УНИВЕРЗИТЕТ "СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ"
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНСТИТУТ ЗА ИНФОРМАТИКА
С К О П Ј Е

Д-р Биљана Јанева

ВОВЕД ВО ТЕОРИЈАТА НА МНОЖЕСТВАТА И МАТЕМАТИЧКАТА ЛОГИКА

Скопје
2001

ПРЕДГОВОР

Учебникот "ВОВЕД ВО ТЕОРИЈАТА НА МНОЖЕСТВАТА И МАТЕМАТИЧКАТА ЛОГИКА" е резултат на повеќегодишни предавања на курсот МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА И АЛГЕБРА за студентите од втора година на студиите по информатика на Природно-математичкиот факултет во Скопје. Постојниот учебник од проф. д-р. Ѓорѓи Чупона "Алгебарски структури и реални броеви" го покрива речиси целиот материјалот од летниот семестар на овој курс, додека материјалот за зимскиот семестар, во кој се изучуваат теоријата на множествата, релациите, пресликувањата и делови од математичката логика, не беше покриен со учебник. Затоа на почетокот почнав да ги пишувам предавањата како помошна скрипта за спремање на материјалот, за по пет години предавања да ја оформам во учебник.

Материјалот што е обработен во овој учебник, барем поголемиот дел, се предава и во курсот МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА за студентите од прва година на студиите по математика од истиов факултет, па истиов може да послужи и како основен учебник и по овој предмет на студиите на Природно-математичкиот факултет во Скопје.

Покрај тоа, на двопредметните студии матматика-физика на прва година се предава и предметот АЛГЕБРА, за којшто материјалот е дел од овој учебник, но во него се содржани и повеќе делови од логиката, и дел од теоријата на мрежи, што не се предвидени во програмата на овој курс. Затоа овој учебник може да послужи и како помошно средство при изучувањето на горенаведениот предмет.

Секоја учебна година се најдував пред дилемата дали да почнам со интуитивната теорија на множествата или со елементите од исказното сметање. Проблемот е во тоа што се покажува погодно користењето на исказното сметање при дефинирање на операциите со множества, а од друга страна, како примери во некои делови од исказното сметање погодни беа примери со множества. Бидејќи студентите во претходното школување се сретнувале и работеле со множества, а во прва година од средното образование и нешто малку со исказното сметање, во учебников ги воведувам множествата, а потоа ќе се навраќам на исказното сметање, за на крај од првото поглавје да продолжам со операциите со множества. Сметав дека студентите од втора година студии се уште не се подготвени за изучување на аксиоматската теорија на множествата, па затоа во овој учебник теоријата на множествата е дадена на елементарно ниво.

На крајот од втората глава, по одделите каде што станува збор за аксиомата на избор и добро подредените множества, нема задачи. Исто така во третата глава по одделни параграфи нема задачи. Овие делови се изложени повеќе информативно за запознавање со некои поими, не се обработени подетално, па затоа и недостасуваат задачи кои се и многу потешки и не одговараат на нивото на останатиот дел од учебников.

Да наведам неколку забелешки за ознаките во текстот:

Прво, наместо изразот "ако и само ако", честопати ќе се употребува кратенката "акко".

Второ, при дефинирање на поими честопати се сретнува и друго "име" во заграда. Тоа означува дека во друга литература може да се сретне истиот поим и под тоа име, па доколку читателот се послужи и со друга литература, ќе може полесно да се снајде со терминологијата.

Трето, некои формули се означени со броеви (а, б, в). Притоа, првиот број ја означува главата од која е формулата, вториот одделот, а третиот редоследот на појавување на означена формула во тој оддел.

Четврто, својствата се означени со две бројки; првата го означува одделот, а втората својството. Доколку се повикувам на некое својство од оддел од претходна глава, тогаш првата бројка ја означува главата во која е дадено својството, втората одделот од таа глава, а третата самото својство.

И петто, многу својства се дадени без доказ. Најчесто, освен за оние за кои е напоменато, доказите се едноставни и се оставени на читателот како вежба. Значи, основна вежба по секој оддел е да се докажат недокажаните својства од тој оддел.

На крајот би сакала сесрдно да им се заблагодарам на проф. Ѓорѓи Чупона за сугестиите што ми ги даде при прегледувањето на ракописот, на проф.д-р Александар Самарџиски, како и на студентите Горан Трајковски и Александра Гочева, кои во текот на спремањето на испитот ми предочија некои грешки и текстот го дополнија со некои задачи што тие сметаа дека се интересни за студиите по информатика.

Исто така сакам да им се заблагодарам на рецензентите на овој учебник проф. д-р Наум Целакоски и проф. д-р Димитра Карчицка, кои со своите забелешки и предлози ми помогнаа да го направам учебников подобар и покорисен за студентите.

*****

Во учебната 2000/2001 година отпочна наставата по новите наставни планови. Според нив во прва година во првиот семестар се слуша предметот МНОЖЕСТВА. Овој учебник содржи повеќе од 80% од материјалот според наставните планови, па според тоа, може да послужи и како учебник за студентите од прва година на група информатика.

СОДРЖИНА

1. МНОЖЕСТВА И ИСКАЗНО СМЕТАЊЕ

1.1. Множества

Со множества работиме секојдневно. Во секојдневниот говор користиме и други синоними: гарнитура, колекција итн. Речиси секоја човекова дејност е сврзана со одредени множества. Секое множество се карактеризира со природата на своите елементи. Теоријата на множества, а и математиката воопшто, не навлегува во природата на елементите на множествата, т.е. изучува *айсшракшни множесшва*.

За означување на множествата обично се користат големите букви од латиницата: *A, B, C,...,M, N,...*, при што буквите *X, Y, Z* обично не се користат за означување конкретни, зададени множества, туку за "променливи" множества.

Се користат посебни ознаки за множествата природни, цели, рационални, реални и комплексни броеви. Имено, со N го означуваме множеството природни броеви, со Z множеството цели броеви, со Q рационални броеви, со R реални броеви, а со C го означуваме множеството комплексни броеви.

Како што напоменавме во предговорот, во тек на целиот текст на овој учебник често пати наместо изразот "ако и само ако" ќе се употребува кратенката "акко".

Примери:

1. Наставници што работат во едно училиште сочинуваат множество (наставници од едно училиште).

2. Сите лица што се наоѓаат во еден автобус сочинуваат множество (од лица што се во еден автобус).

3. Природните броеви се исто така множество.

4. Равенствата: 1+3=4, $x+y=7$, $x-y=5$ сочинуваат едно триелементно множество; елементите на ова множество се зададените равенства.

1´. Ако во едно училиште работи само еден наставник, повторно зборуваме за множество наставници од едно училиште, само што во овој случај тоа множество има само еден елемент.

1". Ако и тој еден наставник е преместен во некое друго училиште и не е најдена замена, повторно зборуваме за множество наставници од едно училиште, но во овој случај тоа множество нема елементи, тоа е *празно множесшво*.

2´. Во примерот 2 со тек на време бројот на лицата што се наоѓаат во автобусот се менува (некои излегуваат на една станица, а други, пак, влегуваат во автобусот). Ако претпоставиме дека автобусот се движи, дали е можно множеството лица што се наоѓаат во автобусот да биде празно множество?

4´. Дали бројот 4 е елемент на множеството дадено во примерот 4?

За две множества M и N велиме дека се *еднакви* ако и само ако тие се состојат од исти елементи, т.е. M и N се различни ознаки за едно исто множество. Во тој случај пишуваме $M = N$.

Ако множеството M се состои од елементите $a, b, c, d, e,\ldots$ ќе пишуваме $M=\{a, b, c, d, e,\ldots\}$, при што распоредот на елементите не е битен. Така,

$$\{a, b, c\} = \{b, c, a\}.$$

Исто така сметаме дека бројот на појавувања на еден ист симбол во дадено множество не значи дека тој елемент се појавува повеќе пати во истото множество, т.е множествата, на пример, $\{b, c, a\}$ и $\{a, b, c, a, c,.b\}$ ќе ги сметаме за еднакви и се состојат само од елементите a, b и c.

Ако M и N не се еднакви множества, тогаш пишуваме $M\neq N$.

Наместо "*x е елемент на множеството X*" ќе пишуваме $x\in X$, а наместо "*y не е елемент на множеството X*", $y\notin X$. Согласно со овие ознаки имаме

$$a\in\{a, b, c\}, \text{ но } d\notin\{a, b, c\}.$$

Едно множество M е *подмножество* од дадено множество N ($M\subseteq N$) акко секој елемент од M е и елемент од множеството N. Знакот $\subseteq$ се вика знак за *инклузија*. Во математичката литература се сретнуваат и други ознаки за инклузија. Во овој текст за инклузија ќе го користиме знакот $\subseteq$, додека со $\subset$ ќе означуваме *вистинска инклузија* дефинирана со:

$$M\subset N \text{ акко } M\subseteq N \text{ и } M\neq N.$$

1.1° . $A=B$ акко $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$. ∎

Тврдењето **1.1°** честопати се користи при докажување на еднаквост на две множества.

Се договараме дека постои само едно множество без елементи, *празно множество*, и го означуваме со $\emptyset$. Исто така, по договор, ако M е дадено множество, тогаш $\emptyset\subseteq M$, а ако M е непразно множество, тогаш $\emptyset\subset M$.

Да забележиме дека во литературата честопати за множество со само еден елемент се користи терминот *едноелементно множество* (или *синглтон*).

Нека M е множество. Со $\mathcal{B}(M)$ (или $\mathcal{P}(M)$) го означуваме множеството од сите подмножества на M. Велиме дека $\mathcal{B}(M)$ е *булеан* (или *партитивно множество*) на множеството M.

Примери:
5. $\mathcal{B}(\{1,2\})=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.
6. $\mathcal{B}(\emptyset)=\{\emptyset\}$.
Ќе наведеме неколку својства.

1.2° (*i*) $X=X$;
(*ii*) $X\subseteq X$;
(*iii*) $X\not\subset X$. ■

1.3°(*i*) Ако $X=Y$, тогаш $Y=X$;
(*ii*) ако $X=Y$ и $Y=Z$, Тогаш $X=Z$;
(*iii*) ако $X\subseteq Y$ и $Y\subseteq Z$, тогаш $X\subseteq Z$. ■

1.1.1. Вежби

1. Да се наведат неколку примери на множества што се предмет на изучувањата во:
(а) математиката,
(б) физиката,
(в) биологијата,
(г) економијата.
2. Да се определи булеанот на:
(а) $\{1, 2, 3\}$;
(б) $\{a, b, 1, 2\}$;
(в) $\{0, \lozenge, \Delta\}$.
3. Да се покаже дека:
(а) Ако $A=B$ и $B\subset C$, тогаш и $A\subset C$;
(б) $A\subseteq B$ и $B\subset C$ повлекува $A\subset C$;
(в) $\mathcal{B}(A)\subseteq\mathcal{B}(B)$ ако и само ако $A\subseteq B$;
(г) $\mathcal{B}(A)\subset\mathcal{B}(B)$ ако и само ако $A\subset B$;
(д) $\mathcal{B}(A)=\mathcal{B}(B)$ ако и само ако $A=B$.
4. Нека $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 3, a, b, c\}$ и $C=\{1, 2, a, b, d\}$. Да се определат сите подмножества M, такви што:
(а) $A\subset M$ и $M\subset B$;
(б) $A\subset M$ и $M\subset C$;
(в) $C\subset M$ и $M\subset A$.

1.2. Искази и исказни формули

Математичката логика е една од областите на современата математика. Оваа област почнува поинтензивно да се развива кон крајот на 19 век, кога математичкиот свет се судира со "откритието на парадоксите", математички расудувања кои доведуваат до апсурд.

Еден од најпознатите е логичкиот парадокс на Расел од 1902 година. Во тој период се правеле обиди експлицитно да се дефинира поимот множество, и тоа така што дефиницијата да биде доволно широка за да ги задоволи сите потреби, пред се, на математичарите. Множество, исто така, може да биде објект на множество (на пример, партитивно множество). Повеќето множества не се елементи од себе (множеството мачки не е елемент на множеството мачки). Да го разгледаме множеството A од сите множества X такви што *X* не е елемент од *X*. Од дефиницијата следува дека

A е елемент од A ако и само ако A не е елемент од A,

што е апсурд.

Еве уште еден пример на парадокс, пример на таканаречен семантички парадокс.

Еден човек вели:

"Јас лажам".

Ако тој лаже, тогаш тоа што го вели е вистина, значи, тој не лаже. Ако, пак, тој не лаже, тоа што го вели е лага, па значи, сепак лаже.

Анализите на вакви парадокси довеле до различни предлози за нивно одбегнување. Еден начин за одбегнување на Раселовиот парадокс е множествата да се "дефинираат" имплицитно, со помош на конкретна аксиоматска теорија. Прва таква аксиоматска теорија на множествата дал Цермело (Zermelo) во 1908 година. Постојат и други аксиоматски теории на множествата. Најрадикална е онаа на Брауер (Brower) и неговата интуиционистичка школа (Heyting, 1956), кои не признаваат некои основни закони, како на пример законот од класичната логика дека едно тврдење или е точно или не е точно (закон за исклучување на третото), т.е. според нив ова правило е точно за конечни множества, но не може да се обопшти на секое множество. Исто така, според нив, доказите за егзистенција на елемент со дадено својство не се признаваат доколку не постои и постапка како "ефективно" да се дојде до елементот со бараното својство.

Во овој курс ние ќе се задржиме само на основните поими и својства од математичката логика, коишто ни се неопходни не само во теоријата на множествата и алгебрата, туку и во другите области од математиката и информатиката. Во првата глава ќе се запознаеме со елементи од исказното сметање и со теоријата на квантификатори, додека во третата со формалните теории, исказното сметање и јазиците од прв ред како специјални формални теории.

Во говорниот јазик се сретнуваме со прости реченици од кои формираме сложени реченици со употреба на сврзници како што се и, или, но итн. Меѓутоа, во исказното сметање од интерес се реченици за кои ќе можеме да определиме дали тие се точни или не. Таквите реченици ќе ги викаме искази. Имено

Исказ е секоја декларативна реченица којашто задоволува точно еден од следниве два услова:

(а) таа е вистинита

(б) таа е невистинита.

На пример:

Следниве реченици се искази:

"Март има 31 ден."

"2+2=5"

"Париз е главен град на Македонија."

Имено, првата реченица е точен, додека втората и третата се неточни искази.

Речениците:

"Утре ќе врне."

"Петре е висок."

не се искази, ниту пак е исказ реченицата

"Февруари има 28 дена."

Во првата реченица вистинитоста зависи од временските услови во иднина, во втората поимот "висок" е релативен, зависи од претставата што ја има оној кој ја кажува оваа реченица, додека третата реченица е неточна само секоја престапна година.

Како и во говорниот јазик, и во овој случај можеме да зборуваме за "прости" и "сложени" реченици, односно искази. На пример речениците

"Март има 31 ден."

"2+2=5"

се прости, додека

"2·2=5 или Париз е главен град на Франција."

е сложена реченица.

За искази коишто се "прости реченици" ќе велиме дека се *атомарни искази*.

Да наведеме уште примери на атомарни искази:

"5 е еднаков со 0." (или, "5=0.")

"8 е делив со 4." (или, "$4|8$.")

Како што во говорниот јазик од прости формираме сложени реченици, така и од атомарни искази, со помош на "сврзници", можеме да формираме "сложени искази". Во натамошниот текст ќе работиме само со реченици кои се искази. Притоа за ознака на исказ (понатаму и за исказна променлива) ќе користиме мали букви од средината на латинската азбука: p, q, r, s, ...

Негацијата е наједноставниот начин од атомарна да се добие посложена реченица. Во говорниот јазик таа се применува на различни начини. Така, негација на реченицата

1 е позитивен цел број

е

1 не е позитивен цел број

или

Не е точно дека 1 е позитивен цел број.

Ќе го користиме вториот начин за формирање реченици со помош на негација. Имено, ако p е реченица, негацијата ќе ја означуваме со $\neg p$, т.е. со ставање знак за негација $\neg$ пред целата реченица. Значи, *негација* на исказот p е исказот $\neg p$, при што, ако p е вистинит исказ, $\neg p$ е невистинит, а ако p е невистинит, $\neg p$ е вистинит исказ. Нека $\top$ и $\perp$ се ознаки за "точно", односно "неточно", соодветно. Тогаш вистинитоста на реченицата $\neg p$ во зависност од вистинитоста на реченицата p може да се претстави со таблица на следниов начин:

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Значи:

p е точен исказ ако и само ако $\neg p$ е неточен.

Друг вообичаен сврзник е *конјункцијата* (се означува со $\wedge$). Зависноста меѓу вредностите на вистинитост на почетните искази и новоформираниот исказ со сврзникот $\wedge$ се дефинира со следнава таблица на вистинитост:

p	q	$p\wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$

$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Значи,
$p \wedge q$ е точна реченица ако и само ако и p и q се точни реченици.

Во обичниот говор постојат две употреби на сврзникот "или":
"p или q или и двете" (*вклучителна дисјункција*),
"p или q, но не и двете" (*исклучителна дисјункција*).

Знакот $\vee$ го користиме за вклучителна дисјункција, а вредноста на вистинитост на реченицата "$p \vee q$" во зависност од вредностите на вистинитост на исказите p и q се дефинира со следнава таблица:

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Значи,

$p \vee q$ е неточна реченица ако и само ако и p и q се неточни реченици.

Во оваа смисла и реченицата "$2 \cdot 2 = 5$ или Париз е главен град на Франција" ја сметаме за точна реченица, иако од јазична гледна точка нема смисла спојување на толку различни реченици со сврзникот "или".

Друг начин на формирање "сложени" реченици е формирање на *условни реченици*.

Примери:
1. Ако железото е метал, тогаш тоа е ковно.
2. Ако врне, ќе земам чадор.
3. Ако $2 \cdot 2 = 4$, тогаш Париз е главен град на Франција.
4. Ако $2 \cdot 2 = 5$, тогаш Париз е главен град на Франција.
5. Ако $2 \cdot 2 = 4$, тогаш Париз е главен град на Македонија.
6. Ако $2 \cdot 2 = 5$, тогаш Париз е главен град на Македонија.

Речениците 3-6 од смисловна содржина не се добри, но од гледна точка на математичката логика, тие не само што се добро формирани, туку и реченицитe (3),(4) и (6) се точни. Симболички тие се запишуваат во форма

$p\Rightarrow q$, а вредноста на вистинитост на исказот "$p\Rightarrow q$" во зависност од вредностите на вистинитост на исказите p и q е дефинирана со следнава таблица:

p	q	$p\Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Значи,

"$p\Rightarrow q$" е неточен исказ ако и само ако p е точен, а q неточен исказ.

Употребата на *импликацијата* ($\Rightarrow$) не е во спротивност со обичната употреба, туку има проширено значење.

Реченицата "p ако и само ако q" да ја означиме со "$p\Leftrightarrow q$".

Зависноста на вредностите на вистинитост на исказите p и q и вредноста на вистинитост на $p\Leftrightarrow q$ е прикажана со следнава таблица:

p	q	$p\Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Јасно е дека

"$p\Leftrightarrow q$" е точно ако и само ако p и q имаат иста вредност на вистинитост.

Симболите $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ се викаат *логички сврзници*. Секоја реченица изградена со помош на овие сврзници има вредност на вистинитост која зависи од вредноста на вистинитост на составните (компонентни) реченици.

Попрецизно, ќе дефинираме поим за *исказна формула* на следниов начин:

Ќе определиме множество симболи од кои ќе градиме исказни формули. Него ќе го сочинуваат: исказните букви, логичките константи, логичките сврзници и помошните симболи. Имено множеството симболи се состои од:

исказни букви (ќе ги викаме и *исказни променливи*; ќе ги означуваме со $p,q,r,\ldots,x,y,\ldots$)

логички константи: $\top$, $\perp$

логички сврзници: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$

помошни симболи: (,).

Со помош на овие симболи постепено ќе ги градиме оние изрази кои ќе ги викаме исказни формули. Имено:

(1) *Секоја исказна буква и секоја константа е исказна формула.*

(2) *Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ се исказни формули, тогаш и $(\neg\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ и $(\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})$ се исто така исказни формули.*

(3) *Исказни формули се оние и само оние изрази добиени со конечна примена на (1) и (2)*.

Да наведеме неколку примери:

7. Изразот $(((p\wedge q)\vee q)\Rightarrow(q\vee s))$ е исказна формула. Имено, p, q и s се исказни променливи, па според условот (1) од дефиницијата, тие се исказни формули. Тогаш, користејќи го условот (2) од истата дефиниција, постапно добиваме дека и $(p\wedge q)$, $((p\wedge q)\vee q)$, $(q\vee s)$, а на крајот и $(((p\wedge q)\vee q)\Rightarrow(q\vee s))$ се исказни формули.

