од 2, што значи дека се сложени. Од тука следува дека сите прости броеви поголеми од 5 можеме да ги запишеме во облик $6k + 1$ или $6k + 5$.

66. Запишете ги сите прости броеви p за кои $3p + 1$ е исто така прост број.

Решение: Ако p е прост и непарен број, тогаш $3p + 1$ е парен, поголем од 2, од каде следува дека е сложен број.

Значи p мора да е парен и прост, односно $p = 2$. Тогаш $3p + 1 = 7$ е прост број.

67. Марко има две карти A и B со прости броеви. Последната цифра од збирот $A^2 + B^2$ е еднаква на 9. Определи ги вредностите на A и B!

Решение: Ако збирот $A^2 + B^2$ на два броја завршува со 9, тогаш еден од собироците е парен, а другиот непарен. Квадратот на кој било непарен број е непарен, а на парен број е парен, па заклучуваме дека парен квадрат е всушност квадратот на бројот 2 (бидејќи нема други парни прости броеви). Значи или $A = 2$ или $B = 2$. Да претпоставиме дека $A = 2$. Заради тоа $A^2 = 4$, од каде што заклучуваме дека последната цифра на B^2 мора да биде 5. Значи, B^2 мора да биде делив со 5, односно B мора да биде делив со 5. Бидејќи B е прост број, заклучуваме дека $B = 5$. Конечно, $A = 2, B = 5$, и $A^2 + B^2 = 29$.

68. Ана има три карти со различни броеви. Заклучила дека од нив може да се состават 6 различни трицифрени прости броеви. Докажи дека тоа е невозможно, односно дека заклучокот на Ана е погрешен!

Решение: Ако последната цифра од еден трицифрен број е парна, тогаш тоа е број делив со 2, така што не може да биде прост. Оттука заклучуваме дека сите цифри на Ана се непарни. Исто така, заклучуваме дека на нејзините карти не може да биде бројот 5, бидејќи трицифрен број кој завршува на 5 е делив со 5, што значи дека не може да биде прост. Од тука заклучуваме дека, на картичките на Ана се броевите 1, 3, 7 или 9. Меѓутоа, независно од тоа кои три цифри ги имала, од ниту едни не можела да состави шест прости трицифрени броеви, бидејќи:

Ако има $1, 3, 7$, тогаш $371 = 53 \cdot 7$;

Ако има $1, 3, 9$, тогаш $319 = 29 \cdot 11$;

Ако има $1, 7, 9$, тогаш $791 = 113 \cdot 7$;

Ако има $3, 7, 9$, тогаш $793 = 13 \cdot 61$;

69. Дали постои прост број A таков што и броевите $\mathrm{A} + 10$ и $\mathrm{A} + 14$ се исто така се прости броеви? Запиши ги сите можни решенија!

Решение: Очигледно A не е 2, бидејќи тогаш овие броеви би биле парни.

Ако $A = 3, A + 10 = 13$, и $A + 14 = 17$, што е едно решение.

Ако $A = 5$, тогаш $A + 10 = 15$, па оваа решение го отфрламе.

Ако $A > 5$ и уште ја искористиме задачата 64 имаме: ако $\mathrm{A} = 6\mathrm{k} + 1$, тогаш $A + 14 = 6k + 15$, а тоа е број делив со 3, така што не може да биде прост број. Ако $A = 6k + 5$, тогаш $\mathrm{A} + 10 = 6\mathrm{k} + 15$, па и во овој случај тој број е делив со 3 што исто така неможе да биде прост број. Значи, единствениот решение е $A = 3$.

70. Броевите 3, 5 и 7 се последователни непарни природни броеви, кои се прости. Дали постојат уште некои три последователни непарни броеви кои се исто така прости?

Решение: Такви броеви не постојат! Да го докажеме тврдењето: Нека претпоставиме дека постојат три последователни непарни броеви, кои ги исполнуваат условите на задачата и нека ги означиме со $A, A + 2$ и $A + 4$. Бројот A не е делив со 3 бидејќи е прост. Затоа, при делење со 3 тој дава остаток 1 или остаток 2. Оттука можеме да ги запишеме или како $A = 3k + 1$ или $A = 3k + 2$ каде што k е природен број.

Ако $\mathrm{A} = 3\mathrm{k} + 1$, тогаш $\mathrm{A} + 2$ е делив со 3, што значи не е прост број.

Ако $\mathrm{A} = 3\mathrm{k} + 2$, тогаш $\mathrm{A} + 4$ е исто така делив со 3, што повторно значи дека не е прост број. Значи, не постојат други такви броеви.

71. Определи ги сите прости броеви за кои е задоволено равенството $p(264q + 4r) = 2008$

Решение: Имаме

$$4p(66q + r) = 2008, \; p(66q + r) = 502 = 2 \cdot 251.$$

Заради тоа што $66q + r > 2$ имаме дека $p = 2$, а од тоа што $66q < 251$, имаме $q < 4$, што значи $q = 3$, или $q = 2$. Ако

$$q = 2, r = 119 = 7 \cdot 17,$$

па ова не може да биде решение. Ако q = 3, тогаш r = 53, што е решение на задачата.

72. Ако a и b се прости броеви поголеми од 3 и $a > b$, докажи дека производот $(a - b)(a + b)$ е делив со 12.

Решение: Бидејќи простите броеви поголеми од 3 се непарни, заклучуваме дека и нивната разлика и збирот (по парови), се парни броеви, па производот $(a - b)(a + b)$ е делив со 4. Броевите a и b при делење со 3 можат да дадат остатоци 1 и 2. Ако при делење со 3 броевите a и b даваат исти остатоци, тогаш нивната разлика е делива со 3, а ако даваат различни остатоци, тогаш нивниот збир е делив со 3. Значи, производот $(a + b)(a - b)$е делив со 3, со што тврдењето е докажано.

73. Определи прости броеви p и q такви што $3p+5q=67$.
Решение: Ако и p и q се парни броеви, тогаш и $3p$ и $5q$ би биле парни броеви, па тогаш и $3p+5q$ би бил исто така парен број. Од тоа што бројот 67 е непарен број, заклучуваме дека p и q се со различна парност. За $p=2$ важи $6+5q=67$, или $5q=61$, така што равенката нема решение. За $q=2$ важи $3p+10=67$, или $3p=57$, значи $p=19$.
Бараните прости броеви се $p=19$ и $q=2$.

74. Одреди го најмалиот природен број чиј призвод на цифрите е 6048.
Решение: Бројот 6048 го разложуваме на прости множители. Имаме
$$6048=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot7\,.$$
Бидејќи се бара најмалиот број, може да ги групираме и тоа:
$$2\cdot2\cdot2=8 \text{ и } 3\cdot3=9\,.$$
Преостануваат делителите 2, 2 и 3 од кои можеме да ги формираме броевите 2 и 6 или 4 и 3. Најмалиот број чиј производ на броевите 6048 е 26789

75. Дешифрирај го собирањето ако цифрите P, Q, R и S се различни прости броеви.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & P \\ & & & P & Q \\ & & P & Q & R \\ + & P & Q & R & S \\ \hline & * & S & Q & P \end{array}$$

Решение: Цифрите P, Q, R и S може да имаат вредности 2, 3, 5 и 7. Бидејќи збирот на последните цифри на собироците е еднаков на P, а $2+3+5+7=17$, тогаш $P=7$. Бидејќи од позицијата на единици постои премин од една десетка, имаме дека $8+Q+R=Q$, т.е. $8+R=10$, од каде $R=2$. Бидејќи од позицијата на десетките имаме премин од една стотка, тогаш добиваме дека $8+Q=S$, па заклучуваме дека $Q=5$ и $S=3$.

76. Испитај дали бројот $2009\cdot2011\cdot2013+2008\cdot2010\cdot2012$ е прост или сложен.
Решение: Бидејќи $2013=3\cdot671$ и $2010=3\cdot670$, заклучуваме дека дадениот број може да се запише во облик

$$3\cdot(2009\cdot 2011\cdot 671+2008\cdot 670\cdot 2012),$$

па заклучуваме дека тој е сложен.

77. Дешифрирај го изразот: $\overline{\mathrm{AAA}}=\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{AB}}$. На различни букви одговараат различни цифри, а на исти букви исти цифри.

Решение. Имаме

$$\overline{\mathrm{AAA}}=\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{AB}},$$
$$\mathrm{A}\cdot 111=\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{AB}}$$
$$111=\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\,.$$

Бидејќи $111=3\cdot 37$, добиваме $\mathrm{A}=3$ и $\mathrm{B}=7$, па $\frac{333}{37}=3\cdot 3$

78. Под секоја колона е напишан збирот на броевите од таа колона, а покрај секоја редица производот на броевите од таа редица (види табела). На ист начин пополни ја десната табела.

2	3	2	12
4	2	1	8
3	6	2	36
9	11	5	

			4
			15
			18
8	9	5	

Решение: Едно од можните пополнувања е дадено во долната табела:

2	1	2	4
3	5	1	15
3	3	2	18
8	9	5	

6. Најголем заеднички делител и најмал заеднички содржател

За решавањето на задачите од овој дел потребни се следниве поими.

1) Најголем заеднички делител на природните броеви a и b е најголемиот природен број со кој истовремено се деливи a и b.

2) Најмал заеднички содржател на природните броевиaи b е најмалиот природен број кој истовремено е делив со a и b.
3) Природните броеви a и b се взаемно прости ако и само ако НЗД $(a, b) = 1$.

79. Определи ги броевите a и b, ако НЗД $(a, b) = 5$ и НЗС $(a, b) = 50$.
Решение: Бидејќи НЗД $(a, b) = 5$ следува дека $a = 5k,\ b = 5l$, каде k и l се взаемно прости броеви, т.е. НЗД $(k, l) = 1$
Од тоа што НЗС$(k, l) = \frac{50}{5} = 10$, и kи l се взаемно прости броеви, заклучуваме дека $kl = 10$.
За овие два броја имаме две можности: (5,2) и (10,1), па имаме две конечни решенија (25,10) и (50,5).

80. Определи го најголемиот заеднички делител на најмалиот и најголемиот непарен четирицифрен број.
Решение: Најмалиот непарен четирицифрен број е 1 001, а најголемиот 9 999. Бидејќи

$$1\,001 = 7 \cdot 11 \cdot 13, \text{ а } 9\,999 = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101,$$

заклучуваме дека

$$\text{НЗД}(1\,001, 9\,999) = 11.$$

81. НЗД на два природни броја е 12, а нивниот НЗС е 672. Кои се тие броеви, ако се знае дека помалиот од нив е делив со 7, а поголемиот не?
Решение: Нека a и b се бараните броеви. Од тоа што $НЗС(a, b) = 12$, имаме $a = 12x,\ b = 12y$, при што $НЗД(x, y) = 1$ и нека $x < y$. Користејќи дека

$$НЗД\,(a, b) \cdot НЗС\,(a, b) = ab,$$

добиваме дека

$$12 \cdot 672 = 12x \cdot 12y.$$

Оттука $x \cdot y = 56$. Бидејќи $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$, ги имаме следните можности: $(x, y) = (1{,}56), (2{,}28), (4{,}14), (7{,}8)$. Од нив, само парот (7.8) го исполнува условот помалиот број е делив со 7 и $НЗД(x, y) = 1$. Заради тоа $x = 7, y = 8$, значи $a = 84$ и $b = 96$.

82. Производот на два природни броја е 720, а нивниот најмал заеднички содржател е 180. Кои се тие броеви?
Решение: Бидејќи најмалиот заеднички содржател на бараните броеви е $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, може да се заклучи дека ниту еден од нив не е де-

лив со прост број различен од $2, 3, 5$, како и дека еден од нив е делив со 2^2, еден со 3^2 и еден со 5. Бидејќи производот им е $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, двата броја мора да бидат деливи со 2^2 додека еден од броевите не смее да биде делив со 3 и еден од броевите не смее да биде делив со 5. Значи, имаме два пара кои ги задоволуваат условите на задачата: $(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^2)$ и $(2^2 \cdot 3^2, 5 \cdot 2^2)$, односно (180,4) и (36,20) .

83. Збирот на два природни броја е 224, а нивниот најголем заеднички делител е 56. Кои се тие броеви?

Решение: Овие броеви ги претставуваме како $56k$ и $56l$, $\text{НЗД}(k, l) = 1$

$$56k + 56l = 224$$
$$56(k + l) = 22$$
$$k + l = 4$$

Постојат два пара на природни броеви кои го задоволуваат ова равенство $(3, 1)$ и $(2, 2)$. Меѓутоа, бидејќи k и l мора да бидат заемно прости, ја отфрламе втората можност, па постои само едно решение 56 и 168.

84. Мирко купил неколку моливи по 27 денари и неколку тетратки по 72 денари. Продавачот за тоа му наплатил 1234 денари.

Како Мирко знаел дека продавачот погрешил?

Решение: Од условот на задачата можеме да го напишеме равенството

$$27x + 72y = 1234.$$

Бидејќи $\text{НЗД}(27,72) = 9$, важи:

$$3 \cdot 9x + 8 \cdot 9y = 1234$$
$$9 \cdot (3x + 8y) = 1234,$$

заклучуваме дека 1234 мора да е деливо со 9, што не е точно. Значи, равенството кое сме го напишале на почетокот не е точно, што знаи дека продавачот погрешил.

85. Докажи дека $\text{НЗД}(a, b) \cdot \text{НЗС}(a, b) = a \cdot b$

Решение: Нека $s = \text{НЗС}(a, b)$. Тогаш $s = a \cdot k$, за некој природен број k. Бидејќи s е деливо со b, бројот $\frac{a \cdot k}{b}$ мора да биде природен. Нека $\text{НЗД}(a, b) = d$. Сега можеме да запишеме дека $a = n \cdot d$ и $b = m \cdot d$ за некои заемно прости природни броеви m и n. Ако ова го замениме во претходниот израз, ќе добиеме дека $\frac{nkd}{md} = \frac{nk}{m} \in N$. Бидејќи m и n се заемно прости, k мора да биде делив со m, односно $k = mt$, $t \in N$.

Значи,

$$S = ak = amt = a\frac{b}{d}t = \frac{ab}{d}t.$$

Од друга страна, секој број со облик $\frac{ab}{d}t$ ги содржи a и b. Најмалиот заеднички делител се добива кога $\mathrm{t} = 1$ и е еднаков на $s = \frac{ab}{d}$.

86. Ако d е заеднички делител на броевите a и b, да се докаже дека d е исто така заеднички делител и на броевите $a+\ b$ и $a-\ b$.

Решение: Бидејки d ги дели броевите a и b можеме да запишеме:

$$a = k \cdot d \text{ и } b = l \cdot d$$

$$a + b = k \cdot d + l \cdot d = d \cdot (k\ +\ l)$$

$$a - b = k \cdot d - l \cdot d = d \cdot (k\ - l)$$

Значи, d исто така ги дели и броевите $a + b$ и $a - b$

87. Ако е $a = b \cdot k + c$, да се докаже дека НЗД$(a, b) =$ НЗД(b, c), односно, НЗД на броевите a и b е еднаков на НЗД на бројот b и остатокот при делењето на бројот a и бројот b.

Решение: Нека НЗД$(a, b) = d_1$ и НЗД$(b, c) = d_2$. Сега важи:

$$k \cdot d_1 = l \cdot d_1 + c$$

$$c = d_1 \cdot (k - l),$$

d_1 го дели c па е d_1 заеднички делител за b и c .Оттука заклучуваме дека d_1 го дели d_2 бидејќи секој заеднички делител на двата броја ги дели нивниот најголем заеднички делител.

Слично, $a = p \cdot d_2 + q \cdot d_2 = d_2 \cdot (p\ +\ q)$. Сега заклучуваме дека d_2 го дели a, затоа d_2 е заеднички делител за a и b, па d_2 го дели нивниот најголем заеднички делител d_1.

Бидејки d_1 го дели d_2 и d_2го дели d_1, тие мора да бидат еднакви.

88. Докажи дека за $n \in \mathbb{N}$, дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати.

Решение: Бидејќи

НЗД$(21n\,4, 14n + 3) =$ НЗД$(14n + 3, 7n + 1) =$ НЗД$(7n + 1, 1) = 1$

дропката не може да се скрати.

89. Определи го најмалиот природен број x кој при делење со 3 дава остаток 2, при делење со 7 остаток 6 и при делење со 8 остаток 3.

Решение: Бројот $x + 1$ ќе биде делив со 3 и со 7 , а ќе дава остаток 4 при делење со 8. Секој број од облик $8k + 4$ е делив со 4, па затоа

$$x = \text{НЗС}(3, 4, 7) = 84.$$

90. Разликата на два непарна броја еднаква е на 2^n . Да се докаже дека тие броеви се заемно прости.

Решение: НЗД на овие броеви мора да ја дели нивната разлика, па мора да го дели 2^n. Меѓутоа, бидејки овие два броја се непарни и нивниот НЗД мора да биде непарен број. Единствен таков број кој го дели 2^n е 1, па заклучуваме дека броевите се заемно прости.

7. Диофантови равенки

При изучување на теоријата на броеви, неминовно е решавањето на Диофантовите равенки, како што е равенката со чија помош се решава следнава задача:

Раскажувајќи ги своите приказни 1001 *ноќ, Шехерезада поставила древен математички проблем. Имено, се поставува прашањето колку ноќи Шехерезада би раскажувала* 1001 *бајка, ако во текот на некои ноќи таа раскажувала по* 5 *бајки, а во текот на другите по* 3 *бајки? Што мислите, колку е најмногу, а колку најмалку ноќи би и биле потребни на Шехерезада да ги раскаже сите* 1001 *бајка?*

Овој проблем може да се моделира со равенката $5x + 3y = 1001$, каде што x е бројот на ноќите во кои Шехерезада раскажува по 5 бајки, а y број на ноќите во кои Шехерезада раскажува по 3 бајки. Наша цел е да се реши оваа равенка, но овој пат имаме само една равенка со две непознати. Сите вредности кои ги примаат x и y секако мора да бидат природни броеви. Прашањето е дали воопшто е можно да се најдат природни броеви кои ја задоволуваат дадената равенка, и ако не е можно, тогаш зошто? Од друга страна, ако е така, повторно се поставува прашањето колку решенија има оваа равенка, дали едно или повеќе? Во нашите разгледувања ќе ги користиме следниве тврдења:

1) Ако равенката $ax + by = c$ има едно целобројно решение x_0, y_0, тогаш сите целобројни решенија на оваа равенка се $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$, каде t е цел број.
2) Равенката $ax + by = c$ има решение во множеството цели броеви ако и само ако и најголемиот заеднички делител на броевите a и b истовремено е делител и на бројот c, т.е. НЗД$(a, b)|c$.

3) Ако НЗД$(a,b)=1$, равенката $ax+by=c$ има решение во множеството на цели броеви.

91. Определете ги цифрите a,b,c, така што $\overline{aa}+\overline{bb}=(\overline{cc})^2$.
Решение: Бројот $\overline{aa}$ може да се запише и како $\overline{aa}=10a+a=11a$. Аналогно, $\overline{bb}=11b$ и $\overline{cc}=11c$. Од овие трансформации имаме дека $11a+11b=121c^2$. Очигледно е дека и двете страни на равенството се деливи со 11, па затоа целата равенка ја делиме со 11 и добиваме $a+b=11c^2$. Бидејќи a и b цифри, нивниот збир може најмногу да биде 18, значи $11c^2\leq 18$, што значи дека е $11c^2=11$, односно $c=1$. Значи, $a+b=11$, заради што задачата има повеќе решенија, односно:

$$22+99=33+88=44+77=55+66=66+55$$
$$=\cdots\ldots=99+22=121.$$

92. Реши ја равенката $2x+3y=20$ во множеството на природни броеви.
Решение: Оваа задача може да се реши на неколку начини. Еден од начините е да се забележи дека десната страна е парен број, па затоа левата страна мора да биде парен број. Бројот $2x$ е секогаш парен, значи $3y$ мора да биде парен број, односно y е парен број. Очигледно е дека мора $3y\leq 20$ т.е. $y\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Бидејќи y е парен број заклучуваме дека $y\in\{2,4,6\}$. Бидејќи ги определивме сите можни вредности за y, сега равенката ја решаваме по x, односно $x=\frac{20-3y}{2}$, од каде после замената на вредностите за y, се добива дека $x\in\{1,4,7\}$. Па, конечното решение на задачата е $(x,y)\in\{(1,6),(4,4),(7,2)\}$.

93. Одреди ги сите подредени парови на прости броеви (p,q) така што:
а) $2p+3q=200$,
б) $2p+3q=201$.
Решение: а) Ако $2p+3q=200$, тогаш $3q=200-2p$. Десната страни на равенката е парен број, што значи дека $3q$ исто така мора да биде парен број. Единствениот парен број е 2, значи $q=2$ и $2p=200-6\Rightarrow p=97$. Бројот 97 е прост, па затоа единствено решение е $(97,2)$.
б) Ако $2p+3q=201$, тогаш $2p=201-3q$. Забележуваме дека десната страна е делива со 3, што значи дека и $2p$ мора да биде деливо со 3, односно $3|p$. Единствениот прост број p кој го исполнува условот е 3. Значи $3q=201-6\Rightarrow q=65$, што не е прост број, од што заклу-

чуваме дека не постои подреден пар во множеството природни броеви кој го исполнува дадениот услов.

94. Определи ги сите подредени парови на прости броеви (p, q) така што

$$p^2 + q = 101.$$

Решение: Разликуваме два случаи:

1) Ако $p = 2$, тогаш $q = 101 - 4 = 97$, што е прост број.

2) Ако $p \geq 3$, тогаш $q = 101 - p^2$. Бидејќи p е прост број поголем од 3, заклучуваме дека е непарен број, па тогаш q е парен број, значи $q = 2$. Значи $p^2 = 99$, што е невозможно во множество прости броеви. Значи, единственото решение е $(2,97)$.

95. Графитен молив чини половина евро, едно пенкало чини едно евра, и еден тефтер пет евра. Како може 20 артикли да купиме за 20 евра?

Решение: Условите на задачата може да се запишат како:

$$\frac{x}{2} + y + 5z = 20 \text{ и } x + y + z = 20.$$

Ги изедначуваме левите страни на овие две равенки од каде $x = 8z$. Со замена во втората равенка добиваме $y + 9z = 20$. Очигледно е дека $z = 1$ или $z = 2$. Ако $z = 1$, тогаш $y = 11$ и $x = 8$, и ако $z = 2$, тогаш е $y = 2$ и $x = 16$. Значи, имаме две различни решенија.

96. Група момчиња и девојчиња собрале 170 денари за да купат роденденски подарок на нивниот другар. Девојките дале по 20 денари, а момчињата по 30. Колку момчиња, а колку девојчиња имало на роденденот, ако целата група броела непарен број членови?

Решение: Двете страни на равенката $20x + 30y = 170$ може да се поделат со 10, по што добиваме дека $2x + 3y = 17$. Единственото решение кое го задоволува условот дека $x + y$ е непарен број е

$$x = 4, \ y = 3.$$

97. Определи барем 4 решенија во множеството на цели броеви на дадените равенки:

а) $15x + 25y = 14$,

б) $15x + 25y = 10$

Решение: а) Равенката нема решение во множеството на цели броеви, бидејќи , НЗД$(25,15) = 5$, што не го дели 14.

б) Равенката има решение, бидејќи $D(25,15) = 5,$ а $5|10$. Двете страни на равенката можеме да ги поделиме со 5 после што добиваме дека

$3x+5y=2$. Едно очигледно решение е $x_0=-1, y_0=1$. Според тоа, другите решенија се од облик

$$x=x_0+5k=5k-1, y=y_0-3k=1-3k, \text{ каде што } k\in\mathbb{Z}.$$

98. Во која година од XX век е роден Бошко, ако во 1999 година тој наполнил онолку години колку што изнесува збирот на цифрите од годината на неговото раѓање?

Решение: Годината на раѓање на Бошко е $\overline{19xy}$, така што ја имаме равенката:

$$1999-(1900+\overline{xy})=1+9+x+y.$$

Земајќи дека $\overline{xy}=10x+y$, ја добиваме равенката $11x+2y=89$, каде што x и y се цифри. Очигледно x е непарна цифра. Бидејќи $y\leq 9$, јасно е дека не може да биде $x=1$, ниту $x=3$, ниту $x=5$. Неможе ниту 9, бидејќи $9\cdot 11=99$. Значи $x=7$, значи $y=6$. Бошко е роден 1976 година.

99. Реши ги равенките во множеството на природни броеви:

а) $x!+2y=25$,

б) $p^2-x!=22$, каде што p е прост број.

Решение: а) Во равенката: $x!=25-2y$, од каде заклучуваме дека $x!$ мора да биде непарен број. Единствено решение е $x=1$, бидејќи ако $x>1$, тогаш $x!$ е парен број. Понатаму, $2y=25-1=24 \Rightarrow y=12$.

б) Во равенката $p^2-x!=22$, ако $x=1$ тогаш $p^2=3$, па заради тоа нема решение. Ако е $x=2$, тогаш и $p=2$. Ако $x>2$, тогаш $p^2>4$, односно $p>2$, па така левата страна на равенката е непарен, а десната парен број. Од тука заклучуваме дека не постојат други решенија.

8. Нерешени задачи

100. Запиши ги сите трицифрени броеви кои се пишуваат со цифрите 5, 3 и 8 (цифрите може да се повторуваат) кои се поголеми од 555.

101. За нумерирање на една книга потребни се 4089 цифри. Колку страни има таа книга, а колку листови?

102. Определи го најмалиот парен природен број чиј збир на цифри е 60.

103. Ана ги запишала првите 2002 природни броја еден за друг,

123456789101112.....200020012002.

Колку вкупно цифри запишала таа?

104. Колку пати ќе се употреби цифрата 4 за испишување на сите трицифрени броеви?

105. Колку цифри се употребени за нумерирање на парните страни на книга која има 111 страни?

106. Парните страници на една книга се нумерирани со 1234 цифри. Колку листови имала книгата, ако е последната нумерирана страна била парна?

107. Марија си играла на калкулаторот така што ги отчукала еден по друг природните броеви 123456789101112..... Ако отчукала вкупно 219 цифри, колку пати ја отчукала цифрата 1?

108. Со прецртување на бројките во бројот 19875400136 формирај го најмалиот петцифрен број.

109. Прецртај десет цифри во низата: 2021202220232024 така да шестцифрениот број кој се добива од преостанатите цифри биде:

а) најголем можен

б) најмал можен

110. Продолжи ја низата: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, \ldots$ Најди општа формула за добивање на $n-$тиот член на низата.

111. Во една улица куќите од десната страна се нумерирани со парни броеви $2, 4, \ldots, 36$, а од левата страна со непарни броеви $1, 3, \ldots, 41$. Колку куќи има во таа улица?

112. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $468 + 389$, б) $902 - 209$, в) $40 - 15 : 5$.

113. Пресметај:

$$209 + 211 - (208 + 210).$$

114. Пресметај:

$$2011 - 1111:11 - 11011:11 + 110011:11.$$

115. Пресметај:

$$4008 - 2004:6 + 6 \cdot 2004.$$

116. Пресметај:

$$20122012:4 - 20122012:2012 + 20122012:503$$

117. Кој број треба да стои наместото на * за да равенството биде точно:

$$(2006 + 2005 + 2004 + 2003) - (2010 + 2009 + 2008 + 2007) = 1999 -*?$$

118. Запиши ја разликата на производот $4050 \cdot 6$ и количникот $5004 : 6$ и определи ја нејзината вредност.

119. Напиши број кој е за 34689:

а) поголем од најмалиот петцифрен број;

б) помал од најмалиот шестцифрен број.

120. Пополни ја десната табела користејќи го правилото од дадено во левата табела. Запиши ги сите можни решенија.

121. Доврши го запишувањето на броевите во празните квадратчиња, така што збировите на секои три последователни броја бидат еднакви меѓу себе.

	528				1477	2306		

122. Запиши ги со помош на римски цифри броевите:

а) најголем непарен број од шесттата стотка;

б) најмал парен број од деветтата стотка.

123. За некој природен број ќе кажеме дека е „интересен“ ако е запишан со различни цифри чиј збир е 45. Определи го збирот на најголемиот и најмалиот „интересен“ број.

124. Со која цифра се завршува производот $\underbrace{8 \cdot 8 \cdots 8}_{2003}$?

125. Која цифра е на местото на единиците во производот $2^{2010} \cdot 3$?

126. Дешифрирај го собирањето:

$$\overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 2000,$$

ако на исти букви одговараат исти, а на различни букви различни цифри.

127. Ако на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри, реши го ребусот

$$A + AA + BAA + BAA = 2004.$$

128. Дешифрирај го собирањето:

$$\text{МОРЕ} + \text{ПЕСОК} = \text{ПЛАЖА}$$

129. Дешифрирај го одземањето $**** - *** = 2000$, ако и намалителот и намаленикот се читаат исто и од лево на десно и од десно на лево.

130. Дешифрирај го собирањето (исти букви да се заменат со исти цифри, а различни букви со различни цифри):

$$\begin{array}{cccc} & A & A & A \\ + & & B & B \\ \hline & 4 & A & 2 \end{array}$$

131. Дешифрирај го собирањето (исти букви да се заменат со исти цифри, а различни букви со различни цифри)

$$\begin{array}{ccccc} & & & & A \\ & & & A & B \\ & & A & B & C \\ + & A & B & C & D \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

132. Замени ги ѕвездичките со соодветни цифри:

$$\begin{array}{cccccc} & 4 & * & 3 & \cdot & 2\ * \\ \hline & * & 8 & 3 & & \\ * & * & * & & & \\ \hline * & * & * & * & * & \end{array}$$

133. Звездичките замени ги со соодветни цифри:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 5 & * & * & * & : & * & 6 & = & 4 & * & * \\
* & * & * & & & & & & & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & & & & & & & & \\
 & & * & 2 & & & & & & & & \\
\hline
 & & 3 & * & * & & & & & & & \\
 & & * & * & * & & & & & & & \\
\hline
 & & & & 0 & & & & & & &
\end{array}
$$

134. Звездичките замени ги со соодветни бројки:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 5 & * & * & * & : & * & 6 & = & 4 & * & * \\
* & * & * & & & & & & & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & & & & & & & & \\
 & & * & 2 & & & & & & & & \\
\hline
 & & 3 & * & * & & & & & & & \\
 & & * & * & * & & & & & & & \\
\hline
 & & 0 & 0 & 0 & & & & & & &
\end{array}
$$

135. Замени ги буквите со соодветни цифри од 0 до 9 (исти букви да се заменат со исти цифри, а различни букви со различни цифри):

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & T & H & E & & & \\
 & E & A & R & T & H & \\
 & V & E & N & U & S & \\
 & S & A & T & U & R & N \\
+ & U & R & A & N & U & S \\
\hline
N & E & P & T & U & N & E
\end{array}
$$

136. Дешифрирај го множењето

$$** \cdot * \cdot * 9 = 2001,$$

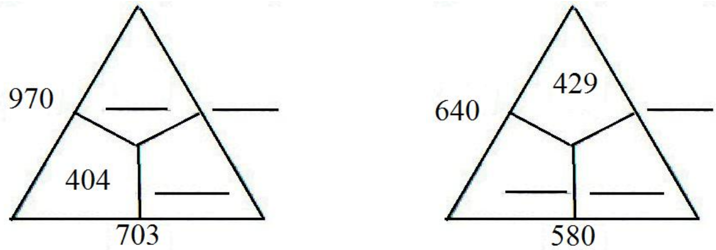
така што наместото на ѕвездичките ќе се запишат соодветни цифри. Колку различни решенија постојат?