8. Од исти причини како и погоре, и изразот $(p\Rightarrow(q\Rightarrow(r\wedge q)))$ е исказна формула.

9. Изразот $((p\wedge\vee q)$ не е исказна формула. Имено, двата сврзника $\wedge$ и $\vee$ се појавуваат еден до друг, што според (2) од дефиницијата за исказна формула не е можно.

Кога некој поим се дефинира како погоре, постапно, почнувајќи од елементарни делови кон посложени, велиме дека тој е дефиниран *индуктивно*, па ваквите дефиниции ги викаме *индуктивни дефиниции*.

Договор за користење загради:

Најнапред ќе ги изоставуваме надворешните загради.

Ако во исказна формула се појавува повеќе пати само еден ист бинарен сврзник, израз без загради е пократок запис за изразот во кој сврзниците се применуваат од лево на десно.

Пример:

10. $p\Rightarrow q\Rightarrow r\Rightarrow p$ е пократок запис формулата $(((p\Rightarrow q)\Rightarrow r)\Rightarrow p)$.

Најпосле, по "јачина" на сврзување сврзниците се подредени на следниот начин: $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, т.е. прво се применува $\neg$ на најблиската исказна формула што следува, потоа $\wedge$ на најблиските околни исказни формули, потоа $\vee$, итн.

Пример:

11. Запиши ја исказната формула $p\vee\neg q\Rightarrow r\Leftrightarrow p$ со загради.

$p\vee(\neg q)\Rightarrow r\Leftrightarrow p$
$(p\vee(\neg q))\Rightarrow r\Leftrightarrow p$
$((p\vee(\neg q))\Rightarrow r)\Leftrightarrow p$
$(((p\vee(\neg q))\Rightarrow r)\Leftrightarrow p)$.

12. $s\Leftrightarrow r\Leftrightarrow p\wedge q\vee\neg s\Rightarrow q$ е друг запис за исказната формула $((s\Leftrightarrow r)\Leftrightarrow((((p\wedge q)\vee(\neg s))\Rightarrow q))$.

Да забележиме дека не секоја исказна формула може да се запише без загради. На пример, во исказните формули $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ и $\neg(p\vee q)$, $p\wedge(q\Rightarrow r)$ заградите не можат да се елиминираат.

За секоја вредност ⊤ или ⊥ на исказните букви што се појавуваат во исказната формула одговара единствена вредност на вистинитост на исказната формула (користејќи ги таблиците на вистинитост). Значи, секоја исказна формула определува *функција на вистинитост* којашто може да се претстави со соодветна таблица на вистинитост.

Примери: 13.

$$(((\neg p)\vee q)\Rightarrow r)$$

p	q	r	$(\neg p)$	$((\neg p)\vee q)$	$(((\neg p)\vee q)\Rightarrow r)$
⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥

14. Подолу е дадена "скратена" таблица на вистинитост на формулата
$((p\Leftrightarrow q)\Rightarrow((\neg p)\vee q))$

$(p$	$\Leftrightarrow$	$q)$	$\Rightarrow$	$((\neg\, p)$	$\vee$	$q)$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤⊥	⊤	⊥

1.2.1. Вежби:

1. Формирај конјункција од негациите на следниве реченици:

$x>3$ и $x<2$.

Кои природни броеви ја задоволуваат добиената конјункција?

2. Во која од наредните реченици "или" е употребен како сврзник за вклучителна, а во која како сврзник за исклучителна дисјункција:

(а) Имаше две можности: да ја издаде својата татковина или да умре.

(б) Ако заработам многу пари или ја добијам опкладата, ќе одам на долго патување.

(в) Или утре ќе добијам на лотарија и ќе си купам ново палто, или ќе чекам да добијам плата.

3. Напиши ја таблицата на вистинитост за исклучителната дисјункција и искажи ја зависноста на нејзината вредноста на вистинитост во зависност од вредностите на вистинитост на променливите.

4. Конструирај таблица на вистинитост за следните исказни формули:

(а) $((p\Rightarrow(q\Rightarrow r))\Rightarrow((p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r))$;

(б) $((p\Rightarrow q)\vee(\neg p))$;

(в) $((p\Leftrightarrow q)\Rightarrow((\neg p)\wedge q))$.

5. Конструирај скратена таблица на вистинитост за исказните формули од 4.(а),(б) и (в) и за следниве исказни формули:

$((p\Rightarrow q)\vee p)$ и $((p\vee(\neg r))\Leftrightarrow q)$.

6. Следните реченици запиши ги како исказни формули; притоа со исказни букви да се заменат простите реченици (атомарните реченици).

(а) Ако барем еден од броевите a и b е еднаков со 0, тогаш и нивниот производ е еднаков со 0.

(б) Ако производот на два броја a и b е еднаков со 0, тогаш барем еден од тие броеви е еднаков со нула.

(в) Ако еден цел број е делив и со два и со три, тогаш тој е делив со шест.

(г) Ако триаголникот ABC е рамнокрак, тогаш неговите агли спроти краците се еднакви.

7. Во следните исказни формули ослободи се од заградите:

(а) $((q\Leftrightarrow((\neg r)\vee(s\wedge p)))\Leftrightarrow(q\Rightarrow q))$.

(б) $(((p\wedge(\neg q))\wedge r)\vee s)$.

8. Следните исказни формули запиши ги со загради:

(а) $r\Rightarrow\neg(p\vee r)\wedge p\Leftrightarrow q$.

(б) $r\Rightarrow p\Rightarrow p\Leftrightarrow\neg p\vee q$.

9. Ако пишуваме $\neg\mathcal{A}$ наместо $(\neg\mathcal{A})$, $\Rightarrow\mathcal{A}\mathcal{B}$ наместо $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$, $\vee\mathcal{A}\mathcal{B}$ наместо $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$, $\wedge\mathcal{A}\mathcal{B}$ наместо $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ и $\Leftrightarrow\mathcal{A}\mathcal{B}$ наместо $\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}$, тогаш нема потреба од загради. Ваков запис на формулите се вика *инверзна полска нотација*. Напиши ги следните исказни формули без загради:

(а) $((\neg p)\Rightarrow(q\vee(\neg s)))$.

(б) $p\vee((q\wedge(\neg s))\Rightarrow p))$.

10. Исказните формули запишани во инверзна полска нотација, запиши ги во стандарден запис:

(а) $\vee\neg\wedge\vee pqrs$;

(б) $\wedge p\neg\Rightarrow\neg q\vee rs$;

(в) $\neg\vee p\Rightarrow\Leftrightarrow qrs$;

(г) $\vee p\Rightarrow\Rightarrow\wedge\neg p\neg q\wedge p\Leftrightarrow qr$.

11. Ако на секој збор $\mathcal{A}$ од множеството исказни променливи и сврзници му придружиме вредност $|\mathcal{A}|$ (*тежинска функција*) на следниов начин:

$|\Rightarrow|=|\vee|=|\wedge|=|\Leftrightarrow|=+1$; $|\neg|=0$;

ако p е исказна променлива, тогаш $|p|=-1$;

и

$$|u_1u_2...u_n|=\sum_{i=1}^{n}|u_i|,$$

тогаш, во инверзна полска нотација (види задача 9), еден израз $\mathcal{A}$ е исказна формула акко сумата на симболите има вредност -1, а сумата на симболите во секоја почетна низа од $\mathcal{A}$ има ненегативна вредност. Докажи!

1.3. Исказни функции. Квантификатори

Нека M е дадено непразно множество и нека $\varphi(x)$ е реченица којашто е исказ за секоја конкретна интерпретација на исказната променлива x како елемент од M. Тогаш $\varphi(x)$ е *исказна функција* во множеството M. Во тој случај за множеството од сите оние елементи x од M за кои $\varphi(x)$ е точен исказ велиме дека е *решение на исказната функција* $\varphi(x)$ во множеството M. За M велиме дека е *универзално множество*.

Нека M е дадено множество, $\varphi(x)$ е дадена исказна функција во M. За $\varphi(x)$ велиме дека е *точна* исказна функција во M ако множеството решенија е еднакво со множеството M.

Примери:

1. Нека $\mathbb{N}$ го означува множеството природни броеви, $\mathbb{N}^+$ множеството позитивни природни броеви, $\mathbb{Z}$ множеството цели броеви, $\mathbb{Q}$ множеството рационални броеви, $\mathbb{R}$ множеството реални броеви, а $\mathbb{C}$ множеството комплексни броеви. Да ја разгледаме исказната функција $\varphi(x)$: $x^2+1=0$. Тогаш:

$$\{x|x^2+1=0\wedge x\in\mathbb{N}\}=\{x|x^2+1=0\wedge x\in\mathbb{N}^+\}=\{x|x^2+1=0\wedge x\in\mathbb{Z}\}=$$
$$=\{x|x^2+1=0\wedge x\in\mathbb{Q}\}=\{x|x^2+1=0\wedge x\in\mathbb{R}\}=\varnothing.$$
$$\{x|x^2+1=0\wedge x\in\mathbb{C}\}=\{i,-i\}.$$

2. Нека U е универзално множество што се состои од сите подмножества од дадено множество M. Следниве примери се примери на вистинити исказни функции, т.е. исказни функции кои се точни за секоја вредност на променливите $X,Y\in U$:

$\varnothing\subseteq X$;

$X=X$;

$X\subseteq Y\Leftrightarrow(x\in X\Rightarrow x\in Y)$;

$X=Y\Leftrightarrow(x\in X\Leftrightarrow x\in Y)$.

Користејќи решение на исказна функција, дадено множество A може да се запише и на следниов начин: нека A е множество, $A\subseteq U$, а $\psi(x)$ е исказна функција. Ако A се состои од оние елементи *и* од U кои по замената во $\psi(x)$ на местото на x даваат точен исказ, тогаш A е точно решението на исказната функција $\psi(x)$. Во овој случај велиме дека A е дефинирано со $\psi(x)$ и пишуваме

$A=\{x|\psi(x)\}$.

Примери:

3. $\{1\}=\{x|x=1\}$
4. $\{1,2\}=\{x|x=1\vee x=2\}$
5. $\varnothing=\{x|x\neq x\}$.

Да ја разгледаме реченицата "За секој реален број x точно е дека $x^2\neq-1$." Оваа реченица не е исказна функција, туку исказ, и тоа точен. Симболички таа се запишува на следниов начин

$(\forall x\in \mathbb{R})x^2\neq-1.$ (1.3.1)

Симболот $\forall$ се вика *универзален квантификатор*. Ако универзалното множество (во овој случај $\mathbb{R}$) е "фиксирано", тогаш исказот (1.3.1) може да се запише и на следниов начин

$(\forall x)\ x^2\neq-1.$ (1.3.2)

Реченицата: "Постои реален број x, таков што $x^2=2$." е исто така исказ, и тоа вистинит. Симболички тој може да се запише на следниов начин:

$(\exists x\in \mathbb{R})\ x^2=2.$ (1.3.3)

Симболот $\exists$ се вика *егзистенцијален квантификатор.*

Вредноста на исказите зададени со (1.3.1), (1.3.2) и (1.3.3) зависи од универзалното множество. Така исказот (1.3.3) е вистинит, додека

$(\exists x\in \mathbb{Q})x^2=2$

не е вистинит.

Да забележиме дека, ако $M\neq\varnothing$ е дадено универзално множество, а $\varphi(x)$ исказна функција, тогаш:

$(\forall x)\varphi(x)\Leftrightarrow\{x|x\in M\wedge\varphi(x)\}=M$

$(\exists x)\varphi(x)\Leftrightarrow\{x|x\in M\wedge\neg\varphi(x)\}\subset M\Leftrightarrow\{x|x\in M\wedge\varphi(x)\}\neq\varnothing.$

Да наведеме некои својства за квантификаторите, при што претпоставуваме дека $M\neq\varnothing$ е дадено универзално множество.

3.1° $(\forall x)\varphi(x)\Rightarrow(\exists x)\varphi(x)$. ■

3.2° $(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)$. ■

3.3° $(\exists x)(\exists y)\varphi(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi(x,y)$. ■

3.4° $(\exists x)(\forall y)\varphi(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\varphi(x,y)$.

Доказ: Нека $x=x_0$ е такво што за секое $y\in M$, $\varphi(x,y)=\top$. Тогаш за секој $y \in M$, $\varphi(x_0, y)$ е вистинит, т.е. точно е и $(\forall y)(\exists x)\varphi(x,y)$. ■

Обратната импликација не е секогаш точна и зависи од исказната функција φ. На пример, нека $M=\mathbb{Z}$, а $\varphi(x,y)$ е $x+y=0$. Тогаш $(\forall y)(\exists x)\varphi(x,y)$ е вистинит, а $(\exists x)(\forall y)\varphi(x,y)$ не е вистинит исказ.

3.5° Нека $\varphi(x)$ е исказна функција, а p е исказ. Тогаш

(а) $(\forall x)(\varphi(x)\wedge p) \Leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x))\wedge p$.
(б) $(\forall x)(\varphi(x)\vee p) \Leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x))\vee p$.
(в) $(\exists x)(\varphi(x)\wedge p) \Leftrightarrow ((\exists x)(\varphi(x))\wedge p$.
(г) $(\exists x)(\varphi(x)\vee p) \Leftrightarrow ((\exists x)(\varphi(x))\vee p$.
(д) $\neg(\forall x)\varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg\varphi(x))$.
(ѓ) $\neg(\exists x)\varphi(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg\varphi(x))$. ■

1.3.1. Вежби

1. Нека $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ се исказни функции на универзалното множество M. Да се покаже дека:
   (а) $\varphi(x)\Rightarrow\psi(x)$ е вистинита ако и само ако $\{x|\varphi(x)\}\subseteq\{x|\psi(x)\}$.
   (б) $\varphi(x)\Leftrightarrow\psi(x)$ е вистинита ако и само ако $\{x|\varphi(x)\}=\{x|\psi(x)\}$.
2. Ако $M=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ е универзално множество, да се определат решенијата на следниве исказни функции:
   (а) $x=1\vee x=2$;
   (б) $x=1\vee x=a$;
   (в) $x=x$;
   (г) $x\neq x$;
   (д) $x\in\{1, 2\}\vee x\in\{1, 3\}$;
   (ѓ) $x\in\{1, 2\}\Rightarrow x\in\{1, 3\}$.
3. Нека $\mathbb{Z}$ е универзално множество. Да се решат исказните функции:
   (а) x е делител на 12;
   (б) 12 е делител на x;
   (в) x е взаемно прост со 50 и $|x|<50$.

   Потоа истото да се направи кога универзалното множество е $\mathbb{N}$.
4. Да се реши секоја од исказните функции:
   (а) $x^4 - 1 = 0$;
   (б) $x^4 + 1 = 0$;
   (в) $x^2 - 10x + 23 = 0$.

   Да се разгледаат посебно случаите кога универзалното множество е $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

1.4. Тавтологии

Исказна формула којашто определува константна функција на вистинитост чија вредност е ⊤ се вика *тавтологија*. Со други зборови, една исказна формула е тавтологија ако при **секоја замена** на исказните променливи во дадената исказна формула со вредност ⊤ или ⊥ вредноста на вистинитост на дадената формула е **секогаш** ⊤.

Ако $(p\Rightarrow q)$ е тавтологија, тогаш велиме дека q е *логичка последица* од p, а ако $(p\Leftrightarrow q)$ е тавтологија, тогаш велиме дека p и q се *логички еквивалентни* исказни формули.

Да наведеме некои поважни тавтологии (или логички закони):

(1) $(p\vee(\neg p))$ (закон за исклучување на третото)

(2) $(p\Leftrightarrow(\neg(\neg p)))$,

(3) $(\neg(p\vee q))\Leftrightarrow((\neg p)\wedge(\neg q))$, (Де Морганови ставови)

(4) $(\neg(p\wedge q))\Leftrightarrow((\neg p)\vee(\neg q))$

(5) $(p\vee q)\Leftrightarrow(q\vee p)$,
$(p\wedge q)\Leftrightarrow(q\wedge p)$, (комутативни закони)

(6) $(p\vee(q\vee r))\Leftrightarrow((p\vee q)\vee r)$
$(p\wedge(q\wedge r))\Leftrightarrow((p\wedge q)\wedge r)$ (асоцијативни закони)

(7) $(p\wedge(q\vee r))\Leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$
$(p\vee(q\wedge r))\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$ (дистрибутивни закони)

(8) $((p\Rightarrow q)\Leftrightarrow((\neg p)\vee q)))$ (закон за замена на импликацијата)

(9) $p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p$,
$p\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p$. (закони за апсорпција)

Исказна формула којашто има вредност ⊥ за секоја можна вредност на вистинитост на исказните букви се вика *контрадикција*.

Примери:
1. $(p\Leftrightarrow(\neg p))$,
2. $(p\wedge(\neg p))$.

Очигледно, *исказна формула е тавтологија акко нејзината негација е контрадикција.*

Да докажеме некои својства на тавтологиите.

4.1° (*Модус йоненс*). Ако $\mathcal{A}$ и $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ се тавтологии, тогаш и $\mathcal{B}$ е тавтологија.

Доказ: Нека $\mathcal{A}$ и $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ се тавтологии и нека $\mathcal{B}$ не е тавтологија. Тогаш за некоја комбинација вредности на исказните променливи што се појавуваат во $\mathcal{B}$ исказната формула $\mathcal{B}$ има вредност $\perp$. Бидејќи $\mathcal{A}$ е тавтологија, за соодветните вредности на исказните променливи од $\mathcal{B}$ и произволни вредности за исказните променливи што се појавуваат во $\mathcal{A}$, а не се појавуваат во $\mathcal{B}$, исказната формула $\mathcal{A}$ ќе има вредност $\top$. Но, тогаш $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ има вредност $\perp$, што ѝ противречи на претпоставката дека $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ е тавтологија. ■

4.2° (*Правило за замена*). Ако $\mathcal{A}$ е тавтологија во која се појавуваат исказните променливи p_1 , p_2 ,..., p_n , и $\mathcal{B}$ е исказна формула добиена кога секоја исказна променлива p_i во $\mathcal{A}$ се замени со исказна формула $\mathcal{A}_i$, $i\in\{1,2,...,n\}$, тогаш и $\mathcal{B}$ е тавтологија.

Доказ: Нека $\mathcal{A}$ е тавтологија. За произволно придружување вредности на вистинитост на исказните променливи што се појавуваат во исказната формула $\mathcal{B}$ исказната формула $\mathcal{A}$ добива вредност на вистинитост x_i,
$i\in\{1,2,...,n\}$. Тогаш, ако на p_i, $i\in\{1,2,...,n\}$, ѝ придружиме вредност на вистинитост x_i , $\mathcal{A}$ добива вредност на вистинитост $\top$ ($\mathcal{A}$ е тавтологија), па и $\mathcal{B}$ има вредност на вистинитост $\top$. Значи и $\mathcal{B}$ е тавтологија. ■

4.3° Ако $\mathcal{B}_1$ се добива од $\mathcal{A}_1$ кога едно или повеќе појавувања на исказната формула $\mathcal{A}$ во $\mathcal{A}_1$ се замени со исказната формула $\mathcal{B}$, тогаш

$$((\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\mathcal{A}_1\Leftrightarrow\mathcal{B}_1))$$

е тавтологија.

Доказ: Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имаат спротивни вредности на вистинитост, тогаш $(\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})$ има вредност $\perp$, па $((\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\mathcal{A}_1\Leftrightarrow\mathcal{B}_1))$ има вредност $\top$.

Ако пак $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имаат иста вредност на вистинитост, тогаш $(\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})$ има вредност на вистинитост $\top$, па и $(\mathcal{A}_1\Leftrightarrow\mathcal{B}_1)$ има вредност на вистинитост $\top$, затоа што $\mathcal{B}_1$ се разликува од $\mathcal{A}_1$ само во тоа што $\mathcal{B}_1$ содржи исказна формула $\mathcal{B}$ на некои места на кои во $\mathcal{A}_1$ се појавува исказната формула $\mathcal{A}$. Значи $((\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\mathcal{A}_1\Leftrightarrow\mathcal{B}_1))$ е тавтологија.■

1.4.1. Вежби:

1. Определи дали следниве исказни формули се тавтологии:

(а) $(((p\Rightarrow q)\Rightarrow q)\Rightarrow q)$.

(б) $((p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow(q\Leftrightarrow p)))$.

2. Провери дали:

(а) $(p\Rightarrow q)$ е логичка последица од $(p\Leftrightarrow q)$.

(б) $((\neg p)\vee q)$ е логички еквивалентно со $((\neg q)\vee p)$.

3. Провери дали секоја од наредните исказни формули е тавтологија, контрадикција или ни едно ни друго:

(а) $p\Leftrightarrow(p\vee p)$,

(б) $(p\Rightarrow q)\Rightarrow((q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r))$,

(в) $((p\Rightarrow q)\wedge q)\Rightarrow p$,

(г) $(\neg p)\Rightarrow(p\wedge q)$

(д) $p\wedge(\neg(p\vee q))$,

(ѓ) $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow((\neg p)\vee q)$,

(е) $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow\neg(p\vee(\neg q))$.