137. Природните броеви a и b се такви што важи $a - b = 2005$. Определи ја најмалата вредност на изразот $2005 \cdot a - 2004 \cdot b$.

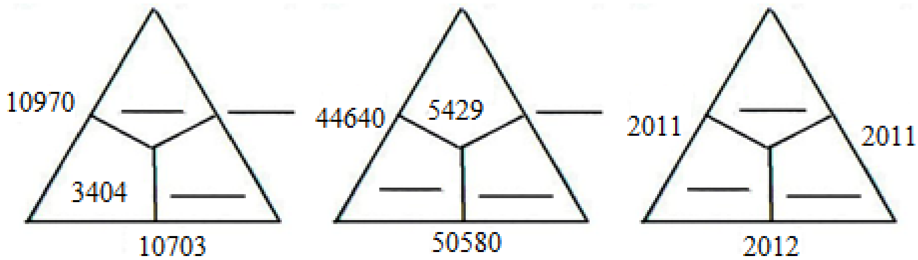
138. Во множеството $\mathbb{N}_0$ определи го решението на неравенката

$$2524 - x > 2425 \; .$$

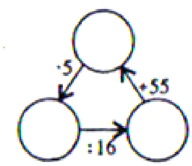
139. Ако во триаголниците се запишани собироци, а околу нив соодветни збирови, напиши ги броеви кои недостасуваат:



140. Ако во триаголниците се запишани собироци, а околу нив соодветни збирови, напиши ги броеви кои недостасуваат:



141. Во круговите (види слика) запиши броеви, така што сите три равенства прикажани на шемата да бидат точни.



142. Во квадратчињата меѓу броевите запиши еден од знаците +, - или = (сите три знаци мора да бидат употребени) така да добиеш точно равенство

а) 7 ☐ 2 ☐ 39 ☐ 30 б) 30 ☐ 40 ☐ 70 ☐ 0

143. Користејќи најмалку цифри и најмалку аритметички операции, запиши го бројот 1025.

144. Користејќи само загради и операцијата одземање со помош на броевите 1.....*n*, на најкраток можен начин запиши го бројот 55.

145. Каде и колку минуси треба да се додадат за да од бројот 1234567890 се добие бројот 542?

146. Пополни ја табелата со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, така да производот на броевите во секој ред биде еднаков со бројот испишан на десната страна на редот, а производот на броевите во колоните да биде еднаков со бројот запишан под колоната.

			20
			108
			168
42	80	108	

147. Кој е најголемиот број кој може да се добие со помош на цифрите 9, 1, 7, 5 и 2, ако секоја од нив ја употребиме точно по еднаш и ако точно по еднаш мораме да ги употребиме операциите собирање и множење?

148. Користејќи ги по ред парните броеви и аритметичките операции на најбрз можен начин запиши го бројот 1000.

149. Збирот на k $(k > 1)$ последователни цели броеви е 9. Кои се тие броеви? Колку решенија има задачата?

150. Докажи дека збирот на сите природни броеви од 1 до 1000 е делив со 7.

151. Докажи дека производот на 3 последователни парни природни броеви поголеми од 2 е секогаш делив со 16.

152. Одреди го најголемиот природен број делив со 18 чиј збир на цифри е 18.

153. Производот на три последователни парни природни броеви е 960. Определи го нивниот збир.

154. Колку непарни четирицифрени броеви се деливи со 5?

155. Одреди го најголемиот четирицифрениот број чиј производ на цифри е 120.

156. Даден е седумцифрениот број 9835412.
а) Во записот на тој број, изостави една цифра, така што добиениот шестцифрен број да биде делив со 9.
б) Во ново добиениот шестцифрен број, заменете ги местата на цифрите така што ќе се добие најмалиот природен број делив со 15.

157. Определи ги сите двоцифрени броеви кои при делењето со 21 даваат остаток 10.

158. Производот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ подели го со бројот 4536. Колку изнесува количникот?

159. Пресметај го количникот и остатокот при делење на изразот
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 136$$
со бројот 75.

160. Определи го најмалиот петцифрен број на кој сите цифри со кои е запишан му се различни и кој е делив и со 3 и со 4.

161. Запиши го множеството на сите трицифрени броеви деливи со 9 чии цифри припаѓаат на множеството $\{1,2,3,4\}$ (цифрите може и да се повторуваат).

162. Од 18 бели рози, 45 жолти рози и 72 црвени рози направени се најголеми можни букети со ист број на рози со иста боја (сите рози мора да бидат употребени). Ако цената на една бела роза е 10, жолта 15, а на црвена 20 денари, определи го најголемиот можен број на букети и пресметај колку ќе чини еден таков букет.

163. Определи ги сите четирицифрени броеви помали од 3000, чиј што производ на цифри е 105.

164. Определи ги сите троцифрени броеви деливи со 15, кај кои цифрата на единиците е еднаква на цифрата на стотките.

165. Определи го

а) најмалиот, б) најголемиот
шестцифрен природен број на кој сите цифри му се различни и кој е делив со 9.

166. Во четирицифрениот број $\overline{32♠4}$, „♠“ замени ја со соодветна цифра, така што добиениот број да биде делив со 12.

167. Колку има четирицифрените природни броеви запишани само со цифрите 2, 3, 5 и 8 (цифрите во бројот не може да се повторуваат) кои се деливи со 12?

168. Збирот на два броја е 56, а при нивно делење се добива количник 4 и остаток 1. Кои се тие броеви?

169. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 15 и чиј збир на цифри е 15.

170. При делење на броевите 287 и 431 со природниот број n се добиваат остатоци 1 и 2, соодветно, а при делење на бројот 231 со бројот $n+1$ се добива остаток 3. Определи ги сите такви броеви n.

171. Пресметај го збирот на сите природни броеви кои при делењето со 7 даваат количник еднаков на остатокот.

172. Запиши ги најмалиот и најголемиот трицифрен природен број кој при делење со 16 има количник ист како и остатокот.

173. Определи ја цифрата x така да изразот $13\cdot\overline{16x}+2001\cdot2000$ биде делив со 12.

174. Определи ги сите цифри a така да производот $\overline{17a}\cdot520$ делив со 12.

175. Определи ги сите четирицифрени броеви деливи со 15 кај кои цифрата на десетките е 5, а цифрата на стотките 1.

176. При делење со некој природен број k со броевите 73, 92 и 111, добиени се остатоци 1, 2 и 3, соодветно. Определи го најголемиот таков природен број k.

177. Докажи дека секој прост број поголем од 3 може да се запише во облик $4k + 1$ или $4k + 3$, каде што k е природен број.

178. Докажи дека ако p е прост број поголем од 5, тогаш $p^2 - 1$ е делив со 12.

179. Определи ги сите целобројни решенија на равенката $\frac{p}{2010} + \frac{n}{2} = 1$ ако p е прост број, а n природен број.

180. Ако p е прост број, определи ги сите остатоци кои p^2 ги дава при делење со 9.

181. Запиши ги сите прости броеви p за кои $p^3 - p + 1$ е полн квадрат.

182. Ако НЗД$(x, 10) = 2$ и НЗД$(x, 21) = 7$, и $x < 50$, колку решенија имаме за x?

183. Производ на два природни броја е 300, а нивниот НЗД е 10. Кои се тие броеви?

184. Определи ги сите заеднички делители на броевите $5k + 6$ и $8k + 7$, каде k е цел број.

185. Ако е НЗД$(a, b) = 1$, да се докаже дека НЗД$(a + b, a - b)$ е еднаков на 1 или 2.

186. Збирот на 49 природни броеви еднаков е на 999. Определи ја најголемата можна вредност на нивниот најголем заеднички делител.

187. Дешифрирај го множењето:

$$* 8 ** \cdot 45 = 26 * 17 *$$

188. Во множество на природни броеви реши ја равенката

$$9x + 10y = 1999.$$

189. Дропката $\frac{59}{42}$ запиши ја како збир од две дропки со едноцифрени именители.

190. Дешифрирај го множењето $\overline{abcd} \cdot 9 = \overline{dcba}$.

191. Определи ги простите броеви p и q, ако е $2 \cdot p + 3 \cdot q = 100$.

192. Определи ги сите прости броеви p,q и r, за кои важи

$$2p + 3q + 4r = 2006.$$

193. На колку начини можеме за 50 денари да купиме 30 поштенски марки така што да земеме само три вида и тоа: од еден денар, од два денари и од шест денари (Задолжително мора да има барем по една поштенска марка од секој вид)?

194. На тестот по математика имало 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат три поени, а за нерешена или неточно решена задача се одзема еден поен. Ако Петар на тестот добил 36 поени, колку задачи решил Петар точно?

IV ДРОПКИ

1. Операции со дропки и равенки

При решавањето од овој дел ќе ги користиме следниве поими и својства.

1) Дропка е количникот на два природни броја m и n, и ја запишуваме како $m : n = \frac{m}{n}$
2) Дропките $\frac{a}{c}$ и $\frac{a \cdot n}{c \cdot n}$, $n \in N$ се еднакви меѓу себе
3) Дропката чијшто броител и именител се заемно прости броеви, се нарекува нескратлива дропка.
4) За секои две дропки $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ важи $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$, $\quad (a \geq b)$
5) За секои две дропки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ важи $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$, $\left(\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \right)$
6) Односот на два броја a и b покажува колку пати бројот a е поголем од бројот b, и го означуваме со $a : b$.

1. Пресметај ја вредноста на изразот

$$7 \cdot 1{,}2 - \frac{9}{10} : 0{,}3 - \frac{1}{2}.$$

Решение: Имаме:

$$7 \cdot 1{,}2 - \frac{9}{10} : 0{,}3 - \frac{1}{2} = 8{,}4 - \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{3} - 0{,}5 = 8{,}4 - 3 - 0{,}5 = 4{,}9.$$

2. Пресметај го збирот на најмалата и најголемата дропка од облик $\frac{a}{b}$, $a \in \{1, 2, 4, 8\}$ и $b \in \{3, 5, 9\}$.

Решение: Најмалата дропка е $\frac{1}{9}$, најголемата дропка е $\frac{8}{3}$, а збирот е

$$\frac{1}{9} + \frac{8}{3} = \frac{25}{9}.$$

3. Ако $a = 2{,}5$ и $b = 10$, пресметај ја вредноста на изразот

$$1 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Решение: Имаме:

$$1 : \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \right) = 1 : \frac{1}{2} = 2.$$

4. Колку пати вредноста на изразот

$$(20{,}13 : 1{,}1 - 0{,}1) : 0{,}7 + 0{,}3$$

е поголема од дропката $\frac{26,3}{5}$?

Решение: Вредност на изразот е

$$\begin{aligned}(20,13:1,1-0,1):0,7+0,3 &= (18,3-0,1):0,7+0,3\\ &= 18,2:0,7+0,3\\ &= 26+0,3=26,3\end{aligned}$$

па неговата вредност е 5 пати поголема од дадената дропка.

5. Каков агол зафаќаат часовната и минутната стрелка кога часовникот покажува време од 8 часот и 10 минути?

Решение: Во 8 часот аголот помеѓу стрелките е

$$\frac{4}{12}\cdot 360° = 120°.$$

Заради минутната стрелка аголот ќе се зголеми за

$$x=\frac{2}{12}\cdot 360° = 60°.$$

Бидејќи часовната стрелка се движи 12 пати побавно, заради неа аголот се намалува за $\frac{1}{12}x$. Заради тоа бараниот агол е

$$120°+x-\frac{1}{12}x = 120°+60°-\frac{1}{12}60° = 175°.$$

6. Во 6 часот стрелките на часовникот формира рамен агол. Колку минути ќе бидат потребни за да за прв пат тие формираат агол од $70°$?

Решение: Ако x е аголот кој минутната стрелка го минува до моментот на поклопување, тогаш:

$$180-x+\frac{1}{12}x=70,$$

$$180-\frac{11}{12}x=70,$$

$$\frac{11}{12}x=110,$$

Со решавање на равенката добиваме дека $x=120°$, а на тој агол одговара време од 20 минути, што е и решение на задачата.

7. Пецо цела пица јаде за 15 минути, а Пецо и Нецо заедно цела пица јадат за 6 минути. Колку долго е потребно Нецо сам да изеде цела пица?

Решение: Пецо за една минута јаде петнаестина пица, а кога јадат заедно, Пецо и Нецо за една минута јадат шестина од пицата. Следи, за една минута Нецо сам ќе изеде $\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10}$ од пицата. Што значи дека на Нецо му требаат 10 минути сам да ја изеде пицата.

8. Аглите α и β се суплементни, а аглите $\frac{2}{5}\alpha$ и β се комплементни. Пресметај ја разликата помеѓу аглите α и β.

Решение: Од тоа што $\alpha + \beta = 180°$ и $\frac{2}{5}\alpha + \beta = 90°$, непосредно следува дека $\frac{3}{5}\alpha = 90°$. Односно, $\alpha = 150°$, $\beta = 30°$, од каде

$$\alpha - \beta = 120°.$$

9. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $\frac{a}{10} + \frac{b}{15} = \frac{5}{6}$ и $\frac{1}{2} < \frac{a}{10} < \frac{3}{4}$.

Решение: Од тоа што $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, а $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ и уште $\frac{5}{10} < \frac{a}{10} < \frac{15}{20}$ следува дека $a = 6$ или $a = 7$. Со замена на овие вредности во равенката $\frac{a}{10} + \frac{b}{15} = \frac{5}{6}$ добиваме дека единствено решение на задачата е $a = 7, b = 2$

10. Определи ги сите парови природни броеви a и b такви што $a + b = 30$ и $\frac{2005}{2007} = \frac{198}{223} + \frac{a}{b}$.

Решение: Од втората равенка добиваме дека $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$. Користејќи ја првата равенка пак добиваме дека $a = 3$, $b = 27$.

11. Славко и Марко саделе садници. Притоа, $\frac{1}{3}$ од садниците биле бука, $\frac{3}{8}$ орев и остатокот багремови садници. Колку највеќе багреми засадиле, ако се знае дека вкупно засадиле помалку од 360 садници?

Решение: $\frac{8}{24}$ од вкупниот број на садници се букови, $\frac{9}{24}$ од вкупниот број на садници се ореви, што значи дека $\frac{24}{24} - \left(\frac{8}{24} + \frac{8}{24}\right) = \frac{24}{24} - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$ од вкупниот број на садници се багреми. Најголемиот број, кој е помал од 360 и е делив со 24 е 336. Од тоа што $336 : 24 = 14$, следува дека бројот на багреми е $14 \cdot 7 = 98$.

12. Броителот и именителот на дропката $\frac{p}{q}$ се прости броеви. Определете ги простите броеви p и q ако збирот на дропката и нејзината реципрочна дропка е еднаков на $\frac{130}{33}$.

Решение: Бидејќи

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{130}{33} \text{ и НЗС}(p, q) = 33 = 3 \cdot 11,$$

значи дека бараните прости броеви се $p = 3, q = 11$. Тврдењето се докажува со замена на вредностите во равенството.

13. Определи природен број n и прост број p за кои важи $\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}$. Колку различни решенија за овој проблем постојат?

Решение: Бидејќи $\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}$, што всушност значи дека $\frac{n}{2\cdot5\cdot199} = \frac{1}{p}$, заклучуваме дека решенија на задачата се

$$p = 2, n = 995$$
$$p = 5, n = 398$$
$$p = 199, n = 10.$$

14. Дадена е дропката $\frac{7989}{2010}$. Ако од броителот одземеме еден број x , а на именителот му го додадеме истиот тој број се добива дропката $\frac{1}{8}$. Определи ја вредноста на x.

Решение: Забележуваме дека збирот на броителот и именителот е $7989 + 2010 = 9999$. Ако од броителот одземеме и на именителот додадеме број x, добиваме збир $7989 - x + 2010 + x = 9999$. Бидејќи новодобиената дропка е еднаква на $\frac{1}{8}$, заклучуваме дека броителот на новата дропка е a, а нејзиниот именител $8a$. Значи $9a = 9999$, односно $a = 1111$. Бараниот број x може да се добие од равенката $7989 - x = 1111$.Од каде $x = 6878$.

2. Проширување, скратување и споредување на дропки

15. Спореди ги дропките $\frac{8}{119}$ и $\frac{133}{2010}$.

Решение: Бидејќи $\frac{8}{119} > \frac{8}{120} = \frac{1}{15} = \frac{134}{15\cdot134} = \frac{134}{2010} > \frac{133}{2010}$ следува дека $\frac{8}{119} > \frac{133}{2010}$.

16. Најди природен број n, за кој важи дека изразот $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{n}$ е исто така природен број. Разгледајте ги сите можни решенија.

Решение: Имаме $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}=\frac{41}{42}+\frac{1}{n}$. Од неравенствата $\frac{41}{42}<1$ и $\frac{1}{n}\leq 1$, следува дека $\frac{41}{42}+\frac{1}{n}<2$. Значи, важи само $\frac{41}{42}+\frac{1}{n}=1$, од каде заклучуваме дека $n=42$.

17. Определи ги сите природни броеви n кои го задоволуваат неравенството $\frac{1}{3}<\frac{n}{12}\leq\frac{9}{12}$

Решение: Неравенството е еквивалентно со следното неравенство $\frac{4}{12}<\frac{n}{12}\leq\frac{9}{12}$, заради што заклучуваме дека n може да ги прими вредностите 5, 6, 7, 8 и 9.

18. Определи ги сите прости броеви p, кои го задоволуваат неравенството $\frac{8}{63}<\frac{1}{p}<\frac{2}{5}$.

Решение: Бидејќи $\frac{8}{64}<\frac{8}{63}<\frac{1}{p}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$, тоа значи дека $\frac{1}{8}<\frac{1}{p}<\frac{1}{2}$. Од добиеното неравенство следува дека $2<p<8$. Бидејќи бројот p треба да биде прост број, следува дека 3,5 и 7 се бараните броеви.

19. Дропките $\frac{3*5*}{36}$ и $\frac{4*7*}{45}$ се природни броеви. Поредете ги по големина почнувајќи од најмалиот.

Решение: Дропките $\frac{3*5*}{36}$ и $\frac{4*7*}{45}$ се природни броеви ако бројот $3*5*$ е делив со 36 (односно со 4 и 9) и $4*7*$ е делив со 45 (односно со 9 и 5). Во првиот случај тоа е можно само ако последната цифра е 2 или 6 (заради деливоста со 4), а заради деливоста со 9 можни броеви се $\frac{3435}{36}=96$ и $\frac{3852}{36}=107$. Во вториот случај последната цифра е 0 или 5 (заради деливоста со 5), па заради деливоста со 9 можни случаи се $\frac{4275}{45}=95$ и $\frac{4770}{45}=106$. Според тоа,

$$\frac{4275}{45}=95<\frac{3456}{36}=96<\frac{4770}{45}=106<\frac{3862}{36}=107.$$

20. Определи ги цифрите a и b за кои $\frac{\overline{199a1b}}{12}$ е природен број. Запиши ги сите можни решенија.

Решение: За да бараниот количник биде природен број, бројот $\overline{199a1b}$ мора да биде делив со 12, односно делив со 3 и 4. Тоа значи дека двоцифрениот завршеток $\overline{1b}$ мора да биде делив со 4, значи дека $b=2$ или $b=6$. Ако $b=2$, тогаш збирот на цифрите на бараниот број е $22+a$, а заради деливоста со 3 заклучуваме дека a може да ги прими вредностите 2, 5 или 8. Ако $b=6$, тогаш збирот на цифрите на бараниот број е $26+a$, а заради деливоста со 3 заклучуваме дека a може да ги прими вредностите 1, 4 или 7. Значи,

$$199116, 199212, \quad 199416, \quad 199512, \quad 199716, 199812$$

се броеви кои го задоволуваат бараниот услов.

21. Кој број треба да се одземе од броителот и да се додаде на именителот на дропката $\frac{1988}{1987}$ која после скратувањето ќе биде еквивалентна со дропката $\frac{2}{3}$?

Решение: Нека бараниот број е x. Решавајќи

$$(1988-x):(1987+x)=2:3$$

добиваме дека $x=398$.

22. Определи две дропки со двоцифрени именители така што нивниот збир е $\frac{145}{1998}$.

Решение: Бидејќи $1998=2\cdot 27\cdot 37$, можни се следниве случаи:

$$\frac{a}{27}+\frac{b}{74}=\frac{145}{1998}, \quad \frac{a}{37}+\frac{b}{54}=\frac{145}{1998} \text{ и } \frac{a}{74}+\frac{b}{54}=\frac{145}{1998}.$$

Тоа значи дека

$$74a+27b=145, \; 54a+37b=145 \text{ и } \; 27a+37b=145.$$

Првата равенка нема решение, а решението на втората равенка е $a=2$, $b=1$, па бараните дропки се $\frac{2}{37}$ и $\frac{1}{54}$. Решение на третата равенка е $a=4$, $b=1$, па бараните дропки повторно се $\frac{4}{74}=\frac{2}{37}$ и $\frac{1}{54}$

23. Дропката $\frac{281}{140}$ запиши ја како збир на три дропки со едноцифрени именители поголеми од 1. Одговорот да се образложи.

Решение: Бидејќи $140=4\cdot 5\cdot 7$, тоа значи дека овие броеви се и бараните именители. Така,

$$\frac{281}{140}=\frac{a}{4}+\frac{b}{5}+\frac{c}{7}=\frac{35a+28b+20c}{140}.$$

Очигледно $35a+28b+20c=281$. Бидејќи броевите $28b$ и $20c$ се парни, бројот $35a$ мора да биде непарен, од каде заклучуваме дека бројот a мора да биде непарен. Ако a е непарен број, тогаш збирот $35a+20c$ завршува со цифрата 5, па следува дека бројот

$$28b=281-(35a+20c)$$

завршува со цифрата 6. Од тука заклучуваме дека $b = 2$. Според тоа, $35a + 20c = 281 - 56 = 225$. Очигледно дека $a < 7$, бидејќи за $a \geq 7$ важи за $35a \geq 245$. Според тоа, $a = 1$ или $a = 3$ или $a = 5$. За $a = 1$ или $a = 5$ се добива дека не постои цел број c. За $a = 3$ се добива дека $20c = 120c$, односно $c = 6$. Конечно,

$$\frac{281}{140} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{6}{7}.$$

24. Збирот на три различни дропки, како и збирот на нивните реципрочни вредности се природни броеви. Кои се тие дропки (дадете барем еден конкретен пример)?

Решение: Едно од можните решенија е

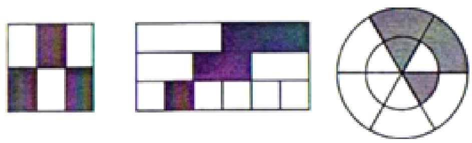
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \text{ и } 2 + 3 + 6 = 11$$

Можни се и други решенија, на пример:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{1} = 3 \text{ и } \frac{3}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{2} = 5$$

3. Нерешени задачи

25. На кои геометриски фигури тела е затемнета точно третина? (квадратот е поделен на еднакви делови; слоевите на правоаголник се со иста ширина, а секој слој содржи исти делови; секој круг е поделен на еднакви делови).



26. Кога за прв пат после 12 часот минутната и часовната стрелка ќе зафаќаат прав агол?

27. Ана јаде една чоколада за 8 минути. Горан иста таква чоколада јаде три пати побрзо од Ана. За колку време тие двајца заедно ќе изедат една таква чоколада?

28. На местото на ѕвездичките запишете знаци за аритметички операции така што ќе се добие точно равенство (дозволено е користење загради):

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6027} = \frac{1}{2009}.$$

29. Определи дропка еднаква на дропка $\frac{43}{90}$ кај која збирот на броителот и именителот е 1995.

30. На еден остров, три четвртини од мажите се женети, а две третини од жените се мажени. Колкав дел од населението на островот не се во брак, ако бројот на оженетите мажи е еднаков на бројот на мажените мажи?

31. Што е поголемо $\frac{61}{2010}$ или $\frac{5}{149}$?

32. Броителот на дропката $\frac{23}{42}$ треба да се зголеми, а именителот да се намали за еден ист број x, така што добиената дропка е $\frac{7}{6}$. Определи го бројот x!

33. Определи ги сите прости броеви кои го задоволуваат неравенството $\frac{3}{16} < \frac{5}{p} < \frac{2}{7}$.

34. Ако од бројот x се одземе збирот на броевите $3\frac{1}{5}$ и $\frac{7}{8}$ се добива разлика која е поголема од разликата на броевите $3\frac{1}{5}$ и $\frac{7}{8}$. Определи ги сите такви броеви x.

35. Збирот на две дропки со едноцифрени именители е $\frac{11}{8}$. Кои се тие дропки? Колку такви решенија постојат?

36. Пополни го магичниот квадрат

$\frac{1}{6}$		
	$\frac{5}{12}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

37. Запиши ги сите дропки со броител 8 и именител природен број, кои се поголеми од $\frac{2}{5}$ и помали од $\frac{4}{5}$.

38. Што е поголемо, $\frac{3*5*}{36}$ или $\frac{5*3*}{45}$, ако наместо ѕвездичките може да бидат напишани било кои цифри?

39. Ако од бројот x го одземеме збирот на броевите $3\frac{1}{5}$ и $\frac{7}{8}$, добиваме разлика која е поголема од разликата на броевите $3\frac{1}{5}$ и $\frac{7}{8}$. Определи ги сите такви x.

40. Да се определи разликата помеѓу најголемата и најмалата права дропка чии броители и именители се вредности од множеството $\{2, 3, 5, 8\}$.

41. Определи ги сите природни броеви a и b за кои важи

$$\frac{a}{10} + \frac{b}{15} = \frac{5}{6} \ и \ \frac{1}{2} < \frac{a}{10} < \frac{3}{4} .$$

42. Утврди како изгледаат левата и десната страна на равенството:

$$\frac{EVE}{DID} = 0,TALKTALKTALK \ldots \ldots .$$

(Броителот и именителот немаат заеднички делители и броителот е помал од именителот)

V ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Аритметичко и алгебарско решавање на текстуални задачи

Равенката $ax = b$ има единствено решение $x = \frac{b}{a}$, ако $a \neq 0$ и во овој случај равенката е определена.

Равенката $0x = b$, каде $b \neq 0$, нема решение и во овој случај равенката е противречна.

Равенката $0x = 0$ е идентитет и е задоволена за секој реален број x и во овој случај равенката е неопределена.

При решавање на равенките, меѓу другото, го користиме и својството дека равенките се конзистентни со основните операции. Можат да се собираат, да се одземаат, а исто така може да се помножат и поделат со броеви или изрази различни од нула, при што се добиваат еквивалентни равенки.

1. Тројца пријатели Милан, Иван и Јане, подариле 12502 книги на училишната библиотека. Милан подарил 4260 книги, а Иван 456 книги повеќе од Милан. Колку книги Јане подарил на библиотеката?
Решение: Иван подарил $4260 + 456 = 4716$ книги, а Јане подарил $12502 - (4716 + 4260) = 3526$ книги.

2. Марко замислил еден број. Ако тој број се намали за 348 се добива бројот 485. Кој број го замислил Марко?
Решение: Од условот на задачата следува дека замислениот број е за 348 поголем од бројот 485. Според тоа, Марко го замислил бројот

$$348 + 485 = 833.$$

3. Определи го збирот на најголемиот парен петцифрен број запишан со цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 (цифрите не може да се повторуваат) и најголемиот четирицифрен непарен број запишан со цифрите 6, 7, 8 и 9 (цифрите не може да се повторуваат).
Решение: Најголем парен петцифрен број запишан со дадените цифри е 54312,а најголем непарен четирицифрен број запишан со дадените цифри е 9867. Збир на овие броеви е $54321 + 9867 = 64188$.

4. Ана кажала: „Замислив еден четирицифрен и еден трицифрен број, чија разлика е 9863 и кои имаат најголем можен збир“. Кои броеви ги замислила Ана и кој е тој најголем можен збир?

Решение: За да бараниот збир биде најголем, броевите кои Ана ги замислила мора да бидат најголеми можни. Најголем четирицифрен број е 9999, а бидејќи разликата е 9863, троцифрениот број е 136. Значи, бараниот збир е: $9999 + 136 = 10135$.

5. Во едно училиште, последниот училишен ден 17 наставници работеле во претпладневната смена, 20 во попладневната, а 5 во двете смени. Тој ден 3 наставници биле на боледување. Колку наставници работат во тоа училиште?

Решение: Во училиштето работат $(17 + 20) - 5 + 3 = 35$ наставници.

6. Од 1 филџан мед, 2 филџани зејтин, 3 филџани шеќер и 4 филџани брашно баба Милка направила 25 колачиња. Колку најмногу колачиња баба Милка ќе направи од 13 филџани мед, 14 филџани зејтин, 15 филџани шеќер и 16 филџани брашно?

Решение: Баба Милка има 13 пати повеќе мед, 7 пати повеќе зејтин, 5 пати повеќе шеќер и 4 пати повеќе брашно отколку што и се потребни за 25 колкачиња. Значи таа може да направи 4 пати повеќе колачиња (затоа што брашно има релативно најмалку), односно може да направи 100 колачиња.

7. По 12 минути од почетокот на филмот, Марина видела дека часовникот покажува точно 20 часот и 27 минути. Ако филмот трае 90 минути, во колку часот ќе заврши?