4. (а) Покажи дека ако $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ е тавтологија, тогаш и $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ се тавтологии.

(б) Ако $\mathcal{A}$ е тавтологија, тогаш и $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}\vee\mathcal{A}$ се тавтологии.

5. Примени го правилото за замена ако

$\mathcal{A}$ е исказната формула $(p\wedge q)\Rightarrow p$,

$\mathcal{A}_1$ е $q\wedge s$, $\mathcal{A}_2$ е $\neg q$.

Забележи дека од фактот што $(p\wedge q)\Rightarrow p$ е тавтологија, според правилото за замена се добива дека и $(q\wedge s\wedge\neg q)\Rightarrow q\wedge s$ исто така е тавтологија.

6. Покажи дека следните парови исказни формули се логички еквивалентни:

(а) $\neg(p\vee q)$ и $(\neg p)\wedge(\neg q)$;

(б) $\neg(p\wedge q)$ и $(\neg p)\vee(\neg q)$;

(в) $p\wedge(q\vee r)$ и $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$;

(г) $p\vee(q\wedge r)$ и $(p\vee q)\wedge(q\vee r)$;

(д) $p\vee(p\wedge q)$ и p;

(ѓ) $p\Rightarrow q$ и $\neg q\Rightarrow\neg p$;

(е) $(p\wedge q)\vee(\neg q)$ и $p\vee(\neg q)$;

(ж) $p\wedge(p\vee q)$ и p;

(з) $p\wedge q$ и $q\wedge p$;

(ѕ) $p\vee q$ и $q\vee p$;

(и) $(p\wedge q)\wedge r$ и $p\wedge(q\wedge r)$;

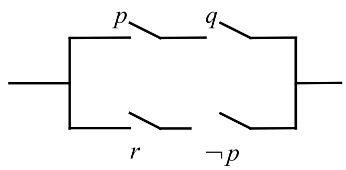
(ј) $(p\vee q)\vee r$ и $p\vee(q\vee r)$;

(к) $p\Leftrightarrow q$ и $q\Leftrightarrow p$;

(л) $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow r$ и $p\Leftrightarrow(q\Leftrightarrow r)$;

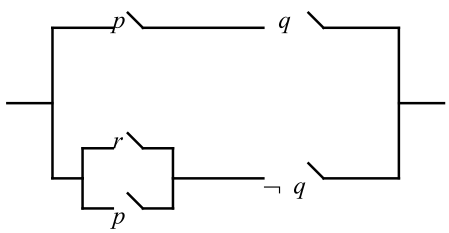
7. Исказни формули може да се претставaт со електрично коло со прекинувачи, со дијаграм во кој покрај прекинувачот додаваме и исказна буква или негација на исказна буква, при што, формулата $p\wedge q$ се претставува со сериски врзани прекинувачи, а $p\vee q$ со паралелно врзани прекинувачи

(сл. 1.1), така што формулата претставува нужен и доволен услов низ колото да тече струја. Условот струја да тече низ следното електрично коло е исказната формула $(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$.



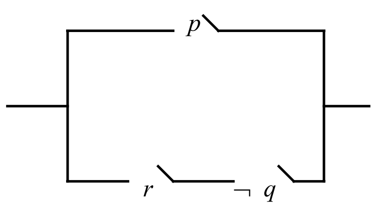
сл. 1.1

Исказната формула што го претставува колото прикажано на сл. 1.2. е $(p \wedge q) \vee ((r \vee p) \wedge \neg q)$.



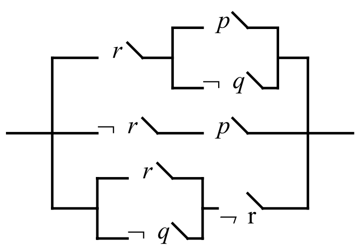
sl. 1.2

Користејќи ја претходната задача, може да се покаже дека таа е логички еквивалентна со исказната формула $p \vee (r \wedge \neg q)$, која го прикажува колото зададено на сл. 1.3.

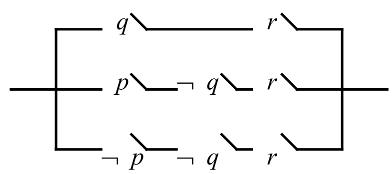


sl. 1.3

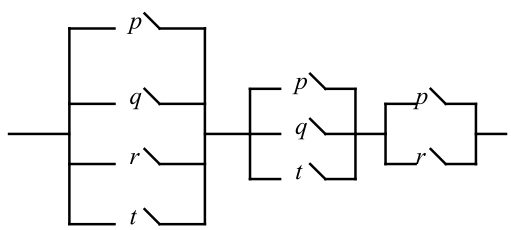
(а) Најди поедноставни електрични кола еквивалентни на оние зададени на сл. 1.4., 1.5. и 1.6.



sl.1.4



sl.1.5



sl.1.6

1.5. Генераторни множества сврзници

Секоја исказна формула што содржи *n* исказни променливи генерира соодветна функција на вистинитост со n променливи, т.е. пресликување од $\{\top,\bot\}^n \to \{\top,\bot\}$. Логички еквивалентни формули генерираат "еднакви" функции на вистинитост. Имено, две логички еквивалентни формули со еднаков број исказни променливи генерираат еднакви функции на вистинитост. Доколку имаме логички еквивалентни формули со различен број исказни променливи m и n, тогаш всушност функциите на вистинитост немаат еднакви домени, т.е. тие не се еднакви како пресликувања. Сепак, двете функции на вистинитост можат да се сметаат за еднакви, затоа што може да се докаже дека ако $m<n$, тогаш онаа што дејствува на $\{\top,\bot\}^n$ всушност зависи само од m променливи, додека останатите не влијаат врз нејзината вредност, т.е. останатите се фиктивни променливи.

Пример:

1. $p\wedge(p\vee q)$ и p се логички еквивалентни формули со функции на вистинитост f и g соодветно. Тогаш $f(\top,\top)=f(\top,\bot)=\top=g(\top)$; $f(\bot,\top)=f(\bot,\bot)=\bot=g(\bot)$. Значи, и двете функции во суштина зависат само од една променлива, а втората променлива на функцијата f е фиктивна, па иако тие две функции немаат исти домени, можеме да ги сметаме за еднакви.

Се поставува прашање дали сите функции на вистинитост се генерирани со исказни формули.

5.1º Секоја функција на вистинитост е определена од исказна формула којашто ги содржи сврзниците $\neg$, $\vee$ и $\wedge$.

Доказ: Нека $f(x_1,...,x_n)$ е дадена функција на вистинитост. f може да се претстави со таблица што содржи 2^n редици, при што секој ред содржи некое придружување на вредности на вистинитост на променливите, следено со вредноста на вистинитост на функцијата $f(x_1,...,x_n)$. Ако $1<i<2^n$, нека C_i е конјункцијата $U_1^i\wedge U_2^i\wedge...\wedge U_n^i$, каде што U_j^i е p_j ако во i-тиот ред x_j има вредност $\top$, а $\neg p_j$, ако x_j има вредност $\bot$. Нека D е дисјункцијата на сите оние C_i, такви што во i-тиот ред f има вредност $\top$ (таквите елементарни конјункции се викаат *дисјункти*). За своја соодветна функција на вистинитост D ја има функцијата f. (Да забележиме дека ако не постои ред во таблицата таков што f има вредност $\top$, тогаш земаме D да биде $p_1\wedge\neg p_1$, што ја задоволува теоремата.) Да претпоставиме дека на исказните букви $p_1,...,p_n$ е придружена n-торка од множеството $\{\top,\bot\}$, и дека таа n-торка одговара на k-тиот ред од таблицата на функцијата f. Тогаш C_k има вредност $\top$, додека секое друго C_j има вредност $\bot$. Ако f има вредност $\top$ за редот k, тогаш C_k е дисјункт на D, па и D ќе има вредност $\top$. Ако f има вредност $\bot$, тогаш C_k не е дисјункт на D и секој друг дисјункт на D има вредност $\bot$, што значи дека и D има вредност $\bot$. Значи, D ја генерира функцијата на вистинитост f. ■

Доказот на ова својство дава алгоритам за наоѓање исказна формула што ја дефинира функцијата на вистинитост од дадената таблица на вистинитост.

Примери: 1.

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

D е $(\neg p_1\wedge p_2)\vee(p_1\wedge\neg p_2)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2)$.

2.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
T	T	T	T
⊥	T	T	⊥
T	⊥	T	T
T	T	⊥	⊥
⊥	⊥	T	T
⊥	T	⊥	T
T	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	T

D е формулата

$(p_1\wedge p_2 \wedge p_3)\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge\neg p_3)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)$.

Користејќи го алгоритмот зададен со доказот на **5.1º**, заклучуваме дека формулата што може да ѝ се придружи на функцијата на вистинитост f е запишана во облик $D_1\vee D_2\vee...\vee D_n$, каде што D_i се изрази добиени со конјункција на исказни променливи или нивни негации, и велиме дека тоа е формула во *дисјунктивна нормална форма* (ДНФ). (Имено, за една исказна формула велиме дека е во дисјунктивна нормална форма ако таа е запишана како дисјункција од такви формули, што секоја од нив е конјункција од исказни променливи или негација на исказни променливи.)

Последица 5.2º Секоја функција на вистинитост одговара на исказна формула што ги содржи само сврзниците $\neg$ и $\vee$, $\neg$ и $\wedge$, $\neg$ и $\Rightarrow$.

Доказ: Да забележиме дека $p\wedge q$ е логички еквивалентно со $\neg(\neg p\vee\neg q)$. Значи, од тврдењето **4.3º** секоја исказна формула што ги содржи сврзниците $\neg$, $\vee$ и $\wedge$ е еквивалентна со исказна формула којашто содржи сврзници $\neg$ и $\vee$ (добиена со замена на секој израз од облик $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ со $\neg(\neg\mathcal{A}\vee\neg\mathcal{B})$). Другите делови од тврдењето се последици од следниве тавтологии:

$p\vee q\Leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg q)$;

$p\vee q\Leftrightarrow((\neg p)\Rightarrow q)$;

$p\wedge q\Leftrightarrow\neg(p\Rightarrow\neg q)$. ■

Видовме дека постои такво множество сврзници што секоја функција на вистинитост е генерирана од формула изградена само со помош на сврзниците од тоа множество.

Множество сврзници такво што секоја функција на вистинитост може да се добие од формула изградена само со помош на неговите елементи се вика *генераторно множество сврзници*.

Се покажува дека постои еден сврзник, $\downarrow$ (функцијата генерирана од овој сврзник се вика *Шеферова* или *нили*), кој ги генерира сите функции на вистинитост. Неговата таблица на вистинитост е:

p	q	$p{\downarrow}q$
T	T	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

Лесно се проверува дека следниве исказни формули се тавтологии: $\neg p \Leftrightarrow (p{\downarrow}p)$ и $p \wedge q \Leftrightarrow ((p{\downarrow}p){\downarrow}(q{\downarrow}q))$. Значи, како последица од **5.2°** се добива дека секоја функција на вистинитост може да се генерира со исказни формули коишто го содржат само сврзникот $\downarrow$.

Друг сврзник со ова својство е $\uparrow$ (функцијата што ја генерира овој сврзник се вика *Пирсова* или *ни*). Неговата таблица на вистинитост е:

p	q	$p{\uparrow}q$
T	T	$\perp$
$\perp$	T	T
T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T

Фактот дека $\uparrow$ е генераторен сврзник следува од следниве тавтологии: $\neg p \Leftrightarrow (p{\uparrow}p)$ и $(p \vee q) \Leftrightarrow ((p{\uparrow}p)|(q{\uparrow}q))$.

5.3° Единствени бинарни сврзници кои сами за себе се едноелементно генераторно множество сврзници се $\downarrow$ и $\uparrow$.

Доказ: Да претпоставиме дека $h(p,q)$ е генераторен сврзник. Ако h(T,T)=T, тогаш секоја исказна формула којашто е изградена само со помош на сврзникот h ќе има вредност T секогаш кога сите променливи имаат вредност T. Значи, $\neg p$ не би можела да се дефинира со помош на h. Значи, h(T,T)=$\perp$, а $h(\perp,\perp)$=T. Ја добиваме следнава таблица:

p	q	$h(p,q)$
T	T	$\perp$
$\perp$	T	
T	$\perp$	
$\perp$	$\perp$	T

Ако во вториот и третиот ред имаме T, T или $\perp$, $\perp$, тогаш се добиваат $\uparrow$ или $\downarrow$, соодветно. Ако е $\perp$, T, тогаш $h(p,q) \Leftrightarrow \neg q$ би била тавтологија, а ако се T, $\perp$, тогаш $h(p,q) \Leftrightarrow \neg p$ би била тавтологија. И во двата случаи h би можел да се дефинира само со помош на $\neg$, т.е. $\neg$ би бил генераторен сврзник, што не е можно, затоа што функцијата на вистинитост која секогаш има вредност ⊤ не може да се добие само со помош на негацијата. ■

Како што можат да се дефинираат бинарни сврзници, можат да се дефинираат и тернарни, квартерни, ...n-арни сврзници. Имено, тернарен сврзник може да се претстави со таблица на вистинитост во којашто се појавуваат три променливи, p, q и r, и вредностите на изразот зададен со тернарниот сврзник (да речеме h) во зависност од вредностите на исказните променливи. Така, на пример, со следнава таблица на вистинитост е зададен еден тернарен сврзник:

p	q	r	$h(p,q,r)$
⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤

Во случај да имаме дефинирано и тернарни сврзници и нив ги сметаме за основни сврзници при формирање на исказни формули, тогаш по аналогија со дадената дефиниција за исказни формули и во овој случај може да се даде дефиниција на исказните формули. Имено, нека h е тернарен сврзник, а $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ се унарниот и бинарните сврзници од исказното сметање. Тогаш исказна формула може да се дефинира и на следниов начин:

(i) Секоја исказна променлива е исказна формула.

(ii) Ако $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ се исказни формули, тогаш и $(\neg\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})$ и $h(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ се исто така исказни формули.

(iii) Еден израз е исказна формула акко може да се добие со конечна примена на (i) и (ii).

Во овој дел докажавме дека единствени бинарни сврзници коишто секој за себе се генераторно множество сврзници се "ни" и "нили". Во случај кога работиме со тернарни сврзници, можат да се најдат и други коишто се едноелементни генераторни множества сврзници.

1.5.1. Вежби.

1. Да се најде исказната формула формирана со помош на сврзниците $\neg$, $\vee$ и $\wedge$ која ја има следната функција на вистинитост:

p	q	r	$h(p,q,r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

2. Да се покаже дека секој од паровите $\Rightarrow$, $\vee$ и $\neg$, $\Leftrightarrow$ не е генераторно "множество" сврзници.

3. *Дисјунктивна нормална форма и конјунктивна нормална форма.* Доказот на тврдењето **5.1°** покажува дека секоја исказна формула $\mathcal{A}$ може да се запише во ДНФ. Дефинирај конјунктивна нормална форма (КНФ) (со замена на конјункција со дисјункција, и обратно) и применувајќи го резултатот од **5.1°** на $\neg\mathcal{A}$, покажи дека секоја исказна формула $\mathcal{A}$ е исто така логички еквивалентна со конјунктивна нормална форма.

4. Да се најде логички еквивалентни конјунктивни и дисјунктивни нормални форми за исказните формули

$(p\Rightarrow q)\vee(\neg p\wedge r)$ и $p\Leftrightarrow(q\wedge\neg p)$.

5. Нека g е тернарен сврзник определен со

$$g(p,q,r)=\begin{cases} q, & p=\top \\ r, & p=\perp \end{cases}$$

(а) Да се изрази тернарниот сврзник g со помош на обичните, бинарни, логички сврзници.

(б) Да се покаже дека множеството $\{\top,\perp,g\}$ е генераторно множество сврзници. (Забележи дека и константите $\top$ и $\perp$ можат да се сметаат за "нуларни сврзници".)

(в) Да се изрази, со помош на елементите од множеството дадено под б, формулата $p\Leftrightarrow q$.

(г) Да се покаже дека $g(p,q,r)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)\wedge(\neg p\Rightarrow r)$.

(Упатство: Покажи дека $g\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$, $\neg p\Leftrightarrow g(p,\perp,\top)$, а $p\vee q\Leftrightarrow g(p,p,q)$.)

6. Нека h е тернарен сврзник дефиниран со таблицата на вистинитост што одговара на исказната формула $(q\vee r)\Rightarrow\neg p$. Да се покаже дека $\{h\}$ е генераторно множество сврзници. (Упатство: Покажи дека $h(p,q,q)\Leftrightarrow p\downarrow q$).

7. Нека * е бинарен сврзник дефиниран со $p*q\Leftrightarrow\neg(p\Rightarrow q)$.

Дали $\{\Rightarrow,*\}$ е генерирачко множество сврзници? Образложи!

1.6. Операции со множества

Во овој дел ќе дефинираме некои операции со множества (унија, пресек, разлика, симетрична разлика) и ќе наведеме и докажеме некои својства за овие операции.

Ако M и N се множества, тогаш нивниот *пресек* $M\cap N$ и *унија* $M\cup N$ се дефинираат на следниов начин:

$$x\in M\cap N\Leftrightarrow x\in M\wedge x\in N, \tag{1.6.1}$$
$$x\in M\cup N\Leftrightarrow x\in M\vee x\in N \tag{1.6.2}$$

или

$$M\cap N=\{x|x\in M\wedge x\in N\}, \tag{1.6.1´}$$
$$M\cup N=\{x|x\in M\vee x\in N\}. \tag{1.6.2´}$$

Примери:

1. Ако $A=\{a,b,c,d,e\}$, а $B=\{a,b,c,1,2,3\}$, тогаш
$A\cap B=\{a,b,c\}$, а $A\cup B=\{a,b,c,d,e,1,2,3\}$.

За две множества M и N велиме дека се *дисјунктни* ако $M\cap N=\varnothing$.

6.1º(i) $X\cap Y\subseteq X$; $X\cap Y\subseteq Y$;
(ii) $X\subseteq X\cup Y$; $Y\subseteq X\cup Y$. ■

6.2º(i) $X\cap Y=X\Leftrightarrow X\subseteq Y$;
(ii) $X\cup Y=X\Leftrightarrow Y\subseteq X$.

Доказ: Ќе го докажеме тврдењето (i). Нека $X\cap Y=X$. Тогаш
$x\in X\Leftrightarrow x\in X\cap Y\Rightarrow x\in Y$.

Значи, докажавме дека $X\cap Y=X\Rightarrow X\subseteq Y$.

Обратно, нека $X\subseteq Y$. Тогаш $x\in X\Rightarrow x\in X\wedge x\in Y\Rightarrow x\in X\cap Y$. ■

6.3º $X_1\subseteq Y_1, X_2\subseteq Y_2\Rightarrow X_1\cap X_2\subseteq Y_1\cap Y_2, X_1\cup X_2\subseteq Y_1\cup Y_2$. ■

6.4º (i) $X\cap\varnothing=\varnothing$;
(ii) $X\cup\varnothing=X$. ■

6.5º (*Закони за идемпотентност*)
(i) $X\cap X=X$;
(ii) $X\cup X=X$. ■

6.6º (*Закони за комутативност*)
(i) $X\cap Y=Y\cap X$;

(ii) $X \cup Y = Y \cup X$. ■

6.7° (*Закони за асоцијативност*)

(i) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$;

(ii) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$. ■

6.8° (i) $x \notin X \cap Y \Leftrightarrow x \notin X \vee x \notin Y$;

(ii) $x \notin X \cup Y \Leftrightarrow x \notin X \wedge x \notin Y$. ■

6.9° (*Закони за апсорпција*)

(i) $X \cap (X \cup Y) = X$;

(ii) $X \cup (X \cap Y) = X$.

Доказ:

(ii) $X \cap Y \subseteq X \Rightarrow X \cup (X \cap Y) \subseteq X \cup X = X$.

Обратно, $X \subseteq X \cup Y$ за секое множество Y, што значи дека $X \subseteq X \cup (X \cap Y)$. Од двете неравенства следува дека е точно равенството $X \cup (X \cap Y) = X$.

■

6.10° (*Дистрибутивни закони*)

(i) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

(ii) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. ■

6.11° $X \cap Y = X \cap Z, X \cup Y = X \cup Z \Rightarrow Y = Z$.