Решение: Филмот започнал во 20 часот и 15 минути. Филмот завршил во 21 часот и 45 минути

8. Низ една цевка за 6 минути истекуваат 54 литра вода. Колку литри вода ќе истече низ истата таа цевка од 6 часот и 13 минути наутро до полноќ?

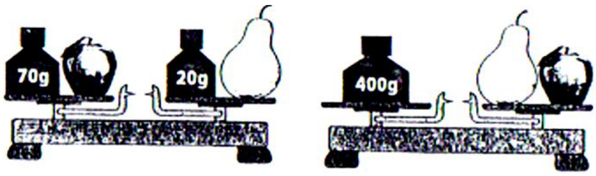
Решение: Во една минута низ цевката истекува 9 литри вода. Бидејќи од 6 часот и 13 минути до полноќ ќе поминат 17 часа и 47минути или 1067 минути, во бараното време ќе протечат $1067 \cdot 9 = 9603$ литри вода.

9. Тимотие случајно ја отворил книгата и пресметал дека 41 е збир на бројот со кој е обележана левата страна и број со кој е обележана десната страна на таа книга. Пресметај го производот на тие броеви.

Решение: Бидејќи соседните страни се обележани со последователни броеви и бидејќи $41 = 20 + 21$, заклучуваме дека левата страна е обележана со 20, а десната со бројот 21. Бараниот производ е

$$21 \cdot 20 = 420.$$

10. Во двата случаја вагата е во рамнотежа. Пресметај ја масата на јаболкото и масата на крушата врз основа на информациите дадени на сликата.



Решение: На левата слика може да се воочи дека масата на крушата е за $50\ g$ поголема од масата на јаболката. Ако на десната слика наместо круша има јаболко, вкупната маса би била за $50\ g$ помала, па масата на двете јаболка би била $350\ g$. Значи, масата на едно јаболко би била $175\ g$, па масата на крушата е $225\ g$.

11. Вкупната маса на чашата наполнета со вода е 300 грама и е еднаква на збирот на масите на две празни чаши и тег од 60 грама. Колкава е масата на водата во чашата?

Решение: Ако масата на една празна чаша е x , тогаш $2x + 60 = 300$, оттаму $x = 120$, т.е. масата на една празна чаша е 120 грама. Бидејќи масата на чашата и водата во неа е 300 грама, масата на водата во чашата е 180 грама.

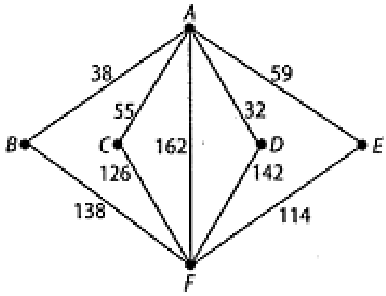
12. Два молива и три тетратки чинат 110 денари. Четири молива и седум тетртатки чинат 250 денари. Пресметај ја цената за осум молива и осум тетратки.

Решение: Бидејќи 2 молива и 3 тетратки чинат 110 денари, следува дека 4 молива и 6 тетратки чинат 220 денари. Бидејќи 4 молива и 7 тетратки чини 250 денари, заклучуваме дека 1 тетратка чини 30 денари, па се добива дека еден молив чини 10 денари. Значи, 8 моливи и 8 тетратки чинат 320 денари.

13. Сега е 19 часот и 20 минути. Кога ќе заврши филмот кој почнал пред 45 минути, а трае 1 час и 35 минути?

Решение: Филмот почнал во 18 часот и 35 минути, а ќе заврши во 20 часот и 10 минути.

14. На сликата се дадени некои растојанија меѓу градовите A, B, C, D, E, F (во километри). Поштарот тргнал од градот A во градот F. На својот пат треба да помине во уште еден од градовите B, C, D или E. Во кој град треба да помине за да растојанието кое би го изминал биде најдолго? Колку километри пократко би патувал кога директно од градот A би отишол во градот F?



Решение: Со $A-B-F$ го означуваме патот што поштарот го поминува од градот A до градот F преку градот B. Тогаш растојанијата кои ги поминува поштарот ако минува во различните градови е следен: $A-B-F$ е $176\,km.$; $A-C-F$ е $181\,km$; $A-D-F$ е $174\,km$; $A-E-F$ е $173\ km$. Значи, најдолго растојание ќе помине ако помине во гардот C. Кога би отишол од градот A директно во градот F би патувал 19 km пократко.

15. Тројца молери за три дена молерисале три стана.

а) Колку станови ќе молерисаат шест молери за шест дена?

б) За колку дена девет молери ќе молерисаат девет станови?

в) Колку молери се потребни ако за дванаесет дена треба да се молерисаат дванаесет станови?

Решение: а) 12 станови; б) 3 дена; в) 3 молери

16. Војо запишал три броја. Вториот од нив го добил кога на првиот број децималната запирка ја поместил за едно место во десно. Третиот од нив го добил кога на вториот број децималната запирка ја поместил за едно место во десно. Кога на крај ги собрал сите три запишани броеви го добил збирот 2233,32. Кои броеви ги запишал Војо?

Решение: Со поместување на децималната запирка за едно место во десно добиваме број кој е 10 пати поголем од претходниот. Ако првиот број кој Војо го замислил го бележиме со x , тогаш вториот број е $10\,x$., а третиот кој е 10 пати поголем од вториот е $10 \cdot 10x = 100x$. Сега, имаме дека $x + 10x + 100x = 2233{,}32$ откаде $x = 20{,}12$. Значи Војо ги запишал броевите $20{,}12;\ 201{,}2$ и 2012.

17. Топката се тркала на надолнина. Во првата секунда поминала 3 метри, во втората секунда поминала 4 метри, а во третата 5 метри. Во секоја следна секунда поминувала по 1 метар повеќе отколку во претходната. Колку вкупно метри поминала топката за 10 секунди?

Решение: Должината која топката ја поминува во секоја секунда дадена во табелата:

1. секунда	3
2. секунда	4
3. секунда	5
4. секунда	6
5.секунда	7
6.секунда	8
7.секунда	9
8. секунда	10
9. секунда	11
10. секунда	12

За 10 секунди топката поминала вкупно

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 75 \text{ метри.}$$

18. Борис замислил некој број. Кога тој број го помножил со 2 го добил бројот 43598. Одреди го бројот кој е 12 пати поголем од бројот кој го замислил Борис.

Решение: Прв начин. Борис го замислил бројот $43598 : 2 = 21799$. Бараниот број е $21799 \cdot 12 = 261588$.

Втор начин. Бараниот број е $12 : 2 = 6$ пати поголем од бројот 43598. Значи, бараниот број е $43598 \cdot 6 = 261588$.

19. Марија планирала во текот на следните неколку дена, секој ден да засади по 5 саксии цвеќиња. Меѓутоа, таа секој ден садела по една саксија повеќе, па во последните два дена и останале да засади по 3 саксии. Колку саксии планирала да засади Марија?

Решение: Ако садела според првичниот план, Марија последните два дена би засадила $2 \cdot 5 = 10$ саксии. Меѓутоа, таа во последните два дена засадила $2 \cdot 3 = 6$ саксии. Значи, разликата од 4 саксии цвеќе ги засадила претходните денови. Затоа што секој ден садела по една саксија повеќе, садењето траело $\frac{4}{1} = 4$ дена и уште последните два дена. Заклучуваме дека вкупниот број на засадени саксии е $4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 30$.

20. Во две кутии се поделени 452 џамлии, така што во секоја има еднаков број на џамлии. Петар земал 240 џамлии, така што од едната кутија зел два пати повеќе отколку од втората. Колку џамлии останало во едната, а колку во втората кутија?

Решение: Во секоја кутија имало по 226 џамлии. Петар од првата кутија земал $240: 3 = 80$, а од втората 160 џамлии. Според тоа, во првата кутија останале $226 - 80 = 146$, а во втората $226 - 160 = 66$ џамлии.

21. Збирот на два броја е 2010, а нивната разликата 584. Кои се тие броеви?

Решение: Нека дадените броеви се x и $2010 - x$. Знаеме дека разликата помеѓу тие два броја е $(2010 - x) - x$ и е еднаква на 584. Од ова равенство добиваме дека $x = 713$.

22. Збирот на намаленикот и разликата е 105, а разликата е за 3 поголема од намалителот. Определи ги намаленикот и намалителот.

Решение: Нека разликата ја означиме со r. Тогаш, намаленикот е еднаков на $105 - r$, а намалителот $r - 3$. Ако намаленикот, намалителот и разликата ги запишеме во облик на равенство, добиваме дека $(105 - r) - (r - 3) = r$, од каде $r = 36$. Значи, намаленикот е еднаков на $105 - 36 = 69$, а намалителот е $36 - 3 = 33$.

23. Да се определат 8 последователни природни броеви чиј збир е 100.

Решение: Нека најмалиот од нив е a. Тогаш,

$$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) + (a + 5) + (a + 6) + (a + 7) = 100.$$

Значи $8 \cdot a + 28 = 100$, односно $a = 9$. Конечно, бараните броеви се $9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ и 16.

24. Збирот на 3 броја е 424. Ако првиот го зголемиме 4 пати, вториот го намалиме за 4 и третиот го намалиме 4 пати, ќе добиеме еднакви броеви. Кои се тие броеви?

Решение: Нека броевите кои се добиваат на крајот ги означиме со $4k$. Тогаш првиот број е еднаков на k, вториот на $4k + 4$ и третиот $16k$.

Значи, $k + 4k + 4 + 16k = 424$, а од тоа произлегува дека $k = 20$, па бараните броеви се $20, 84$ и 320.

25. Определи четири последователни природни броеви чиј збир е 2010.
Решение: Вториот од нив е поголем од првиот за еден, третиот за два, четвртиот за три, па така ако првиот го претставиме како x имаме дека

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 2010,$$

односно $x = 501$, па бараните броеви се 501, 502, 503 и 504.

26. Да се определи трицифрен број кој се зголемува 13 пати ако од левата страна му се допише бројот 3.
Решение: Кога на трицифрен број од лева страна ќе му се допише цифрата 3, тоа е како бројот да сме го зголемиле за 3000. Значи, ако троцифрениот број е еднаков на a, тогаш ја добиваме равенката $3000 + a = 13a$, односно, $a = 250$.

27. Ружица замислила еден број. Бројот го намалила за 100, па така добиениот број го намалила 100 пати и го добила бројот 100. Кој број го замислила Ружица?
Решение: Ружица го замислила бројот

$$100 \cdot 100 + 100 = 10100.$$

28. Збирот на два броја е 45, а нивниот количник е $\frac{7}{8}$. Определи ги тие броеви.
Решение: Нека x е еден од овие броеви. Тогаш, $x : (45 - x) = \frac{7}{8}$, оттаму следи дека $x = 21$ и $45 - x = 24$.

29. Збирот на два броја е 47. Ако поголемиот го поделиме со помалиот, се добива количник 2 и остаток 5. Кои се тие броеви?
Решение: Нека x е поголемиот од двата броја. Согласно условите на задачата го запишуваме равенството $\frac{x}{47-x} = 2 + \frac{5}{47-x}$, откаде следи дека $x = 33$ и $47 - x = 14$.

30. Определи цел позитивен број, за кој разликата на производот на двата следни броја и двата претходни броја е 600.
Решение: Имаме

$$(x + 1) \cdot (x + 2) - (x - 1) \cdot (x - 2) = 600 \Longleftrightarrow x = 100.$$

31. Пет вола и два овна чинат 11 златници, а осум овна и два вола чинат 8 златници. Колку златници чини еден вол, а колку еден овен?
Решение: Бидејќи 2 вола и осум овна чинат 8 златници, 1 вол и 4 овна чинат 4 златници, а 5 вола и 20 овна 20 златници. Ако 5 вола и 20 овна чинат 20 златници, и 5 вола и 2 овна чинат 11 златници, тогаш $20 - 2 = 18$ овна чинат 9 златници. Ова значи дека еден овен чини половина златник, а еден вол $4 - 4 \cdot 0{,}5 = 2$ златници.

32. Јован, Горан и Зоран заедно заработиле 6000 денари. Јован заработил $\frac{5}{7}$ од сумата која ја заработиле Горан и Зоран заедно, а Горан заработил $\frac{1}{4}$ помалку од Зоран. Колку заработил секој од нив поединечно?
Решение: Ако Зоран заработил $4x$, тогаш Горан заработил $3x$ денари, а заедно заработиле $7x$ денари. Бидејќи Јован заработил $\frac{5}{7}$ од нивните пари, следува дека тој заработил $5x$ денари, и заедно заработиле $12x = 6000$ денари. Од тука $x = 500$, па Горан заработил 1500 денари, Зоран 2000 и Јован 2500 денари.

33. Брат и сестра добиле 2000 денари џепарлак. Четвртина од парите братот дал за топка, а петтина од остатокот сестрата дала за кукла. Колку пари им останале?
Решение: Братот потрошил: $2000 : 4 = 500$ денари. Сестрата потрошила $(2000 - 500) : 5 = 300$ денари. Значи, останале:
$$2000 - 500 - 300 = 1200 \text{ денари.}$$

34. На крајот на учебната година учениците од едно одделение кое имало 20 ученици, собрале пари за поклон на учителката. Секое момче дало по 200 денари, а секое девојче по 150 денари и собрале вкупно 3600 денари. Колку момчиња, а колку девојчиња имало во тоа одделение?
Решение: Нека бројот на момчињата е a. Тогаш има $20 - a$ девојчиња. Учениците дале вкупно $200 \cdot a + 150 \cdot (20 - a)$ денари. Бидејќи тој износ мора да биде еднаков на 3600, добиваме дека $a = 12$. Значи, има 12 момчиња и 8 девојчиња.

35. 14560 денари треба да се поделат на 3 лица, така што секое наредно лице ќе добие 20% повеќе од претходното. Колку пари ќе добие секое лице поединечно?

Решение: Нека x е износот кој го добило првото лице. Според условите на задачата можеме да запишеме дека

$$x + \left(x + 20 \cdot \frac{x}{100}\right) + \left(\frac{6x}{5} + \frac{6x}{5} \cdot \frac{20}{100}\right) = 14500.$$

Првото лице ќе добие 4000денари, ворото 4800 денари и третото 5760 денари.

36. Една работа Душко сам ќе ја заврши за 12 дена, Ташко за 15 дена, а Рашко за 20 дена. Заедно работеле 4 дена, а потоа Ташко сам ја довршил работата. Колку денови вкупно работел Ташко?

Решение: За еден ден Душко ќе заврши $\frac{1}{12}$, Ташко $\frac{1}{15}$ и Рашко $\frac{1}{20}$ од работата, а сите заедно $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$ од работата. За 4 дена тие завршиле $\frac{4}{5}$ од работата и им останала петтина од работата која Ташко сам ќе ја заврши за $\frac{1}{5} : \frac{1}{15} = 3$ дена. Тоа значи дека Ташко ќе работи вкупно 7 дена.

37. Еден базен низ две цевки се полни со вода за 3 часа. Првата цевка сама би го наполнила базенот за 4 часа. За колку време втората цевка сама би го наполнила базенот?

Решение: Нека x е бараното време. Од условот на задачата следува $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x}\right) \cdot 3 = 1$ па бараното време е 12 часа.

38. Мајката пред 5 години била 6 пати постара од ќерката, а после 5 години двете заедно ќе имаат 55 години. Колку години во моментот има секоја од нив?

Решение: Ќерката пред 5 години имала x, а мајката $6x$ години. После 5 години, ќерката ќе има $x\ + 10$, а мајката $6x + 10$. Значи,

$$x + 10 + 6x + 10 = 55\ ,$$

односно $x = 5$.

Значи, ќерката сега има $x + 5 = 10$, а мајката $6x + 5 = 35$ години.

39. Ќерката денес е 18 години помлада од мајката, а пред 5 години таа била 4 пати помлада од мајката. Колку години има мајката, а колку ќерката?

Решение: Нека x е бројот на години на ќерката. Согласно условите на задачата го запишуваме равенството $(x - 5) \cdot 4 =\ x + 18 - 5$. Значи, ќерката сега има 11 години.

40. Таткото има 45 години, а синот 22. После колку години таткото ќе биде два пати постар од синот?

Решение: Нека x е бараниот број на години. Согласно условите на задачата го запишуваме равенството $45 + x = 2 \cdot (x + 22)$, значи $x = 1$.

41. Ана, Мара и Ема имаат вкупно 35 јаболка. Ана и Мара заедно имаат 25 јаболка, а Мара и Ема 22. Колку јаболка имала секоја од нив?

Решение: Нека бројот на јаболка кои ги има Ана е еднаков на a, Мара на m и Ема e. Тогаш е $a + m + e = 35$ и $a + m = 25$ од што следи дека $e = 35 - 25 = 10$. Слично, $e = 13$. Тогаш е $a + e = 10 + 13 = 23$, па $m = 35 - 23 = 12$. Ана има 13 јаболка, Мара 12 и Ема 10.

42. Група гусари со чамци требале да се префрлат од бродот до пуст остров. Кога на секој чамец би се качиле по 5 гусари, за еден гусар не би имало место, а кога во секој чамец би се качиле по 6 гусари, еден чамец би останал празен. Колку чамци и колку гусари имало на бродот?

Решение: Нека x е бројот на чамците. Тогаш бројот на гусари во првиот случај е $5x + 1$, а во вториот $6(x - 1)$. Значи, $5x + 1 = 6(x - 1)$ односно $x = 7$. Значи, имало 7 чамци и $5 \cdot 7 + 1 = 36$ гусари.

43. На зимовање се пријавиле $\frac{2}{9}$ ученици повеќе отколку што било планирано. Пред тргнување заради болест $\frac{3}{8}$ од пријавените ученици морале да го откажат зимовањето, па така на зимовање заминале 8 ученици помалку од планираните. Колку било планирано и колку ученици отишле на зимовање?

Решение: Нека бројот на планираните ученици биде x. Тогаш бројот на пријавените ученици е $\frac{11}{9}x$, а на зимовање отишле $\frac{8}{11} \cdot \frac{11}{9}x = \frac{8}{9}x$ ученици. Решение на равенката $x - 8 = \frac{8}{9}x$ е $x = 72$. Значи бројот на планираните ученици е 72, а на зимовање отишле 64 ученици.

44. Ѓорги купил полн џеб чоколадца. Најпрвин ја сретнал Ана и ѝ дал половина од чоколадцата што ги имал во џебот и уште половина чоколадце. Потоа ја сретнал Бојана. И на неа ѝ дал половина од преостанатите чоколадца и уште половина чоколадце. На крајот ја сретнал Цена на која и дал половина од чоколадцата кои му преостанале и уште половина чоколадце. Тогаш џебот на Ѓорги останал празен. Колку чоколадца купил Ѓорги?

Решение: Ако започнеме од крајот, после средбата со Цена Ѓорги останал без чоколади. На Цена и дал половина од сите што ги имал во џебот и уште половина чоколадце $x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=0$. Значи $x=1$. Од тоа јасно се забележува дека после средбата со Бојана имал едно чоколадце. Ако пред средбата со Бојана имал y чоколадца тогаш $y-\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)=1$, па $y=3$. Тоа значи дека после средбата со Ана на Ѓорги му останале три чоколадца. Ако вкупниот број на чоколадца е n, јасно е дека $n-\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)=3$, па од тука $n=7$.

45. Топка која слободно паѓа при секое паѓање од земјата одскокнува до висина која е за $\frac{3}{5}$ помала одколку висината од која паѓа. Знаејќи дека во третиот одскок достигнала висина од $32cm$ определи ја должината на патот кој топката ќе го помине до моментот кога четврти пат паѓа на земјата.

Решение: За да може топката да достигне $32cm$ во третиот отскок, во вториот отскок мора да достигне висина x која го задоволува условот $\frac{2}{5}x=32cm$. Значи $x=80cm$. Слично, за да вториот отскок биде $80cm$ потребно е висината на првиот отскок да биде $200cm$, а за првиот отскок да биде $200cm$ потребно е топката да падне од висина $500cm$. Патот кој топката го поминала до четвртото допирање на земјата е $s=500+2\cdot 200+2\cdot 80+2\cdot 32=1124cm$.

46. Во две купчиња има џамлии. Бројот на џамлиите од првото купче спрема бројот на џамлиите се однесува како 4 спрема 3. Ако две џамлии се префлат од едно во друго купче новиот однос ќе биде 3 спрема 2. По колку џамлии имало во секое од купчињата на почетокот?

Решение: Бидејќи $\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$, значи дека двете џамлии се преместуваат од помалото во поголемото купче. Ако со x го означиме вкупниот број на џамлии во двете купчиња, тогаш во поголемото купче има $\frac{4}{7}x=\frac{20}{35}x$ џамлии. Со префлање на две џамлии во поголемото купче ќе има $\frac{3}{5}x=\frac{21}{35}x$ џамлии. Значи, две џамлии претставуваат $\frac{1}{35}x$ што значи дека има вкупно 70 џамлии, и тоа 40 во првото и 30 во второто купче.

47. Голем миксер во фабрика за еурокрем се полни преку славина со течно црно чоколадо за 23 минути, а преку славина за течно бело чоколадо за 17 минути. После колку време од отворањето на славината за црна чоколада треба да се отвори славината за белата чоколада, така што во миксер што на почетокот бил празен, на крајот ќе има 2,5 пати повеќе црно отколку бело чоколадо?

Решение: Во полн миксер, вкупната количина на чоколадо е 3,5 пати поголема од количината на бело чоколадо. Затоа $\frac{5}{7}$ од полниот миксер ќе биде црно чоколадо и $\frac{2}{7}$ бело. Затоа, славината за црно чоколадо треба да биде отворена $\frac{5}{7} \cdot 23$ минути, а онаа за бело $\frac{2}{7} \cdot 17$ минути. Бидејќи $\frac{5}{7} \cdot 23 - \frac{2}{7} \cdot 17 = \frac{81}{7}$, заклучуваме дека славината за бело чоколадо треба да се отвори $11\frac{4}{7}$ минути после отварањето на славината за црно чоколадо.

48. На масата има три свеќи со еднаква должина, но различна дебелина. Во 8 часот Јагода ја запалила првата свеќа, а после еден час и останатите две. Еден час подоцна, првата и третата се изедначиле во должина. Кога должините на првата и втората свеќа ќе се изедначат ако е познато дека третата свеќа целосно ќе изгори за 8 часа, а третата за 12 часа?

Решение: Првата и третата свеќа се изедначиле по должина бидејки првата свеќа горела 2 часа, а третата 1 час. Значи првата свеќа гори 2 пати побавно од третата, па ќе изгори за 16 часа. Првата свеќа за 4 часа ќе изгори четвртина од својата должина. За тоа време втората ќе гори 3 часа и исто така ќе изгори четвртина од својата должина. Значи, во 12 часот овие две свеќи ќе се изедначат по должина.

49. Во секоја клупа во едно оделение седат најмногу по двајца ученици. Познато е дека $\frac{2}{3}$ од вкупниот број на момчиња седат во клупи со $\frac{3}{5}$ од вкупниот број на девојчиња. Кој дел од учениците седи во пар момче-девојче?

Решение: Нека p е број на парови момче-девојче кои седат заедно. Значи бројот на ученици кои седат во парови е $2p$. Нека m и n се бројот на момчиња и девојчина, соодветно. Тогаш $p = \frac{2}{3}m$ и $p = \frac{3}{5}n$, од каде $m = \frac{3}{2}p$ и $n = \frac{5}{3}p$. Вкупниот број на ученици во одделението е $m+n=\frac{19}{6}p$, па $\frac{2p}{\frac{19}{6}p}=\frac{12}{19}$. Значи $\frac{12}{19}$ од вкупниот број на ученици седи во мешани парови.

50. Златарот Златко за $\frac{1}{2}kg$ сребро и $\frac{1}{3}kg$ злато платил $750\,000$ денари, а за $1kg$ сребро и $\frac{1}{2}kg$ злато платил $1\,250\,000$ денари. Колку ќе плати Златко за $2kg$ сребро и $1kg$ злато?

Решение. Ако $\frac{1}{2}kg$ сребро и $\frac{1}{3}kg$ злато чинат $750\,000$ денари, тогаш двојно поголема количина, т.е. $1kg$ сребро и $\frac{2}{3}kg$ злато чинат $1\,500\,000$ денари. Ако од ова одземеме $1kg$ сребро и $\frac{1}{2}kg$ злато, добиваме дека $\frac{1}{6}kg$ злато чини $250\,000$ денари, одкаде $1kg$ злато чини $1\,500\,000$ денари. Сега едноставно добиваме дека $1kg$ сребро чини $500\,000$ денари. Значи, $2kg$ сребро и $1kg$ злато чинат $2\,500\,000$ денари.

51. Од осумте овци на Борјан, првата пласт сено би изела за 1 ден, втората истиот пласт сено би го изела за 2 дена, ..., осмата за осум дена. Дали пластот сено побрзо ќе го изедат првата и втората овца заедно или другите преостанати овци заедно?

Решение. Првата овца за еден ден ќе изеде еден пласт сено, втората овца ќе изеде $\frac{1}{2}$., третата $\frac{1}{3}$, ... осмата $\frac{1}{8}$. Значи, првите две за еден ден ќе изедат $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ пласт на сено, додека преостанатите ќе изедат

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{341}{280}\ .$$

Бидејќи $\frac{341}{280}<\frac{420}{280}=\frac{3}{2}$, добиваме дека првите две овци јадат повеќе сено за еден ден, па и побрзо ќе изедат пласт сено.

52. Кој број го има својство неговата петина да е четвртина?

Одговор: $\frac{5}{4}$.

53. Две момчиња заедно имаат $100kg$. Кога потешкиот од нив би застанал на едната страна од вагата заедно со ранец од $5kg$, а полесниот на другата страна со ранец од $15kg$ вагата би била во рамнотежа. Колку килограми има секое момче?

Решение: Може да заклучиме дека едното момче во однос на другото е потешко за $10kg$, па $x + x + 10 = 100$, односно момчињата имаат $45kg$ и $55kg$.

54. Братот е два пати постар од сестрата, а 4 пати помлад од својот татко. Таткото и ќерката заедно имаат 36 години. Колку години имаат заедно братот, сестрата и нивниот татко?

Решение: Ако бројот на години на братот го означиме со a, бројот на години на сестрата со b, а бројот на годинини на таткото со c, тогаш врз основа на текстот на задачата имаме: $a = 2b, c = 4a$, односно $c = 8b$. Збирот на годините на таткото и ќерката изнесува $9b$. Оттука, следи дека бројот на години на сестрата е 4, на братот 8, а на нивниот татко 32. Вкупниот збир на нивните години изнесува 44.

55. Овошките се засадени така да во секој ред биле по 15 стебла. Кога во овоштарникот би било 6 реда помалку, а во секој ред 5 овошни дрва повеќе, тогаш во целиот овоштарник би било вкупно 10 овошни дрва повеќе. Колку редови на овошни дрва биле засадени?

Решение: Да го обележиме бројот на редови овошки со x. Тогаш е $15x + 10 = 20 \cdot (x - 6)$. Со решавање се добива дека $x = 22$.

56. Ако страната на еден квадрат се зголеми за $2cm$, тогаш неговата плоштина ќе се зголеми за $16cm^2$. Определи ја страната на тој квадрат.

Решение: Плоштината на квадратот се пресметува според формулата $P = a \cdot a$, каде a е должина на страната на квадратот. Според тоа,

$$(a + 2) \cdot (a + 2) = a \cdot a + 16.$$

Од последната равенка се добива должината на страната на квадратот е $3cm$.

2. Задачи поврзани со брзини

При решавањето на задачи во овој дел ќе го користиме следново тврдење: Патот што едно тело го минува за одреден временски период при постојана брзина е еднаков на производот на брзината и времето, односно брзината е еднаква на количникот на изминатиот пат и времето за кое е изминат тој пат

$$v = \frac{s}{t}, (v - \text{брзина}, t - \text{време}, -\text{пат}),\ \ s = v \cdot t,\ \ t = \frac{s}{v}.$$

57. Слободан патот долг $1,5\ km$ го претрчал за неколку минути. Колку метри претрчал Дарко, ако потрошил два пати повеќе време од Слободан и ако во секоја минута поминувал два пати подолг пат од Слободан?

Решение: Бидејки Дарко бил два пати побрз од Слободан, за исто време претрчал два пати подолг пат, значи $3km$, а заради два пати подолгото време уште $3km$. Значи Дарко вкупно претрчал $6km$.

58. За неколку часа пешакот поминал пат од $24km$. Колку километри би поминал велосипедист за два пати подолго време од пешакот, ако секој час поминувал три пати подолг пат отколку пешакот?

Решение: Велосипедистот би поминал $2 \cdot 3\ \cdot 24 = 144km$.

59. Од домот до училиштето ученикот поминува пат од $30km$. Пешки поминувал пет пати пократок пат отколку со автобус. Колку долго патувал од дома до училиште, ако пешки поминувал $4\frac{km}{h}$, а автобусот просечно возел $50\frac{km}{h}$.

Решение: Ученикот поминувал $5km$ пешки и $25km$ со автобус. Значи пешки одел $1h\ 15min$, а $30min$ со автобус. Од домот до училиштето патува вкупно $1h\ 45min$.

60. Камион од местото A до местото B патувал три часа. Првиот час поминал четвртина од патот, вториот час поминал третина од патот и третиот час $50km$. Колкаво е растојанието меѓу местата A и B?

Решение: Ако растојанието меѓу A и B е x, имаме дека $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + 50 = x$ од каде што $x = 120km$.

61. Велосипедист за 4 часа поминал $100km$. Првиот час поминал четвртина од патот, вториот час $\frac{4}{5}$ од патот кој го поминал првиот час, а третиот час $\frac{3}{5}$ од патот што поминал во првите 2 часа. Колку километри поминал велосипедистот во текот на четвртиот час?

Решение: Прв час: $100 \cdot \frac{1}{4} = 25$. Втор час: $25 \cdot \frac{4}{5} = 20$. Трет час: $(25 + 20) \cdot \frac{3}{5} = 27$. Четврти час: $100 - (25 + 20 + 27) = 28km$.

62. Растојанието од место A до место B патникот го поминува за 6 часа. Ако брзината на своето движење ја зголеми за $3km/h$, тогаш му се доволни 4 часа. Колкава е оддалеченоста помеѓу местата A и B?

Решение: Нека v е брзина на патникот. Од причина што патот е константен, очигледно е $6v = 4 \cdot (v + 3)$. Одовде добиваме дека брзината $v = 6km/h$. Затоа $s = 6v = 36\ km$

63. Група на туристи патувале 8 часа со воз, 15 часа со автобус и 7 часа со брод и при тоа поминале вкупно $1449\ km$. Автобусот се движел два пати поспоро одколку возот и два пати побрзо одколку бродот. Колку километри групата туристи поминала со секое од превозните средства?

Решение: Ако бродот се движел со брзина од $x\ km/h$, тогаш автобусот се движел со брзина од $2xkm/h$, а возот со $4x\ km/h$. За 8 часа возот поминал $8 \cdot 4 = 32x$, автобусот $15 \cdot 2x = 30x$ и бродот $7x\ km$. Значи, поминат е пат од $32x + 30x + 7x = 69x = 1449\ km$. Одовде, $x = 21\ km$, што значи дека бродот пловел со брзина од $21\ km/h$, автобусот со $42km/h$, а возот со $84\ km/h$.

64. Воз со девет вагони за 12 секунди поминал покрај Ана која чекала да ја премине пругата. Колкава е брзината на возот, ако должината на секој вагон е $16m$?

Решение: Должината на сите 9 вагони е $9 \cdot 16 = 144m$, а тие покрај Ана поминале за 12 секунди. Тоа значи дека брзината на возот била $\frac{144m}{12s} = 12m/s$. За еден час возот поминува $12 \cdot 60 \cdot 60 = 43200m$.

65. Двајца планинари, од кои едниот поминува 5 километри на час, а другиот 6 километри на час тргнуваат истовремено еден кон друг во пресрет од две различни места кои се меѓусебно оддалечени $55km$. После колку часа од моментот на тргнувањето ќе се сретнат планинарите?

Решение: Нека $x = 5$ и $y = 6$ се брзините на првиот и вториот планинар, соодветно, а t е бараното време. Согласно условите на задачата, $x \cdot t + y \cdot t = 55$, односно t =5 часа.

66. Од градот A кон градот B и обратно истовремено еден кон друг тргнуваат 2 камиони. Растојанието помеѓу градовите е $390km$, а еден од камионите е побрз од другиот за 10 km/h.

Колкава брзина има секој камион ако после 3 часа растојанието меѓу камионите е 24 km?

Решение: Нека брзината на поспориот камион е x, а на побрзиот $x+10$. Тогаш, поспориот за 3 часа поминал $3xkm$, а побрзиот $3x+30km$. Значи, $3x+3x+30+24=390$ или $6x=390-54=336$, па $x=56\ km/h$. Постои и друго решение доколку во меѓувреме се разминале. Тогаш $6x+30-24=390$, т.е. $x=64\ km/h$.

67. Атлетичар се натпреварува во трка на $3000m$. Првата третина од патот ја минал со брзина од $5\frac{m}{s}$, втората со брзина за петтина помала од претходниот перод, а последната третина со брзина која е за половина поголема отколку претходната третина. Колку време му требало на атлетичарот да ја истрча патеката?

Решение: За да првите 1000 метри ги истрча со брзина од $5\frac{m}{s}$ на атлетичарот му требале $1000:5=200s$. За наредните $1000m$ му требале $1000:4=250s$ и за последната третина $1000:6=166\frac{4}{6}s$. Вкупно $616\frac{4}{6}s$.

68. Црвот треба да помине ливада долга 50 метри. Во текот на денот тој минува 5 метри, а во текот на ноќта се враќа 2 метри. Колку дена ќе му бидат потребни на црвот за да ја помине ливадата?

Решение: За едно деноноќие црвот минува 3 метри. По 15 деноноќија црвот ќе биде на четириесет и петтиот метар. Следниот ден ќе помине уште 5m и и ќе стигне до крајот на ливадата. Па така, на црвот ќе му требаат 16 дена за да ја помине ливадата.

69. Два автомобили истовремено тргнале по автопат. Едниот возел со брзина од $60km/h$, а другиот $80km/h$. При тргнувањето биле оддалечени $200km$. Колкава ќе биде нивната меѓусебна оддалеченост после еден час.

Решение: Оваа задача има четири решенија во зависност од тоа во која насока се движеле автомобилите:

а) Ако се движат еден кон друг: $200-(60+80)=60km$

б) Ако се дижат во спротивни насоки: $200+(60+80)=340km$

в) Ако вториот го пристигнува првиот автомоби: $200-80+60=180km$

г) Ако првиот го пристигнува вториот автомобил: $200 - 60 + 80 = 220km$

70. Два автомобили се движат еден кон друг, првиот со брзина од $50\frac{km}{h}$, а другиот $15\frac{km}{h}$ побрзо. Се сретнале 2 часа после тргнувањето. На кое растојание биле на почетокот?
Решение: После 2 часа, првиот автомобил поминал пат од $50 \cdot 2 = 100km$, а вториот $(50 + 15) \cdot 2 = 130km$. Значи, вкупното растојание меѓу нив на почетокот било $100 + 130 = 230km$.

71. Од местото A кон местото B возач на автомобил се движи со брзина од $60\frac{km}{h}$. Еден час подоцна, од местото B кон местото A тргнува човек со мотор и се движи со брзина од $80\frac{km}{h}$. После колку време, од тргнувањето на возачот на автомобил ќе се сретнат, ако растојанието помеѓу градовите A и B е $270km$?
Решение: Пред да тргне моторџијата, возачот на автомобил веќе поминал $60km$. Значи, останувaат уште $210km$. Тие еден кон друг се приближуваат со брзина од $60 + 80 = 140\frac{km}{h}$, што значи дека ќе се сретнат после $210 : 140 = 1{,}5h$ после тргнувањето на моторџијата, односно 2,5 часа после тргнувањето на возачот на автомобил.

72. Ограбувач на банка се движи со брзина од $80\frac{km}{h}$. Осмина час подоцна во потера тргнува полицаец кој се движи со брзина $100\frac{km}{h}$. После колку време полицаецот ќе го стигне крадецот?
Решение: Пред да тргне полицаецот, крадецот поминал пат од $\frac{1}{8} \cdot 80 = 10km$. Полицаецот го пристигнува крадецот со брзина од $100 - 80 = 20\frac{km}{h}$, што значи дека овие $10km$ ќе ги надополни за $10 : 20 = 0{,}5h$.

73. Глисер тргнува да претекне брод долг $150m$. Бродот се движи со брзина од $15\frac{m}{s}$, а глисерот со брзина од $20\frac{m}{s}$. Колку време е потребно глисерот да го претекне бродот?
Решение: Брзината со која глисерот го претекнува бродот е $20 - 15 = 5\frac{m}{s}$. Времето потребно за тоа е $150 : 5 = 30s$.

74. Моторен чамец, движејки се спротивно од течението на реката растојанието од $36km$ го поминува за 4 часа. Ако е познато дека брзината на реката е $2km/h$, колку време му е потребно да го помине истото растојание, движејки се во правец на течението на реката и тоа со иста брзина во однос на реката? На враќање брзината на реката е $1km/h$.

Решение: Нека v е брзината на чамецот во мирна вода. Важи следното

$$36km = (v - 2km/h) \cdot 4h.$$

Значи, $4 \cdot v = 44km/h$, значи $v = 11km/h$. На чамецот на враќање му се потребни $36/(v + 1) = 3h$.

75. Перица шутирајќи топка случајно скршил прозорец на соседот. Соседот излегол и го здогледал Перица на растојание од $100m$ и почнал да трча по него со брзина од $5\frac{m}{s}$. Во истиот момент, Перица почнал да бега кон својот дом, кој бил оддалечен $135m$, со брзина од $3\frac{m}{s}$. Дали Перица ќе успее да побегне?

Решение: До својот дом Перица стасува за $135:3 = 45s$, а човекот може да го стаса Перица за $100:(5 - 3) = 100:2 = 50s$. Тоа значи дека Перица ќе успее да побегне.

76. Возач на автомобил на $120m$ пред себе здогледува автобус. Периметарот на тркалото на автомобилот е $2m$, и се врти 7 пати во $1s$, додека периметарот на тркалото на автобусот е $5m$ и се врти 2 пати во $1s$. Колку метри ќе помине автомобилот додека да го стигне автобусот?

Решение: Брзината на автомобилот е $7 \cdot 2 = 14\frac{m}{s}$, а на автобусот е $5 \cdot 2 = 10\frac{m}{s}$ што значи дека автомобилот го пристигнува автобусот со брзина од $4\frac{m}{s}$. Значи, потребни му се $120:4 = 30s$, односно ќе помине пат од $3 \cdot 14 = 420m$.

77. Воз со должина $500m$ се движи со брзина од $60km/h$. Колку време ќе му биде потребно на возот да помине низ тунел со должина $500m$?

Решение: Кога локомотивата ќе влезе во тунелот се смета дека и возот влегол во тунелот, а кога последниот вагон ќе излезе од тунелот се смета дека целиот воз излегол од тунелот. Локомотивата и целата композиција поминуваат $500m$ во тунелот и уште $500m$ додека и последниот вагон да излезе од тунелот, $500m + 500m = 1000m = 1km$. Значи, за целиот воз да излезе од тунелот потребна е *1мин*.

78. Должината на патот помеѓу местата *A* и *B* изнесува $595km$. Во 7 часот наутро, во ист ден од овие две места еден кон друг во пресрет тргнуваат камион и автомобил. Секој час камионот поминува $45km$, а автомобилот $60km$. После точно три часа возење направиле пауза од 30 *мин*, а потоа со иста брзина го продолжиле патот понатаму. Колку биле оддалечени еден од друг камионот и автомобилот во *13ч и 30мин*.?

Решение: Вкупно патувале $13h\,30min - 30min = 13h,$ потоа $13h - 7h = 6h.$ За тоа време камионот поминал $45 \cdot 6 = 270km,$ а автомобилот $60 \cdot 6 = 360km.$ Нивната меѓусебна оддалеченост во *13ч и 30мин* била $(270km + 360km) - 595 = 35km.$

79. Автобусот растојанието помеѓу местата А и B го минува со брзина од $90\frac{km}{h}$, а од и B кон А со брзина од $60\frac{km}{h}$. Определи ја средната брзина на авотбусот на целиот пат.

Решение: Средната брзина на автобусот е $x\frac{km}{h}$, а растојанието помеѓу местата А и B е skm. Тогаш е

$$\frac{s}{90} + \frac{s}{60} = \frac{(2 \cdot s)}{x},$$

односно $x = 72\frac{km}{h}$.

80. На оддалеченост од 125 метри, кучето го забележало зајакот и почнало да трча по него. Во истиот момент зајакот се дал во бегство. Со еден скок зајакот прескокнува $\frac{1}{2}m$, а кучето $2m$. Кучето скокнало 2 пати за времето во кое зајакот скокнал 7 пати. Колкава оддалеченост претрчало кучето откако го забележало зајакот, до моментот кога го уловило?

Решение: Кучето скокнало 4 пати за времето во кое зајакот скокнал 14 пати. За тоа време кучето поминало $8m$, а зајакот $7m$, значи во 4 скока кучето го намалило нивното меѓусебно растојание за еден метар. За да ја надокнади предноста на зајакот, кучето морало да помине 125 пати по $8m$. Според тоа, за да го улови зајакот, кучето морало да помине пат од $1000m$.

81. Над северниот пол истовремено има три земјини сателита. Првиот ја обиколува земјата за 90 минути, вториот за 105 минути, а третиот за 2 часа. Колку пати првиот сателит ќе ја обиколи Земјата до моментот кога прв пат сите три сателити повторно ќе се најдат над северниот пол?

Решение: Најмал заеднички содржател за $90, 105$ и 120 е 2520, па затоа сите три сателити повторно ќе се најдат над северниот пол после 2520 минути. За тоа време првиот сателит ќе ја обиколи Земјата $\frac{2520}{90} = 28$ пати.

82. Двајца моторциклисти еден кон друг тргнале истовремено од местата А и В. Првиот се движел со брзина $1\frac{km}{min}$, а вториот со брзина $800\frac{m}{min}$. Кога се сретнале првиот моторциклист поминал $66km$ повеќе од вториот. Колкаво е растојанието помеѓу местата А и В?

Решение: Првиот моторциклист секоја минута поминувал по $200m$ повеќе отколку вториот мотоциклист. Оттука можеме да го добиеме времето кое го извозил до моментот на средба или

$$\frac{66km}{200\frac{m}{min}} = \frac{66000\,m}{200\frac{m}{min}} = 330min.$$

Бидејќи првиот мотоциклист секоја минута поминувал по $1km$, истиот поминал $330 \cdot 1km = 330km$, а вториот $330 - 66 = 264km$. Растојанието помеѓу местата А и В е $594km$.

83. Од местата C и D меѓесебно оддалечени $462km$ истовремено еден кон друг во пресрет тргнале два воза. Возот кој тргнал од местото C се движел со брзина $43km/h$, а другиот воз со брзина $34km/h$. Колку време поминало од нивното тргнување до средбата. На кое растојание од местото C ќе се сретнат возовите?

Решение: Двата воза за $1h$ ќе помаинат $43 + 34 = 77km$. Значи дека времето потребно до средбата е $\frac{462}{77} = 6h$. Од ова следи дека ќе се сретнат на растојание од $6 \cdot 43 = 258km$ од местото C.

84. Две девојчиња се натпреварувале во трчање. Помалото за 1 мин претрчало $180m$, а постарото $200m$. Малата почнала да трча една минута пред да почне постарата. Колку време треба да трча постарото за го стаса помалото девојче?

Решение: Знаеме дека помалото девојче во самиот старт веќе поминало $180m$ повеќе од постарото (била во предност од $180m$), но исто така знаеме и дека постарото секоја минута поминува $200m -$

$180m = 20\mathrm{m}$ повеќе од помалото. Значи, постарото девојче ќе го стигне помладото за $\frac{180m}{20\frac{m}{min}} = 9$минути.

85. Кучето го приметило зајакот на растојание од $240m$ пред себе. Зајакот претрчува $500m$ за 2 минути, а кучето претрчува $1325m$ за 5 минути. За кое време кучето ќе го стигне зајакот?

Решение: Зајакот претрчува $\frac{500m}{2min} = 250\frac{m}{min}$, а кучето $\frac{1325m}{5min} = 265\frac{m}{min}$. Значи, кучето секоја минута надополнува $265 - 250 = 15m$. Од тука, кучето ќе го стигне зајакот после $\frac{240}{15} = 16$ минути.

86. Коњаник треба да го стигне пешакот кој веќе 7 часа патува. Колку време му е потребно, ако пешакот поминува $5\frac{km}{h}$, а коњаникот $12\frac{km}{h}$?

Решение: Пешакот има предност од $7 \cdot 5 = 35km$. Бидејќи коњаникот секој час надополнува $12 - 5 = 7km$, за да надополни $35km$ потребни му се $\frac{35}{7} = 5h$.

87. Растојанието помеѓу Скопје и Солун е $400km$. За да стигне од Скопје до Солун на едно комбе му се потребни $10h$, а на друго $5h$. Ако двете комбиња тргнат истовремено од Скопје кон Солун, за колку време комбињата повторно ќе се сретнат? (Веднаш кога ќе стигне во Солун, второто комбе без да прави пауза тргнува кон Скопје.)

Решение: Брзината на првото комбе е $\frac{400km}{10h} = 40\frac{km}{h}$, а на второто $\frac{400km}{5h} = 80\frac{km}{h}$. После $5h$ од почетокот на движењето второто комбе тргнува од Солун кон Скопје (поминало цел пат). За тоа време првото комбе поминало растојание од $40 \cdot 5 = 200km$. Растојанието помеѓу комбињата тогаш е $200km$. Времето кое ќе помине до средбата е $\frac{200}{40+80} = 1h$ и $40min$. Од тука следува дека вкупното време поминато до средбата изнесува $6h$ и $40min$.

88. Од место А движејќи се со постојана брзина тргнува велосипедист. Три часа потоа по него тргнува човек со автомобил кој се движи со постојана брзина која е четири пати поголема од брзината на велосипедистот. После колку време, од моментот на тргнувањето на велосипедистот, човекот во автомобилот го стигнал велосипедистот?

Решение: До моментот на сретнување тие поминале исти патишта: велосипедистот $s = v \cdot t$, а автомобилот $s = 4v \cdot (t - 3)$. Ако ги изедначиме левите страни, ќе добиеме

$$v \cdot t = 4v \cdot (t - 3.)$$

Значи, бараното време е $t = 4h$.

89. Од две места, еден на друг во пресрет тргнале двајца велосипедисти. Едниот се движел со брзина од $10\frac{km}{h}$, а другиот со брзина од $20\frac{km}{h}$. Ако е познато дека велосипедистите се сретнале на половина пат и дека првиот велосипедист тргнал 1 час пред вториот, колку време поминало до средбата?

Решение: Тоа што велосипедистите се сретнале на половина пат, ни кажува дека тие до средбата поминале исто растојание. Нека е t време поминато од поаѓањето на вториот велосипедист до средбата. Од тука може да се запише следното: $10\frac{km}{h} \cdot (t+1) = 20\frac{km}{h} \cdot t$. Со решавање на равенството добиваме дека $t = 1h$. Значи, времето поминато од почетокот на движењето на првиот велосипедист до средбата е 2 h.

3. Примена на системи линеарни равенки

90. Мајката им дели јаболка на своите деца. Ако на секое даде по 5 јаболка ќе и останат неподелени уште 3 јаболка, Ако на секое даде по 6 јаболка ќе и недостасуваат 2 јаболка. Колку деца и колку јаболка има мајката?

Решение: Нека бројот на деца го означиме со x , а бројот на јаболка со y . Го запишуваме системот равенки

$$\begin{cases} y = 5x + 3 \\ y = 6x - 2 \end{cases}.$$

Со изедначување на десните страни на овие равенства се добива дека $x = 5$, а потоа се пресметува $y = 28$. Значи мајката има пет деца и 28 јаболка.

91. Во шумата имало вкупно 564 зајаци и верверици. Кога бројот на зајаци се зголемил 3 пати, а бројот на верверички 5 пати во шумата имало вкупно 2010 зајаци и верверици. Колку зајаци, а колку верверици имало на почетокот во шумата?

Решение: Ако бројот на зајаци во шумата го означиме со x, а бројот на верверички со y и го запишеме системот на равенки добиваме дека

$$\begin{cases} x + y = 564 \\ 3x + 5y = 2010 \end{cases}.$$

Со решавање на системот, се добива дека на почетокот во шумата имало 355 зајаци и 209 верверички.

92. Марија и Милица решиле да купат збирка по математика. За купувањето на Марија и недостигале 16, а на Милица 4 денари. Кога ги здружиле средствата им недостигале 2 денари. Колку чини збирката?

Решение: Ако Марија има x денари, Милица y денари, а збирката чини z денари, тогаш

$$\begin{cases} z = x + 16 \\ z = y + 4 \\ z = x + y + 2 \end{cases}.$$

Со решавање на системот добиваме дека збирката чини 18 денари.

93. Столарот изработил 100 столици, од кои некои имале по 3 ногарки, а некои по 4 ногарки. Колку столици изработил столарот од секој вид, ако сите столови заедно вкупно имале 322 ногарки?

Решение: Бројот на триножни столици го означуваме со x, а на четириножни столици со y. Системот на равенки гласи

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 3x + 4y = 322 \end{cases}.$$

Решенија на системот се $y = 22$ и $x = 78$.

94. Збирот на периметрите на три исти правоаголници изнесува $360cm$. Пресметај ја должината и ширината на еден од правоаголниците, ако должината е за $1dm$ поголема од ширината.

Решение: Ако должината ја означиме со a, а ширината со b и ги претставиме во *см*, тогаш

$$6 \cdot (a + b) = 360 \text{ и } a = b + 10 .$$

Ширината на правоаголниците е $25cm$, а должината $35cm$.

95. Нина капутот, кошулата и чевлите ги платила 16000 денари. Капутот го платила 9000 денари повеќе од кошулата, а кошулата и капутот 12000 денари повеќе од чевлите. Колку го платила капутот, колку кошулата, а колку чевлите?

Решение: Нека цената на капутот ја означиме со x, цената на кошулата со y, а цената на чевлите со z. Согласно условот на задачата имаме

$$\begin{cases} x+y+z=16000 \\ x=y+9000 \\ x+y=12000+z \end{cases}$$

Од првата и третата равенка се добива дека чевлите ги платила 2000 денари, а со комбинација на втората и третата се добива дека капутот го платила 10500 денари и кошулата 3500 денари.

96. Три рибари заедно уловиле $146kg$ риба. Кога првиот продал $23kg$, вториот $19kg$, а третииот $32kg$ им останала еднаква количина на риба. Колку уловил секој од нив поединечно?

Решение: Нека првиот уловил $x\ kg$, вториот $y\ kg$, а третиот $z\ kg$.Го запишуваме системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=146 \\ x-23=y-19=z-32 \end{cases}.$$

Првиот рибар уловил $47kg$, вториот $43kg$, а третиот $56kg$.

97. Виното во шише чини 400 денари. Виното е поскапо 7 пати од шишето. Колку чини шишето, а колку виното.

Решение: Ако цената на шишето ја означиме со x, а цената на виното со y, добиваме

$$\begin{cases} y=7x \\ x+y=400 \end{cases}$$

Следи дека $8x=400$, односно $x=50$. Цената на шишето е 50, а на виното 350 денари.

4. Нерешени задачи

98. Во двоцифрен број прецртана е една од цифрите и е добиен број кој е 16 пати помал од дадениот. Определи ги сите такви двоцифрени броеви, како и соодветната цифра која треба да се прецрта.

99. Ученик во првите четири години пораснал 17 см. Секоја година растел за природен број на сантиметри и секоја година повеќе отколку претходната. Во четврто одделение пораснал три пати повеќе отколку во прво. Колку пораснал ученикот во трето одделение?

100. Збирот на два броја е 8016. За кои броеви станува збор, ако се знае дека еден од нив е еднаков на третина од другиот број?

101. Стефан има 54 џамлии: бели, жолти и сини. Бели џамлии има два пати повеќе од жолти, а сини колку бели и жолти заедно. Колку има бели, колку сини, а колку жолти џамлии има Стефан?

102. Танаско знае дека ќе му останат 46 денари ако купи три тетратки, а за да купи 5 такви тетратки ќе му недостасуваат 90 денари. Колку денари чини една тетратка?

103. а) Определи го бројот кој е за 45568 поголем од 109109.
б) Определи го бројот кој е за 60006 помал од 100000.

104. Кој број е 5 пати помал од разликата на броевите 46238 и 9393?

105. Собери го најголемиот петцифрен број напишан со различни цифри и најмалиот шестцифрен број напишан со различни цифри.

106. Намалителот е 2004, а разликата е пет пати поголема од намалителот. Колку изнесува намаленикот?

107. Напиши го најмалиот и најголемиот парен седумцифрен број користејќи некоја од цифрите 3, 5, 0, 8 и 7 во кој ниту една од цифрите не се појавува повеќе од два пати.

108. За колку збирот на парните броеви на третата стотка е поголем од збирот на непарните броеви на третата стотка?

109. Ако за четвороцифрени броеви чиј збир на цифри е бројот четири, велиме дека дека се „четвртести“, определи ја најголемата можна разлика меѓу два „четвртасти“ броја.

110. Определи три последователни природни броеви чиј што производ е еднаков на 60.

111. Ученикот замислил еден број. Прво тој број го помножил со бројот 12, а потоа со бројот 9 и кажал дека првиот производ е за 270 поголем од вториот. Кој број го замислил ученикот?

112. Третина од збирот на три броја е 2000. Определи ги тие броеви, ако е познато дека вториот број е три пати поголем од првиот, а третиот е за 5 помал од првиот.

113. Определи број кој од 25432 е помал за толку за колку што бројот 658 е помал од 1024.

114. За четвороцифрен број велиме дека е „убав“, ако е запишан со помош на две четворки и две петки. Определи ја најмалата и најголемата разлика помеѓу два различни „убави“ четирицифрени броеви?

115. Збирот на пет броја, од кои секој следен е за 27 поголем од претходниот, е 305. Одреди ги тие броеви.

116. Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 8. Ако им ги замениме местата на цифрите и првиот број го поделиме со вториот се добива количник 2 и остаток 10. Кој е тој број?

117. По смртта на таткото неговите синови го поделиле наследството на следниот начин: најстариот земал 100 милиони и уште шестина од остатотокот, вториот земал 200 милиони и уште шестина од остатокот и третиот земал 300 милиони и уште шестина од остатокот ... На крајот се покажало дека секој од синовите добил иста сума. Колку браќа биле и колку пари во наследство добил секој од нив?

118. За еден џемпер и една кошула треба да се плати вкупно 1500 денари. За два такви џемпери и три кошули треба да се плати вкупно 3300 денари. Колкава е цената на една кошула, а колкава на џемперот?

119. Во една игра со другарите, Марко купил 100 бонбони и тоа по цена 5 бонбони за 2 денари, а потоа сите ги продал и тоа по цена 2 бонбони за 1 денар. Колку денари заработил Марко во играта?

120. Двајца другари сакаат да купат топка. На првиот му недостасуваат 254, а на вториот 252 денари. Ако ги соединат своите пари, ќе им недостасуваат уште 16 денари. Колку денари чини топката?

121. За одличен пласман на едно натпреварување со парична награда од 36000 денари наградени се четири учесници.

Колку добил секој од учесниците, ако наградата е поделена во однос 3:4:5:6?

122. Цената на два молива и три тетратки е 100 денари, а цената на три молива и две тетратки е 75 денари. Колку пари се потребни за купување на 60 тетратки и 41 молив?

123. Цената на два молива и три тетратки е 100 денари, а цената на три моливи и две тетратки е 75 денари. Колку најмногу предмети може да се купат за 2005 денари?

124. Павле за една работа требало да добие 1300 денари и влезница за натпревар. Меѓутоа, тој сработил само третина од работата и за тоа добил 300 денари и влезница за натпреварот. Колку денари чини влезницата за натпреварот?

125. Петар и Павле треба да поделат 2002 денари, така што Петар ќе добие шест пати повеќе пари од Павле. Колку пари ќе добие Петар, а колку Павле?

126. На Зорица и се потребни 8 минути да излупи компири за ручек, додека пак за истата таа работа на нејзината ќерка и се потребни 24 минути. Колку време е потребно Зорица и нејзината ќерка заедно да го завршат ручекот?

127. Пред 5 години таткото бил 5 пати постар од синот, а после 10 години ќе биде само 2 пати постар. Колку години имаат сега таткото и синот?

128. За две години, Маја ќе има 3 пати повеќе години од Милица. Колку години имаат сега, ако Маја е 14 години постара од Милица?

129. Еден базен низ една цевка се полни за 1час и 20 минути, а низ друга за 2 часа и 10 минути. За колку време ќе се наполни базенот ако двете цевки се отворат истовремено?

130. Два часовника се навиени на 4 април 2017 година во 9 часот изутрина. Еден од нив работи точно, а другиот оди напред 3минути на секој час. Кој ден и во колку часот двата часовника ќе покажуваат исто време?

131. Ненад и неговиот син пред две години заедно имале 40 години. Колку години ќе имаат заедно по три години?

132. Хокејарскиот тим се состои од 6 играчи на мраз и 9 резерви на клупа. Секој од 15-те играчи поминал исто време во игра на мраз (замените се неограничени). Колку време секој од играчите поминал на мраз ако мечот трае 30 минути?

133. По определен број на работни денови ѕидарите одлучиле да ја забрзаат изградбата, па секои три дена работа ги скратиле на два дена. Ако целата работа е завршена за 55, наместо за 70 дена, колку дена се работело пред забрзувањето на работата?

134. Три пекари, со рамномерна работа, за два часа замесиле 67 леба. Колку леба би замесиле 4 пекари за 3 часа? За колку часа 5 пекари би замесиле 335 леба?

135. Еден сад е наполнет со сто процентен алкохол. Ако од садот одлееме два литра алкохол и долееме исто толкаво количество дестилирана вода и постапката ја повториме уште еднаш, односно одлееме два литри мешавина и долееме два литри дестилирана вода во садот ќе добиеме 36 процентен раствор на алкохол. Колку литри раствор содржи овој сад?

136. Бабата им рекла на своите внуци: Ако на секој од вас му испечам по 2 погачички, тогаш ќе ми остане тесто за уште 3 погачиња. Ако на секој од вас му испечам по 3 погачиња ќе ми недостасува тесто за 2 погачички. Колку внуци има бабата?

137. Во две ќеси се наоѓа ист број на џамлии. Кога од двете ќе извадиме вкупно 18 џамлии, во првата ќе останат 14, а во втората 10 џамлии. Колку џамлиии имало во секоја од ќесите на почетокот?

138. Учениците од едно одделение требало да се разместат во клупи. Ако во секоја клупа седнат по 2 ученика, две клупи ќе останат празни, а ако во секоја клупа седне по еден ученик, за 6 од нив ќе нема место. Колку ученици и колку клупи имало во училницата?

139. Петар, Ана, Марко, Бојан и Гордана сакале да поделат бомбони. Секој од нив по ред земал по една бомбона се додека не останале помалку бомбони од нивниот број, а сепак онолку колку што добил секој од нив. Колку бомбони можело да има на почетокот? Определи ги сите можни решенија.

140. На еден конгрес имало 2000 учесници. Секој од учесниците бил филозоф или математичар, а еден број на учесници се занимавале и со филозофија и математика. Колку учесници имало во секоја од категориите, ако секој осми филозоф бил и математичар, а секој тринаесетти математичарите бил и филозоф?

141. На роденден има вкупно 20 гости, момчиња и девојчиња. Ана од претходно познава седум момчиња, Весна осуммина, Тања деветмина итн. се до последната Лидија која ги познава сите момчиња. Колку момчиња имало на роденденот?

142. Во едно одделение на секои 3 момчиња „доаѓаат“ 2 девојчиња. Ако на тоа одделение му се приклучат уште 6 момчиња, тогаш во одделението би имало двојно повеќе момчиња одколку девојчиња. Колку момчиња, а колку девојчиња имало во тоа одделение?

143. Во шумата имало вкупно 565 фазани и еребици. Кога бројот на фазаните се зголемил три пати, а бројот на еребиците 5 пати, тогаш во шумата имало вкупно 2007 фазани и еребици. Колку фазани, а колку еребици имало на почетокот во шумата?

144. Бранко во една кутија имал 256 сликички, а во друга 252. Во албумот залепил четвртина од сликичките од првата и третина од втората кутија. Колку сликички ставил Бранко во албумот, а колку му останале во секоја кутија?