Доказ: $Y = Y \cup (Y \cap X) = Y \cup (Z \cap X) = (Y \cup Z) \cap (X \cup Y) = (Y \cup Z) \cap (X \cup Z) =$

$= Z \cup (X \cap Y) = Z \cup (X \cap Z) = Z$. ■

Нека M и N се множества. *Разлика* $M \setminus N$ на множествата M и N дефинираме со:

$$M \setminus N = \{x | x \in M \wedge x \notin N\}, \qquad (1.6.3)$$

или

$$x \in M \setminus N \Leftrightarrow x \in M \wedge x \notin N. \qquad (1.6.3')$$

Примери:

2. Ако $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$, тогаш

$A \setminus B = \{d, e\}$, $B \setminus A = \{1, 2, 3\}$, $A \setminus A = \varnothing$.

6.12° (i) $X \setminus Y \subseteq X$;

(ii) $(X \setminus Y) \cap Y = \varnothing$;

(iii) $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$. ■

6.13° (i) $X \setminus X = \varnothing$;

(ii) $X \setminus \varnothing = X$;

(iii) $\varnothing \setminus X = \varnothing$. ■

6.14º (i) $X \setminus Y=\varnothing \Leftrightarrow X \subseteq Y$;
(ii) $X \setminus Y=X \Leftrightarrow X \cap Y=\varnothing$.

Доказ: (i) Нека $X \setminus Y=\varnothing$, и нека $x \in X$. Тогаш од дефиницијата на разлика на множества и фактот дека $x \notin X \setminus Y$, добиваме дека $x \in Y$, т.е. $X \subseteq Y$.

Обратно, нека $X \subseteq Y$. Кога би постоел елемент $x \in X \setminus Y$, тогаш би имале $x \in X$ и $x \notin Y$, што противречи на условот $X \subseteq Y$.■

6.15º $x \notin X \setminus Y \Leftrightarrow x \notin X \vee x \in Y$.■

6.16º $X \subseteq Y \Rightarrow X=Y \setminus (Y \setminus X)$.■

6.17º (i) $X \setminus (Y \cup Z)=(X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$;
(ii) $X \setminus (Y \cap Z)=(X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$.

Доказ: (i) $x \in X \setminus (Y \cup Z) \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin (Y \cup Z) \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin Y \wedge x \notin Z \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin Y \wedge x \in X \wedge x \notin Z \Leftrightarrow x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$. ■

Да дефинираме уште една операција со множества. *Симетрична разлика* $M + N$ (или $M \Delta N$) на множествата M и N се дефинира со следново равенство:

$$M+N=(M \cup N) \setminus (M \cap N). \tag{1.6.4}$$

6.18º $M+N$ се состои од елементите што припаѓаат на едно и само едно од множествата M, N. ■

6.19º $X+Y=Y+X$. ■

6.20º (i) $X+X=\varnothing$;
(ii) $X+\varnothing=X$. ■

Ако $X \subseteq M$, тогаш множеството елементи од M што не се во X се вика *комплемент* на X во M и се означува со X'_M, или само со X' доколку знаеме во кое множество M се бара комплемент на множеството X, т.е. множеството M го сметаме за фиксно, универзално множество. Според тоа:

$$X'=M \setminus X. \tag{1.6.5}$$

6.21º (*Де Морганови теореми*)
(i) $(X')' = X$;
(ii) $(Y \cup Z)' = Y' \cap Z'$;
(iii) $(Y \cap Z)' = Y' \cup Z'$;
(iv) $X \subseteq Y \Leftrightarrow Y' \subseteq X'$.

Доказ: (i) $(X')' = M \setminus (M \setminus X) = X$.
(ii) $(Y \cup Z)' = M \setminus (Y \cup Z) = (M \setminus Y) \cap (M \setminus Z) = Y' \cap Z'$.
(iv) $Y' = M \setminus Y \subset M \setminus X = X'$. ■

Користејќи комплемент на множества, симетричната разлика на множества може да се дефинира и на поинаков начин, имено со $M+N = (M'\cap N) \cup (M\cap N')$. За да покажеме дека двете дефиниции определуваат исто множество, ќе го искористиме следново својство:

6.22° (i) $A \setminus B = A \cap B'$;
(ii) $A+B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Доказ: (i) $x\in A \setminus B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B' \Leftrightarrow x\in A \cap B'$.

(ii) $A+B = (A\cup B) \setminus (A\cap B) = (A\cup B) \cap (A\cap B)' = (A\cup B) \cap (A'\cup B') =$
$=((A \cup B) \cap A') \cap ((A \cup B) \cap B') =$
$= ((A \cap A') \cup (B \cap A')) \cup ((A \cap B') \cup (B \cap B')) =$
$=(A' \cap B) \cup (A \cap B') = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. ■

Од наредните тврдења следува дека операцијата + е асоцијативна и дека важи дистрибутивниот закон на $\cap$ во однос на +.

6.23° $X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$. ■

6.24° $X \cap (Y+Z) = (X \cap Y)+(X \cap Z)$. ■

1.6.1. Вежби:

1. Да се докаже:
(а) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$;
(б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
(в) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. Да се докаже:
(а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
(б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(в) $\mathcal{B}(A \cap B)=\mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(B)$.

3. $X \cap Y=X \cap Z \wedge X \cup Y=X \cup Z\Rightarrow Y=Z$. Докажи!

4. Нека A и B се произволни множества. Докажи дека следниве услови се еквивалентни:
(i) $A \subseteq B$,
(ii) $A \cap B=A$,
(iii) $A \cup B=B$.

5. Нека A и B се произволни множества. Докажи дека:
(а) $A \subseteq B\Leftrightarrow A \cap B'=\emptyset$;
(б) $A \cup B = \emptyset\Leftrightarrow A=\emptyset \wedge B=\emptyset$;
(в) $A=B\Leftrightarrow A+B=\emptyset$.

6. Да се покаже дека $(A \cap B) \cup (C \cap D) \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup D)$. Дали важи равенство?

7. Да се докаже точноста на равенствата:

(а) $A \cap (B+C) = (A \cap B)+(A \cap C)$;
(б) $A+(A \cap B) = A \setminus B$;
(в) $(A+B) + (A \cap B) = A \cup B$;
(г) $A+ (B+C) = (A+B)+C$.

1.7. Унија и пресек од повеќе множества

Дефиниравме унија и пресек од две множества, A_1 и A_2 . Природно се наметнува прашањето како да се дефинира унија, односно пресек, од конечен број множества A_1 , A_2 ,...,A_k.

Можни се повеќе начини за дефинирање на унија (пресек) од конечно многу множества. Ќе дадеме две дефиниции, една директна и една индиректна.

Пресекот (унијата) од k множества директно го дефинираме на следниов начин:

$$x \in A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, k\})\, x \in A_i \,, \tag{1.7.1}$$

$$x \in A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in \{1, 2, \ldots, k\})\, x \in A_i \,, \tag{1.7.2}$$

а индиректно, со користење на асоцијативниот закон, на следниов начин:

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = (\ldots((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \cap) \ldots \cap A_k) \,, \tag{1.7.1´}$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = (\ldots((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup) \ldots \cup A_k) \,. \tag{1.7.2´}$$

По аналогија на директната дефиниција на пресек (односно унија) од конечен број множества може да се дефинира и пресек (унија) на произволна фамилија множества. Претходно да го воведеме поимот фамилија множества!

Нека I е непразно множество и на секој елемент $i \in I$ да му придружиме множество A_i. Тогаш за I велиме дека е множество *индекси*, а множествата A_i добиени на овој начин со едно име ги викаме *фамилија множества* (или *I-систем множества*) и за неа ја користиме ознаката $(A_i \,|\, i \in I)$.

Ако множеството индекси I е множеството природни броеви N и $(A_i \,|\, i \in N)$ е фамилија множества, тогаш неа можеме да ја означиме и како бесконечна низа множества A_1, A_2,...,A_n,.... Но, ако $I=R$, тогаш фамилијата множества $(A_i \,|\, i \in R)$ не можеме да ја запишеме "убаво" како во претходниот случај. Можно е множеството индекси да биде и непразно конечно множество, на пример $I=\{1,2,...,\kappa\}$. Во овој случај фамилијата $(A_i \mid i\in I)$ се состои точно од множествата $A_1, A_2, ..., A_k$.

Сега сме подготвени да дефинираме пресек (унија) од произволна фамилија множества. По аналогија на директната дефиниција за пресек (унија) од конечна фамилија множества имаме:

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I)\, x \in A_i, \tag{1.7.3}$$

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I)\, x \in A_i. \tag{1.7.4}$$

Ќе наведеме некои обопштувања на својствата дадени во погорниот дел за пресек и унија.

7.1° (*Обопштен асоцијативен закон*). Нека A е множество, $I\neq\emptyset$ индексно множество, а $(B_i \mid i\in I)$ фамилија множества. Тогаш:

(i) $A\cap(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A\cap B_i)$;

(ii) $A\cup(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A\cup B_i)$.■

7.2° (*Обопштен дистрибутивен закон*). Нека A е множество, $I\neq\emptyset$ индексно множество, а $(B_i \mid i\in I)$ фамилија множества. Тогаш:

(i) $A\cap(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$;

(ii) $A\cup(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)$.■

1.7.1.Вежби:

1. Нека $(A_i \mid i\in I)$, $I\neq\emptyset$, е произволна фамилија множества. Ако $P=\bigcap_{i\in I} A_i$, а $S=\bigcup_{i\in I} A_i$, тогаш за секој $k\in I$, $P\subseteq A_k\subseteq S$. Докажи!

2. Да се најде пресекот B и унијата C на множествата $A_1,...,A_k$, ако

(а) $A_k = \{1,2,3,...,\kappa\}$;

(б) $A_k = \{x \mid x\in R, 0\leq x<k\}$;

(в) $A_k = \{x \mid x\in R, \frac{k-1}{k}\leq x<k\}$.

3. Нека A е непразно множество и нека $A_x=A\setminus\{x\}$, $x\in A$. Да се определат $\bigcup_{x\in A} A_x$ и $\bigcap_{x\in A} A_x$.

4. Нека A е непразно множество и $(A_j \mid j\in J)$, $J\neq\emptyset$, $(B_k \mid k\in K)$, $K\neq\emptyset$, се фамилии множества. Да се докаже дека

(а) $A\cap(\bigcup_k B_k) = \bigcup_k(A\cap B_k)$;

(б) $A\cup(\bigcap_{k\in K} B_k) = \bigcap_{k\in K}(A\cup B_k)$;

(в) $(\bigcup_j A_j)\cap(\bigcup_k B_k) = \bigcup_{j,k}(A_j\cap B_k)$;

(г) $(\bigcap_{j} A_j) \cup (\bigcap_{k} B_k) \subseteq \bigcap_{k,j} (A_j \cup B_k)$.

5. Да се докаже дека:

(а) $(A_1 \cup ... \cup A_n) + (B_1 \cup ... \cup B_n) \subseteq (A_1 + B_1) \cup ... \cup (A_n + B_n)$;

(б) $(A_1 \cap ... \cap A_n) + (B_1 \cap ... \cap B_n) \subseteq (A_1 + B_1) \cap ... \cap (A_n + B_n)$.

6. Да се докаже дека:

(а) $(\bigcup_{i\in I} A_i)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$;

(б) $(\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$.

1.8. Директен производ

Директен (или *Декартов*) производ, $M\times N$, на множествата M и N е множеството од сите подредени парови (m, n), каде што $m\in M$ и $n\in N$, т.е со:

$$M\times N=\{(m, n) \mid m\in M \wedge n\in N\}. \tag{1.8.1}$$

Притоа

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v. \tag{1.8.2}$$

Пример

1. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, d\}$, $A\times B=\{(a, a),(a, b),(a, d),(b, a),(b, b),(b, d),(c, a),(c, b),(c, d)\}$.

Да наведеме неколку својства за директниот производ на множества:

8.1° (i) $\emptyset\times Y = \emptyset$; (ii) $X\times\emptyset = \emptyset$.■

8.2° $X_1 \subseteq X_2$, $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow X_1 \times Y_1 \subseteq X_2 \times Y_2$.

Доказ: Нека $(x,y) \in X_1 \times Y_1$. Од дефиницијата следува дека $x\in X_1$, а $y\in Y_1$. Но, тогаш, од условот на својството имаме дека $x\in X_2$, а $y\in Y_2$, т.е. $(x, y) \in X_2 \times Y_2$. ■

8.3° $X\times Y=Y\times X \Leftrightarrow X=Y$. ■

8.4° (i) $M\times(N \cup P)=(M\times N) \cup (M\times P)$;

(ii) $(A\times B) \cap (C\times D) = (A \cap C)\times(B \cap D)$;

(iii) $(A\times B) \cup (C\times D) \subseteq (A \cup C)\times(B \cup D)$.

Доказ: (i) $(x,y)\in M\times(N \cup P)\Leftrightarrow x\in M \wedge y\in N \cup P\Leftrightarrow x\in M \wedge (y\in N \vee y\in P)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x\in M \wedge y\in N) \vee (x\in M \wedge y\in P)\Leftrightarrow(x,y)\in M\times N \vee (x,y)\in M\times P\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x,y)\in(M\times N) \cup (M\times P)$.

(iii) За докажување на инклузијата се користи тавтологијата $(A\wedge B)\vee(C\wedge D)\Rightarrow(A\vee C)\wedge(B\vee D)$. Доколку импликацијата се замени со еквиваленција, не се добива тавтологија. Имено, ќе покажеме дека импликацијата

$$(A\vee C)\wedge(B\vee D)\Rightarrow(A\wedge B)\vee(C\wedge D)$$

не е тавтологија.

Нека $\tau((A\wedge B)\vee(C\wedge D)) =\perp$. Значи, $\tau(A\wedge B) =\perp$ и $\tau(C\wedge D) =\perp$. Но, за $\tau(A) =\perp$, а $\tau(B)=\top$, и за $\tau(C)=\top$, а $\tau(D)=\perp$ имаме дека $\tau((A\vee C)\wedge(B\vee D))=\top$. Значи, ако на местото на импликацијата се стави еквиваленција, не се добива тавтологија. ■

Да забележиме дека директен производ од три множества може да се дефинира на повеќе начини. Имено:

$(A\times B)\times C=\{((a,b),c)|a\in A,b\in B, c\in C\}$;

$A\times(B\times C)=\{(a,(b,c)|a\in A,b\in B, c\in C\}$;

$A\times B\times C=\{(a,b,c)|a\in A,b\in B, c\in C\}$,

при што дефинираниве три множества се пар по пар дисјунктни. Ако се разгледува директен производ од конечна фамилија множества, повторно ќе се дојде до повеќе можности, кои даваат пар по пар дисјунктни множества. Од овие причини, за директниот производ $A_1\times...\times A_n$ на конечна фамилија множества $A_1,...,A_n$ да биде еднозначно определен, тој се дефинира на следниов начин:

$$A_1\times...\times A_n =\{(a_1,...,a_n)|a_1\in A_1 ,...,a_n\in A \}. \qquad (1.8.3)$$

Наместо $A_1\times...\times A_n$ се користи и ознаката $\prod_{k=1}^{n} A_k$.

Исто така, ако во (1.8.3) $A_1=A_2=...=A_{\mathrm{n}}=A$, тогаш наместо $A_1\times...\times A_{\mathrm{n}}$ скратено пишуваме A^{n}.

1.8.1. Вежби.

1. Да се покаже дека:

$(A\times B = A\times C$ и $A\neq\varnothing) \Rightarrow B= C$.

2. Да се покаже дека:

$A\times(\bigcup_k B_k) = \bigcup_k(A \times B_k)$, $k\in K$.

3. Нека $\{A_k|\ \ k\in K\}$ и $\{B_k|\ \ k\in K\}$ се две фамилии множества, при што $K\neq\varnothing$. Да се докаже дека:

$(\bigcap_k A_k)\times(\bigcap_k B_k) = \bigcap_k(A_k \times B_k)$.

Дали е точно равенството:

$(\bigcup_k A_k)\times(\bigcup_k B_k) = \bigcup_k(A_k \times B_k)$?

4. Да се докаже дека:

(а) $(A_1 \times A_2)\setminus(B_1 \times B_2) = [(A_1 \setminus B_1) \times B_2]\cup[(A_1 \times (A_2 \setminus B_2)]$;

(б) $\prod_{k=1}^{n} A_k \setminus\prod_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n}[A_1\times\cdots\times(A_k \setminus B_k) \times A_{k+1}\times\cdots\times A_n]$.

1.9. Решавање равенки со множества

Честопати проблемите што ни се поставени бараат да се определи вредност на некоја непозната величина која ги задоволува ограничувањата што произлегуваат од проблемот. Може да се постави проблем во кој како непозната се јавува множество. За да се запознаеме со еден начин на решавање на вакви проблеми, ќе дадеме постапка за решавање равенки со множества коишто содржат само едно непознато множество, при што претпоставуваме дека работиме во однапред зададено универзално множество U.

Нека $A_1,\dots,A_n$ се дадени множества, а X е непознато множество. Нека t_1 и t_2 се изрази формирани од претходно наведените множества користејќи ги операциите со множества, при што барем во еден од изразите, t_1 или t_2, се појавува непознатото множество X. Дозволена е најмногу една од следниве две можности: $t_1 = \varnothing$ или $t_2 = \varnothing$.

За равенството

$$t_1 = t_2 \tag{1.9.1}$$

велиме дека е *равенка со множества со една променлива*. Да се реши равенката (1.9.1), значи да се најдат сите множества X коишто го задоволуваат равенството $t_1 = t_2$.

Во некои поедноставни случаи равенки со множества можат да се решат и директно, користејќи познати својства за операции со множества.

На пример, равенката

$X \cup A = B$

е равенка со непознато множество X. Таа има решение акко $A \subseteq B$, и решение е секое подмножество од B кое го содржи $B \setminus A$.

Подолу ќе дадеме постапка за решавање равенки со множества со една непозната во дадено универзално множество, која, применета и на посложени равенки, секогаш доведува до условот за егзистенција на решение и до решението на равенката.

Постапката за решавање на ваков вид равенки е дадена со следниве неколку чекори:

I. $t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = \varnothing$.

II. Постои природен број k и еднозначно определени множества $F_1,\dots,F_k$, такви што

$$t_1 + t_2 = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k.$$

Притоа F_i е пресек на некои од множествата A_i, A_i', X или X', и $F_i \neq \varnothing$.

III. Ако во некој F_j не се појавува ни X ни X', тогаш од тоа што

$$F_j = F_j \cap U = F_j \cap (X \cup X') = (F_j \cap X) \cup (F_j \cap X'),$$

F_j го заменуваме со $(F_j \cap X) \cup (F_j \cap X')$. Значи, може да се претпостави дека за секој $j \in \{1,2,\dots,k\}$ F_j содржи или X или X'.

IV. Користејќи ги дистрибутивните закони, добиваме:

$$F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k = (A \cap X) \cup (B \cap X'),$$

каде што A и B се множества добиени во постапкава како пресек, унија или комплемент на множествата A_i.

V. $(A \cap X) \cup (B \cap X')=\emptyset \Leftrightarrow A \cap X=\emptyset \wedge B \cap X'=\emptyset \Leftrightarrow X\subseteq A' \wedge B\subseteq X$,

т.е. решението на равенката (1.9.1) е секое множество X такво што $B\subseteq X\subseteq A'$, што значи дека равенката (1.9.1) има решение акко $B\subseteq A'$.

Пример 1.

Да се реши равенката $P \cup X=Q$, каде што P и Q се дадени множества.

I. $P \cup X= Q\Leftrightarrow(P \cup X) + Q = \emptyset$,

$(P \cup X) + Q = ((P \cup X) \cap Q') \cup ((P \cup X)' \cap Q) = \emptyset$.

II. $(P \cap Q') \cup (Q' \cap X) \cup (P' \cap X' \cap Q) = \emptyset$.

III. $(P \cap Q') = (P \cap Q' \cap X) \cup (P \cap Q' \cap X')$.

Значи, имаме:

$\mathbf{(P \cap Q' \cap X)} \cup (P \cap Q' \cap X') \cup \mathbf{(Q' \cap X)} \cup (P' \cap X' \cap Q) = \emptyset$.

IV. $(((P \cap Q') \cup Q') \cap X) \cup (((P \cap Q') \cup (P' \cap Q)) \cap X') = \emptyset\Leftrightarrow (Q' \cap X) \cup ((P+Q) \cap X') = \emptyset$.

Од горново добиваме дека $A= Q'$, а $B=P+Q$.

V. $Q' \cap X= \emptyset$, и $(P+Q) \cap X'= \emptyset \Leftrightarrow P+Q\subseteq X\subseteq Q$. Значи, равенката $P\cup X= Q$ има решение акко $P+Q\subseteq X\subseteq Q$.

$P+Q=(P\backslash Q) \cup (Q\backslash P)$,

што значи дека равенката има решение акко $P\backslash Q\subseteq Q$, т.е. акко $P\subseteq Q$. Но, тогаш $P\backslash Q=\emptyset$, па $P+Q=Q\backslash P$, што значи дека решение на равенката е секое множество X, такво што

$Q\backslash P\subseteq X\subseteq Q$.