145. Гордана има 85 салфетки. Мирјана има 5 пати помалку салфетки од Гордана, а Славица има 5 салфетки повеќе од Мирјана. Колку салфетки има Славица?

146. Бранко, Војо и Драган имаат 36 ореви. Кога Бранко му дал 6 ореви на Војо, а Војо 4 ореви на Драган, секој од нив имал еднаков број на ореви. Колку ореви имал секој од нив на почетокот?

147. Милица првата недела прочитала $\frac{5}{7}$ од книга која имала 840 страници. Втората недела прочитала $\frac{3}{4}$ од остатокот на книгата. Уште колку страници и останале на Милица да прочита во третата недела, за да ја дочита книгата?

148. Парче легура од цинк и бакар со маса $40kg$ кога сосема ќе се потопи во вода губи $5kg$ од масата. Колку цинк, а колку бакар содржи парчето легура ако е познато дека во вода цинкот губи $14\frac{2}{7}\%$, а бакарот $11\frac{1}{9}\%$ од својата маса ?

149. На полица има три книги. Првата има 90, втората 110, а третата 150 страници. Кориците на книгите се со еднаква дебелина и секоја од нив е со дебелина од $2mm$. Колку милиметри се дебели сите книги заедно, ако се знае дека 10 страници се дебели $1mm$?

150. Плоштината на еден правоаголник е за $125cm^2$ поголема од плоштината на квадратот над помалата страна. Да се определат страните на правоаголникот ако тие се разликуваат за $5cm$.

151. Во пет садови имало 256 литри млеко. Кога од првиот сад се излеани 12 литри, а од вториот 19 литри, во сите пет садови останало иста количина на млеко. Колку литри млеко имало во секој од садовите на почетокот?

152. Колку тони сено ќе се добие од ливада со должина од 750 m и ширина 200 m, ако од секој ар просечно се добива 240 kg трева и ако се знае дека масата на сеното е четвртина од масата на тревата?

153. Еден тон обична вода содржи 40 g сол, а во еден тон морска вода има 35 kg сол. Која количина на обична вода содржи онолку сол колку што се добива со испарување на 200 g морска вода?

154. Едно јаже е пресечено на два дела, така што едниот негов дел е половина од јажето зголемено за 0,5 m. Потоа помалиот дел е повторно пресечен така да едниоит дел е неговата половина и уште 0,5 m, а преостанатиот дел од јажето изнесува 1,5 m. Колкава е вкупната должина на тоа јаже?

155. Ако патот би бил долг онолку mm. колку што mm^3 има во m^3, за кое време тој пат би го поминало возило кое за 1 час поминува 50 km?

156. Милан тргнал на деловен состанок со автомобил и во текот на првиот час поминал $60km$. Тогаш пресметал дека ако патот го продолжи со истата брзина ќе задоцни 30 минути. Заради тоа брзината ја зголемил на $80km/h$ и на состанокот стигнал 40 минути порано. Колкав пат поминал Милан?

157. Предната гума на мотоциклот се троши после поминати 25000 километри, а задната после 15000 километри. После колку километри треба да се променат гумите за да се истрошат двете истовремено ?
Кога треба да купите нови гуми ?

158. Кога велосипедист поминал $10km$ и уште една третина од останатиот пат, му останале уште $10km$ и една четвртина од вкупниот пат. Колку километри поминатал велосипедистот?

159. Полжав се искачува на ѕид висок $10m$. Дење тој се искачува $3m$, а во текот на ноќта се спушта надолу за $2m$. Колку дена се потребни за полжавот да го искачи ѕидот?

160. Автобус тргнува од Прилеп и се движи со брзина од $60\frac{km}{h}$. Во исто време од Охрид тргнува автомобил и се движи со брзина од $100\frac{km}{h}$. На кое растојание од Прилеп ќе се сретнат автомобилот и автобусот, ако е познато дека растојанието помеѓу Охрид и Прилеп е $120km$.

161. Автомобил долг $2m$ кој се движи со брзина од $25\frac{m}{s}$ претекнува воз долг $100m$, кој пак се движи со брзина од $7\frac{m}{s}$. После колку време автомобилот ќе го претекне возот (ако за почеток на претекнувањето се смета моментот кога предниот дел на автомобилот ќе се совпадне со задниот дел на возот, а за крај на претекнувањето се смета моментот кога задниот дел на автомобилот ќе се совпадне со предниот дел на возот)?

162. Војници во ред долг 20 метри, се движат со брзина од $2\frac{m}{s}$. Мува лета над нив така што се движи од крајот кон почетокот на редот и повторно назад итн. со брзина од $5\frac{m}{s}$. Колку пат ќе помине мувата движејќи се така $60s$?

163. Од две пристаништа истовремено еден кон друг тргнале два брода. Првиот брод се движел со брзина $22\frac{km}{h}$, а вториот брод со брзина $28\frac{km}{h}$. Колкаво е растојанието помеѓу пристаништата, ако се знае дека двата брода се сретнале после 40 часови?

164. Горан и Зоран возеле велосипеди. Горан секоја минута поминувал по $120\,m$, а Зоран по $150\,m$. Горан тргнал една минута пред Зоран. Колку минути му се потребни на Зоран за да го стигне Горан?

165. Кучето на растојание од $150\,m$ од себе здогледало зајак. За кое време кучето ќе го стигне зајакот, ако зајакот за 2минути поминува $500\,m$, а кучето за 5 минути поминува $100\,m$?

166. Велосипедист во 12 часот тргнал од местото А кон местото В и се движел со брзина од $10\frac{km}{h}$. Од местото В кон А со брзина $30\frac{km}{h}$ пак се движел моторциклист. Растојанието меѓу двете места било $60km$. Велосипедистот и мотоциклистот се сретнале на пола пат. Во колку часот тргнал моторциклистот?

167. Трактор поминува пат со должина од 1 метар, ако предното тркало направи едно свртување, а 4 метри ако задното тркало направи едно свртување. Колкав пат ќе помине тракторот, ако на тој пат предното тркало направи 39 свртувања повеќе во споредба со задното тркало?

168. Дали може три лица кои имаат моторцикл со две седишта да поминат пат од $60km$ за 3 часа, ако брзината на пешак е $5km/h$, а брзината на моторциклот е $50km/h$?
Напомена: За време на пристигнување на целта се смета моментот кога последното лице ќе пристигне на целта.

169. Кога автомобилот поминал $\frac{1}{4}$ од патот и уште $50km$, му останало да помине уште $\frac{1}{2}$ од патот и $6km$. Колкава е должината на патот?

170. Стефан во 7:30 часот го пуштил гулабот писмоносец да однесе порака на Симон. Гулабот пораката на Симон му ја однел во 9:10 часот. Ако гулабот за $10min$ прелетувал $4km$, колкаво било растојанието помеѓу Стефан и Симон?

171. Да се определи времето потребно моторниот чамец од местото A да стигне во местото B и да се врати назад пловејќи по река. Брзината на чамецот во однос на водата во двете насоки е $8km/h$, а брзината на реката е $4km/h$. Растојанието помеѓу местата A и B е $20km$.

172. Две тела истовремено и од иста точка но во спротивен правец почнуваат да се движат по кружница со периметар $728m$. Едното тело во секоја секунда поминува по 30 метри, а другото по 22 метри. После колку секунди ќе се сретнат телата?

173. Железничка пруга поминува низ три тунели. Должината на првиот и вториот тунел е $1440\,m$, должината на првиот и третиот тунел е $1350\,m$, а должината на вториот и третиот тунел е $1520\,m$. Колкава е должината на секој од тунелите?

174. Автомобилистот за 4 часа поминал 360 km. Првиот час поминал $\frac{4}{15}$ од целиот пат, вториот час $\frac{7}{8}$ од патот кој го поминал првиот час, третиот час два пати помалку од патот што поминал првите два часа заедно, а четвртиот час преостанатиот дел од патот. Колку километри пат поминал автомобилистот четвртиот час?

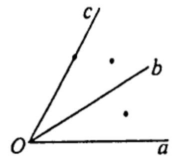
VI ГЕОМЕТРИЈА

1. Воведни задачи

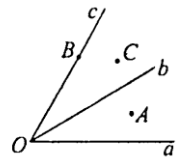
1. На цртежот десно обележи ги точките *A*,*B* и *C* така што:

- точката *B* се наоѓа на полуправата *Oc*.

- точката *A* се наоѓа во аголот *aOc* , но не и во аголот *bOc*.



Решение: Точките кои ги задоволуваат условите на задачата се означени на цртежот десно.

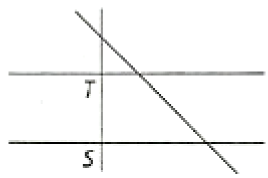


2. а) На цртежот обележи ги правите: *a*, *b*, *c* и *d*, така да важи:

- правите *a* и *b* се паралелни, а точката *T* припаѓа на правата *b*;

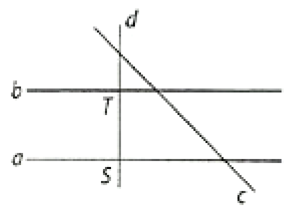
- правата *d* е нормална на правата *a*;

б) во кој однос се правите *b* и *d*?



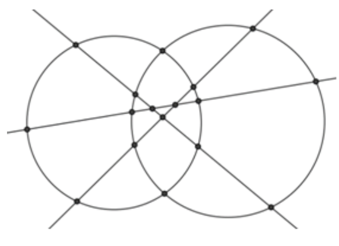
Решение. а) Бараното обележување е прикажано на цртежот десно.

б) Правите *b* и *d* се нормални



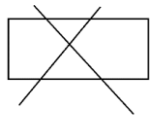
3. Дадени се две различни кружници и три различни прави. За една точка велиме дека е „симпатична“ ако е заедничка за две од дадените пет геометриски фигури. Колку најмногу „симпатични“ точки може да имаат дадените кружници и прави?

Решение. Најголемиот број „симпатични“ точки се добива кога кружниците и правите две по две се сечат во различни точки. Една таква конгигурација е прикажана на цртежот десно. Значи, најголемиот број „симпатични“ точки е 17.

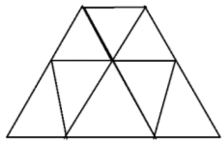


4. Нацртај еден правоаголник. Нацртај две прави кои го делат правоаголникот на два триаголници и два петоаголника.

Решение: Правоаголник и прави кои го задоволуваат условот на задачата се шрикажани на цртежот десно.



5. Колку триаголници има на дадениот цртеж?



Решение: На дадениот цртеж се прикажани десет триаголници и тоа: 8 мали и 2 составени од 4 мали триаголници.

6. На една права се распоредени точките A, B, C и D така да B *е* меѓу A *и* C , а D меѓу B и C . Ако е

$$\overline{AB} = 7cm, \quad \overline{BC} = 5cm\,4mm \text{ и } \overline{AD} = 8cm\,8mm$$

пресметај ја должината $\overline{CD}$.

Решение: Распоредот на точките A, B, C, D е како на сликата

$$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = 1cm\,8mm,$$

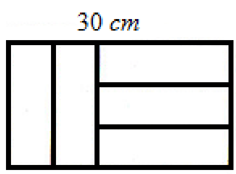
$$\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 3cm\,6mm.$$

2. Правоаголник и квадрат (плоштина и периметар)

При решавањето на заадачите од овој дел потребни предзнаења се:

1) Правоаголник е четириаголник со четири прави агли.
2) Квадрат е правоаголник со еднакви страни.
3) За квадрат важи: плоштина: $P = a \cdot a = \frac{d^2}{2}$, периметар: $L = 4 \cdot a$
4) За правоаголник важи: плоштина: $P = a \cdot b$, периметар: $L = 2 \cdot (a + b)$

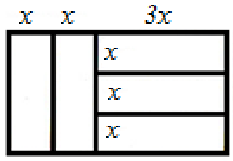
7. Голем правоаголник е составен од 5 еднакви мали правоаголници (види цртеж). Ако должината на поголемата страна на големиот пра-



воаголник е $30cm$, пресметај го периметарот на еден мал правоаголник.

Решение. Ако помалата страна на правоаголникот ја обележиме со x, тогаш подолгата страна на помалиот правоаголник е $3x$. Подолгата страна на поголемиот правоаголник тогаш е $5x$, па е

$$5x = 30cm, \text{ т.е. } x = 6cm.$$



Значи, страните на помалиот правоаголник се $6cm$ и $18\ cm$ и од тука, неговиот периметар е $48cm$.

8. Периметар на квадрат е $6cm$, а периметарот на правоаголник е $8cm$. Ако едната страна на правоаголникот е за $1{,}2cm$ подолга од страната на квадратот, спореди ја плоштината на квадратот со плоштината на правоаголникот.

Решение: Страната на квадратот е $1{,}5cm$, па едната страна на правоаголникот е $2{,}7cm$. Од периметарот добиваме дека другата страна на правоаголникот е $1{,}3cm$. Плоштината на квадратот е $2{,}25cm^2$, а плоштината на правоаголникот е $3{,}51cm^2$. Значи, поголема е плоштината на правоаголникот.

9. Правоаголник чии должини на страни се природни броеви има плоштина чија мерна вредност е еднаква на мерната вредност од полуперимтарот на тој правоаголник. Колкава е должината на неговите страни?

Решение: Ако страните на правоаголникот ги означиме со a и b, тогаш $a + b = ab$. Со проба доаѓаме до заклучок дека добиеното равенство важи само за $a = b = 2cm$.

10. Правоаголникот со страни $9cm$ и $4cm$ и квадрат имаат еднакви плоштини. Кој од нив има поголем периметар и за колку?

Решение: Плоштината на правоаголникот и квадратот е $4 \cdot 9 = 36cm^2$. Страната на квадратот е $6cm$ $(6 \cdot 6 = 36)$, затоа поголем периметар има правоаголникот и тоа за $2 \cdot (9 + 4) – (4 \cdot 6) = 2cm$.

11. Периметарот на правоаголникот е $50cm$, а страните му се разликуваат за $9cm$. Пресметај ја плоштината на правоаголникот.

Решение: Нека страните на правоаголникот ги означиме со a и b, каде е $b = a + 9cm$. Од формулата за периметар $2 \cdot (a + a + 9) = 50$ добиваме дека $a = 8cm$ и $b = 17cm$. Плоштината на правоаголникот е $P = a \cdot b = 136cm^2$.

12. Ако страната на квадратот се зголеми за $1cm$, тогаш плоштината на квадратот се зголемува за $17cm^2$. Колкав е периметарот на тој квадрат?

Решение: Кога страните на квадратот ќе ги зголемиме за $1cm$, тогаш неговата плоштина ќе се зголеми за два исти правоаголници и квадрат со страна од $1cm$. Бидејќи плоштината на квадратот е $1cm^2$, двата преостанати правоаголници имаат плоштини од по $8cm^2$ (и по една страна со должина $1cm$). Според тоа, првичниот квадрат имал страна со должина $8\ cm$ и неговиот периметар е $32\ cm$

13. Кога една страна на квадратот ќе ја зголемиме за 3 пати, а другата за 2 пати, се добива правоаголник чија плоштина е еднаква на $96cm^2$. За колку периметарот на така добиениот правоаголник е поголем од периметарот на квадратот?

Решение: Ако едната страна ја зголемиме за 2, а другата за 3 пати плоштината се зголемува за 6 пати. Бидејќи таа сега изнесува $96cm^2$, заклучуваме дека почетната плоштина била $16cm^2$, а страната на квадратот $4cm$. Според тоа, периметарот на правоаголникот е $2 \cdot (8 + 12) = 40cm$, а на квадратот $16\ cm$.

14. Колку столбови и колку метра жица е потребно за оградување на правоаголна нива со должина $40m$ и ширина $60m$, ако на секои $4m$ е поставен по еден столб?

Решение: Жица е потребно онолку колку што е периметарот на правоаголникот, а тоа е $2 \cdot (40 + 60) = 200m$ и $\frac{200}{4} = 50$ столба.

15. Ако сите полиња од шаховската табла се поредат едно по друго, се добива правоаголник со периметар $260cm$. Пресметај ја плоштината на шаховската табла.

Решение: Нека страната на полето на шаховската табла (квадрат) ја обележиме со a. Едната страна на правоаголникот ќе биде а, а другата $64a$. Од формулата за периметар на правоаголник добиваме дека $a = 2cm$, па од тука плоштината на шаховската табла е

$$64a^2 = 256cm^2.$$

16. Плоштината на правоаголник е $2008cm^2$. Должината на една негова страна е искажана со парен број сантиметри, а на другата со непарен број на сантиметри. Да се пресмета периметарот на правоаголникот. Запиши ги сите можни решенија.

Решение: Бидејќи

$$2008 = 1 \cdot 2008 = 2 \cdot 1004 = 4 \cdot 502 = 8 \cdot 251$$

задачата има две решенија. Ако должините на страните се $1cm$ и $2008cm$, решението е: $L = 2 \cdot (1 + 2008) = 4018cm$, а ако должините на страните се $8cm$ и $251cm$ решението е:

$$L = 2 \cdot (8 + 251) = 518cm.$$

17. Околу тревник во форма на правоаголник е направена бетонска патека (ширината на патеката е иста). Помалата страна на правоаголникот има должина од $16m$, а површината на патеката е $173cm^2$. Пресметајте ја должината на другата страни на правоаголникот (тревникот) ако пешак што ја обиколува целата патека од надворешната страна поминува $16m$ повеќе отколку пешак што ја обиколува целата патека од внатрешната страна.

Решение: Нека ширината на патеката е x, а должината на бараната страна е y. Пешакот што ја обиколува целата патека од надворешната страна, всушност поминува $8xm$ подолг пат од пешакот кој ја обиколува целата патека од внатрешна старна. Следува дека $x = 2m$. Од таму добиваме дека плоштината на патеката е

$$4 \cdot (2 \cdot 2) + 2 \cdot (2 \cdot 16) + 2 \cdot (2 \cdot y) = 176m^2.$$

Затоа $80 + 4 \cdot y = 176$, па оттука $y = 24m$.

18. Ако едната страна на квадрат ја продолжиме за $4cm$, а другата ја намалиме за $3cm$ добиваме правоаголник, чија плоштина е еднаква на плоштината на квадратот. Колкави се периметарот и плоштината на квадратот и правоаголникот?

Решение: Нека мерниот број на должината на страната на дадениот квадрат е a. Од тоа што плоштината на добиениот правоаголник е еднаква на плоштината на дадениот квадрат, т.е. $3a = 4(a - 3)$, следува дека $3a = 4a - 12$, односно $a = 12cm$. Страните на правоаголникот се $9cm$ и $16cm$. Плоштината на квадратот и правоаголникот е $144cm^2$. Периметарот на квадратот е $48\ cm$, а на правоаголникот е $50cm$.

19. Ако страната на квадрат ја зголемиме за 30%, за колку проценти ќе се зголеми периметарот, а за колку плоштината на квадратот?

Решение: Ако страната на квадратот a се зголеми за 30%, тогаш таа ќе биде 1,3a. Па така периметарот на новиот квадрат е $4 \cdot 1,3a = 5,2a$, а бидејќи $\frac{5,2a}{4a} = 1,3$ значи дека периметарот ќе се зголеми за 30%. Плоштината на новиот квадрат е

$$1,3a \cdot 1,3a = 1,69a^2$$

па значи плоштината ќе се зголеми за 69%.

20. Квадрат со страна од $6cm$ е поделен со права на два правоаголника чии периметри се разликуваат на $5cm$. Пресметајте ја плоштината на тие правоаголници.

Решение: Нека x е помалиот дел од страната на квадратот. Од тоа што

$$2(6 - x) = 2x + 5,$$

добиваме дека $x = \frac{7}{4}$. Од тука следува дека помалиот правоаголник има плоштина од $\frac{7}{4} \cdot 6 = \frac{21}{2}cm^2$, а поголемиот $\frac{17}{4} \cdot 6 = \frac{51}{2}cm^2$.

21. Дадени се два квадрати. Разликата во должините на нивните страни е $11cm$, а разликата на нивните плоштини е $671cm^2$. Пресметај го збирот на периметрите на дадените квадрати.

Решение: Нека a е страната на помалиот квадрат. Тогаш,

$$(a + 11)(a + 11) = a^2 + 67.$$

Од тука добиваме дека $a = 25cm$, и страната на поголемиот квадрат е $36cm$. Значи, збирот на периметрите на овие квадрати е $244cm$.

22. Кога должината на правоаголникот ќе ја намалиме за $1cm$, а ширината ја зголемиме за $2cm$ добиваме квадрат чија плоштина е за $20cm^2$ помала од плоштината на правоаголникот. Пресметај го периметарот на квадратот и правоаголникот.

Решение: Ако мерниот број на страната на добиениот квадрат е a, тогаш очигледно е дека три правоаголници чии плоштини се: $2 \cdot a$, $1 \cdot a$ и $2cm^2$. „испаднале“ од површината. Значи, $2a + a + 2 = 20$, односно $3a = 18$, па $a = 6cm$, а периметарот на квадратот е $24cm$. Значи, страните на правоаголникот се $7cm$ и $8cm$, а неговиот периметар е $30cm$.

23. Еден ученик има 16 сламки долги по $1cm$, 6 сламки долги по $2cm$ и 7 сламки долги по $3cm$. Дали ученикот користејчи ги сламките што му се на располагање може да конструира правоаголник (сламките не смеат да се превиткуваат)?

Решение: Периметарот на правоаголникот е $16 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 49cm$. Од тука, $a + b$ е $24{,}5cm$, што е невозможно, бидејќи сламките не смеат да се скршат.

24. Плоштината на еден правоаголник е 2255. Ако едната негова страна ја намалиме за 6, плоштината на правоаголникот ќе изнесува 2009. Колкав е периметарот на почетниот правоаголник?

Решение: Од сликата се гледа дека $6a = 2255 - 2009$. Односно, $a = 41$, а $b = 55$. Периметарот на основниот правоаголник изнесува 192.

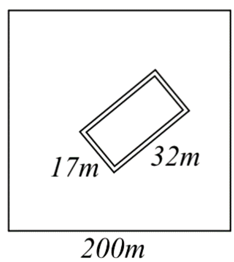
25. Определи го периметарот на правоаголник со плоштина од $36cm^2$, ако е познато дека едната од неговите страни е четири пати подолга од другата.

Решение: Нека a е должината на помалата страна на правоаголникот. Користејќи ја формулата за плоштина на правоаголник имаме $4a \cdot a = 36$, односно $a = 3cm$. Значи, периметарот на правоаголникот е $10a = 30cm$.

26. Колкава е должината на патеката покриена со 1200 плочки со димензии $25cm \times 20cm$ ако ширината на патеката е $4m$?

Решение: Нека димензиите на плочката ги означиме со $a_1 = 25cm$, $b_1 = 20cm$, тогаш $P_1 = a_1 \cdot b_1 = 500cm^2$. Вкупната плоштина на плочките е $P = 1200 \cdot P_1 = 600000cm^2 = 60m^2$. Должината на патеката е $\frac{60m^2}{40m} = 15m$.

27. На тревнат терен во квадратна форма со должина $200m$, направен е базен со димензии $30m$ и $15m$. Околу базенот е направена бетонска патека со ширина од $1m$. Колку ари тревник има околу базенот?



Решение: Плоштината на теренот е

$$P_1 = 200 \cdot 200 = 40000m^2.$$

Плоштината која ја зафаќа базенот заедно со патеката е

$$P_2 = 32 \cdot 17 = 544m^2 .$$

Тревникот околу базенот има

$$P = P_1 - P_2 = 39456m^2 ,$$

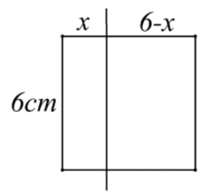
што е 394ари $56m^2$.

28. Плоштината на еден правоаголник е $2008\,cm^2$. Должината на една страна е парен број сантиметри, а на другата е непарен број сантиметри. Да се пресмета периметарот на правоаголникот. Запиши ги сите можни решенија.

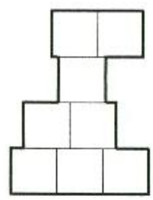
Решение: Бидејки е $2008 = 1 \cdot 2008 = 2 \cdot 1004 = 4 \cdot 502 = 8 \cdot 251$, задачата има две решенија. Ако должините на страните се $1cm$ и $2008cm$, решението е $L = 2 \cdot (1 + 2008) = 4018cm$, а ако должините на страните се $8cm$ и $251cm$ решението е $L = 2 \cdot (8 + 251) = 518cm$.

29. Квадрат со страна $6cm$ со една права е поделен на два правоаголници чии периметри се разликуваат за $5cm$. Пресметај ја плоштината на делбените правоаголници.

Решение: Бидејќи $2 \cdot (6 - x) = 2 \cdot x + 5$, тогаш $x = \frac{7}{4}$. Помалиот правоаголник има плоштина $P_1 = \frac{7}{4} \cdot 6 = \frac{21}{2} cm^2$, а поголемиот правоаголник $P_2 = \frac{17}{4} \cdot 6 = \frac{51}{2} cm^2$.



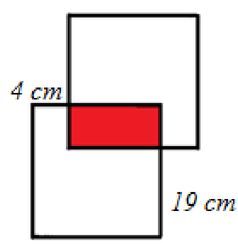
30. Фигурата на цртежот е составена од 8 исти квадрата. Периметарот на фигурата од цртежот е $32cm$. Пресметај ја нејзината плоштина.

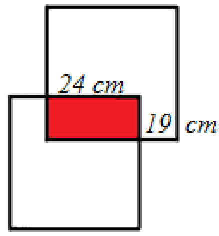


Решение: Страната на квадратот ја обележуваме со a. Периметарот на дадената фигура се состои од 16 страни на квадратот, па $16\,a = 32cm$, а од каде добиваме дека страната на квадратот е $2cm$. Бидејќи фигурата се состои од 8 квадрати, заклучуваме дека бараната плоштина е $8 \cdot a \cdot a = 32cm^2$

31. Два квадрати со должина на страните по $28cm$ имаат заеднички обоен дел, со форма на правоаголник (како на цртежот). Пресметај го периметарот на правоаголникот.

Решение: Една страна на правоаголникот е





$$28cm - 4cm = 24cm,$$

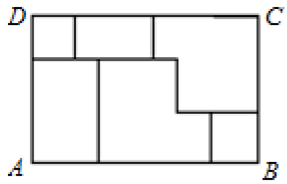
а другата

$$28cm - 19cm = 9cm.$$

Периметарот на правоаголникот е

$$L = 2a + 2b = 48 + 18 = 64cm.$$

32. Определи го збирот на периметрите на сите 6 фигури (види цртеж) кои настанале со делење на правоаголникот *ABCD* чии страни се со должина $\overline{AB} = 14{,}26cm$ и $\overline{BC} = 11{,}3cm$. Секоја од страните на сите шест фигури е паралелна со еден пар на страни на правоаголникот *ABCD*.

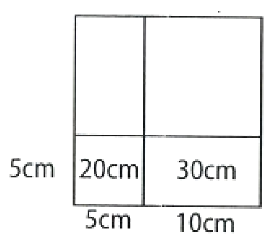


Решение: Бидејќи збирот на должините на средните хоризонтални линии е еднаков на должината на страната *AB*, збирот на средните леви две вертикални линии е еднаков на должината на страната *BC* и збирот на средните десни три вертикални е еднаков дожината на страната *BC*, добиваме дека збирот на периметрите на сите 6 фигури е:

$$(2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC}) + (2 \cdot \overline{AB} + 4 \cdot \overline{BC}) = 124{,}84cm$$

33. Со 2 прави еден квадрат е поделен на 2 други квадрати и 2 правоаголника. Периметарот на еден од добиените квадрати е $20\ cm$, а периметарот на еден правоаголник е $30cm$. Определи го периметарот на почетниот квадрат.

Решение: Периметарот на еден квадрат е $20cm$, па страната на тој квадрат е $5cm$. Периметарот на правоаголникот е $30cm$, а бидејќи една страна на правоаголникот е еднаква на страната на квадратот, тогаш другата страна на правоаголникот е $10cm$ (види цртеж). Значи, страната на почетниот квадрат е $15cm$, а периметарот е $60cm$.



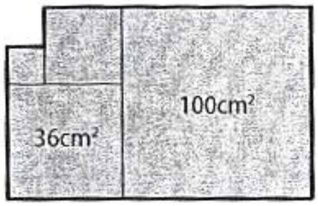
34. Должините на рабовите на квадар се: acm, bcm и ccm, каде се a, b и c различни природни броеви. Волуменот на тој квадар е $70cm^3$. Определи ја најголемата можна плоштина на тој квадар.

Решение: Бидејќи $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, тогаш рабовите на квадарот (изразени во сантиметри) може да бидат: 2, 5, 7, или 1, 10, 7 или 1, 5, 14 или 1, 2, 35. Значи, плоштините на квадарот (изразен во сантиметри) се:

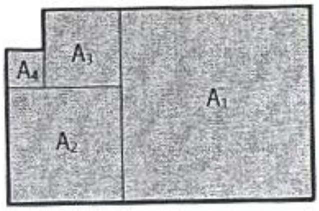
$$2 \cdot (2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 7) = 118;$$
$$2 \cdot (10 + 7 + 10 \cdot 7) = 174;$$
$$2 \cdot (5 + 14 + 5 \cdot 14) = 178;$$
$$2 \cdot (2 + 35 + 2 \cdot 35) = 214,$$

соодветно. Најголемата површина на квадарот кој ги задоволува зададените услови е $214\ cm^2$.

35. Фигурата на цртежот е составена од 4 квадрати. Пресметај го периметарот на таа фигура, ако на цртежот се дадени површини на два квадрата.



Решение: Го обележуваме квадратот како на сликата. Должината на страната на квадратот A_1 е $10cm$, а на квадратот A_2 е $6cm$. Должината на страната на квадратот A_3 е $10cm - 6cm = 4cm$, а на квадратот A_4 е $6cm - 4cm = 2cm$. Плоштината на дадената фигура е еднаква на $156cm^2$, а периметарот е еднаков на $52cm$.

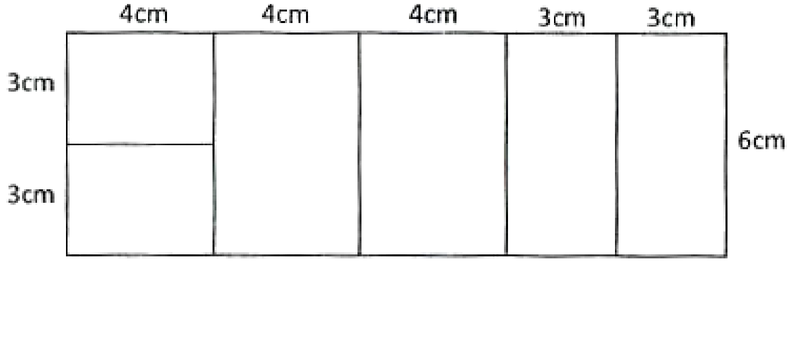


36. Должината на страните на квадарот се $6cm, 4cm$ и $3cm$. Сите страни на тој квадар се исечени од правоаголен картон, чија една страна е со должина од $6cm$. При тоа сечење, целиот картон е искористен. Пресметај ја должината на другата страна на тој картон и нацртај како тоа сечење би требало да се направи.

Решение: Плоштината на квадарот е еднаква на плоштината на картонот. Значи, имаме

$$2 \cdot (6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 6 \cdot x,$$

каде x ја означува бараната должина на другата страна на тој картон или $x = 18cm$. Бараното сечење е прикажано на долниот цртеж.



37. Плоштината на коцка е еднаква на збирот на плоштините на три меѓусебно соседни страни на квадар чии страни имаат должини од $3cm$, $4cm$ и $6cm$. Колкав е волуменот на коцката?
Решение: Плоштините на правоаголниците се
$$3 \cdot 4 = 12, 3 \cdot 6 = 18, 4 \cdot 6 = 24,$$
па плоштината на коцката е
$$12 + 18 + 24 = 54cm^2.$$
Значи, еден ѕид на коцката има плоштина од $\frac{54}{6} = 9cm^2$. Конечно, работ на коцката е $3cm$, а волуменот е $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27cm^3$.

3. Примена на плоштина на правоаголник во решавање на текстуални задачи

Некои текстуални задачи, комплицирано е да се решаваат без цртање на соодветна скица. Низ следните задачи и примери ќе се обидеме да ја објасниме употребата на плоштината на правоаголник во решавањето на текстуални задачи.

38. Производот на два броја е 192. Ако едниот од нив се зголеми за 4 , новиот производ е 240. За кои броеви станува збор?
Решение: Нека бараните броеви се a и b. Производот $a \cdot b$ еднаков е на плоштината на правоаголник со страни a и b. Ако страната a се продолжи за 4, тогаш плоштината на правоаголникот се зголемува за $240 - 192 = 48$. Значи, страната b е еднаква на $48: 4 = 12$. Конечно, $a = 192: 12 = 16$.

39. Петар и Маја делеле бомбони. Во првата поделба производот од броевите на нивните бомбони изнесува 20. Мајка им одлучила на Петар да му додаде уште една бомбона. Производот од бројот на сегашните нивни бомбони бил 25. Колку бомбони имале Маја и Петре заедно на почетокот?
Одговор: Имале по 9 бомбони.

40. Моторциклист тргнал на пат. Движејќи се со прва брзина која изнесува $60km/h$ го поминува патот за $6h$. Меѓутоа, ако промени во втора брзина, тој за истото време ќе помине пат од $540km$. За колку втората брзина е поголема од првата?

Решение: Кога ќе се нацрта соодветен цртеж, ќе се види дека разликата на изминатиот пат изнесува $180km$. Оттаму, се добива разликата на брзините $180km\colon 6h = 30km/h$.

41. Група излетници договараат возење со автомобил. Секој од нив требало за возењето да плати по 60 ден. Меѓутоа, 5 излетници го откажале возењето, па така останатите морале да платат по 20 денари повеќе од предвиденото. Колку излетници тргнале на пат?

Решение: Кога ќе се нацрта соодветна скица, се добива $5\cdot 60 = 20\,(x-5)$, каде x е бројот на излетници. Бројот на излетници кои го договарале возењето бил 20, а 15 од нив тргнале на пат.

42. Определи го производот на два броја, ако е познато следното: ако еден од нив се намали за 4, тогаш нивниот производ се намалува за 12, а ако другиот број се намали за 2, нивниот производ повторно се намалува за 12.

Решение: Ако условите на задачата се претставaт со помош на правоаголници тогаш $4b = 12$ и $2a = 12$, односно еден од тие броеви е 3, а другиот 6. Нивниот производ изнесува 18.

4. Агли

При решавањето на следниве задачи ќе ги користиме дефинициите:

1) Два агли се суплементни ако нивниот збир е 180^0 .
2) Два агли се комплементни ако нивниот збир е 90^0 .

43. Одреди го аголот кој го формираат часовната и минутната стрелка на часовникот во 12 часот и 14 минути.

Решение. На пладне часовната и минутната стрелка се поклопуваат. Минутната стрелка за 1 минута се поместува за $360°\colon 60 = 6°$. За 14 минути се поместува за $84°$. Часовната стрелка за една минута се поместува за 30’ , а за 14 минути за $7°$. Значи, аголот помеѓу стрелките ќе биде $84° - 7° = 77°$.

44. Аглите α и β се комплеметни. Одреди ги аглите α и β ако нивната разлика е еднаква на третина од поголемиот агол.
Решение: Нека $\alpha > \beta$. Бидејќи

$$\alpha + \beta = 90° \text{ и } \beta = \frac{2}{3}\alpha,$$

аглите се: $\alpha = 54°$ и $\beta = 36°$

45. Определи ја големината на аголот кој е еднаков на комплементниот агол на својот двоен агол.
Решение: Нека бараниот агол е α. Согласно условот на задачата, $2\alpha + \beta = 90°$, каде β е аголот комплементен со аголот 2α. Значи, $\alpha = \beta$, т.е. $3\beta = 90°$, односно $\alpha = 30°$.

46. Определи ја големината на аголот α ако тој е за $20°$ поголема од неговиот суплементен агол.
Решение: Нека бараниот агол е α. Согласно условот на задачата, $\alpha + \beta = 180°$, каде β е аголот суплементен со аголот α. Значи, $\alpha = \beta + 20°$, заради што $2\beta + 20° = 180°$, па $\beta = 80°$. Бараниот агол е $\alpha = 100°$.

47. Аглите $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ се „соседни" (два агли се „соседни" кога имаат заедничко теме и барем еден заеднички крак) и заедно формираат рамен агол. Ако е дадено дека секои два соседни агли се еднакви, одреди ја големината на овие агли.
Решение: Имаме $\alpha = \beta, \beta = \gamma, \gamma = \delta$. Значи сите четири агли се еднакви помеѓу себе. Оттука, $4\alpha = 180°$, па $\alpha = 45°$. Значи, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 45°$.

48. Аглите α и β се комплементни. Определи ја големината на овие агли ако е познато дека $\alpha = \frac{3}{5}\beta$
Решение: Од тоа што $\alpha + \beta = 90°$, имаме $\frac{3}{5}\beta + \beta = 90°$. Оваа равенка е еквивалентна со , $3\beta + 5\beta = 450°$, односно $8\beta = 450°$, што значи дека $\beta = 56°15'$ и $\alpha = 43°45'$.

49. За колку аголот α е поголем од неговиот комплементен агол, ако е познато дека тој е за $42°18'26''$ поголем од својот суплементен агол?
Решение: Нека $\alpha + \beta = 180°$, па имаме дека $\beta = \alpha + 42°18'26''$. Од тука $\alpha + \alpha + 42°18'26'' = 180°$, па $\alpha = 68°50'47''$, а комплементниот

агол на аголот α е $21°9'13''$. Одтука, аголот α е за $47°41'34''$ поголем од својот комплементен агол.

50. Аголот $\alpha+\beta$ е за $48°$ поголем од аголот $\alpha-\beta$. Определи ја големината на аголот β.
Решение: Согласно условот на задачата имаме

$$\alpha+\beta=\alpha-\beta+48°.$$

Оттука $\beta=48°-\beta$. Значи, $2\beta=48°$, заради што $\beta=24°$.

51. Аголот $3\alpha-\beta$ е за $60°$ помал од аголот $3\alpha+2\beta$, а за $42°$ поголем од аголот $\alpha-2\beta$. Определи ги големините на аглите α и β.
Решение: Од првиот дел на задачата заклучуваме дека

$$3\alpha-\beta+60°=3\alpha+2\beta.$$

Оттука, $3\beta=60°$, или $\beta=20°$. Од вториот дел на задачата имаме,

$$3\alpha-20°=\alpha-40°+42°.$$

Значи, $2\alpha=22°$, па затоа $\alpha=11°$.

52. Аглите α,β и γ имаат паралелни краци. Збирот на аглите α и β е $2011'$, а разликата на аглите β и γ е поголема од правиот агол. Определи ја големината на аглите α,β и γ.
Решение: Бидејќи α,β и γ имаат паралелни краци, тие се еднакви или суплементни. Затоа што $\alpha+\beta=2011'$, тогаш $\alpha=\beta=16°45'30''$. Бидејќи пак, разликата на аглите γ и β поголема од $90°$, аголот γ е тап и аглите γ и β се суплементни, па $\gamma=163°14'30''$.

53. Аглите α и β се суплементни, а аглите $\frac{5}{6}\alpha$ и $\frac{1}{3}\beta$ се комплементни. Одреди ја големината на аглите α и β.
Решение: Согласно условот на задачата,

$$\alpha+\beta=180° \text{ и } \frac{5}{6}\alpha+\frac{1}{3}\beta=90°.$$

Од првата равенка имаме $\beta=180°-\alpha$, а пак втората равенка е еквивалентна на равенката $5\alpha+2\beta=540°$. Тоа значи дека

$$5\alpha+2(180°-\alpha)=540°.$$

Оттука $180°=3\alpha$, што значи $\alpha=60°$, а $\beta=120°$.

54. Аглите α, β и γ се суплементни и $\alpha=\frac{1}{6}\beta,\ \beta=2\gamma$. Определи ја големината на овие агли.

Решение: Бидејќи $\alpha=\frac{1}{6}\beta,$ и $\beta=2\gamma$, следува дека $\alpha=\frac{1}{6}2\gamma=\frac{1}{3}\gamma$. Сега имаме,

$$\frac{1}{3}\gamma+2\gamma+\gamma=180^\circ \ .$$

Оваа равенка е еквивалентна со равенката

$$\frac{1}{3}\gamma+3\gamma=180^\circ \ ,$$

$$\gamma+9\gamma=540^\circ \ ,$$

заради што $\gamma=54^\circ$, $\beta=108^\circ$ и $\alpha=18^\circ$.

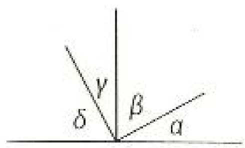
55. Аглите $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ се „соседни“ и заедно формираат рамен агол. Ако е познато дека секои два несоседни агли се комплементни и уште дека $\gamma=\frac{3}{5}\beta$, определи ја големината на секој од овие агли.

Решение: Од условот на задачата, $\alpha+\gamma=90^\circ$, $\alpha+\delta=90^\circ$ и $\beta+\delta=90^\circ$. Од првите две равенства заклучуваме дека $\delta=\gamma$, а од вторите две $\alpha=\beta$. Сега имаме,

$$2\beta+2\cdot\frac{3}{5}\beta=180^\circ \ .$$

Оваа равенка е еквивалентна со равенката $10\beta+6\beta=900^\circ$, од каде $\beta=56^\circ15'$, а $\delta=33^\circ45'$.

56. Дадени се 4 „надоврзани“ (било кои два од овие агли имаат најмногу еден заеднички крак) агли α,β,γ и δ така што секои два соседни агли се комплементни. Пресметај $\frac{\alpha+\delta}{2}$.

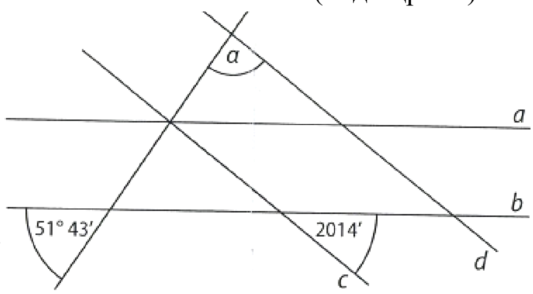


Решение: Согласно зададените услови од задачата, $\alpha+\ \beta=90^\circ$ и $\gamma+\delta=90^\circ$, тогаш е $\alpha+\ \beta+\gamma+\ \delta=180^\circ$. Сега е

$$\alpha+\ \delta=(\alpha+\ \beta+\gamma+\ \delta)-(\beta+\ \gamma)=\ 180^\circ-\ 90^\circ=\ 90^\circ,$$

па е $\frac{\alpha+\delta}{2}=45^\circ$.

57. Пресметај ја големината на аголот α (види цртеж) ако : $a||b$ и $c||d$.

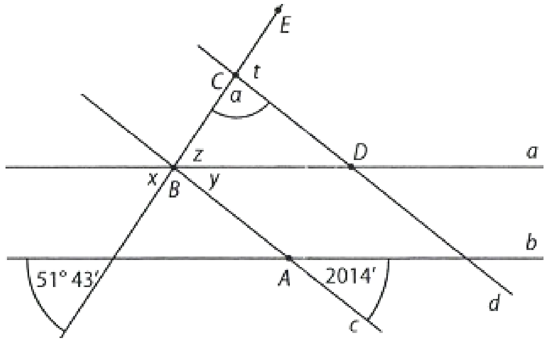


Решение: Ги обележуваме аглите x, y, z и t и точките A, B, C, D и E како на цртежот, $x = 51°43'$, $y = 2014' = 33°34'$ (агли со паралелни краци), $z = x$ (накрсни агли). Имаме:

$$\measuredangle ABC = y + z = 85°17' = \measuredangle DCE = t,$$

(агли со паралелни краци). Аглите t и α се напоредни па затоа

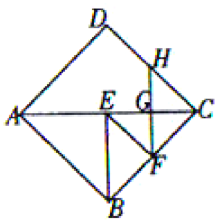
$$\alpha = 180° - 85°17' = 94°43'.$$



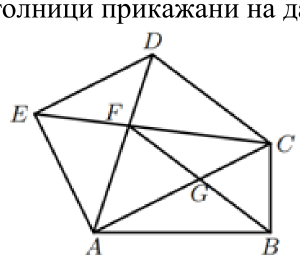
5. Нерешени задачи

58. Во рамнина α се дадени правите p и q кои се сечат во точка A. Колку полуправи се определени на тој начин? Кои се тие полуправи?

59. Запиши ги сите триаголници прикажани на дадениот цртеж.



60. Запиши ги сите триаголници прикажани на дадениот цртеж.



61. Точките A,B и C се на една, а D и E на другата од две паралелни права. Наброј ги сите прави и сите триаголници кои ги формираат тие 5 точки.

62. Нека a и b се две паралелни прави и нека точките A, B, C припаѓаат на правата a, а точките K, L, M припаѓаат на правата b. Колку четириаголници се определени со овие точки?

63. Нацртај кружница со центар во точка A и радиус од $3cm$. Обележи една точка на кружницата со B и нацртај кружница со центар во точката B и радиус помал од $3cm$. Нацртај ги точките C,D,E и F така да:

- C припаѓа на кругот со центар во A и не припаѓа на кругот со центар во B ;

- D е во кругот со центар во точката B и не припаѓа во кругот со центар во A;

- E припаѓа и на едната и на другата кружница;

- F не припаѓа на ниту еден од круговите.

64. Дадена е отсечка AB и симетрала s на таа отсечка, која отсечката ја сече во точката S. Надвор од отсечката AB, а на симетралата s_1 на отсечката BS дадена е точка M. Користејќи само линијар конструирај права која ја содржи точката M и е нормална на симетралата s. Објасни ја постапката на конструирање.

65. Отсечката AB чија должина е $28cm$ со точките P и Q е поделена на три дела, така што првиот дел е два пати помал од вториот, а два пати поголем од третиот. Ако се M и D средини на крајните делови, пресметај ја должината на отсечката MD.

66. Дадена е отсечката $\overline{AD} = 20cm$. Меѓу точките A и D е означена точка B, така што $\overline{BD} = 16cm$ и точка C меѓу точките B и D така што $\overline{AC} = 15cm$. Определи ја должината на отсечката $\overline{BC}$.

67. Отсечката AB со должина од $60cm$ со точките C и D е поделена на три нееднакви делови. Растојанието меѓу средините на крајните делови е $45cm$. Колкава е должината на отсечката CD ?

68. Нацртај кружници $k_1(O_1, 2cm)$ и $k_2(O_2, 3cm)$, *ако* $\overline{O_1O_2} = 6cm.$ Да се определат точките $A \in k_1$ и $B \in k_2$ така што должината на отсечката $\overline{AB}$:
а) најмала б) најголема
Колкава е должината на отсечката $\overline{AB}$ во двата случаи?

69. Дадени се кружниците $k_1(M, 3cm)$ *и* $k_2(N, 2cm)$ кои се допираат:
а) надворешно;
б) внатрешно.
Да се конструираат дадените кружници и да се определи растојанието MN.

70. Може ли круг со три прави да се подели на 5 дела? Ако може да се подели, направи цртеж.

71. На колку најмалку, а на колку најмногу делови 4 прави (секоја права го сече кругот) може да поделат еден круг?

72. Плоштината на правоаголникот е $24cm^2$, а мерните броеви на должините на страните на правоаголникот се природни броеви. Колку такви правоаголници има? Кој од нив е најголем, а кој има најмал периметар?

73. Ако страната на квадрат се зголеми за $1cm$, тогаш новиот квадрат има плоштина за $9cm^2$ поголема од плоштината на првичниот квадрат. Колку изнесува периметарот на поголемиот, а колку на помалиот квадрат?

74. Ако едната страна на квадратот ја продолжиме за $4cm$, а другата ја скратиме за $3cm$, се добива правоаголник чија плоштина е еднаква на плоштината на квадратот. Колкави се периметарот и плоштината на квадратот и правоаголникот?

75. Должината на правоаголник со плоштина од $48cm^2$ е три пати поголема од неговата ширина. Колкав е периметарот на тој правоаголник?

76. Ако едната страна на правоаголникот ја намалиме за $3cm$, а другата ја намалиме за $2cm$, добиваме квадрат чија плоштина е за $21cm^2$ помала од плоштината на правоаголникот. Пресметај ги страните на правоаголникот.

77. Квадрат од страница $20cm$ има плоштина еднаква на плоштината на правоаголник чија ширина е четири пати помала од неговата должина. Која фигура има поголем периметар: дадениот квадрат или правоаголникот и за колку?

78. Страната на квадрат е $12cm$, а ширината на правоаголник која има плоштина еднаква на плоштината на квадратот е $9cm$. Која фигура има поголем периметар: квадратот или правоаголникот?

79. Плоштината на правоаголник е $48cm^2$. Ако една негова страна се зголеми за 20%, а другата за 30%, за колку проценти ќе се зголеми плоштината на правоаголникот?

80. Должината на правоаголник со плоштина $48cm^2$ е три пати поголема од неговата ширина. Колку изнесува периметарот на тој правоаголник?

81. Разликата на должините на страните на два парка во форма на квадрат изнесува 11, а разликата на нивните плоштина 671. Да се пресмета колку жица е потребна за да се оградат овие паркови.

82. Производот на два броја е 20. Ако на првиот му додадеме 2, добиваме производ кој изнесува 28. За кои броеви се броеви?

83. Ако страната на еден квадрат ја намалиме за 4, а другата ја зголемиме за 8, добиваме правоаголник чија плоштина е еднаква на плоштината на квадратот. За колку периметарот на правоаголникот е поголем од периметарот на квадратот?

84. Ивана и Сања тргнале во прошетка. Попат почнале да берат шумски јагоди. После првата помината стаза, Ивана и рекла на Сања: Производот на броевите на нашите јагоди изнесува 200, ама ако ти Сања собереш уште 5 јагоди, производот ќе изнесува 300. Колку јагоди дотогаш набрале Сања и Ивана?

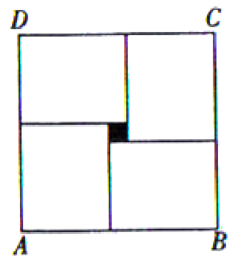
85. Растојанието од место A до место B еден патник го минува за $6h$. Ако брзината на своето движење ја зголеми за $3km/h$ тогаш за да го помине тоа растојание на патникот му се доволни $4h$. Колкаво е растојанието помеѓу местата A и B?

86. Мерните броеви на страните на триаголникот (изразени во cm) се природни броеви. Ако периметарот на триаголникот е $22cm$ и една страна $11cm$, колку сантиметри може да имаат другите две страни на тој триаголник?

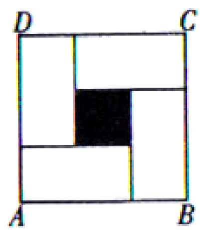
87. Во внатрешноста на парк со правоаголна форма со страни 36 m и 24 m е изградено квадратно игралиште со страна 12 m. Пресметај ги плоштината и периметарот на трвнатиот дел од паркот.

88. Периметарот на правоаголник, чии страни се a и b е $2m$. Ако страните со должина a се намалат за по $10cm$, а страните со должина b зголемат за по $10cm$, се добива квадрат. Пресметај ги страните на тој правоаголник и добиениот квадрат.

89. Квадратот $ABCD$ поделен е на четири правоаголници и еден мал квадрат (види цртеж). Сите правоаголници имаат исти страни, а плоштината на секој од тие правоаголници е $506cm^2$. Ако должините на страните на секој од правоаголниците последователни природни броеви, колку пати плоштината на квадратот $ABCD$ е поголема од плоштината на затемнетиот квадрат?

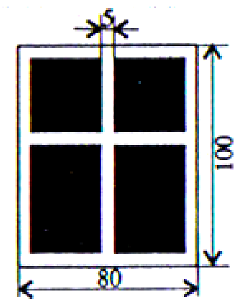


90. На цртежот е даден квадрат $ABCD$, поделен на четири правоаголници и еден мал квадрат. Периметарот на секој правоаголник е $90mm$. Ако должината на секој од тие правоаголници е два пати поголема од ширината, колку пати периметарот на квадратот $ABCD$ е поголем од периметарот на затемнетиот квадрат.



91. Ако должината на правоаголникот се зголеми за $4cm$, а ширината за $6cm$, се добива квадрат со плоштина 81 cm^2. Колку изнесува периметарот на правоаголникот?

92. Определи ја вкупната плоштина на стаклените делови на едно крило од прозорот (осенчен дел – види цртеж) ако сите негови дрвени делови се со ширина $5cm$ додека вкупната ширина на прозорецот е $80cm$, а неговата висина $100cm$.

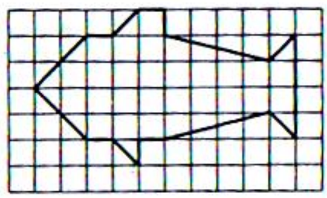


93. Збирот на периметрите на три исти правоаголници изнесува 540 cm. Пресметај:

а) половина периметар на еден правоаголник;

б) должина на еден правоаголник, ако ширината му е 40см.

94. Пресметај ја плоштината на фигурата прикажана на цртежот, ако единица мерка е едно квадратче од квадратната мрежа.

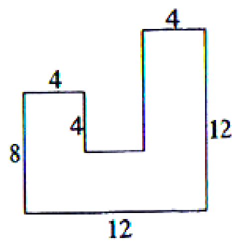


95. Дадени се шест картони со форма на правоаголник со должина $3cm$ и ширина $2cm$. Користејќи ги сите картони состави еден правоаголник. (квадратот исто така е правоаголник). Да се определи периметарот на така составениот правоаголник и тоа:

а) најголемиот можен

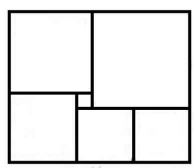
б) најмалиот можен

96. Збирот на аглите напоредни со аголот α е осум пати поголем од аголот 2. Определи ги периметарот и плоштината на фигурата на цртежот.



97. Ако сите полиња на шаховската табла (8x8 квадрати) се поредат едно по друго, се добива правоаголник со периметар од $390cm$. Пресметај ја плоштината на шаховската табла.

98. Правоаголникот на цртежот е составен од шест квадрати. Да се пресмета обемот и површината на правоаголникот, ако страната на најмалиот квадрат е 1 cm.

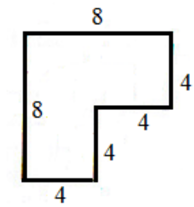


99. Даден е правоаголник $ABCD(AB > BC)$. Нека е s симетрала на аголот $\measuredangle BAD$, а D_1 осносиметрична точка на темето D во однос на правата s. Ако е $AD_1=4$ cm и $D_1B=7$ cm, да се определи периметарот на правоаголникот $ABCD$.

100. Кога едната страна на правоаголник ќе се намали за 5 cm, а другата се зголеми за 4 cm, тогаш се добива квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на правоаголникот. За колку периметарот на правоаголникот е поголем од периметарот на квадратот?

101. Плоштината на едно лозје во форма на правоаголник е 67200 m^2. Должината на една градина е 5 пати помала од должината на лозјето, а ширината на градината е 6 пати помала од ширината на лозјето. Колку изнесува плоштината на градината?

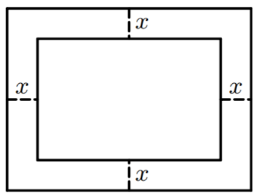
102. Дадената фигура, подели ја на четири исти делови и пресметај го периметарот и плоштината на еден од тие делови.



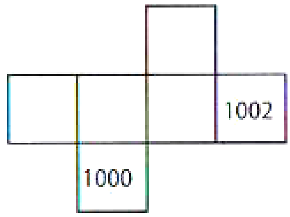
103. Петар има хартија во форма на правоаголник чии страни се 27 cm и 72 cm. Колкав е работ на најголемата коцка која може да се обвитка со таа хартија (дозволени се сите сечења)?

104. Страните на правоаголникот $ABCD$ се 10 cm и 4 cm. Точката E лежи на страната AB, а точката F на страната CD. Периметарот на правоаголникот $AEFD$ е 12 cm. Определи ја плоштината на правоаголникот $EBCF$.

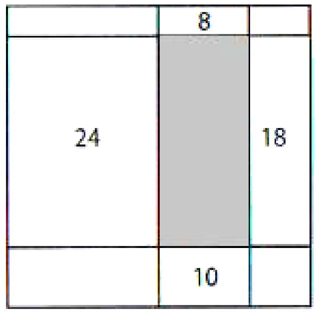
105. Еден тревник има форма на правоаголник, а неговата пократка страна е со должина од 16 m. Околу тревникот направена е стаза со иста ширина на сите правци (како на цртежот) чија плоштина е 176 m^2. Да се определи должината на другата страна на правоаголникот (тревникот), ако пешак кој ја обиколува целата патека одејќи по надворешниот раб на патеката, поминува 16 m повеќе отколку пешак кој целата патека ја обиколува одејќи по внатрешниот раб на таа патека.



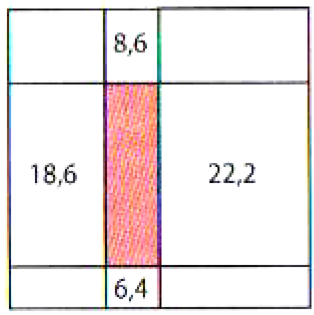
106. Дадена е мрежа на коцка и во два нејзини квадрати се запишани броевите 1000 и 1002 (види цртеж). Впиши уште четири различни парни четирицифрени броеви (во преостанатите 4 квадрата) така да збирот на броевите на спротивните страни на коцката (кога ќе ја склопиме) биде 2010.



107. Квадрат на страната од $10cm$ е поделен на 9 правоаголника (како на цртежот). Во четири правоаголници се запишани нивните периметри (во сантиметри). Пресметај го периметарот на осенчениот правоаголник.



108. Квадрат со страна $10cm$ е поделен на 9 правоаголници (како на цртежот). Во четири правоаголници (види цртеж) се впишани нивните периметри (во сантиметри). Пресметај го периметарот на затемнетиот правоаголник.

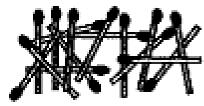


109. Карпа во форма на коцка чија должина на работ е 10 m, исечена е на еднакви коцкички чии должини на рабовите се 1 dm. Со редење на тие коцки една покрај друга поплочена е правоаголна патека со ширина од 1 m. За колку часови таа патека би ја поминал пешак кој секој час поминува 5 km?

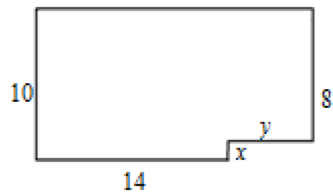
110. Во правоаголник со должина $8\,cm$ и ширина $6cm$ впишан е правоаголник чии страни се паралелни и се на растојание $1cm$ од страните на дадениот правоаголник. За колку периметарот на првиот правоаголник е поголем од периметарот на вториот?

111. Должината на страните на правоаголник, мерени во центиметри, се изразуваат со природни броеви. Плоштината на правоаголникот е $24cm^2$. Колку такви правоаголници постојат?

112. Како од 16 дадени дрвени кибритчиња може да се направи фигура на која може да се воочат 5 квадрати и 10 правоаголници (кои не се квадрати)?



113. Од правоаголникот е „отсечен“ мал правоаголник, види цртеж (должините на цртежот се дадени во сантиметри). Ако периметарот на добиената фигура е $60cm$, пресметај ги должините на страните x и y.



114. Разликата во големините на два комплементни агли е $2007'$. Определи ги големините на тие агли.

115. Ако за аглите α, β $и$ γ важи дека $\alpha + \beta = 90^0$, $\alpha + \gamma = 180^0$ и α е третина од разликата на аглите β $и$ γ, да се пресмета збирот $\alpha + \beta + \gamma$.

116. Пополни ја табелата впишувајки ги броевите на воочените остри, прави и тапи агли на секоја од буквите.

	П	Е	Т	А	Р
остри					
прави					
тапи					

117. Збир на половина, четвртина и осмина на аголот α е еднаков на агол кој е суплементен на аголот a. Определи ја големината на аголот a.

118. За колку еден агол е помал од својот суплементен агол, ако е $25°52'28''$ поголем од својот комплементен агол?

119. Аголот $3\alpha + 5\beta$ е за $70°$ поголем од аголот $3\alpha - 2\beta$ и за $50°$ помал од аголот $5\alpha + 5\beta$. Определи ги големините на аглите α и β

120. Аглите α и β се комплементни, а аглите $\frac{6}{5}\alpha$ и $\frac{9}{4}\beta$ се суплементни. Определи ги големините на аглите α и β.