Овој метод за решавање равенки со множества може да се примени и за решавање неравенки со множества, користејќи ги следниве еквивалентности:

$A\subseteq B \Leftrightarrow A \cup B=B$,

$A\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B=A$.

Пример 2.

Да се реши неравенката $P\cup X\subseteq Q$, каде што P и Q се дадени множества.

I. $P\cup X\subseteq Q\Leftrightarrow P\cup X\cup Q=Q\Leftrightarrow(P\cup X\cup Q)+Q=\emptyset\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow((P\cup X\cup Q)\cap Q')\cup((P\cup X\cup Q)'\cap Q)=\emptyset$.

II. $((P\cup Q)\cap Q')\cup(Q'\cap X)\cup(P'\cap Q'\cap X'\cap Q)=\emptyset\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(P\cap Q')\cup(Q\cap Q')\cup(Q'\cap X)=\emptyset\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(P\cap Q')\cup(Q'\cap X)=\emptyset$.

III. Од равенството $P\cap Q'=(P\cap Q'\cap X)\cup(P\cap Q'\cap X')$ следува

$(P\cap Q'\cap X)\cup(P\cap Q'\cap X')\cup(Q'\cap X)=\emptyset$.

IV. $(((P\cap Q')\cup Q')\cap X)\cup(P\cap Q'\cap X)=\emptyset\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(Q'\cap X)\cup(P\cap Q'\cap X')=\emptyset$.

V. $(Q'\cap X)\cup(P\cap Q'\cap X')=\emptyset\Leftrightarrow Q'\cap X=\emptyset\wedge P\cap Q'\cap X'=\emptyset\Leftrightarrow P\cap Q'\subseteq X\subseteq Q$.

Последното неравенство е можно акко $P \cap Q' \subseteq Q$. Но, тогаш имаме: $P \cap Q' = \varnothing$ и неравенката е задоволена за сите множества X такви што $X \in \mathcal{B}(Q)$.

Исто така, истиов метод може да се искористи и за решавање на системи равенки со множества со една непозната во дадено универзално множество U, при што решение на системот е секое подмножество од универзалното множество што ги задоволува сите равенки од системот, што е еквивалентно со пресекот од решенијата на секоја равенка од системот.

1.9.1. Вежби:

1. Нека M е универзално множество и $A, B \subseteq M$. Да се решат следниве равенки и неравенки:

(а) $A+X=B \setminus A$;

(б) $A \cap X=B \setminus X$;

(в) $A \setminus X=A+B$;

(г) $A+X \subseteq B \setminus X$;

(д) $A \setminus (B+X) \subseteq A+X$.

2. Нека M е универзално множество, A, $B \subseteq M$. Да се решат системиве равенки во универзалното множество M и да се определат условите при кои системот има решение:

(а) $A \cup X=B$
$B \cap X=A$;

(б) $A \cap X=B$
$A \cup X=C$;

(в) $A \setminus X=X \setminus B$
$X \setminus A=C \setminus X$.

3. Нека M е универзално множество, A, B, $C \subseteq M$. Нека за A,B,C важи $B \subseteq A$ и $A \cap C=\varnothing$. Да се реши системот

$A \setminus X=B$
$X \setminus A=C$.

2. РЕЛАЦИИ, ПРЕСЛИКУВАЊА И ПОДРЕДЕНИ МНОЖЕСТВА

2.1.Кореспонденции

Нека A и B се две множества. Секое подмножество α од $A\times B$ се вика *кореспонденција* од A во B; множеството A го викаме *домен*, а B *кодомен* на α. Натаму наместо $(x,y)\in\alpha$ честопати ќе пишуваме $x\alpha y$.

Примери:

1. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $\alpha=\{(1,a),(2,b),(3,d)\}$
2. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $\beta=\{(1,a),(1,b),(2,c)\}$.

Ако α е кореспонденција од A во B, а β од B во C, тогаш дефинираме *состав* (производ, композиција) $\alpha\beta$ на кореспонденциите α и β со:

$$x\alpha\beta y\Leftrightarrow(\exists b\in B)(x\alpha b \wedge b\beta y),$$

или

$$\alpha\beta=\{(x,y)\in A\times C|(\exists b\in B)(x,b)\in\alpha\wedge (b,y)\in\beta\}.$$

За состав на кореспонденции важи асоцијативноста. Имено:

1.1° Нека $\alpha\subseteq A\times B$, $\beta\subseteq B\times C$ и $\gamma\subseteq C\times D$. Тогаш

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

Доказ: $a\alpha(\beta\gamma)d\Leftrightarrow(\exists b\in B)(a\alpha b\wedge b\beta\gamma d)\Leftrightarrow (\exists b\in B)(a\alpha b\wedge(\exists c\in C)(b\beta c\wedge c\gamma d))\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(\exists b\in B)(\exists c\in C)(a\alpha b\wedge b\beta c\wedge c\gamma d)\Leftrightarrow(\exists c\in C)((\exists b\in B)((a\alpha b\wedge b\beta c)\wedge c\gamma d)\Leftrightarrow$
$(\exists c\in C)(a\alpha\beta c\wedge c\gamma d)\Leftrightarrow a(\alpha\beta)\gamma d$. ■

За секоја кореспонденција $\alpha\subseteq A\times B$ дефинираме *инверзна кореспонденција* $\alpha^{-1}\subseteq B\times A$ со:

$$y\alpha^{-1}x\Leftrightarrow x\alpha y.$$

1.2.° $\alpha\subseteq A\times B, \beta\subseteq B\times C\Rightarrow(\alpha\beta)^{-1}=\beta^{-1}\alpha^{-1}$. ■

Примери:

3. $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$, $C=\{x, y, z\}$,
   $\alpha=\{(1, a),(2, b),(3, a)\}$,
   $\beta=\{(a, x),(a, y)\}$,
   $\alpha\beta=\{(1, x),(1, y),(3, x),(3, y)\}$,
   $\alpha^{-1}=\{(a, 1),(b, 2),(a, 3)\}$,
   $\beta^{-1}=\{((x, a),(y, a)\}$,
   $\beta^{-1}\alpha^{-1}=\{(x, 1),(x, 3),(y, 1),(y, 3)\}$,
   $(\alpha\beta)^{-1}=\{(x, 1),(x, 3),(y, 1),(y, 3)\}$.

Натаму ќе разгледуваме специјален вид кореспонденции, а имено кореспонденции од едно множество во себе. Оваков вид кореспонденции се викаат *релации*.

2.1.1. Вежби:

1. Нека α е кореспонденција од $A=\{2,3,5,6\}$ во $B=\{3,4,6,9\}$ дефинирана со $x\alpha y \Leftrightarrow x|y$.

(а) Да се запише кореспонденцијата α експлицитно како подмножество од $A\times B$.

(б) Да се определи α^{-1}.

(в) Да се најде $\alpha(\{2,6\})$, каде што со $\alpha(X)$, $X\subseteq A$, е означено множеството $\{y|y\in B, (\exists x\in X)(x,y)\in\alpha\}$.

2. Нека е α е кореспонденција од $A=\{2,3,4,5\}$ во $B=\{3,6,7,10\}$ дефинирана со $x\alpha y\Leftrightarrow x|y$, а $\beta\subseteq B\text{x}B$ дефинирана со $x\beta y\Leftrightarrow x+y=13$. Да се определи составот $\alpha\beta$.

3. Нека $|A|=m$, $|B|=n$. Да се определи бројот на кореспонденции од A во B.

4. Нека $\alpha\subseteq A\times B$, а $\{\beta_i|i\in I\}$ фамилија кореспонденции од B во C. Да се покаже дека:

(а) $\alpha(\underset{i}{\cup}\beta_i) = \underset{i}{\cup}(\alpha\beta_i)$;

(б) $\alpha(\underset{i}{\cap}\beta_i) \subseteq \underset{i}{\cap}(\alpha\beta_i)$;

(в) $(\underset{i}{\cup}\beta_i)^{-1} = \underset{i}{\cup}\beta_i^{-1}$;

(г) $(\underset{i}{\cap}\beta_i)^{-1} = \underset{i}{\cap}\beta_i^{-1}$.

Да се определат множества A, B и C и кореспонденции α, β_i такви што во (б) да важи строга инклузија.

2.2. Релации

Нека A е множество. За секоја кореспонденција α од A во A велиме дека е *релација* на A. Значи, α е релација на A ако е подмножество од $A\times A$.

Примери:

1. За релацијата $\alpha=\varnothing\subseteq A\times A$ велиме дека е *йразна* релација.

2. За релацијата $\Delta_A=\{(a,a)|a\in A\}$ велиме дека е *дијаїонала* на A.

(За Δ_A важи $x\Delta_A y\Leftrightarrow x=y$. Затоа за Δ_A велиме дека е релација за *равенсшво* на A.)

3. За релацијата $\nabla_A=A\times A$ велиме дека е *универзална* релација на A и таа ја содржи, како свое подмножество, секоја релација на A.

Нека α е релација на A, а β на B. Велиме дека α и β се *еднакви* ($\alpha=\beta$) акко тие се еднакви како кореспонденции, т.е. акко $A=B$ и α и β се еднакви множества.

Примери:

4. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$,

$\alpha=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ е релација на A, $\beta=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ е релација на B.

α и β не се еднакви релации затоа што $A\neq B$, иако разгледувани како множества α и β се еднакви.

Разликуваме повеќе видови релации. Нека M е множество и α релација на M. Тогаш:

α е *рефлексивна* релација акко $(\forall x\in M)x\alpha x$

α е *симетрична* релација акко $(\forall x,y\in M)x\alpha y\Rightarrow y\alpha x$

α е *транзитивна* релација акко $(\forall x,y,z\in M)x\alpha y\wedge y\alpha z\Rightarrow x\alpha z$

α е *антисиметрична* релација акко $(\forall x,y\in M)x\alpha y\wedge y\alpha x\Rightarrow x=y$

α е *антирефлексивна* релација акко $(\forall x\in M)\neg(x\alpha x)$

α е релација за *еквивалентност* акко α е рефлексивна, симетрична и транзитивна релација;

α е релација за *подредување* акко α е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна релација;

α е релација за *претподредување* акко α е нерефлексивна и транзитивна релација.

Се договараме множеството од сите рефлексивни релации на дадено множество M да го означуваме со R, множеството симетрични релации на M со S, транзитивни со T, антисиметрични со AS, антирефлексивни со AR, еквивалентности со E, подредувања со P и претподредувања на M со PP. На овој начин пократко може да се запише тврдењето дека некоја релација на M има определено својство. Така, на пример, ако сакаме да истакнеме дека релацијата $\alpha\subseteq M\times M$ е симетрична, пишуваме $\alpha\in S$.

Примери:

5. $\varnothing$ е нерефлексивна, симетрична, транзитивна, антисиметрична, но не е рефлексивна релација за непразно множество. Доколку се разгледува празната релација над празното множество, тогаш таа е и рефлексивна релација.

6. Δ_M е рефлексивна, симетрична, транзитивна, антисиметрична, еквивалентност, подредување. (Да забележиме дека дијагоналата е единствената релација (над непразно множество) којашто истовремено е и еквивалентност и подредување.)

7. ∇_M е рефлексивна, симетрична, транзитивна, еквивалентност. ∇_M е антисиметрична акко $M=\varnothing$ или M е едноелементно множество, а антирефлексивна акко $M=\varnothing$.

8. $M=\{1,2,3,4\}$,

$\alpha=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$,

$\beta=\{(1,2),(2,1)\}$,

$\gamma=\{(1,1),(4,4)\}$,

$\delta=\{(1,1),(1,2),(2,2),(1,3),(3,3),(4,4)\}$.

α е еквивалентност, β е нерефлексивна и симетрична, γ не е ни рефлексивна ни антирефлексивна, но е симетрична, транзитивна и антисиметрична релација, δ е подредување.

Ако α е релација на множеството M, тогаш со x^{α} го означуваме следново подмножество од M

$x^{\alpha}=\{y\in M|x\alpha y\}$.

Примери:

9. $x^{\varnothing}=\varnothing$;

10. $x^{\Delta_M}=\{x\}$;

11. $x^{\nabla_M}=\{y|y\in M,(x,y)\in M\times M\}=M$;

12. Ако $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ се како и во примерот 8, тогаш $1^{\alpha}=\{1,2\}=2^{\alpha}$, $3^{\alpha}=\{3,4\}=4^{\alpha}$;

$1^{\beta}=\{2\}$, $2^{\beta}=\{1\}$, $3^{\beta}=4^{\beta}=\varnothing$;

$1^{\gamma}=\{1\}$, $2^{\gamma}=3^{\gamma}=\varnothing$, $4^{\gamma}=\{4\}$;

$1^{\delta}=\{1,2,3\}$, $2^{\delta}=\{2\}$, $3^{\delta}=\{3\}$, $4^{\delta}=\{4\}$.

2.1° α е транзитивна релација на M акко

$$(\forall x,y\in M)(y\in x^{\alpha}\Rightarrow y^{\alpha}\subseteq x^{\alpha}). \qquad (2.2.1)$$

Доказ: Нека α е транзитивна релација и нека е $z\in y^{\alpha}$. Тогаш е:

$y\alpha z\wedge x\alpha z\Rightarrow x\alpha z\Rightarrow z\in x^{\alpha}$.

Обратно, нека важи (2.2.1). Тогаш е:

$x\alpha y,\ y\alpha z\Rightarrow y\in x^{\alpha}\wedge z\in y^{\alpha}\Rightarrow z\in x^{\alpha}\Rightarrow x\alpha z$. ■

Ако M е конечно множество, тогаш секоја релација α на M може да се зададе како шема од два симбола, 0 и 1 (или $\top$, $\perp$). Притоа, ако е $x\alpha y$, тогаш на местото каде што се сече редицата на x со колоната на y се пишува знакот 1 (или $\top$), а ако не се во релација, знакот 0 (или $\perp$). Така, за последниот пример релацијата α може да се запише и на следниов начин

α	1	2	3	4
1	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$

α	1	2	3	4
1	1	1	0	0

2	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
4	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

2	1	1	0	0
3	0	0	1	1
4	0	0	1	1

Една релација е рефлексивна акко главната дијагонала од шемата со којашто е зададена се состои само од единици, а симетрична акко е симетрична во однос на главната дијагонала. Една релација е антирефлексивна акко главната дијагонала се состои само од нули, а антисиметрична акко за секоја единица во шемата со која е зададена симетричниот елемент во однос на главната дијагонала е нула.

Пример 13.

β	1	2	3	4
1	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
2	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

β	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Очигледно, релацијата β е антирефлексивна и симетрична.

2.2° α е еквивалентност на множеството M акко

$$(\forall x,y\in M)(x\in x^{\alpha}\wedge (y\in x^{\alpha} \Rightarrow x^{\alpha}=y^{\alpha})). \qquad (2.2.2)$$

Доказ: Нека α е еквивалентност. Тогаш

$\alpha\in R\Rightarrow(\forall x\in M)x\alpha x$, т.е. $(\forall x\in M)x\in x^{\alpha}$.

Од (2.2.1) имаме

$\alpha\in T\Leftrightarrow(y\in x^{\alpha}\Rightarrow y^{\alpha}\subseteq x^{\alpha})$.

Ако се земе предвид дека α е и симетрична релација, тогаш

$y\in x^{\alpha} \wedge z\in x^{\alpha}\Rightarrow x\alpha z \wedge x\alpha y\Rightarrow x\alpha z \wedge y\alpha x\Rightarrow y\alpha z\Rightarrow z\in y^{\alpha}$.

Значи, ако α е еквивалентност, тогаш важи (2.2.2).

Обратно, нека α е релација на M за која важи (2.2.2). Тогаш α е рефлексивна и транзитивна релација. Натаму,

$$x\alpha y\Rightarrow y\in x^{\alpha} \Rightarrow x^{\alpha} =y^{\alpha}, \qquad (2.2.3)$$

$x\in x^{\alpha} \wedge x^{\alpha} =y^{\alpha} \Rightarrow x\in y^{\alpha} \Rightarrow y\alpha x$. ■

2.3° Нека α е еквивалентност на M. Тогаш

$$(\forall x,y\in M)(x^{\alpha} \cap y^{\alpha} =\varnothing \vee x^{\alpha} =y^{\alpha}). \qquad (2.2.4)$$

Доказ: Нека $z\in x^{\alpha} \cap y^{\alpha}$. Тогаш

$z\in x^{\alpha}$, $z\in y^{\alpha} \Rightarrow x^{\alpha} = z^{\alpha}=y^{\alpha}$. ■

Според **2.3°**, секоја еквивалентност α на M го дели множеството M на непразни дисјунктни подмножества од M. Значи, ако α е еквивалентност на M, тогаш $M = \bigcup_{x\in M} x^{\alpha}$, $x^{\alpha} \neq \varnothing$ и $x^{\alpha} \cap y^{\alpha} =\varnothing\Rightarrow x^{\alpha} =y^{\alpha}$.

Со M/α да го означиме подмножеството од $\mathcal{B}(M)$ што се состои од сите множества x^{α} , $x\in M$, т.е.

$M/\alpha = \{x^{\alpha} \mid x\in M\}$.

За M/α велиме дека е *фактор множество на M по* α или *количник* на M по α, а за x^{α} дека е *класа на еквивалентноста* α *со претставник x* (*класа еквивалентни елементи со x*).

Пример:

14. $M/\Delta_M = \{\{x\} \mid x\in M\}$,

$M/\nabla_M = \{M\}$,

$M/\alpha = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, каде α е релацијата од примерот 8.

Да забележиме дека секој елемент од x^{α} можеме да го сметаме за претставник на x^{α}, затоа што тие определуваат иста класа.

Разбивање (*партиција*, *поделба*) на множеството M е подмножество $\pi \subseteq \mathcal{B}(M)$ од булеанот на M со следните својства:

(i) $A\in\pi \Rightarrow A\neq\varnothing$;

(ii) $A,B\in\pi,\ A\cap B\neq\varnothing \Rightarrow A=B$;

(iii) $\bigcup_{A\in\pi} A = M$.

Според "коментарот" на **2.3°**, имаме:

2.4° Ако α е еквивалентност на M, тогаш M/α е разбивање на M. ■

Но, важи и обратно тврдење на тврдењето **2.4°**. Имено:

2.5° Ако π е разбивање на M, тогаш постои еквивалентност α на M, таква што $M/\alpha=\pi$.

Доказ: Нека π е разбивање на M. Дефинираме релација α на M со

$x\alpha y \Leftrightarrow (\exists A\in\pi)\, x,y\in A$.

Бидејќи π е разбивање, за секој $x\in M$, постои $A\in\pi$ таков што $x\in A$. Но тогаш и $x,x\in A$, т.е. за секој $x\in M$, $x\alpha x$, па α е рефлексивна релација.

Од дефиницијата на α очигледно дека α е симетрична релација.

Да докажеме дека α е и транзитивна релација. Имено:

$x\alpha y,\ y\alpha z \Leftrightarrow (\exists A,B\in\pi)\, x,y\in A \wedge y,z\in B$.

Но тогаш $y\in A\cap B \Rightarrow A=B$, што значи дека $x,z\in A$, т.е. $x\alpha z$.

Останува да докажеме дека $M/_{\alpha}=\pi$. Нека е $A\in\pi$. Бидејќи $A\neq\emptyset$, постои $x\in M$ таков што $x\in A$. Затоа, за да докажеме дека $M/_{\alpha}=\pi$, доволно е да докажеме дека $x\in A\Rightarrow x^{\alpha}=A$.

$y\in x^{\alpha} \Leftrightarrow x\alpha y\Leftrightarrow x,y\in A\Leftrightarrow y\in A$. ■ (2.2.5)

Да разгледаме уште некои својства на некои видови релации.

2.6º $\alpha\in S\Leftrightarrow\alpha=\alpha^{-1}$.

Доказ: Нека α е симетрична релација. Тогаш

$(x,y)\in\alpha\Leftrightarrow(y,x)\in\alpha\Leftrightarrow(x,y)\in\alpha^{-1}$, т.е. $\alpha=\alpha^{-1}$.

Обратно, нека $\alpha=\alpha^{-1}$ и нека $(x,y)\in\alpha$. Тогаш $(x,y)\in\alpha^{-1}\Rightarrow(y,x)\in\alpha$, т.е. α е симетрична релација. ■

2.7º $\alpha\in T\Leftrightarrow\alpha\alpha\subseteq\alpha$.

Доказ: Нека α е транзитивна релација. Тогаш

$x\alpha\alpha y\Rightarrow(\exists z\in M)(x\alpha z,\ z\alpha y)\Rightarrow(\exists z\in M)x\alpha y$.

Значи, $\alpha\alpha\subseteq\alpha$.