121. Аглите α, β и γ се комплементни и $\alpha = \frac{1}{5}\beta$, $\beta = 5\gamma$. Определи ја големината на секој од аглите.

122. Аглите $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ се „соседни“ и заедно формираат рамен агол. Ако е познато дека секои два несоседни агли се комплементни и уште дека γ е за $20°$ поголем од β, определи ја големината на секој од овие агли.

123. Седум прави се сечат во една точка и формираат 14 агли. Ако аглите ги обележиме со броеви во насока на движење на стрелката на часовникот да се докаже дека

$$\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 7 + \angle 9 + \angle 11 + \angle 13 = 180°.$$

124. Определи го аголот кој суплементен со својата осмина?

125. Разликата на два агли со паралелни краци е еднаква на половината од помалиот. Да се определи големината на аголот кој е комплементен на помалиот агол.

126. Аголот α е за 32^0 поголем од својата третина. Определи го аголот комплементен на аголот α.

127. Пресметај ја големината на аголот кој е за $2005'$ поголем од неговиот суплементен агол.

128. Пресметај ја големината на аголот кој е за $2004'$ поголем од на неговиот комплементен агол.

129. Аглите α и β се суплементни, а аглите β и γ се комплементни. Одреди ги аглите α, β и γ ако аголот α е пет пати поголем од аглите:

а) β ; б) γ.

130. Разликата на аголот α и на неговиот напореден агол β е 48^0. Да се пресмета аголот кој е комплементен на аголот β.

131. Големината на аголот α е $20°1'$, а големината на аголот β е $2001'$. Кој од наведените агли е поголем и за колку?

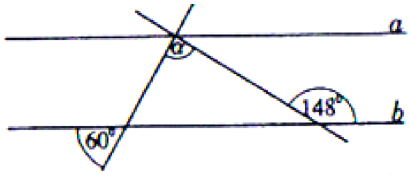
132. Аглите α и β се суплементни, а пет шестини од аголот α и третина од аголот β се комплементни агли. Определи ги аглите α и β.

133. Аголот $3\alpha - \beta$ е за $63^0 45' 36''$ помал од аголот $3\alpha + 2\beta$ и за $74^0 37' 16''$ поголем од аголот $\alpha - \beta$. Определи ги големините на аглите α и β.

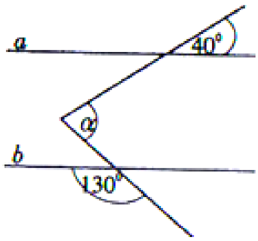
134. Разликата на два напоредни агли е еднаква на половинат од помалиот агол. Докажи дека аголот комплементен на помалиот агол е еднаков на четвртина од помалиот агол.

135. Аглите α и β имаат паралелни краци. Ако $\alpha = 2003'$ колкава е разликата $2\beta - \alpha$?

136. Определи го аголот α (согласно цртежот), ако се знае дека правите a и b се паралелни.



137. Да се определи големината на непознатиот агол α даден на сликата, ако правите a и b се паралелни.



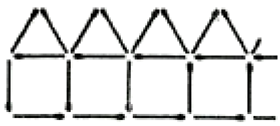
VII ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Воведни задачи

1. Еден татко на својот син му дал 4 јаболка, а пак друг татко на својот син му дал 3 јаболка. На крајот се утврдило дека поклонот на двата сина изнесува само 4 јаболка. Како е тоа можно?
Решение: Дедото на својот син му дал 4 јаболка, а синот пак на својот син му дал 3 јаболка.

2. Како може од 5 кибритчиња со должина $32mm$ да се направи метар?
Решение: I M (не е важна должината ка кибритчињата).

3. Софија од кибритчиња направила низа од 9 куќички. На цртежот е прикажан почетокот на таа низа. Колку кибритчиња се потребни за да се направи целата низа?



Решение: За првата куќичка се потребни 6 кибритчиња. За секоја следна потребно е да се додадат уште по 5 кибритчиња. Тоа значи дека за целата низа се потребни $6 + 8 \cdot 5 = 46$ кибритчиња.

4. Во зграда со 4 ката и 4 влеза (*I, II, III* и *IV)* на секој кат и во секој влез има по еден стан. Во секој од становите во непарните влезови живее ист број на станари. Во секој од становите во парните влезови, живеат двојно повеќе станари отколку во становите во непарните влезови. Ако во зградата вкупно живеат 48 станари, колку станари живеат во секој стан?
Решение: На секој кат живеат $48:4 = 12$ станари. Бидејќи на еден кат има по два стана во парните и два во непарните влезови, тоа значи дека 4 станари живеат во становите во непарните влезови на еден кат, а 8 станари во становите во парните влезови на еден кат. Значи, во еден стан во непарните влезови живеат два станари, а во еден стан во парните влезови живеат четири станари.

5. Збирот на цифрите на бројот 372 е $3 + 7 + 2 = 12$. Запиши ги сите непарни трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4?

Решение: Цифрата на единиците кај непарните броеви мора да биде 1 или 3. Бидејќи

$$4 = 1 + 3 + 0 \text{ и } 4 = 1 + 2 + 1,$$

заклучуваме дека бараните броеви се $103, 301, 121$ и 211.

6. Производ на цифирте на бројот 127 е $1 \cdot 2 \cdot 7 = 14$. Напиши ги сите парни трицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 12.
Решение: Бидејќи

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1 \cdot 3 \cdot 4,$$

заклучуваме дека цифрите на трицифрените броеви чиј производ на цифри е 12 може да бидат 2, 2, 3 или 1, 2, 6 или 1, 3, 4. Бараните броеви се: 232, 322, 126, 216, 162, 612, 134, 314.

7. Запиши ги сите четирицифрени броеви чиј збир на цифри е 4.
Решение: Имаме:

$$4 = 4 + 0 + 0 + 0 = 3 + 1 + 0 + 0 = 2 + 2 + 0 + 0$$
$$= 2 + 1 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Значи, цифрите на бараните броеви се: 4, 0, 0, 0 или 3, 1, 0, 0 или 2, 2, 0, 0 или 2, 1, 1, 0 или 1, 1, 1, 1, а бараните броеви се:

4000, 1300, 1030, 1003, 3100, 3010, 3001, 2200, 2020, 2002,
2110, 2101,2011, 1012, 1021, 1102, 1120, 1210, 1201, 1111.

8. Состави ги сите трицифрени броеви кои може да се напишат со помош на:
а) две двојки и една тројка;
б) една двојка и три тројки
Пресметај го збирот на добиените броеви под а) и збирот на добиените броеви под б), и на крајот од поголемиот збир одземи го помалиот.
Решение: а) Имаме: 223, 232, 322. Збирот на броевите е 777.
б) Имаме: 233, 323, 332. Збирот на броевите е 888.
Бараната разлика е 111.

9. Дијана на секоја од 19 картички напишала по еден од броевите од 1 до 19. Дали може Дијана да ги подели картичките во две групи, така што збирот на броевите во едната група ќе биде за 40 поголем од збирот на броевите во другата група?
Решение: Збирот на сите картони е

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 18 + 19 = 190.$$

Ако со x го означиме збирот на броеви на картоните во едната група, тогаш е $x + 40$ *е* збир на броевите на картоните во другата група. Затоа што

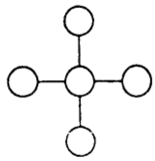
$$x + (x + 40) = 190,$$

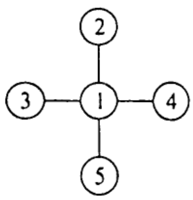
збировите на картоните во групите се 75 и 115. Затоа што

$$1 + 2 + 3 + 17 + 18 + 19 + 15 = 75,$$

заклучуваме дека е можно да се поделат картичките во две групи со бараното својство.

10. Во секој круг треба да се впише еден од броевите 1, 2, 3, 4 и 5 така да збирот на броеви хоризонтално и збирот на броеви вертикално биде по 8.





Решение: Бројот 8 како збир на три од броевите 1, 2, 3, 4 и 5 може да го добиеме на два начина: 1+2+5 и 1+3+4. Бидејќи бројот 1 е во двата збира, заклучуваме дека тој мора да се наоѓа и во хоризонталната и во вертикалната насока

11. Имаме на располагање само монети од 5 и од 2 денари. Колку најмалку, а колку најмногу монети треба да земеме за да платиме сметка од 101 денар?

Решение: Имаме $20 \cdot 5 + 1 = 101$, но немаме монети од 1 денар. Сега ако остатокот од 1 денар и една монета од 5 денари ги замениме со монети од 2 денари добиваме $19 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 101$, па најмалиот број на монети е: $19 + 3 = 22$. Слично, $1 + 50 \cdot 2 = 101$ и за да искористиме монета од 5 денари треба остатокот од 1 денар и 2 монети од 2 денари да ги замениме со 1 монета од 5 денари. Така добиваме $1 \cdot 5 + 48 \cdot 2 = 101$, најголемиот број на монети е: $1 + 48 = 49$.

12. Го поставуваме коњот на полето $A1$ на шаховска табла $8 \cdot 8$ (долно лево поле). Дали коњот може да се движи по шаховската табла почитувајќи ги правилата на играта, така да на секое поле на шаховската табла застане само по еднаш и на крај да заврши на полето $H8$ (горно десно поле)?

Решение: По секој потег (по секое поместување) коњот се наоѓа на поле со различна боја во однос на претходното поле. Значи ако се наоѓал на црно поле, по скокот ќе се наоѓа на бело и обратно. На почетокот коњот се наоѓа на црно поле, па по првиот скок ќе биде на бело поле, после вториот на црно поле итн. Коњот по скокот чиј број е непарен се наоѓа на бело поле. За да би ја покрие целата табла, потребни се 63 скока, што значи дека ќе заврши на бело поле. А бидејќи полето $H8$ црно, заклучуваме дека такво движење не е можно.

2. Принцип на Дирихле

Принципот на Дирихле искажува едно од основните својства на конечните множества. Овој принцип се користи во решавање на различни проблеми, а најчесто се користи за докажување дека одредени објекти или предмети имаат некои одредени (потребни) својства.

Кога е неопходно да се докаже дека сите објекти на множеството имаат одредено својство, потребно е секој елемент на тоа множество да го има тоа својство. Ако сакаме да го побиеме ова тврдење, би било доволно да најдеме контрапример, т.е.некој елемент што не го задоволува тоа својство.

Кога е тешко да се најде контрапример, тогаш многу често е полесно да се користи принципот на Дирихле бидејки многу полесно е да се докаже дека соодветниот пример постои отколу тој да се пронајде.

На пример, ако пет момчиња добиле шест топки, и секој од нив добил барем една топка заклучуваме дека еден од нив добил две топки. За нас е важно дека некој добил две топки, а не кое е тоа момче.

Понатаму, ако во n кутии се сместени повеќе од n предмети, тогаш во една кутија сигурно ќе има повеќе од еден предмет.

13. На летна математичка школа учествуваат 375 ученика. Докажи дека меѓу нив постојат двајца кои на исти ден slават роденден.
Решение: Бидејќи има помалку денови во годината отколку ученици, родендените на некои ученици ќе мора да се поклопат.

14. Во хотелскиот комплекс за време на летото престојуваат 1012 гости од Македонија. Докажи дека меѓу нив постојат двајца гости со исти иницијали.
Решение: Бројот на различни иницијали е $31 \cdot 31 = 961$, и бидејки имаме повеќе луѓе од тој број, тогаш сигурно постојат двајца од нив со исти иницијали.

15. Дадени се броевите $0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2$ и 2. Дали е можно овие броеви да ги разместиме во полињата на квадрат 3×3 така што во секоја колона, редица и дијагонала збирот да биде различен.

Решение: Користејќи ги дадените броеви, можеме да формираме 7 различни збирови. Во квадрат 3×3 имаме три колони, три редиции две дијагонали, значи не е можно е да се разместат броевите на бараниот начин.

16. Бела рамнина на произволен начин е испрскана со сина боја. Докажи дека во сино-белата рамнина постои рамностран триаголник на кој сите 3 темиња му се обоени со иста боја.

Решение: Нацртај правилен шестоаголник со неговиот центар и подели го на шест рамнострани триаголници. Со боење на темињата доаѓаме до решението.

17. Во корпата за топки има 10 кошаркарски, 5 фудбалски и 7 ракометарски топки. Колку најмалку топки без гледање треба да извлечеме за да бидеме сигурни дека сме извлекле ракометарска топка.

Решение: Во најлош случај, прво ќе ги извлечеме сите кошаркарски и фудбалски топки. Значи, треба да извлечеме $10 + 5 + 1 = 16$ топки.

18. Дадени се 5 произволни природни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат 2 чија разлика е делива со 4.

Решение: Разлика на два броја е делива со некој број ако тие броеви при делење со бројот даваат ист остаток. При делење со 4 постојат четири различни остатоци, а тоа се 0,1,2 и 3. Бидејќи ние имаме 5 броеви заклучуваме дека барем два мораат да имаат исти остаток при делење со 4. Разликата на овие два броја е делива со 4.

19. Колку најмалку природни броеви треба да се изберат така што меѓу нив да постојат 2 чија што разлика е делива со 32?

Решение: Потребно е да се земат најмалку 33 броеви. Така ќе бидеме сигурни дека барем два од нив имаат ист остаток при делење со 32.

20. На ликовна изложба ќе присуствувале 32 лица.Докажи дека меѓу нив постојат двајца кои меѓу присутните имаат ист број на познаници.

Решение: Секој од нив може да има 0, 1, 2, ..., 31 познаници. Ако некој има 0 познаници, тогаш никој нема 31 познаник, па максималниот број на различни познатства е 31. Ако некој има 31 познаник тогаш никој нема нула познаници. Според тоа, има 32 лица и најмногу 31 познанство, па затоа двајца мора да имаат еднаков број познаници.

21. Ако $nk+1$ топки се распоредени во k кутии, тогаш во една од овие кутии мора да има барем $n+1$ топка.
Решение: Ако во секоја кутија ставиме по n топки , тогаш ќе искористиме $n \cdot k$ топки. Значи ни преостанува уште една топка која мораме да ја ставиме во некоја од постоечките кутии.

22. Јасмина набрала 21 гајба со јаболки. Во секоја гајба се ставени јаболки од иста сорта при што се застапени 4 сорти јаболки. Докажи дека Јасмина набрала барем 6 гајби јаболки од иста сорта.
Решение: Ако од секоја сорта набрала по точно 5 гајби, таа вкупно би набрала 20 гајби јаболка. Но, Јасмина набрала 1една гајба повеќе, така да таа гајба ќе биде шеста гајба на било која од сортите.

3. Мерења и претурања

23. Со помош на сад од 3 литри и 5 литри, да се измери точно 4 литри вода.
Решение: Имаме

5*л*	**3*л***	**Активност**
0	3	Тураме
3	0	Претураме
3	3	Тураме
5	1	Претураме
0	1	Претураме
1	0	Претураме
1	3	Тураме
4	0	Претураме

24. Млекарката Мила треба да измери точно 5 литра млеко, меѓутоа таа имала голем котел и садови само од 4 литра и 7 литра. Како Мила ќе измери 5 литра млеко?

Решение: Имаме

7*л*	0	0	4	4	7	0	1	1	5
4*л*	0	4	0	4	1	1	0	4	0

25. Во продавница Тања барала 400 грама брашно. Како продавачката ќе и измери точно грама од брашното, ако има само два сада и тоа од 800 грама и 500 грама?

Решение: Имаме

800g	0	500	500	800	800	0	0	500	500	800	800
500g	500	0	500	200	0	0	500	0	500	200	0
ќеса	0	0	0	0	200	200	200	200	200	200	400

26. Миле има 3 кутии со џамлии: една со 13, една со 10 и една со 4 џамлии. Со помош на точно 3 префрлања, Миле ги распоредил џамлиите така што во секоја од кутиите има еднаков број на џамлии. Префрлањето се реализира така што од едната во другата кутија префрламе точно половина од џамлиите кои биле во втората кутија. Како тоа го направил Миле?

Решение: Имаме

13	10	4
13	8	6
9	12	6
9	9	9

27. Дадени се 3 сада. Првиот е со зафатнина од 8 литри и во него се наоѓаат 5 литри вода, другиот сад со зафатнина од 5 литра и во него има 3 литри вода и третиот со зафатнина од 3 литри а во него има 2 литри вода. Со помош на 2 прелевањања измери точно 1 литар вода.

Решение: Имаме

8*л*	**5*л***	**3*л***	**Претурање**
5	3	2	Почеток
4	3	3	Од прва во трета
4	5	1	Од трета во втора

28. $24\ l$ вода треба да распределиме на три еднакви дела користејќи при тоа само празни канти од по $13l$, $11l$ и $5l$. Образложи ја постапката!
Решение: Ќе ги наполниме кантите од $11l$ и $5l$. Тогаш во големата канта ќе остане една третина од вкупната вода, односно $8l$ вода. Потоа ќе ги претуриме сите $11l$ во кантата од $13l$ и ќе дотуриме уште $2l$ од кантата од $5l$. Преостанатите $3l$ ќе ги претуриме во кантата од $11l$. Од кантата од $13l$ ќе ја наполниме кантата од $5l$, после што, во кантата ќе ни остане втората третина на вкупна вода. На крајот, полната канта од $5l$ ја претуриме во кантата од $11l$ во која веќе се наоѓаат $3l$ вода.

29. Од 6 навидум еднакви џамлии, една има помала маса од останатите. Со помош на само 2 мерења на вага без тегови одреди која е таа џамлија.
Решение: Ќе ги поделиме џамлиите во 3 групи, по две џамлии во секоја група. Ќе споредиме две групи.
1) Ако се во рамнотежа, полесната џамлија е меѓу двете кои не се мерени. Ќе ги споредиме оние џамлии кои не се мерни и на тој начин ја пронаоѓаме полесната џамлија.
2) Ако не се во рамнотежа, бараната џамлија се наоѓа меѓу оние две кои се полесни. Со мерење на тие две, доаѓаме до бараната џамлија.

30. Меѓу 4 навидум еднакви прстена 2 се златни, а 2 позлатени. Златните прстени се со еднаква маса меѓу себе, а позлатените истотака се со еднаква маса помеѓу себе, но се нешто полесни од златните. Како со две мерења, на вага без тегови, да се утврди кои прстени се златни?
Решение: Прстените ги нумерираме со броеви од 1 до 4. Ги споредуваме прстените нумерирани со броевите 1 и 2. Ако се со иста маса, ги споредуваме прстените нумерирани со броевите 2 и 3. Ако е $2< 3$, тогаш прстените нумерирани со 3 и 4 се златни, во спротивно златни се прстените нумерирани со броевите 1 и 2. Ако $1> 2$, ги споредуваме прстените нумерирани со броевите 2 и 3. Ако е 2=3, тогаш златни се прстените нумерирани со броевите 1 и 4, а пак ако $2< 3$, тогаш се златни се прстените нумерирани со броевите 1 и 3 златни. Слично е и ако $1< 2$.

31. Од 4 навидум еднакви топчиња, една е со различна маса од останатите три. Како со помош на вага без тегови, со само три мерења да се определи кое е тоа топче, како и дали е полесно или потешко од останатите?

Решение: Нека топчињата ги означиме со A, B, C и D. Во првото мерење се споредуваат топчињата A и B. Ако $A = B$, тогаш неисправни топчиња се C или D. Потоа се споредуваат A и C. Ако $A = C$, тогаш неисправно топче е D, а со споредување на A и D се утврдува дали D е полесно или потешко од A. Ако е $A > C$, тогаш C е полесно и неисправно топче. Ако е $A < C$, тогаш C е потешко и неисправно топче. Ако е $A < B$ или $A > B$, тогаш C и D се исправни топчиња. Ги споредуваме A и C. Ако е $A = C$, тогаш B е неисправно топче и со споредување со A утврдуваме дали е полесно или потешко. Ако A е полесно или потешко од C, тогаш е A неисправно топче.

32. Во склад се наоѓаат јаболка спакувани во сандаци од по 30, 18 и 13 килограми. Како без да се отворат сандаците од складот да се земат 80 килограми јаболка?
Решение: Треба за земеме $2 \cdot 13kg$ и $3 \cdot 18kg$

33. Од 10 килограми шеќер со помош на вага и само 2 тега од 100 и 50 грама, Јасна треба да измери 1 килограм и 400 грама. Како ќе го реализира тоа Јасна со помош на точно 4 мерења?
Решение: Прво мерење: ја делиме целата количина на шеќер на два еднакви дела од по 5 килограми. Второ мерење: го делиме еден од тие два дела на два дела од по 2 килограма и 500 грама. Трето мерење: го делиме еден од тие делови на два дела од по 1 килограм и 250 грама. Четврто мерење: со помош на тегови ќе измериме 150 грама и ќе го додадеме на еден дел од 1 килограм и 250 грама.

4. Пребројувања

Во практиката често пати се среќаваме со проблемот колку елементи од дадено множество задоволуваат определени услови. Стандардни задачи од овој тип се комбинациите, варијациите и пермутациите со и без повторување. Овде нема да презентираме теориски разгледувања за класичните комбинаторни принципи и конфигурации, туку ќе се осврнеме само на задачите од овој вид. Притоа во различен облик ќе ги користиме следниве две тврдења:

1) n точки определуваат $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ отсечки.

2) n точки, од кои ниту едни три не лежат на иста права, опредлуваат

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2},$$

триаголници. Тоа е најголемиот број на триаголници кој може да биде одреден со овие n точки.

34. На годишнина од матура се собрале 120 луѓе. Ако е познато дека секој се ракувал со секого, колку вкупно ракувања имало?

Решение: НА секој човек да му придружиме по една точка. Имаме $\frac{120\cdot 119}{2}=7140$.

35. Колку има трицифрени броеви кај кои првата цифра е поголема од 6, втората цифра е поголема од првата и третата е парна?

Решение: Најлесен начин е да ги испишеме сите такви броеви. Тоа се броеви од облик $78X, 79X, 89X$. Заради тоа што X може да има пет различни вредности, добиваме дека постојат 15 броеви кои ги задоволуваат бараните особини.

36. Определи го бројот на сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е помал од шест, а поголем од два.

Решение: Го одредуваме всушност бројот на сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е 3, 4, 5. Броеви чиј збир на цифри е три се: 111, 201, 210, 300, четири: 400, 310, 301, 220, 202, 211.103, 130, 121, 112, пет: 500, 401, 410, 302,320 311, 203, 230, 221, 212, 104, 140, 131, 113, 122. Значи, постојат вкупно 29 броеви кои го исполнуваат зададениот услов.

37. а) Определи го бројот на сите четирицифрени броеви чиј збир на цифри е парен.

б) Определи го бројот на таквите броеви кои се наоѓаат поголеми од 1244, а помали од 1389.

Решение: Постојат 9000 четирицифрени броеви. Тие можат да се поделат во серии од по десет последователни броеви. Такви серии во овој случај има 900. Ако првиот број е парен, вториот е непарен, третиот е парен итн. Ако првиот е непарен, вториот е парен, третиот е непарен. Во двата случаи, секоја серија од десет броеви содржи по пет парни и пет непарни. Значи, има 4500 непарни (парни) четирицифрени броеви.

Дадената низа можеме да ја поделиме во два дела: 1244-1249, 1250-1389. Во првиот дел, со непосредна проверка добиваме дека има три парни, додека во втората, слично како и во задачата под а), добиваме дека постојат $\frac{1389-1250+1}{2}=70$ парни. Значи, вкупно има 73 парни броеви.

38. Определи го бројот на сите четирицифрени броеви кај кои збирот на првите две цифри е парен, а на другите две цифри непарен број.
Решение: Според тврдењето од претходната задача, лесно се заклучува дека има 45 броја со парен (или непарен) збир на цифри помеѓу 10 и 99 и точно 50 броеви помеѓу 0 и 99. Бидејќи првата цифра мора да биде поголема од 0, заклучуваме дека има 45 комбинации за првите две цифри кои го исполнуваат зададеното својство. Такви ограничувања за последните две цифри не постојат, па според тоа за нив има 50 такви комбинации за. Така, вкупниот број на такви четирицифрени броеви е $45\cdot 50=2250$.

39. Определи го бројот на сите парни четирицифрени броеви кај кои првата цифра е 1 или 2, а збирот на нивните цифри е парен број.
Решение: Има вкупно 9000 четирицифрени броеви и точно 2000 броеви кои започнуваат со цифрите 1 или 2. Од тврдењето на претходната задача, знаеме дека точно на 1000 од овие броеви збирот на цифрите е парен. Останува да го разгледаме првиот услов, т.е. бројот да биде парен. Значи, постојат 5 можности за последната цифра. Во зависност од тоа дали првиот број е 1 или 2, нас не интересира бројот на двоцифрени броеви со парен, т.е. со непарен збир на цифри. Според претходната задача, и од едните и од другите има по 50 (во овој случај може да започне и со нула). Значи, вкупниот број е $5\cdot 2\cdot 50=500$.
Истиот резултат можеме да го добиеме и на поедноставен начин. Од бројката 1000 која ја добивме веднаш, бидејќи станува збор за последователни броеви, а знаеме дека секој втор завршува со парна цифра, наоѓаме дека $1000:2=500$.

40. На Никола тешко му оди учењето хемија со разбирање, а книгата по хемија е голема 1389 страници. Затоа Никола решил да го измами професорот со тоа што однапред напамет ја научил секоја десетта страна, а внимателно ја читал секоја втора страна од книгата. Ако на

Никола за да ја научи страната напамет му е потребно да ја прочита два пати и ако за да прочита една страница му се потребни 7 минути, уште колку часови и минути ќе му бидат потребни за да го доврши учењето по хемија (односно целата книга да ја научи напамет)?

*Решение:*Да го пресметаме бројот на страници што Никола ќе мора да ги прочита. Ако не научел ништо однапред, ќе мора да прочита $1389 \cdot 2 = 2778$ страни.

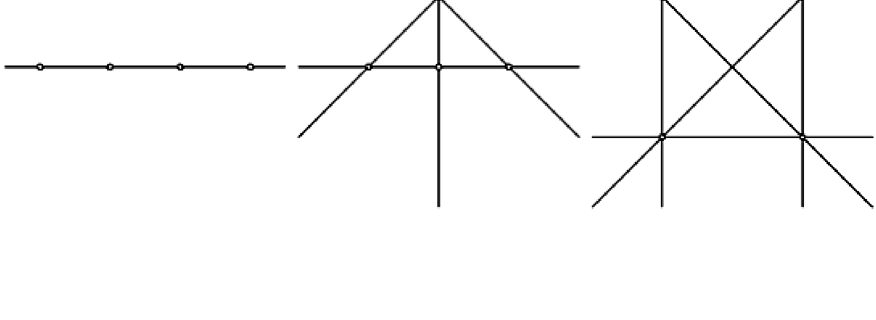
Но, тој веќе запаметил 138 страници, што ќе му заштеди 276 читања. Исто така, бидејќи тој лефтерно ја прочитал секоја втора страна тоа значи дека заштедил 694 читања. Но, Никола не заштедил 694 читања, бидејќи некои од страниците веќе ги знаел напамет, а тоа се 138 страници. Значи Никола треба да прочита $2778 - 276 - 694 + 138$ страници, за што му се потребни 13622 минути, т.е. 227 часа и 2 минути.

41. Дадени се десет непаралелни прави во една рамнина. Ниту едни од тие три прави не се сечат во иста точка. Во колку точки меѓу себе се сечат овие прави?

Решение: Секои две прави се сечат. Првата права можеме да ја избереме на10 начина. Втората права можеме да ја избереме на 9 начини. Па така доаѓаме до заклучок дека постојат 90 различни парови. Меѓутоа, овде секој пар го броевме по два пати - ако првата права е А, а втората е B, во пресметките ги вклучивме комбинациите AB и BA. Меѓутоа, во кој било редослед и да ги земаме, нивната пресечна точка е една иста точка, па затоа пресметаниот (добиениот) број треба да се подели со два. Значи, бројот на точки е 45.

42. Нека се дадени 4 различни точки. Колку прави може да бидат определени со тие точки?

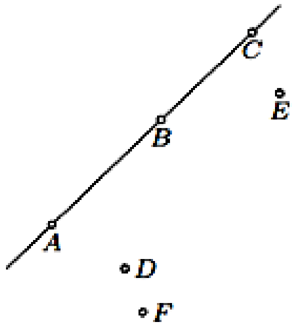
Решение: Можни се три случаи, кои се дадени на долните цртежи:



43. Нека се дадени 8 точки од кои ниту едни три не лежат на иста права. Колку прави образуваат?

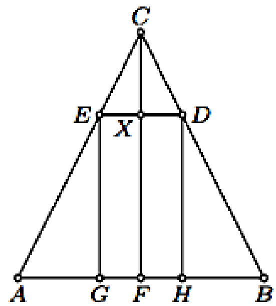
Решение: Бидејќи ниту едни три точки не лежат на иста права, бројот на прави кои тие ги определуваат ќе биде еднаков на бројот на отсечки кои тие ги определуваат, односно $(8 \cdot 7) : 2 = 28$.

44. Колку прави и колку отсечки се определени со точките на цртежот?



Решение: Имаме: 13 прави: *AC, AD, AF, AR, BD, BF, BE, CD, CF, CE, DF, DE, FE* и $(6 \cdot 5) : 2 = 15$ отсечки.

45. Колку отсечки и колку триаголници има на цртежот?



Решение: Кога на една права имаме:

а) само 2 точки, на неа се наоѓа една отсечка;

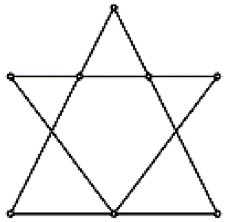
б) 3 точки, на неа се наоѓаат 3 отсечки;

в) 4 точки, на неа се наоѓаат 6 отсечки;

г) 5 точки, на неа се наоѓааат 10 отсечки.

На цртежот ги имаме следните прави: *EG*, *DH* – 2 точки; *AC*, *BC*, *CF*, *ED* – 3 точки; *AB* – 5 точки. Тоа е вкупно $(2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 10) = 24$ отсечки и 7 триаголници.

46. Колку отсечки и колку триаголници има на дадениот цртеж?



Решение: Користејки го решението од претходната задача, добиваме дека има 27 отсечки и 7 триаголници.

47. Дадени се 220 различни точки во рамнината. Од тие 220, точно 55 се колинеарни. Колку различни отсечки се образуваат овие точки, а колку прави?