Обратно, нека е $\alpha\alpha\subseteq\alpha$. Тогаш

$x\alpha y\wedge y\alpha z \Rightarrow x\alpha\alpha z \Rightarrow x\alpha z$,

што значи дека α е транзитивна релација. ■

2.8º $\alpha\subseteq\beta\Leftrightarrow\alpha^{-1}\subseteq\beta^{-1}$.■

2.9º Ако α е (а) симетрична, (б) рефлексивна, (в) нерефлексивна, (г) антисиметрична, (д) транзитивна релација, тогаш соодветното својство го има и α^{-1} .

Доказ: Ќе го докажеме само тврдењето под (д). Нека α е транзитивна релација, т.е. $\alpha\alpha\subseteq\alpha$. Тогаш

$\alpha^{-1}\alpha^{-1}=(\alpha\alpha)^{-1}\subseteq\alpha^{-1}$. ■

2.10º $\alpha_1\subseteq\alpha_2 ,\beta_1\subseteq\beta_2 \Rightarrow\alpha_1\beta_1 \Rightarrow\alpha_2\beta_2$. ■

2.11º Нека е $\alpha\subseteq M\times M$. Тогаш

(i) $\alpha,\beta\in R\Rightarrow\alpha\beta\in R$;

(ii) $\alpha,\beta\in S\wedge\alpha\beta=\beta\alpha\Rightarrow\alpha\beta\in S$;

(iii) $\alpha,\beta\in T\wedge\alpha\beta=\beta\alpha\Rightarrow\alpha\beta\in T$.

Доказ: (ii) $\alpha\beta=\alpha^{-1}\beta^{-1}=(\beta\alpha)^{-1}=(\alpha\beta)^{-1}$.

(iii) $(\alpha\beta)(\alpha\beta)=\alpha(\beta\alpha)\beta=\alpha(\alpha\beta)\beta=(\alpha\alpha)(\beta\beta)\subseteq\alpha\beta$.■

2.12º (i) $\alpha,\beta\in R\Rightarrow\alpha\cap\beta\in R,\ \alpha\cup\beta\in R$;

(ii) $\alpha,\beta\in S\Rightarrow\alpha\cap\beta\in S,\ \alpha\cup\beta\in S$;

(iii) $\alpha,\beta\in AR\Rightarrow\alpha\cap\beta\in AR,\ \alpha\cup\beta\in AR$;

(iv) $\alpha,\beta\in T\Rightarrow\alpha\cap\beta\in T$;

(v) $\alpha,\beta\in A\Rightarrow\alpha\cap\beta\in A$. ■

Примери:

15. $M=\{1,2\}$, $\alpha=\{(1,2)\}$, $\beta=\{(2,1)\}$, $\alpha\cup\beta=\{(1,2),(2,1)\}$. α,β се антисиметрични и транзитивни релации, но $\alpha\cup\beta$ не е ни антисиметрична ни транзитивна релација.

16. $M=\{0,1,2,3,4,5\},\alpha=\{(1,2),(3,4)\},\beta=\{(2,3),(4,5)\}$,

$\alpha\cup\beta=\{(1,2),(3,4),(2,3),(4,5)\}$.

Во овој случај $\alpha,\beta\in T$, но $\alpha\cup\beta\notin T$.

17. $\delta=\{(1,2),(2,1)\}$, $\gamma=\{(2,3),(3,2)\}$ се симетрични релации, но $\delta\gamma\neq\gamma\delta$, па $\delta\gamma=\{(1,3)\}$ не е симетрична релација.

18. $\varepsilon=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$ е антисиметрична релација, но $\varepsilon\varepsilon=\varepsilon^2=\{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$ не е антисиметрична релација.

19. $\theta=\{((1,2),(2,1)\}$ е нерефлексивна релација, но $\theta^2=\{(1,1),(2,2)\}$ не е антирефлексивна релација.

20. $M=\{1,2,3,4\}$, $\alpha=\{(1,2),(3,4)\}$, $\beta=\{(2,3),(4,4)\}$ се транзитивни релации, $\alpha\beta\neq\beta\alpha$, па $\alpha\beta=\{(1,3),(3,4)\}$ не е транзитивна релација.

Нека α е релација на множеството M. За секој природен број n индуктивно дефинираме степен α^n на релацијата α на следниов начин:

(i) $\alpha^o=\Delta_M$; $\alpha^1=\alpha$;

(ii) Ако за некој природен број k е дефиниран степенот α^k, тогаш $\alpha^{k+1}=\alpha^k\alpha$.

2.13° $a\alpha^n b\Leftrightarrow(\exists c_o,c_1,...,c_n\in M)(a=c_o, b=c_n, c_i\alpha c_{i+1}, i=0,n\text{-}1)$,

што пократко може да се запише и на следниов начин

$$a\alpha^n b\Leftrightarrow(\exists c_o,c_1,...,c_n\in M)(a=c_o\,\alpha c_1\alpha...\alpha\, c_{n-1}\alpha c_n=b).$$

Доказ: Доказот ќе го спроведеме со индукција по степенот n. Имено, за n=0 или n=1 имаме

$$a\alpha^o b\Leftrightarrow(\exists c_o\in M)((a=c_o\,\Delta_M c_o=b)\Rightarrow a=b),$$

$$a\alpha^1 b\Leftrightarrow(\exists c_o,c_1\in M)(a=c_o\,\alpha c_1=b).$$

Значи, за n=0 и n=1 тврдењето е точно. Нека тоа е точно до некој природен број $k\geq 1$. Тогаш

$$a\alpha^{k+1}b\Leftrightarrow a\alpha^k\alpha b\Leftrightarrow(\exists c_k\in M)(a\alpha^k c_k\alpha b)\Leftrightarrow(\exists c_1,...,c_k\in M)(a\alpha c_1\alpha...\alpha c_k\alpha b).$$

Значи, постојат $a,c_1,...,c_k,b\in M$ со бараните својства, што и требаше да се докаже. ■

2.14° Ако α е транзитивна (рефлексивна, симетрична) релација, тогаш за секој природен број n и α^n е транзитивна (рефлексивна, симетрична) релација, соодветно.

Доказ: Нека α е транзитивна релација, т.е. $\alpha\alpha\subseteq\alpha$. Тогаш

$$\alpha^n\alpha^n=\alpha^{2n}=(\alpha^2)^n\subseteq\alpha^n,$$

што е еквивалентно со α^n е транзитивна релација. ■

Како последица од последново својство директно следува дека ако α е еквивалентност, тогаш за секој природен број n и α^n е еквивалентност.

Нека $\alpha \subseteq M \times M$. *Транзитивно проширување* (транзитивно затворање) на α е релацијата

$$\beta = \bigcup_{i \geq 1} \alpha^i = \alpha \cup \alpha^2 \cup \ldots \cup \alpha^n \cup \ldots$$

2.15º Транзитивното проширување β на релацијата α е најмалата транзитивна релација во којашто се содржи α.

(За β велиме дека е *транзитивна релација генерирана од* α и пишуваме $\beta = \langle\alpha\rangle$).

Доказ: $a\beta b \wedge b\beta c \Leftrightarrow (\exists i,j \in \mathbb{N}) a\alpha^i b \wedge b\alpha^j c \Leftrightarrow$

$(\exists i,j \in \mathbb{N})(\exists c_0, c_1, \ldots, c_i)(\exists d_{i+1}, \ldots, d_{i+j}) a = c_0 \alpha c_1 \alpha \ldots \alpha c_i = d_i \alpha d_{i+1} \alpha \ldots \alpha d_{i+j} = c$

$\Leftrightarrow a\alpha^{i+j} c \Leftrightarrow a\beta c.$

Нека γ е транзитивна релација што ја содржи релацијата α. Тогаш од $\alpha \subseteq \gamma$, $\gamma^2 \subseteq \gamma$, па имаме

$$\alpha^2 \subseteq \gamma,\ \alpha^3 \subseteq \gamma,\ \ldots, \alpha^n \subseteq \gamma, \ldots$$

што повлекува $\beta \subseteq \gamma$.■

Да забележиме дека ако α е релација над конечно множество M, тогаш транзитивното затворање на α е релацијата $\beta = \bigcup_{i=1}^{|M|} \alpha^i$, т.е. унијата е конечна со најмногу $|M|$ членови, при што со $|M|$ е означен бројот на елементи во M.

2.16º Ако α е рефлексивна и симетрична релација, тогаш $\langle\alpha\rangle$ е еквивалентност. ■

2.2.1. Вежби:

1. Нека е $M = \{1,2,3,4\}$. Да се определи релација α на M што ќе биде транзитивна, антисиметрична и за којашто ќе важи $1\alpha 2$, $2\alpha 3$, $3\alpha 4$.

2. Да се најде грешката во доказов дека од симетричност и транзитивност на релацијата α следува рефлексивност:

"Од симетричноста на α имаме $a\alpha b \Rightarrow b\alpha a$, а од транзитивноста, пак, $a\alpha b \wedge b\alpha a \Rightarrow a\alpha a$. Значи α е рефлексивна."

3. Нека е $\alpha \subseteq A \times A$. Тогаш $\alpha^2 \cap \alpha = \varnothing$ акко $a\alpha b \wedge b\alpha c \Rightarrow \neg(a\alpha c)$. Докажи!

4. Нека α_1, α_2 и β се релации во B, при што $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$. Да се покаже дека

(а) $\beta\alpha_1 \subseteq \beta\alpha_2$;

(б) $\alpha_1\beta \subseteq \alpha_2\beta$.

5. Нека е $\alpha \subseteq A \times A$. Тогаш $\alpha\alpha^{-1}$ е симетрична релација на A.

6. Нека е $\alpha \subseteq A \times A$. Да се покаже дека:

(а) α е рефлексивна акко $\Delta_A \subseteq\alpha$;

(б) α е антирефлексивна акко $\alpha\cap\Delta_A =\varnothing$;

(в) α е антисиметрична акко $\alpha\cap\alpha^{-1}=\Delta_A$.

7. Нека α и β се еквивалентности на множеството A. Докажи дека:

$\alpha\beta$ е еквивалентност на A акко $\alpha\beta=\beta\alpha$.

8. Нека α,β,γ се еквивалентности на множеството A, такви што $\alpha\subseteq\gamma$ и $\beta\subseteq\gamma$. Докажи дека $\alpha\subseteq\alpha\beta$, $\beta\subseteq\alpha\beta$, $\alpha\beta\subseteq\gamma$.

9. Нека е $M\neq\varnothing$. Тогаш:

α е еквивалентност акко $\Delta_M\subseteq\alpha \wedge \alpha\subseteq\alpha^{-1} \wedge \alpha\alpha\subseteq\alpha$.

10. Да се докаже дека:

(а) Пресек од произволна непразна фамилија еквивалентности е еквивалентност.

(б) Унија од произволна непразна фамилија еквивалентности не мора да биде еквивалентност.

11. Нека α е претподредување на A, а β претподредување на B. На $A\times B$ дефинираме релација γ со:

$(a_1 ,b_2)\gamma(a_2 ,b_2)\Leftrightarrow b_1\beta b_2 \vee (a_1\alpha a_2 \wedge b_1 =b_2)$.

Да се докаже дека и γ е претподредување.

12. Нека α е еквивалентност во A, а β еквивалентност во B, и нека γ е релација во $A\times B$ дефинирана со:

$(a_1 ,b_2)\gamma(a_2 ,b_2)\Leftrightarrow a_1\alpha a_2 \wedge b_1\beta b_2$.

Да се докаже дека $\gamma\subseteq(A\times B)^2$ е релација за еквивалентност.

13. Да се докаже дека $\alpha\alpha^{-1}$ е симетрична релација.

14. Да се докаже дека релацијата $\alpha\subseteq A\times A$ е еквивалентност акко се исполнети следниве услови:

(i) $\alpha=\alpha^{-1}$,

(ii) $(\forall a\in A)(\exists b\in A)a\alpha b$,

(iii) $a\alpha b \wedge c\alpha b\Rightarrow a\alpha c$.

15. Релацијата $\alpha\subseteq A\times A$ е еквивалентност акко $\Delta_A\subseteq\alpha$ и $\alpha^{-1}\alpha\subseteq\alpha$. Докажи!

16. Релацијата $\alpha\subseteq A\times A$ е подредување акко $\alpha\cap\alpha^{-1}=\Delta_A$ и $\alpha\alpha\subseteq\alpha$.

17. Во множеството поделби на дадено множество X дефинираме релаци ја "е пофина од" на следниов начин:

π_1 е пофина од π_2 акко $A\in\pi_1 \Rightarrow(\exists B\in\pi_2)A\subseteq B$.

Да се покаже дека оваа релација е подредување.

18. Нека α е рефлексивна и транзитивна релација на A. Да се покаже дека:

(а) $\beta=\alpha\cap\alpha^{-1}$ е еквивалентност.

(б) Релацијата $\bar{\alpha}$ во $A_{/\beta}$ дефинирана со :

$a^\beta\,\bar{\alpha}\,b^\beta \Leftrightarrow(\exists a_1\in a^\beta ,b_1\in b^\beta)a_1\alpha b_1$

е подредување.

19. Во N и $N\times N$ се дефинирани следниве релации:

(а) $(a,b)\in\alpha\Leftrightarrow 4|(a-b)$;

(б) $m>0\Rightarrow((a,b)\in\alpha_m \Leftrightarrow m|\,|a-b|)$;

(в) $((a,b),(c,d))\in\beta\Leftrightarrow a+d=b+c$;

(г) $((a,b),(c,d))\in\gamma\Leftrightarrow(ad=bc \wedge b\neq 0,\ d\neq 0) \vee (a=c,\ b=0,\ d=0)$.

Да се покаже дека α, α_m ,β и γ се еквивалентности и да се најдат фактор множествата N/α_m , $N\times N_{/\beta}$ и $N\times N_{/\gamma}$.

20. Нека е $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и α релација во A определена со:

$\alpha=\{(1,3),(3,1),(1,5),(5,3),(1,7),(7,1),(1,9),(2,4),(4,2)\}$.

Да се најде:

(а) транзитивното затворање α^* ;

(б) најмалата еквивалентност β во A што ја содржи релацијата α, т.е. релацијата $\beta=\alpha^*\cap(\alpha^*)^{-1}$.

21. Да се покаже дека:

(а) Транзитивно проширување на рефлексивна релација е рефлексивна релација.

(б) Транзитивно проширување на симетрична релација е симетрична релација.

22. Нека е $\alpha\subseteq A\times A$ и нека $\beta=\alpha\cup\alpha^{-1}\cup\Delta_A$.

Ако β^* е транзитивното проширување на β, тогаш:

(а) $\alpha\subseteq\beta^*$,

(б) β^* е еквивалентност во A,

(в) β^* е минималната еквивалентност во A што ја содржи α. Докажи!

2.3. Пресликувања

Нека M и N се две непразни множества и нека f е кореспонденција од M во N, што ги задоволува следниве услови:

$(\forall a\in M)(\exists b\in N)(a,b)\in f$;

$(a,b_1),(a,b_2)\in f \Rightarrow b_1=b_2$.

Велиме дека f е *пресликување* од M во N и пишуваме $f{:}M\to N$, или $M \xrightarrow{f} N$.

За b велиме дека е *слика* на a и пишуваме $b=f(a)$, или $f{:}a\mapsto b$, или пак $a\overset{f}{\mapsto} b$. Множеството M го викаме *домен*, а N *кодомен* на пресликувањето f.

Значи, f е пресликување со домен M и кодомен N акко

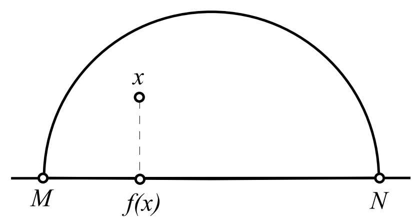
$$(\forall x\in M)(\exists! y\in N)\, y=f(x), \tag{2.3.1}$$

каде што $\exists!$ означува егзистенција на еднозначно определен елемент y од N.

За две пресликувања f и g велиме дека се *еднакви* ако имаат еднакви домени и кодомени и ако

$$(\forall x\in M) f(x)=g(x). \tag{2.3.2}$$

Примери:



sl.1

1. Нека M е множеството точки од полукругот (сл.1), N е множеството точки од дијаметарот, а P е множеството точки од правата на којашто лежи дијаметарот. Нека f:$M\to N$ и g:$M\to P$ се проекциите од M на N и од M во P, соодветно. Во овој случај точно е тврдењето $(\forall x\in M)f(x)=g(x)$, но сепак f и g не се еднакви пресликувања затоа што нивните кодомени не се еднакви.

2. Нека M е множеството имиња на жителите од Скопје, а N е множеството жители од Скопје. Дефинираме кореспонденција f со која на секое име му придружуваме жител од Скопје што го носи тоа име.

f не е пресликување!

Дали обратната кореспонденција е пресликување?

Нека f:$M\to N$, g:$N\to K$ се две пресликувања. Ако ставиме

$$(\forall x\in M)h(x)=g(f(x)), \tag{2.3.3}$$

добиваме пресликување h:$M\to K$. За h велиме дека е *состав* (*композиција*, *производ*) на пресликувањата f и g.

Пример:

3. Нека $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, $C=\{a,b,c\}$ и нека f:$A\to B$, и g:$B\to C$ се пресликувања определени со:

f: $1\mapsto 3$, $2\mapsto 4$, $3\mapsto 6$;

g: $3\mapsto a$, $4\mapsto a$, $5\mapsto b$, $6\mapsto c$.

Тогаш

gf: $1\mapsto a$, $2\mapsto a$, $3\mapsto c$

е состав на пресликувањата f и g.

Во некои случаи, кога доменот на пресликувањето е "мал", згодно е да се користи и следниов начин за претставување на дадено пресликување:

$$f=\begin{pmatrix} \ldots\ldots x\ldots\ldots \\ \ldots f(x)\ldots \end{pmatrix}.$$

Користејќи ја оваа ознака, примерот 3 можеме да го испишеме и на следниов начин:

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix};\ g=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & a & b & c \end{pmatrix};\ gf=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & a & b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & c \end{pmatrix}.$$

Составот на пресликувања го задоволува асоцијативниот закон. Имено:

3.1° Ако $f:M\to N$, $g:N\to K$, $h:K\to T$ се пресликувања, тогаш

$h(gf)=(hg)f$.

Доказ: Јасно е дека $h(gf)$ и $(hg)f$ имаат ист домен M и кодомен T. Нека $x\in M$. Тогаш

$(h(gf))(x)=h((gf)(x))=h(g(f(x)))$, $((hg)f)(x)=(hg)(f(x))=h(g(f(x)))$. ■

Множеството од сите пресликувања со домен M и кодомен N се означува со N^M. За M^M велиме дека е множеството *трансформации* на M.

Пример*:*

4. Ако се $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, тогаш

$$A^B=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\3&3\end{pmatrix}\right\};$$

$$B^B=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\a&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\a&b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\b&b\end{pmatrix}\right\}.$$

За секое непразно множество M дефинираме трансформација 1_M на M со:

$$(\forall x\in M)1_M(x)=x. \tag{2.3.4}$$

За 1_M велиме дека е *идентична трансформација на М*.

3.2° Нека $f:M\to N$ е пресликување. Тогаш:

(i) $f1_M=f$;

(ii) $1_Nf=f$.

Доказ: (i) $f1_M$ е дефинирано пресликување од M во N. Притоа, за секој $x\in M$ имаме:

$(f1_M)(x)=f(1_M(x))=f(x)$. ■

За секое пресликување $f:M\to N$ и за секое подмножество A од M можеме да дефинираме пресликување $f_A:A\to N$. Имено, ставајќи

$$(\forall x\in A)f_A(x)=f(x), \tag{2.3.4}$$

добиваме пресликување за кое велиме дека е *рестрикција* на f над A, а за f велиме дека е *проширување* на f_A. За f_A често се користи и ознаката $f_{/A}$.

Подмножеството $\{y|(\exists x\in A)f(x)=y\}$ од N го означуваме со $f(A)$ и го викаме *множество слики на А при f*. Честопати ќе пишуваме

$$f(A)=\{f(x)|x\in A\}. \tag{2.3.5}$$

Специјално, за $A=M$, $f(M)$ се вика *опсег на f*.

Нека е $B\subseteq N$. Со $f^{-1}(B)$ го означуваме множеството од сите елементи од M што имаат слика во B, т.е.

$$f^{-1}(B)=\{x|x\in M\wedge f(x)\in B\}. \tag{2.3.6}$$

Множеството $f^{-1}(B)$ го викаме *инверзна слика на B при f*.

3.3º Ако $f{:}M\to N$ е пресликување и $A_1,A_2\subseteq M$, а $B_1,B_2\subseteq N$, тогаш:

(i) $A_1\subseteq A_2\Rightarrow f(A_1)\subseteq f(A_2)$;

(ii) $B_1\subseteq B_2\Rightarrow f^{1}(B_1)\subseteq f^{1}(B_2)$;

(iii) $f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)$;

(iv) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$;

(v) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$;

(vi) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$.

Доказ: (ii) Нека е $x\in f^{-1}(B_1)$. Тогаш

$f(x)\in B_1\subseteq B_2\Rightarrow f(x)\in B_2\Rightarrow x\in f^{-1}(B_2)$.

(iii) $A_1\cap A_2\subseteq A_1 \wedge A_1\cap A_2\subseteq A_2\Rightarrow f(A_1\cap A_2)\subseteq f(\mathrm{A}_1)\wedge f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_2)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\_\cap f(A_2)$.

(vi)$B_1,B_2\subseteq B_1\cup B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1),f^{-1}(B_2)\subseteq f^{-1}(B_1\cup B_2)$

$\Rightarrow f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)\subseteq f^{-1}(B_1\cup B_2)$.

Обратно, нека е $x\in f^{-1}(B_1\cup B_2)$. Тогаш

$f(x)\in B_1\vee f(x)\in B_2\Rightarrow x\in f^{-1}(B_1)\Rightarrow x\in f^{-1}(B_2)\Rightarrow x\in f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$.

Значи,

$f^{-1}(B_1\cup B_2)\subseteq f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$.

Од двете инклузии се добива бараното равенство. ■

Ќе дадеме еден пример кој покажува дека знакот $\subseteq$ во (i) не може да се замени со $\subset$, а во (iii) со $=$.

Пример:

5. Нека $A=\{3,4,5,6\}$, $B=\{a,b,c\}$ и $f=\begin{pmatrix}3&4&5&6\\ a&a&b&c\end{pmatrix}$.

Тогаш

$f(\{3,4,5\})=\{a,b\}=f(\{3,5\})$,

$f(\{3,5\}\cap\{4,5\})=f(\{5\})=\{b\}\subset f(\{3,5\})\cap f(\{4,5\})=\{a,b\}$.

Од спроведената дискусија следува дека со помош на дадено пресликување $f{:}M\to N$ можат да се дефинираат две нови пресликувања:

$f_*:\mathcal{B}(M)\to\mathcal{B}(N)$

и

$f^*{:}\mathcal{B}(N)\to\mathcal{B}(M)$,

со:

$$f_*:A\mapsto f(A),\ \text{а}\ f^*:C\mapsto f^{1}(C), \qquad (2.3.7)$$

каде што се $A\in\mathcal{B}(M)$, а $C\in\mathcal{B}(N)$.

3.4º $(gf)^*=f^*g^*$.

Доказ: $f{:}M\to N$, $g{:}N\to K$, $gf{:}M\to K$,

$(gf)^*:\mathcal{B}(\mathrm{K})\to\mathcal{B}(M)$,

$f^*{:}\mathcal{B}(N)\to\mathcal{B}(M)$,

$g^*:\mathcal{B}(K)\to\mathcal{B}(N)$,

$f^*g^*:\mathcal{B}(K)\to\mathcal{B}(M)$.

Значи, $(gf)^*$ и f^*g^* имаат ист домен и ист кодомен.

Нека е $Y\subseteq K$, т.е. $Y\in\mathcal{B}(K)$. Тогаш

$(gf)^*(Y)=\{x\in M|gf(x)\in Y\}=\{x\in M|g(f(x))\in Y\}$.

$f^*g^*(Y)=f^*(g^*(Y))=f^*(\{z\in N|g(z)\in Y\})=\{x\in M|f(x)\in\{z\in N|g(z)\in Y\}\}$

$=\{x\in M|g(f(x))\in Y\}$.■

Нека M е множество и $D\subseteq M$. За пресликувањето $f:D\to M$ велиме дека е *функција во М*, а за пресликувањето $g:M\times M\to M$ *операција во М*. Ако е $D\subseteq M\times M$, тогаш за пресликувањето $g:D\to M$ велиме дека е *делумна операција во М со домен D*.

Примери:

6. На множеството природни броеви $\mathbb{N}$ дефинираме релација $\alpha=\{(n, n\text{-}1)|n\in\mathbb{N}\}$. Оваа релација определува функција од $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ во $\mathbb{N}$.

7. Нека β е кореспонденција од $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ во $\mathbb{Q}$ дефинирана со $(x,y)\in\beta$ акко $x/y\in\mathbb{Q}$. Тогаш β е делумна операција во $\mathbb{Q}$.

2.3.1. Вежби:

1. Нека е $f:X\to Y$, а $A,B\subseteq Y$. Докажи дека $f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$.
2. Нека $f:X\to Y$ е пресликување и $A\subseteq X$. Ако g е рестрикцијата на f над A, т.е. $g=f_A$, да се покаже дека

   $B\subseteq Y\Rightarrow g^{-1}(B)=A\cap f^{-1}(B)$.
3. Докажи дека f^* и f_* се пресликувања.

2.4. Некои видови пресликувања

Ќе разгледаме неколку специјални видови пресликувања. За пресликувањето $f:M\to N$ велиме дека е *инјекција* акко

$$f(x)=f(y)\Rightarrow x=y. \qquad (2.4.1)$$

4.1° Пресликувањето $f:M\to N$ е инјекција акко

$x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y)$. ■

За пресликувањето $f:M\to N$ велиме дека е *сурјекција* акко

$$(\forall y\in N)(\exists x\in M)f(x)=y, \qquad (2.4.2)$$

т.е. ако секој елемент на N е слика на барем еден елемент од M или ако $f(M)=N$.

За пресликувањето $f:M\to N$ велиме дека е *биекција* акко е и инјекција и сурјекција, т.е. ако за f важат и (2.4.1) и (2.4.2).

Пример:

1. Пресликувањето f од примерот 5 од 2.3 е сурјекција, но не е инјекција.

2. Пресликувањето f од примерот 1 од 2.3 е сурјекција, но не е инјекција, g не е ни сурјекција ниту пак инјекција, а пресликувањето f од примерот 3 од 2.3 е инјекција, но не е сурјекција.

4.2º 1_M е и сурјекција и инјекција. ■

4.3º Ако $f{:}M\to N$, $g{:}N\to K$ се

(а) инјекции,

(б) сурјекции,

тогаш соодветното својство го има и нивниот состав gf.

Доказ: (а) Нека f и g се инјекции. Тогаш

$$gf(x)=gf(y)\Rightarrow g(f(x))=g(f(y))\Rightarrow f(x)=f(y)\Rightarrow x=y.$$

(б) Нека f и g се сурјекции и нека е $z\in K$. Бидејќи g е сурјекција, постои $y\in N$ таков што $g(y)=z$. Но, затоа што f е сурјекција, постои $x\in M$ таков што за избраното $y\in N$, $f(x)=y$. Тогаш е $gf(x)=g(f(x))=g(y)$. ■

4.4º Ако gf е инјекција (сурјекција), тогаш f е инјекција (g е сурјекција).

Доказ: Ќе го докажеме само тврдењето за инјекција. Нека gf е инјекција и нека е $f(x)=f(y)$. Тогаш

$$g(f(x))=g(f(y))\Rightarrow gf(x)=gf(y)\Rightarrow x=y.\ ■$$

Пример:

3. $M=\{1,2,3\}$, $N=\{a,b,c,d\}$,

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&d\end{pmatrix};\ g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\1&2&1&3\end{pmatrix};\ gf=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=1_M.$$

gf е и инјекција и сурјекција, но g не е инјекција, а f не е сурјекција.

4.5º (i) $f{:}M\to N$ е инјекција акко за произволно множество L и произволни пресликувања $g_1,g_2{:}L\to M$

$$fg_1=fg_2\Rightarrow g_1=g_2, \tag{2.4.3}$$

што значи дека со инјекција може да се крати одлево.

(ii) $f{:}M\to N$ е сурјекција акко за произволно множество K и произволни пресликувања $h_1,h_2{:}N\to K$

$$h_1f=h_2f\Rightarrow h_1=h_2, \tag{2.4.4}$$

што значи дека со сурјекција може да се крати оддесно.

Доказ: (i) Нека f е инјекција и нека $fg_1=fg_2$. Тогаш за секој $x\in L$ имаме

$$fg_1(x)=fg_2(x)\Rightarrow f(g_1(x))=f(g_2(x))\Rightarrow g_1(x)=g_2(x).$$

Обратно, нека f не е инјекција, т.е. нека постојат $x, y \in M$, $x \neq y$ и $f(x)=f(y)$. Дефинираме две пресликувања, g_1 и g_2, од $L=\{x,y\}$ во M на следниов начин:

$$g_1(x)=y,\ g_1(y)=y,\ g_2(x)=x, \text{ и } g_2(y)=x.$$

Тогаш $g_1 \neq g_2$, но

$$fg_1(x)=f(g_1(x))=f(y)=f(x)=f(g_2(x))=fg_2(x),$$
$$fg_1(y)=f(g_1(y))=f(y)=f(x)=f(g_2(y))=fg_2(y). \ \blacksquare$$

4.6º (i) $f:M \to N$ е инјекција акко постои пресликување $g:N \to M$ такво што

$$gf=1_M .$$

(ii) $f:M \to N$ е сурјекција акко постои пресликување $g:N \to M$ такво што $fg=1_N$.

Доказ: (i) Ако е $gf=1_M$, тогаш gf е инјекција, па и f е инјекција. Нека f е инјекција, и a произволен фиксиран елемент од M. Тогаш дефинираме пресликување $g:N \to M$ со

$$g(y)=\begin{cases} x, & \text{ако } y \in f(M) \text{ и } f(x)=y \\ a, & \text{во секој друг слу ч ај.} \end{cases}$$

Од условот f е инјекција следува дека g е добро дефинирано пресликување, а од самата дефиниција на g дека $gf=1_M$. $\blacksquare$

Како последица од дефинициjата на биекција и од горните својства се добива следново тврдење:

4.7º (i) 1_M е биекција.

(ii) Ако $f:M \to N$, $g:N \to K$ се биекции, тогаш и gf е биекција.

(iii) Ако gf е биекција, тогаш f е инјекција, а g е сурјекција.

(iv) f е биекција акко за произволни множества L и K и произволни пресликувања $g_1,g_2:L \to M$, $h_1,h_2:N \to K$ имаме

$$(fg_1=fg_2 \Rightarrow g_1=g_2) \wedge (h_1f=h_2f \Rightarrow h_1=h_2). \tag{2.4.5}$$

(v) $f:M \to N$ е биекција акко постојат пресликувања $h,g:N \to M$, такви што $gf=1_M$ и $fh=1_N$. $\blacksquare$

Нека е $gf=1_M$. Тогаш за g велиме дека е *лева инверзија* на f, а за f дека е *десна инверзија* на g.

4.8º Секоја биекција има точно една лева и точно една десна инверзија, и, притоа, тие се еднакви.

Доказ: Нека $f:M \to N$ е биекција, g лева инверзија на f, а h десна инверзија на f, т.е.

$$gf=1_M, \text{ а } fh=1_N.$$

Тогаш имаме

$$g=g1_N=g(fh)=(gf)h=1_Mh=h. \tag{2.4.6}$$

Ако g_1, $h_1:N \to M$ се такви што

$$g_1f=1_M, \text{ а } fh_1=1_N,$$

тогаш од (2.4.6) имаме

$$g_1=h_1,\ g=h_1,\ g_1=h,\ g=h \Rightarrow g=g_1,\ h=h_1.\ \blacksquare$$

Единствената лева и десна инверзија на една биекција f се означува со f^{-1} и се вика *инверзија* или *инверзно пресликување* на пресликувањето f. Значи

$$f^{-1}f=1_M\text{ , а } ff^{-1}=1_N.$$

Од погоре кажаното заклучуваме дека за едно пресликување постои инверзија, или инверзно пресликување, ако и само ако тоа е биекција.

4.9° Ако f е биекција, тогаш и f^{-1} е биекција. ■

4.10° Нека f е биекција. Тогаш

$$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y).$$

Доказ: $y=f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y) \Leftrightarrow (f^{-1}f)(x)=f^{-1}(y) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1_M(x)=f^{-1}(y) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y).\ \blacksquare$$

4.11° $1_M^{-1}=1_M$. ■

4.12° Нека $f{:}M\to N$, и $g{:}N\to K$ се биекции. Тогаш

(i) $(f^{-1})^{-1}=f$;

(ii) $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$.

Доказ: (i) $f^{-1}f=1_M$, а $ff^{-1}=1_N$. Значи f е инверзија на f^{-1}, па имаме

$$(f^{-1})^{-1}=f.$$

(ii) $(gf)(f^{-1}g^{-1})=g(ff^{-1})g^{-1}=g1_N\,g^{-1}=gg^{-1}=1_M$.

Значи $f^{-1}g^{-1}$ е инверзија на gf, па $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$. ■

Сите биекции, што се трансформации на едно множество M образуваат множество S(M), кое го викаме *множество пермутации на M*.

Досега разгледувавме пресликувања со непразен домен и непразен кодомен. Се наметнува прашањето дали може да се дефинира пресликување $f{:}M\to N$, при што или $M=\varnothing$ или пак $N=\varnothing$. Да го запишеме условот (2.1.1) од дефиницијата на пресликување на следниов начин:

$$x\in M \Rightarrow (\exists! y\in N) f(x)=y. \tag{2.4.7}$$

Ако е $M=\varnothing$, тогаш $x\in M$ е исказна функција што секогаш има вредност на вистинитост $\perp$. Значи, во овој случај импликацијата (2.4.7) е точна, т.е. постои пресликување од $\varnothing$ во N. За ова пресликување велиме дека е *празно пресликување*, го означуваме со $\varnothing_N$ и сметаме дека за секое множество N тоа е еднозначно определено.

Ако пак е $N=\varnothing$, тогаш импликацијата (2.4.7) е точна акко $M=\varnothing$, што значи дека може да се дефинира пресликување од M во $\varnothing$ акко $M=\varnothing$.

4.13º (i) $\varnothing_N$ е инјекција за секое множество N.

(ii) $\varnothing_N$ е биекција акко $N=\varnothing$.

(iii) Ако $f{:}M\to N$ е пресликување, тогаш $f\varnothing_M=\varnothing_N$. ■

2.4.1. Вежби:

1. Да се провери кое од следниве пресликувања е инјекција, сурјекција, односно биекција:

(а) $f: \mathrm{N} \to \mathrm{Q},\ f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$;

(б) $f{:}\mathbb{C}\to\mathbb{R}^{+} \cup\{0\},\ f(a+bi)=a^2+b^2$;

(в) $f{:}\mathbb{Z}\to\mathbb{N},\ f(x)=x+1$.

2. Нека X и Y се непразни множества и нека $F\subseteq X\times Y$ е со својствата:

(i) $(\forall x\in X)(\exists y\in Y)(x,y)\in F$,

(ii) $(\forall x\in X)(\exists y,y'\in Y)((x,y),(x,y')\in F\Rightarrow y=y')$.

Ако ставиме $y=f(x)\Leftrightarrow(x,y)\in F$, да се покаже дека f е пресликување од X во Y. Кои услови треба да ги задоволува множеството F за f да биде

(а) инјекција,

(б) сурјекција.

3. Нека $f{:}X\to Y$ е инјекција и $A,B\subseteq X$. Тогаш:

(а) $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$;

(б) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

4.Нека $f{:}X\to Y$ е пресликување. Тогаш f_* е биекција акко f е биекција.

5. Нека $f{:}X\to Y$ е пресликување и $A\subseteq X$, а $B\subseteq Y$. Каков е односот меѓу множествата:

(а) $f^{-1}(f(A))$ и A;

(б) $f(f^{-1}(B))$ и B?

Притоа со $f^{-1}(B)$ е означено множеството $\{x|\ x\in X, f(x)\in B\}$.

6. Нека $f{:}X\to Y$ е пресликување. Да се покаже дека:

(а) f е инјекција акко за секое $A\subseteq X$ важи $f^{-1}(f(A))=A$;

(б) f е сурјекција акко за секое $B\subseteq Y$ важи $f(f^{-1}(B))=B$.

7. Нека $A\subseteq X$, $f{:}X\to Y$ е пресликување, а $g=f_{\mathrm{A}}$ е рестрикцијата на f над A. Тогаш

(а) ако f е инјекција, и g е инјекција;

(б) ако g е сурјекција, и f е сурјекција.

Да се дадат примери со кои ќе се покаже дека обратната импликација не мора да важи.

8. Нека $f:A\to B$ е пресликување. Да се покаже дека постојат инјекција i и сурјекција s такви што $f=is$.

9. Нека A е конечно множество и нека $f:A\to A$ е пресликување. Да се покаже дека f е инјекција акко f е сурјекција.

10. Нека f е пресликување од X во Y. Каков е односот меѓу множествата:

(а) $f(\bigcup_i A_i)$ и $\bigcup_i f(A_i)$;

(б) $f(\bigcap_i A_i)$ и $\bigcap_i f(A_i)$;

(в) $f(X \setminus A)$ и $Y \setminus f(A)$,

каде што A_i , $A\subseteq N$.

11. Нека $f:X\to Y$ е пресликување и нека $f^*:\mathcal{B}(Y)\to\mathcal{B}(X)$ е дефинирано со: $(\forall B\subseteq Y) f^*(B)=f^{-1}(B)=\{x|x\in X, f(x)\in B\}$.

Да се покаже дека

(а) f^* е пресликување;

(б) f^* е инјекција акко f е сурјекција;

(в) f^* е сурјекција акко f е инјекција.

2.5. Еквивалентни множества

Со помош на биекциите се дефинира и поимот еквивалентни множества.

Имено, за множествата M и N велиме дека се *еквивалентни* акко постои биекција од M во N и пишуваме $M\sim N$.

5.1º (i) $X\sim X$;

(ii) $X\sim Y\Rightarrow Y\sim X$;

(iii) $X\sim Y\wedge Y\sim Z\Rightarrow X\sim Z$. ■

5.2º Ако се $M_1\sim N_1$, $M_2\sim N_2$ и $M_1\cap M_2=N_1\cap N_2=\varnothing$, тогаш е $M_1\cup M_2\sim N_1\cup N_2$.

Доказ: Нека $f_1:M_1\to N_1, f_2:M_2\to N_2$ се биекции, и нека

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in M_1 \\ f_2(x), & x\in M_2 \end{cases}.$$

Од $M_1\cap M_2=\varnothing$ следува дека f е добро дефинирано пресликување, а од тоа што f_1 и f_2 се инјекции и $N_1\cap N_2=\varnothing$ следува дека и f е инјекција. Натаму, од тоа што f_1 и f_2 се сурјекции, следува дека и f е сурјекција. ■

5.3º. Ако е $N\cap P=\varnothing$, тогаш е $M^{N\cup P}\sim M^N\times M^P$, каде што со M^N е означено множеството од сите пресликувања од N во M.

Доказ: Нека е $f \in M^{N \cup P}$ и нека е

$\xi : f \mapsto (f_N, f_P)$.

Тогаш ξ е пресликување од $M^{N \cup P} \to M^N \times M^P$. Од условот $N \cap P = \varnothing$ се добива дека ξ е биекција. ■

Примери:

1. $\mathbf{N} \sim \{2n | n \in \mathbf{N}\} = 2\mathbf{N}$.

2. $\mathbf{N} \sim \mathbf{Z}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x \in 2\mathbf{N}, \\ -\dfrac{x+1}{2}, & x \in 2\mathbf{N}+1 \end{cases},$$

каде што со $2\mathbf{N}+1$ е означено множеството $\{2n | n \in \mathbf{N}\}$.

5.4° (i) $M \times N \sim N \times M$;

(ii) $M_1 \sim N_1, M_2 \sim N_2 \Rightarrow M_1 \times M_2 \sim N_1 \times N_2$;

(iii) $M \times (N \times P) \sim (M \times N) \times P$;

(iv) $(M^S)^T \sim M^{S \times T}$.

Доказ: (iv) Нека е $f : T \to M^S$, а $f(t) = g : S \to M$. За секое пресликување $f : T \to M^S$ дефинираме пресликување $h : S \times T \to M$ со $h(s,t) = g_t(s)$. Тогаш, ако на f му го придружиме пресликувањето h, добиваме пресликување $\xi : (M^S)^T \to M^{S \times T}$. ξ е биекција. ■

2.5.1. Вежби:

1. $X_1 \sim Y_1 \wedge X_2 \sim Y_2 \Rightarrow X_1 \times X_2 \sim Y_1 \times Y_2$.

2. За произволно множество X и едноелементно множество $\{a\}$ важи $X \sim X^{\{a\}}$.

3. $\mathbf{N} \sim 2\mathbf{N}+1 = \{2n+1 | n \in \mathbf{N}\}$.

4. Да се докаже дека:

(а) $(0,1] \sim [0,1)$;

(б) $[0,1] \sim [0,1)$,

каде што $(0,1] = \{x | 0 < x \leq 1\}$, $[0,1] = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$, а $[0,1) = \{x | 0 \leq x < 1\}$.

2.6. Врска меѓу пресликувања и еквивалентности

Во наредниов дел ќе дадеме некои дефиниции и својства што ќе ни дадат врска помеѓу релации за еквивалентност и пресликувања.