Решение: Колинеарните точки нема да влијаат на бројот на отсечки, бидејќи иако две отсеки лежат на иста права, а при тоа не се совпаѓаат, станува збор за две различни отсечки. Значи, има $\frac{220\cdot 219}{2} = 24090$ такви отсечки. Од друга страна, колинеарноста ќе го намали вкупниот број на различни прави. А бројот на прави ќе биде

$$\frac{220\cdot 219}{2} - \frac{55\cdot 54}{2} + 1 = 24090 - 1485 + 1 = 22606.$$

48. Определи го бројот на триаголници што ги формираат 300 точки во рамнина, ако:

а) точно 4 точки се колинеарни;

б) точно 102 колинеарни точки.

Решение: Кога не би имало колинеарни точки бројот на триаголници кои би ги формирале 300-те неколинеарни точки би бил $\frac{300\cdot 299\cdot 298}{6}$.

а) Четирите колинеарни точки спречуваат формирање на точно четири нови триаголници, па вкупниот број на триаголници е 4455096

б) Аналогно, $4455100 - \frac{102\cdot 101\cdot 100}{6} = 4283400$.

Забелешка: Овде не треба да се додава еден триаголник како во случајот со правите, бидејќи колинеарни отсечки не можат да формираат триаголник.

49. Определи го бројот на:

а) правоаголници;

б) квадрати

во правоаголник со димензии 1244×1389, такви што нивното горно лево теме секогаш да се совпаѓа со темето на правоаголникот.

Решение: Горното десно теме и долното лево теме еднозначно се определени со помош на горното лево теме и долното десно теме. Бидејќи горното лево теме е фиксирано, ние само треба да го одредиме бројот на можни позиции на долното десно теме.

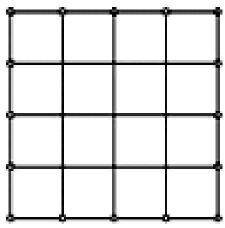
а) Може да се наоѓа било каде, освен на левиот или на горниот раб, а тоа можеме да го избереме на $1243 \cdot 1388 = 1725284$ начини.

б) Бидејќи двете страни на квадратот се еднакви, долната десна точка мора да биде на еднакво растојание и од горниот и од левиот раб, т.е. на некоја од 1243 точки кои го задоволуваат тој услов, а не се горно-лево теме.

50. Нека се дадени 7 точки од кои ниту едни три не лежат на иста права. Колку отсечки и триаголници соодветно со крајни точки и темиња формираат овие точки?

Решение: Отсечки $(7 \cdot 6) : 2 = 21$. Триаголници:$(7 \cdot 6 \cdot 5) : (3 \cdot 2) = 35$.

51. Колку квадрати и колку правоаголници има на дадениот цртеж?



Решение: Квадратите ќе ги броиме по димензии, $1x1, 2x2, 3x3$ и $4x4$. Имаме:

$1x1 - 16$квадрати

$2x2 - 9$квадрати

$3x3 - 4$квадрати

$4x4 - 1$квадрат

што значи вкупно 30 квадрати.

Правоаголниците ќе ги поделиме исто така по димензии:

$$1x2, 2x1, 1x3, 3X1, 1x4, 4x1, 2x3, 3x2, 2x4, 4x2, 3x4, 4x3.$$

Имаме:

$1x2 - 12$ правоаголници, а исто толку има и $2x1$ правоаголници, бидејки цртежот е симетричен

$1x3 - 8$ правоаголници, а исто толку има и $3x1$ правоаголници, бидејки цртежот е симетричен

1x4 – 4 правоаголници, а исто толку има и 4x1 правоаголници, бидејки цртежот е симетричен

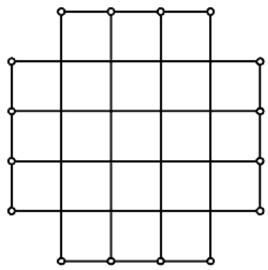
2x3 – 6 правоаголници, а исто толку има и 3x2 правоаголници, бидејки цртежот е симетричен

2x4 – 3 правоаголници, а исто толку има и 4x2 правоаголници, бидејки цртежот е симетричен

3x4 – 2 правоаголници, а исто толку има и 4x3 правоаголници, бидејки цртежот е симетричен.

Вкупно 70, што со оние 30 квадрати дава 100 правоаголници.

52. Колку квадрати, а колку правоаголници кои не се квадрати има на следниот цртеж?



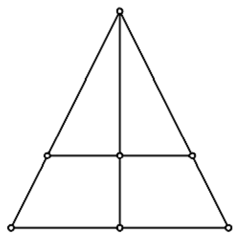
Решение: Користејки ја идеата од претходната задача, добиваме дека на цртежот има 38 квадрати и 106 правоаголници.

53. Дадени се 5 отсечки. Колку најмногу прави се определени со нивните крајни точки?

Решение: Пет отсечки може да имаат најмногу 10 различни крајни точки. Десет различни точки определуваат најмногу $(10 \cdot 9):2 = 45$ прави.

54. Дадени се 7 точки. Колку најмалку, а колку најмногу триаголници може да се формираат чии темиња се овие точки? Дали може да определат точно 6 триаголници?

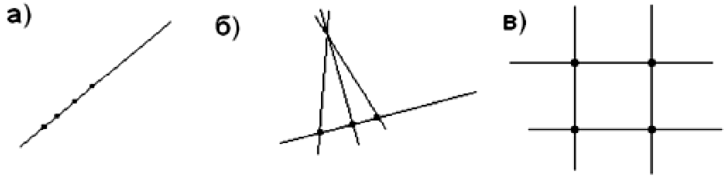
Решение: Најмалку 0, кога сите точки се на иста права, а најмногу $(7 \cdot 6 \cdot 5):(3 \cdot 2) = 35$, кога ниту едни три точки не припаѓаат на иста права. Може да се формираат точно 6 триаголници (види цртеж).



5. Конфигурации во геометријата со дефинирани услови

55. Каква е меѓусебната положба на 4 различни точки, ако тие формираат: а) 1; б) 4; в) 6 прави?

Решение: Имаме:



56. Каква меѓусебна положба имаат 6 различни точки, ако определуваат точно 10 прави?

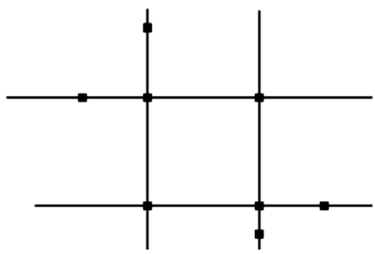
Решение: Четири точки припаѓаат на една права, а преостанатите две се надвор од неа и определуваат права на која не лежи ниту една од преостанатите четири точки од задачата.

57. Распореди 3 точки на 3 прави така што на секоја права лежат точно 2 од дадените точки.

Решение: Сите три прави меѓусебе се сечат. Пресеците на тие прави се точките од задачата.

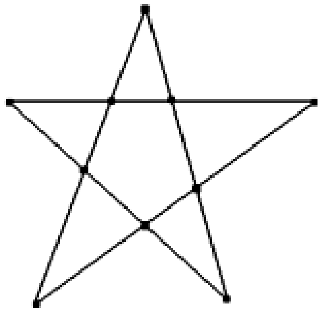
58. Дали може 8 точки да се распоредат на 4 прави така што на секоја права да има по 3 точки?

Решение: Може. Решението е дадено на долниот цртеж.



59. Распореди 10 точки на 5 прави, така што на секоја права да лежат по 4 точки.

Решение: Бараното распоредување е прикажано на долниот цртеж.

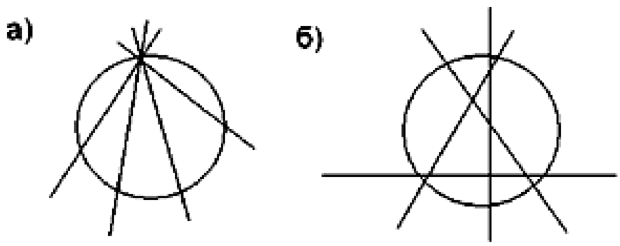


60. Колку најмалку, а колку најмногу прави треба да се конструираат во рамнина кои рамнината ќе ја поделат на точно 7 области?

Решение: Најмалку три прави (правите меѓусебно се сечат), а најмногу шест прави (правите се паралелни).

61. Каква е меѓусебната положба на 4 прави кои даден круг го делат на: а)5; б) 11 различни делови?

Решение: Одговорот е даден на долните цртежи.



62. Во соба која има облик на коцка, треба да се распоредат 16 столици така што покрај секој зид да се најдат по 5 столици.

Решение: Четири столици треба да се распоредат во ќошевите на собата, а преостанатите 12 да се распоредат така да по три столици се наоѓаат покрај секој зид.

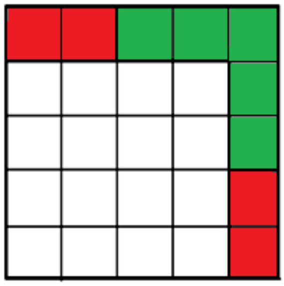
63. Каква е меѓусебната положба на пет точки кои формираат точно 9 триаголници?

Решение: Три точки припаѓаат на една права, а преостанатите две се надвор од неа. Тие две точки образуваат права на која не припаѓа ниту една друга точка од задачата.

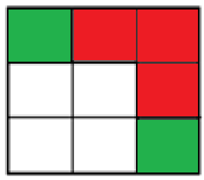
64. Да се определи меѓусебната положба на 6 точки кои формираат точно 10 различни триаголници?

Решение: Пет од точките лежат на една права, а шестата е надвор од неа.

65. На колку најмалку делови треба да се исечат два квадрати со страни $3cm$ и $4cm$, за да од добиените делови може да се направи нов квадрат?
Решение: На три дела. Види го цртежот.

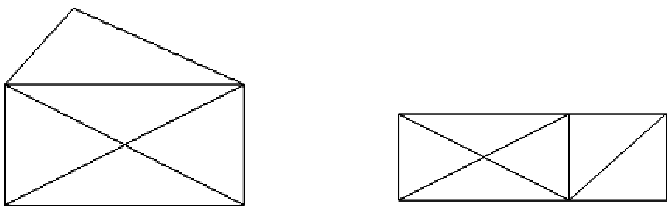


66. На колку најмалку делови треба да се исече картонски квадрат со страна $3cm$, за да од така добиените делови може да се состават три нови квадрати со плоштини од $1cm^2$, $4cm^2$ и $4cm^2$.
Решение: На четири дела. Погледни го цртежот.



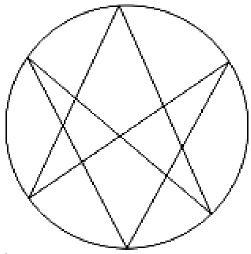
6. Графови

67. Која од наведените фигури може, а која не може да се нацрта со едно движење на моливот?



Решение: Фигура може да се нацрта со едено движење на моливот ако сите нејзини темиња се парни (парен број на линии започнуваат од тоа теме) или само две темиња се непарни.

68. Дали следната фигура може да се нацрта со едно движење на моливот?



Одгвор: Може. Обиди се тоа да го направиш!

69. Даден е многуаголник со n страни. Во него се повлечени сите негови дијагонали. За кои вредности на n вака добиената фигура може да се нацрта со едно движење на моливот?

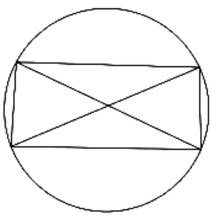
Решение: Многуаголници со непарен број на страни може да се нацртаат со едно движење на моливот вклучувајќи ги и сите дијагонали (тогаш секое теме е парно), а многуаголници со парен број на страни не можат бидејќи во тој случај секое теме е непарно.

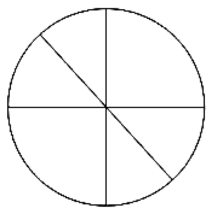
70. Која од фигурите на сликата може да се нацрта со едно движење на пенкалото започнувајќи од:

а) една фиксна точка;

б) произволна точка

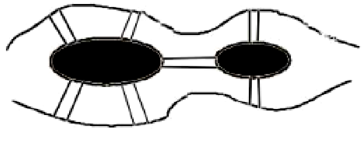
на фигурата?



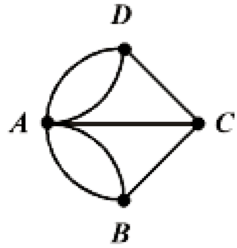


Упатство: Внимавајте на парноста на темињата.

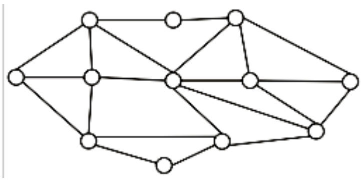
71. Во паркот P има езеро, три острови A, B и C и 7 мостови. Дали е можно да се тргне од некое место во паркот и да се поминат сите 7 моста, а при тоа по секој од нив да се помине само по еднаш? (Овој проблем го решил Л.Ојлер, 26 август 1735 година, по што тие се нарекуваат и Ојлерови графови.)



Решение: Овој проблем можеме да го сведеме на поедноставен облик (како на цртежот десно), а потоа анализирајќи ја парноста на темињата, заклучуваме дека тоа не е можно.



72. Туристичкиот водич на мапа обележал важни места, кои група туристи сакале да ги посетат. Дали е можно да се посетат сите места, а да по секоја улица се помине само по еднаш? Од која крстосница треба да тргнат туристите?



Решение: Внимавајте на парноста на секое место. Воочуваме дека точно две места се непарни, заради што можеме да заклучиме дека е можно да се реализира патувањето.

73. Шест градови се поврзани меѓу себе така што секој пар градови има директна сообраќајна врска, или со воз или со автобус (но не и двете). Дали може да се тврди дека постојат три градови кои се меѓусебно поврзани со сообраќајни врски од ист тип?

*Решение:*Нека градовите ги означиме со A, B, C, D, E и F. Од градот A мора сигурно да тргнат три линии од ист тип (на пример автобуски) и нека тоа бидат AF, AD и AB. Да се обидеме да докажеме дека такви три града не постојат. Заклучуваме дека линиите BD и DFсе железнички, бидејќи кога не би биле тогаш градовите A, B, D или A, F, D би биле поврзани со линии од ист вид. Нека сега ја анализираме линијата BF. Ако е автобуска линија, тогаш градовите A, B, Fсе поврзани со линии од ист вид, а ако е железничка пруга тогаш градовите B, D, F се поврзани со линии од ист вид. Значи слободно можеме да тврдиме дека три такви градови постојат.

74. Докажете дека во секое друштво има двајца луѓе со ист број на пријатели во тоа друштво.

Решение: Нека n е бројот на луѓето. Ако постои личност која во друштвото ги познава сите останати, тогаш секој човек во тоа друштво знае барем едно лице што значи дека n лица имаат број на познаници, кој број се движи помеѓу 1 и $n-1$, така што барем двајца мораат да познаваат ист број луѓе. Ако не постои човек кој ги знае сите останати, тогаш најголемиот број на познаници е $n-2$, а најмалиот е 0. Бидејќи има n лица во друштвото, тогаш најмалку двајца мора да познаваат ист број на луѓе.

75. Докажете дека во секое друштво парен број на лица има непарен број на пријатели во тоа друштво.
Решение: Бидејќи пријателството е симетрична релација, т.е. ако A е пријател со B, тогаш и B е исто така пријател со A, заклучуваме дека вкупниот број на пријателства е парен. Вкупниот број на пријателства е еднаков на збирот од бројот на пријателствата на секој од нив поединечно, па заради тоа мора парен број лица да имаат непарен број на пријатели.

76. Докажете дека меѓу секои 6 лица може да се изберат тројца така што сите тројца се познаваат помеѓу себе или ниту еден од тие тројца не се познаваат меѓу себе.
Решение: Нека избереме едно лице А од тоа множество. Тогаш тоа или знае најмалку 3 од преостанатите лица или не познава барем 3 лица. Без губење на општоста можеме да претоставиме дека познава барем три лица, и нека тоа бидат лицата B, C и D. Ако некои двајца од овие три лица се познаваат меѓу себе, тогаш заедно со А го сочинуваат бараното множество од три особи кои меѓу себе се познаваат. Ако ниту едни од лицата B, C и D не се познаваат меѓусебно, тогаш тие го формираат потребното множество од 3 лица кои не се познаваат едни со други, меѓу себе.

7. Нерешени задачи

77. Во кошаркарската лига има 8 клубови. Ако секој со секого игра по два натпревари (дома и во гости) колку натпревари ќе се одиграат во целата лига?

78. На колку начина може да се плати сметка од 100 денари ако на располагање имаме монети од по 50, 20 и 10 денари?

79. На шаховската табла на полињата $A1, B2, C3\ , D4$ (првите четири полиња на една дијагонала) се наоѓа по еден крал. Таблата исечете ја на четири дела, така што сите делови се еднакви меѓусебе и на секој дел се наоѓа по еден крал.

80. Ако 33 кокошки треба да се ставаат во два кокошарника, докажете дека постои кокошарник во кој се наоѓаат барем 17 кокошки.

81. Класниот раководител на крајот на учебната година купил 200 бонбони и им ги поделил на своите ученици од оделението. Во оделението имало 21 ученик. Докажи дека како и да ги подели бонбоните секогаш двајца ученици ќе добијат ист број на бонбони.

82. Дадени се 6 произволни природни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат два чија разлика е делива со 5.

83. Во голема кеса се наоѓаат 7 пара бели и 7 пара црни чевли.Колку најмалку чевли без гледање треба да земеме од вреќата за да бидеме сигурни дека имаме еден цел пар чевли (лева и десна чевла од иста боја)?

84. На турнир во кошарка учествуваат 8 екипи. Ако сите меѓу себе (секој со секого) играат по еден натпревар докажи дека во секој момент на турнирот постојат барем две екипи кои имаат одиграно ист број на натпревари.

85. Како би можеле со помош на садови од 7, 4 и 2 литра да измериме точно 1 лит1р?

86. Баба Мила сака на својот внук да му даде точно 2 литри сок. Таа на располагање има само два сада и тоа едниот од 8 литри, а другиот од 11 литри. Како баба Мила ќе измери точно 2 литри сок?

87. Во канта има 12 литри бензин кој треба да се подели на два еднакви дела и да се претури во резервоарите на два автомобили со помош на само два празни сада со зафатнина од 5 и 7 литри. Како тоа може да се реализира?

88. Од три метални пари една е фалсификат, односно е полесна од вистинската. Со едно мерење да се определи која е таа.

89. Во магацин се наоѓаат вреќи со компир од 13, 16 и 35 килограми. Како без отварање на вреќите, да се земат точно 100 килограми компир?

90. Определи го бројот на парни броеви помали од 200 чиј збир на цифри е парен број.

91. Определи го бројот на правоаголници кои може да се формираат во квадратна мрежа со димензии 5×5.

92. Определи го производот на броевите A и B, ако A е разликата од помеѓу бројот на броевите со парен и непарен збир на цифри помали од 2000000, а B бројот на престапни години помеѓу 3700 година пред нашата ера и 1389 година од нашата ера.

93. Дали е возможно броевите 1, 2, 3, ..., 10 да се поделат во две групи така да збировите во тие две групи бидат еднакви?

94. Напиши ги сите троцифрени броеви кај кои производот на цифрите е еднаков на 27.

95. Напиши ги сите непарни троцифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 5.

96. Колку изнесува бројот на четирицифрените природни броеви помали од 2009 чиј производ на цифри е еднаков на 10?

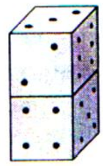
97. Колку изнесува бројот на двоцифрените броеви кај кои цифрата на единиците е поголема од цифрата на десетките?

98. На колку начини Војо, Раде и Зоран можат да поделат 7 еднакви џамлии, така да секој од нив добие барем по една џамлија?

99. На колку начини од дадената табела можеме да го прочитаме бројот 2010 ако дозволени правци на движење се: десно, доле и дијагонално десно-доле?

2	0	1	0
0	0	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

100. Стандардна коцка за игра е онаа кај која збирот на броевите на точките на спротивните страни е еднаков на 7. Две стандардни коцки се ставени да стојат една на друга (види цртеж). Збирот на бројот на точки кои се на долната страна на горната коцка и оние кои се на горната страна на долната коцка е помал од 10. Колку точки има на долната страна на долната коцка?



101. Од еден лонец во кој се наоѓаат 20 литри вода Марко во друг исто таков лонец требало да прелие 5 литри вода. Како тоа ќе го направи ако има само два празни сада со зафатнина од 3 и 7 литри?

102. На еден турнир учествувале 8 екипи, поделени во две групи од по 4 екипи. Во првиот круг секој тим одиграл по еден натпревар со секој од останатите тимови во својата група. Победниците на групите меѓу себе играле уште по еден натпревар меѓу себе како би го определиле победникот на турнирот. Колку вкупно натпревари се одиграни на турнирот? Одговорот да се образложи.

103. Рабовите на дрвен квадар се $21cm, 24cm$ и $27cm$. Сите ѕидови на квадарот се обоени со сина боја, а потоа целиот е исечен на еднакви коцки со најголеми можни рабови со целобројни должини во сантиметри. Колку такви коцки имаат само еден сино обоен ѕид?

104. Некои страни од дрвена коцка со раб a cm $(a \in N)$ се обоени со сина боја, а потоа коцката е исечена на коцкички со рабови 1 cm. Ако 14 коцкички имаат по две обоени страни и не постои ниту една коцкичка со три обоени страни, колку од коцкичките немаат обоено ниту една страна?

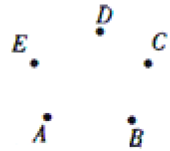
105. Нацртај 6 прави и 7 точки, така да секоја од тие прави содржи точно 3 од тие точки.

106. Дадени се 1000 точки во рамнината. Ако точно 998 од нив се колинеарни, определи го бројот на триаголници кои овие точки ги формираат во рамнината.

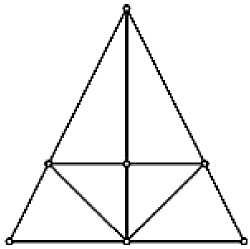
107. Ако со помош на n точки во рамнина се образувани точно 153 отсечки, која е вредноста на n?

108. На правите a и b се наоѓаат 3 и 4 точки, соодветно. Колку прави и колку отсечки се одредени со нив?

109. Во рамнина се дадени пет точки како на цртежот. Дали има повеќе отсечки со краевите во тие точки или триаголници со темиња во тие точки?

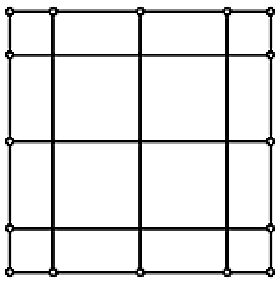


110. Колку триаголници има на долниот цртеж?

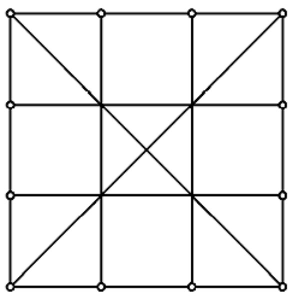


111. Дадени се 6 точки, од кои никои три од нив не се наоѓаат на иста права. Колку отсечки, колку прави и колку триаголници се определени со тие точки?

112. Колку квадрати и правоаголници има на дадениотг цртеж?



113. Колку отсечки, триаголници, квадрати и правоаголници кои не се квадрати има на долниот цртеж?



114. 5 точки распореди на 5 прави, така што секоја права да содржи по точно 2 точки.

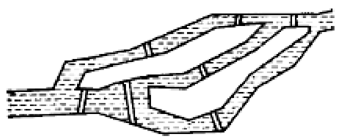
115. Колку најмногу, а колку најмалку прави треба да се конструираат за да може една рамнина да се подели на точно 11 области.

116. Каква е меѓусебната положба на 4 прави, кои даден круг го делат на 8 различни делови?

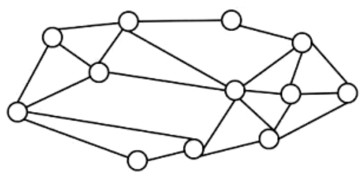
117. 6 точки распореди на 3 прави, така што секоја права да содржи по точно 3 точки.

118. 4 точки распореди на 5 прави, така што секоја права да содржи по точно 2 точки.

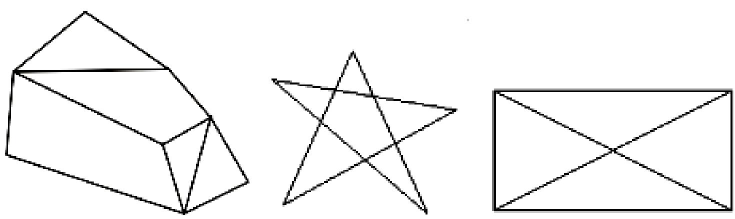
119. На сликата е прикажана река со сите мостови во одредено место. Дали е можно да се обиколат сите брегови и притоа по секој мост да се помине само по еднаш?



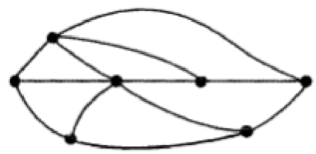
120. На сликата се прикажани пешачките патеки во паркот. Од каде треба да се започне со прошетка така што преку ниту една од нив да не се помине двапати?



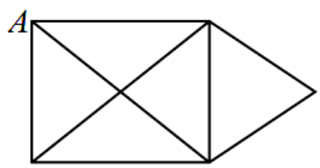
121. Која од наведените фигури може, а која не може да се нацрта со едно движење на моливот?



122. Перица залутал низ шумата. Забележал дека поминува по истите места бидејќи оставил трага дека бил таму. Дали може со сигурност да тврдиме дека Перица никогаш не поминал по ист пат?



123. Дистрибутер на весници започнува со разнесување на весници од точката A. Весниците треба да ги разнесе низ сите улици во соседството. Дали може да го стори тоа така што по иста улица не мора да помине двапати?



ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd, 1991
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I.: Primpremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd, 1988
3. Ilić, N. V.: Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd, 1991
4. Златилов, В.; Тонова, Т.; Цветкова, И.; Пендалиева, В.: Математическа читанка (4 клас), Труд & прозорец, София, 2000
5. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изявени ученици в 4 клас, Модул, София, 1993
6. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изявени ученици в 5 клас, Модул, София, 1994
7. Лазаревић, Б.: Припремни задаци за математичка такмичења за ученике IV разреда основне школе, ДМС, Београд, 1990
8. Малчески, Р.: Математички талент 13 (збирка задачи за IV одделение – втор дел), Армаганка, Скопје, 2020
9. Малчески, Р.: Математички талент 14 (збирка задачи за V одделение – втор дел), Армаганка, Скопје, 2020
10. Малчески, Р.: Математички талент П1 (збирка задачи за II одделение), Просветно дело, Скопје, 2020
11. Малчески, Р.: Математички талент П2 (збирка задачи за III одделение), Просветно дело, Скопје, 2020
12. Малчески, Р.: Математички талент П3 (збирка задачи за II одделение – втор дел), Армаганка, Скопје, 2020
13. Малчески, Р.: (2020). Математички талент П4 (збирка задачи за III одделение – втор дел), Армаганка, Скопје
14. Малчески, Р., Аневска, К., Малчески, С.: Математички талент 1 (збирка задачи за IV одделение), Просветно дело, Скопје, 2018
15. Малчески, Р., Главче, М.: Занимливи броења, Нумерус, Скопје, 2019
16. Малчески, Р., Главче, М.: Решаваме бројни ребуси, Нумерус, Скопје, 2017
17. Малчески, Р., Малчески, А., Брсаковска, С., Аневска, К., Главче, М.: Математички талент 22 (збирка задачи за IV и V одделение), Армаганка, Скопје, 2020
18. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С.: Математички талент 19 (збирка задачи за IV и V одделение), Армаганка, Скопје, 2020

19. Малчески, Р., Малчески, С.: Математички талент 25 (збирка задачи за IV и V одделение), Математички талент, Скопје, 2022
20. Малчески, Р., Малчески, С.: Математички талент П5 (збирка задачи за II и III одделение), Математички талент, Скопје, 2022
21. Малчески, Р., Малчески, С., Аневска, К.: Математички талент 2 (збирка задачи за V одделение), Просветно дело, Скопје, 2018
22. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София, 1993
23. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София, 1995
24. Тюфекчиев, И.; Лесов, Х.: Задачи за извънкласна работа по математика в VI и V клас, СМБ, София, 1985
25. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч.: Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София, 1998

Универзитет Св. Кирил и Методиј
Педагошки факултет Св.Климент Охридски
Бр. 02-337/11
20.04 2022 год.
СКОПЈЕ

Врз основа на член 57 од Статутот на Педагошкиот факултет „Св. Климент Охридски" во Скопје, во состав на Универзитетот „Св. Кирил и Методиј" во Скопје (Универзитетски гласник бр. 462 од 18.10.2019 г.), Наставно-научниот совет на Факултетот, на својата седница одржана по електронски пат на 20.4.2022 год., донесе:

О Д Л У К А
За усвојување на рецензии и
за издавање на практикум

1. Да се објави самостојно учебното поамгало „Практикум по методика на наставата по Математика од прво до петто одделение", од авторите д-р Методи Главче, д-р Катерина Аневска и д-р Ристо Малчевски.
2. Учебното помагало се однесува на предметната програма Методика на наставата по математика, задолжителен предмет во шести и во седми семестар на студиската програма Одделенска настава, со со фонд на часови 2+2+1 и со 5 ЕКТС кредити.
3. Учебното помагало е во согласност со наведените предметни програми.
4. Учебното помагало е рецензирано од рецензентите д-р Алит Ибраими и д-р Валентина Гоговска, избрани со Одлука на Наставно-научниот совет на Факултетот, бр.02-125/7 од 9.2.2022 година.
5. Ова е прво издание на учебното помагало .
6. Учебното помагало содржи 188 страници, формат В5, напишани на компјутер, со големина на фонтот 11, поделен во 7 поглавја, вклучувајќи ја и литературата и содржи 20 табели и прашалници, 119 цртежи и 732 задачи, од кои 389 се решени.
7. Кратката содржина, категоризацијата и заклучокот со оправданоста за објавување на трудот, се дадени во рецензиите на избраните рецензенти, објавени во Билтенот на УКИМ бр. 1259 од 15 април 2022 год. и усвоени на денешната седница.
8. Тиражот на изданието определен од самите автори е 100 примерока.
9. Одлуката стапува на сила со денот на нејзиното донесување.

Доставено до:
- Декан
- Авторите
- Продекани за финансии и наука, по меил
- Секретар, по меил
- Архива

За Наставно-научниот совет
Декан
Проф. д-р Емиљ Сулејмани