Нека $f : M \to N$ е пресликување. На f му ја придружуваме релацијата kerf (ја викаме *јадро* на f) на следниов начин:

$$\mathit{kerf} = \{(x,y) \in M \times M | f(x) = f(y)\}.$$

Пример:

1. $M=\{1,2,3,4,5,6\}$, $N=\{a,b,c\}$,

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & a & b & b & c & a \end{pmatrix}$$

$$kerf=\Delta_M\cup\{(1,2),(2,1),(1,6),(6,1),(2,6),(6,2),(3,4),(4,3)\}.$$

6.1° Јадрото на секое пресликување $f{:}M\to N$ е еквивалентност на M. ■

Да забележиме дека ако $\alpha=kerf$, тогаш

$$x^{\alpha}=\{y\in M|x\alpha y\}=\{y\in M|f(x)=f(y)\}=f^{-1}(\{f(x)\}).$$

Значи, на секое пресликување можеме да му придружиме еквивалентност. Се поставува прашање дали е можно обратното, т.е. дали на секоја еквивалентност α може да се придружи пресликување такво што јадрото на тоа пресликување да биде еквивалентноста α. Одговорот е позитивен. Имено, нека α е еквивалентност на M. Дефинираме пресликување $nat\alpha{:}M\to M_{/\alpha}$ со

$$(\forall x\in \mathrm{M})\ nat\alpha(x)=x^{\alpha}.$$

За ова пресликување велиме дека е *природно пресликување* определено од α.

6.2° $nat\alpha$ е пресликување такво што $ker(nat\alpha)=\alpha$.

Доказ: Од фактот дека класите на еквивалентноста α се или еднакви или дисјунктни следува дека $nat\alpha$ е пресликување. Натаму,

$$(a,b)\in ker(nat\alpha)\Leftrightarrow nat\alpha(a)=nat\alpha(b)\Leftrightarrow a^{\alpha}=b^{\alpha}\Leftrightarrow(a,b)\in\alpha.$$ ■

6.3° $nat\alpha$ е сурјекција. ■

Наредното прашање кое се наметнува е дали за дадено пресликување $f{:}M\to N$ и $\alpha=kerf$, може да се дефинира пресликување f^{α} од $M_{/\alpha}$ во N такво што $f=f^{\alpha}(nat\alpha)$, т.е. такво што следниов дијаграм

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[rr, "\mathrm{f}"] \arrow[dr, "\mathrm{nat}\alpha"'] & & \mathrm{N} \\ & \mathrm{M}_{/\alpha} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{f}^{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

да комутира.

Одговорот е позитивен. Имено, дефинираме пресликување $f^{\alpha}{:}M_{/\alpha}\to N$ со

$$f^{\alpha}(x^{\alpha})=f(x).$$

Притоа

$$x^{\alpha}=y^{\alpha}\Leftrightarrow x\alpha y\Leftrightarrow f(x)=f(y),$$

што значи дека f^{α} не зависи од изборот на претставникот на класата x^{α}.

Ќе покажеме дека ова пресликување е инјекција и дека е еднозначно определено. Имено,

$$f^{\alpha}(x^{\alpha})=f^{\alpha}(y^{\alpha})\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x\alpha y\Leftrightarrow x^{\alpha}=y^{\alpha}.$$

Нека $f\,'$ е друго пресликување од $M_{/\alpha}$ во N, такво што $f=f\,'(nat\alpha)$. Тогаш

$$f\,'(x^{\alpha})=f(x)=f^{\alpha}(x^{\alpha}).$$

Со горнава дискусија го докажавме следново својство:

6.4° Ако f е пресликување од M во N, $\alpha=kerf$, тогаш постои еднозначно определена инјекција $f^{\alpha}:M_{/\alpha}\to N$, таква што следниов дијаграм

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "nat\alpha"'] & & N \\
& M_{/\alpha} \arrow[ur, dashed, "f^{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

да комутира. ■

2.6.1.Вежби:

1.Нека е $f:A\to B$, $g:B\to C$. Каква е врската помеѓу $kerf$ и $ker(gf)$?

2. Нека α и β се две релации за еквивалентност во A, такви што $\alpha\subseteq\beta$. Да се покаже дека постои едно и само едно пресликување $f:A_{/\alpha}\to A_{/\beta}$, такво што $f(nat\alpha)=nat\beta$.

3.Нека $f:A\to B$ е пресликување. Да се определат класите на еквивалентноста $kerf$, ако

(а) $A=B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $f=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\\ 2\,1\,1\,2\,4\,5\,1\,3\,4\end{pmatrix}$;

(б) $A=\mathbb{R}$, $B=\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$, $f:x\mapsto x^{2}$.

2.7. Подредени множества

Секоја рефлексивна, антисиметрична и транзитивна релација α на множеството M е подредување на M. Ако α е подредување на M, тогаш за подредената двојка $(M;\alpha)$ велиме дека е *подредено множество* (или делумно подредено множество).

Примери:

1. $(\mathbb{R};\leq)$, $(\mathbb{Q};\leq)$, $(\mathbb{Z};\leq)$, $(\mathbb{N};\leq)$ се подредени множества.

2. Инклузијата $\subseteq$ на $\mathcal{B}(M)$ е подредување на $\mathcal{B}(M)$. Имено , нека се A,B и $C\in\mathcal{B}(M)$. Тогаш

(i) $A\subseteq A$,

(ii) $A\subseteq B\wedge B\subseteq A\Rightarrow A=B$,

(iii) $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

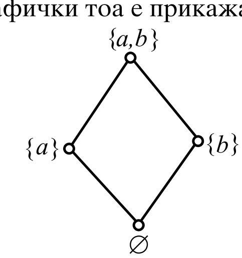
Во овој пример, ако $M=\varnothing$, добиваме $\mathcal{B}(M)=\{\varnothing\}$, а $\subseteq\, = \{(\varnothing,\varnothing)\}$.

Кога се разгледуваат конечни подредени множества, подредувањето може да се зададе и графички на следниов начин:

ако $(M;\leq)$ е подредено множество, $a\leq b$, $a\neq b$ и $(\forall x\in M)a\leq x\leq b\Rightarrow a=x\vee x=b$, тогаш запишуваме:

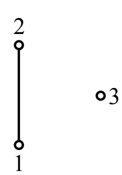
Овој графички приказ на подредувањето е познат под името *Хасеов дијаграм*.

Така, на пример, ако $M=\{a,b\}$ и подредувањето е инклузијата на $\mathcal{B}(M)$, тогаш графички тоа е прикажано на следниов начин



Пример:

3. Нека $M=\{1,2,3\}$, $\alpha=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$. α е подредување на M кое- што графички може да се прикаже на следниов начин:



Вообичаено е за подредување да се користи ознаката $\leq$, а за инверзното подредување, $(\leq)^{-1}$, ознаката $\geq$. Ако станува збор за инклузија, тогаш се користи стандардната ознака за инклузија $\subseteq$.

7.1º Нека е $M\neq\varnothing$. Тогаш Δ_M е единствената релација што е и еквивалентност и подредување на M.

Доказ: Нека е $\alpha\in E\cap P$. Тогаш е $\Delta_M\subseteq\alpha$. Ако е $a\alpha b$, тогаш од симетричноста на α имаме и $b\alpha a$, а од антисиметричноста на α произлегува дека $a=b$, што значи дека $a\alpha b\Rightarrow a\Delta_M b$. Значи $a\alpha b\Leftrightarrow a\Delta_M b$. ■

Ако α е нерефлексивна и транзитивна релација на M, тогаш велиме дека α е *претподредување* на M. Со PP да го означиме множеството од сите претподредувања на M. Тогаш пишуваме $\alpha\in PP$ ако α е претподредување на M.

7.2° Нека е $\Delta_M\subseteq\alpha$. Тогаш е:

$\alpha\in P\Leftrightarrow\alpha^*=\alpha\setminus\Delta_M\in PP$.

Доказ: Нека α е подредување. Од дефиницијата на α^* е јасно дека $\alpha^*\in AR$. Натаму,

$$a\alpha^*b\wedge b\alpha^*c\Rightarrow a\alpha b\wedge a\neq b\wedge b\alpha c\wedge b\neq c. \qquad (2.7.1)$$

Од фактот што α е подредување, т.е. α е транзитивна релација и од (2.7.1) добиваме

$$a\alpha c\wedge a\neq b\wedge b\neq c.$$

Од $a\neq b\wedge b\neq c$ во општ случај не следува $a\neq c$. Затоа нека $a=c$. Тогаш

$$c\alpha b\wedge b\alpha c\Rightarrow b=c,$$

што му противречи на фактот дека $b\neq c$. Значи, добиваме

$$a\alpha c\wedge a\neq c, \text{ т.е. } a\alpha^*c.$$

Обратно, нека $\alpha^*=\alpha\setminus\Delta_M$ е претподредување. Тогаш $\alpha=\alpha^*\cup\Delta_M$ е рефлексивна релација.

$$a\alpha b\wedge b\alpha c\Rightarrow(a\alpha^*b\vee a=b)\wedge(b\alpha^*c\vee b=c)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a\alpha^*b\wedge b\alpha^*c)\vee(a\alpha^*b\wedge b=c)\vee(b\alpha^*c\wedge b=c)\vee(a=b\wedge b=c)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a\alpha^*c\vee a\alpha^*c\vee a\alpha^*c\vee a=c\Rightarrow a\alpha^*c\vee a=c\Leftrightarrow a\alpha c.$$

Од фактот дека α^* е антирефлексивна релација, т.е. $\neg(a\alpha^*a)$, имаме

$$a\alpha b\wedge b\alpha a\Leftrightarrow(a\alpha^*b\vee a=b)\wedge(b\alpha^*a\vee a=b)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(a\alpha^*b\wedge b\alpha^*a)\vee(a\alpha^*b\wedge a=b)\vee(a=b\wedge b\alpha^*a)\vee(a=b)\Rightarrow a=b.$$

Значи, α е подредување. ■

Вообичаено е претподредување да се означува со симболот $<$ наместо $a\leq b\wedge a\neq b$.

Во случај кога работиме со множества, претподредувањето што одговара на подредувањето $\subseteq$ го означуваме со $\subset$ и го викаме *строга* или *вистинска инклузија*.

Нека M е подредено множество, а N подмножество од M. Тогаш рестрикцијата на подредувањето $\leq$ на M, односно подмножеството од $\leq$ дефинирано со $\leq\cap N\times N$ определува подредување на N кое се вика подредување *индуцирано* од подредувањето на M.

За подредувањето α на M велиме дека е *линеарно* или *потполно* ако

$$(\forall a,b\in M)a\alpha b\vee b\alpha a. \qquad (2.7.2)$$

Ако $(M;\alpha)$ е подредено множество, при што α е линеарно подредување, тогаш за $(M;\alpha)$ велиме дека е *вериīа* (или *линеарно подредено множесѿво*).

Примери:

4. $(\mathbb{Z};\le)$, $(\mathbb{N};\le)$, $(\mathbb{R};\le)$ се вериги.

5. Ако M има барем два елемента a, b, $a\ne b$, тогаш $(\mathcal{B}(M);\subseteq)$ не е верига. Имено $\neg(\{a\}\subseteq\{b\})$.

Нека $(M;\le)$ е подредено множество и $A\subseteq M$. За елементот $b\in M$ велиме дека е *мајоранѿ* (горна граница, десна граница) на A акко

$$(\forall x\in A)\ x\le a. \tag{2.7.3}$$

За елементот $a\in M$ велиме дека е *миноранѿ* (долна граница, лева граница) на A акко

$$(\forall x\in A)\ a\le x. \tag{2.7.4}$$

Ако постои елемент $b\in M$ таков што

$$(\forall x\in M)\ x\le b, \tag{2.7.5}$$

тогаш за b велиме дека е *најīолем* елемент во M.

Ако пак постои елемент $a\in M$ со својството

$$(\forall x\in M)\ a\le x, \tag{2.7.6}$$

тогаш за a велиме дека е *најмал* елемент во M.

Најмалиот мајорант на A во M, ако постои, се вика *суӣремум* на A во M и се бележи со $sup_M A$, а најголемиот минорант на A во M, ако постои, се вика *инфимум* на A во M и се бележи со $inf_M A$.

Да забележиме дека ако A е подмножество од подреденото множество M и A има најмал (најголем) елемент a ,тогаш $inf_M A=a$ ($sup_M A=a$).

7.3º Едно подмножество A од подреденото множество $(M;\le)$ има најмногу еден најголем елемент и најмногу еден најмал елемент.

Доказ: Нека a и b се најголеми елементи на A. Тогаш од тоа што a е најголем имаме $b\le a$, а од тоа што b е најголем имаме $a\le b$. Натаму, поради антисиметричноста на подредувањето, добиваме дека $a=b$. ■

За едно подредено множество $(M;\le)$ велиме дека е *добро ӣодредено* ако секое непразно подмножество на M има најмал елемент.

Примери:

6. $(\mathbb{N};\le)$ е добро подредена верига.

7. $(\mathbb{Q};\le)$ е верига, но не е добро подредено множество.

8. $(\mathbb{R};\le)$ е верига, но не е добро подредено подмножество.

7.4º Секое добро подредено множество $(M;\le)$ е верига.

Доказ: Нека е $a,b\in M$. Тогаш $A=\{a,b\}$ е подмножество од M и има најмал елемент. Ако a е најмал елемент на A, тогаш $a\leq b$, во спротивно $b\leq a$. ■

За елементот m од подреденото множество $(M;\leq)$ велиме дека е *минимален* во M ако

$$(\forall a\in M)\ (a\leq m\Rightarrow a=m). \tag{2.7.7}$$

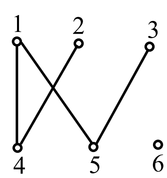
За елементот m од подреденото множество $(M;\leq)$ велиме дека е *максимален* во M ако

$$(\forall a\in M)\ (a\geq m\Rightarrow a=m). \tag{2.7.8}$$

Да забележиме дека ако во едно подредено множество $(M;\leq)$ има најмал (најголем) елемент, тогаш тој е минимален (максимален), но едно подредено множество може да има повеќе минимални (максимални) елементи.

Пример:

9. Нека $M=\{1,2,3,4,5,6\}$ е подредено множество со подредување зададено графички со



Подреденово множество $(M;\leq)$ нема ни најмал ни најголем елемент. Минимални се 4, 5 и 6, а максимални 1, 2, 3 и 6.

2.7.1.Вежби:

1. Во множеството $\mathbb{N}$ дефинираме релација $\leq$ со

$$x\leq y\Leftrightarrow(\exists z\in \mathbb{N})y=xz.$$

Да се покаже дека $\leq$ е делумно подредување на $\mathbb{N}$.

2. Да се претстават со Хасеов дијаграм следниве подредени множества:

(а) $(\mathcal{B}(A),\subseteq)$, каде што $A=\{a,b,c\}$;

(б) (A,α), каде што $A=\{a,b,c,d,e\}$, а
$\alpha=\Delta_A\cup\{(a,b).(a,c),(b,c),(a,d),(a,e),(d,e)\}$;

(в) $(\mathcal{B}(B),\subseteq)$, каде што $B=\{a,b,c,d\}$.

3. Нека α е подредување на множеството M и $A\subseteq M$. Нека $\beta=\alpha\cap(A\times A)$. Да се покаже дека

(а) β е подредување на A.

(б) Ако α е линеарно, тогаш и β е линеарно подредување на A.

(в) Покажи со пример дека обратната импликација од (б) не мора да важи.

4. Во кој случај секој елемент од едно подредено множество е минимален?

5. Да се покаже дека во секое конечно подредено множество има барем еден минимален и барем еден максимален елемент. Дали ова тврдење е точно и за бесконечни множества?

6. Ако a и b се различни минимални (максимални) елементи во подреденото множество M, тогаш $\{a,b\}$ нема минорант (мајорант) во M.

7. Нека M е подредено множество и $A\subseteq M$. Со A^* да го означиме множеството од сите мајоранти на A во M, а со A_* множеството од сите миноранти на A во M. Да се покаже дека:

(а) $\varnothing^*=\varnothing_*=M$;

(б) ако M има најмал елемент a и најголем елемент b, тогаш $M_*=\{a\}$, а $M^*=\{b\}$;

(в) $A\subseteq B\Rightarrow B^*\subseteq A^*$, $B_*\subseteq A_*$;

(г) $A^*=((A^*)_*)^*$;

(д) $(A\cup B)^*=A^*\cap B^*$.

8. Нека $(\alpha_i|i\in I)$ е верига подредувања на A. Да се покаже дека и $\bigcup_{i\in I}\alpha_i$ е подредување на A.

9. Да се покаже дека за секое подредување α на едно множество M постои линеарно подредување μ на M, такво што $\alpha\subseteq\mu$.

2.8. Мрежи

Ако $(M;\leq)$ е подредено множество такво што секое двоелементно подмножество од M има и супремум и инфимум во M, тогаш за $(M;\leq)$ велиме дека е *мрежа*.

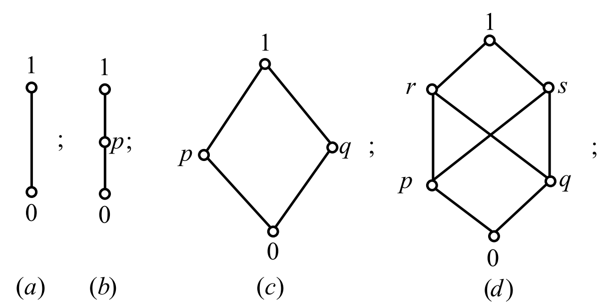
Примери:

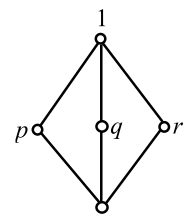
1. $(\mathcal{B}(M);\subseteq)$ е мрежа, во која

$sup_{\mathcal{B}(M)}\{A,B\}=A\cup B$,

$inf_{\mathcal{B}(M)}\{A,B\}=A\cap B$.

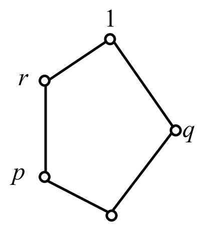
2.





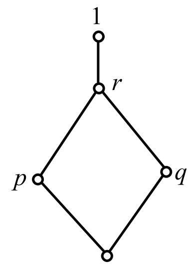
;

(*e*)



;

(*f*)



.

(*g*)

Во овој пример подреденото множество зададено графички под (*d*) не е мрежа, затоа што не постои супремум од $\{p,q\}$, ниту пак инфимум од $\{r,s\}$.

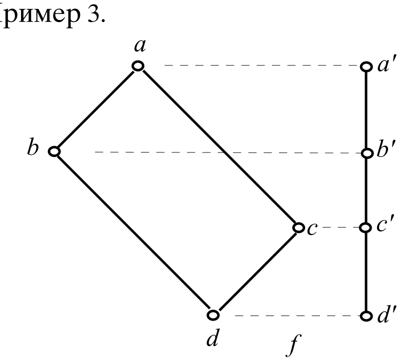
Нека M_1 и M_2 се подредени множества и $f:M_1\to M_2$ е пресликување. За f велиме дека *го запазува подредувањето* акко

$$a\leq_1 b\Rightarrow f(a)\leq_2 f(b), \qquad (2.8.1)$$

каде што $\leq_1$ е подредувањето на M_1, а $\leq_1$ на M_2.

Нека M_1 и M_2 се мрежи. За M_1 и M_2 велиме дека се *изоморфни* ако постои биекција $f:M_1\to M_2$ таква што и f и f^{-1} го запазуваат подредувањето

Пример 3.



f е биекција што запазува подредување, но f^{-1} не запазува подредување. Имено, $x\leq y$ во M_1 повлекува $f(x)\leq f(y)$, но $c'<b'$ во M_2, а $f^{-1}(c') = c$ не е споредлив со $f^{-1}(b') = b$ во M_1. Значи, дадените две мрежи не се изоморфни.

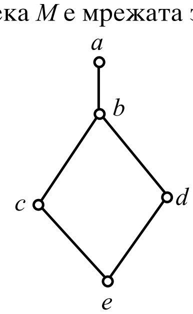
Нека M е мрежа и $\varnothing\neq A\subseteq M$. За A велиме дека е *подмрежа* од M акко

$$(\forall a,b\in A) sup_M\{a,b\};\ inf_M\{a,b\}\in A.$$

Пример:

4. $M=\{a,b,c,d,e\}$, $A=\{b,c,d,e\}$ и $B=\{a,c,d,e\}$ се подмножества од M.

Нека M е мрежата зададена со следново подредување:



Тогаш A е подмрежа од M, но B не е, иако B во однос на индуцираното подредување од M е мрежа. Значи, една мрежа не мора да биде подмрежа од друга мрежа.

Ако M е подредено множество со подредување $\leq$, тогаш *долен сегмент* на M е подмножество A од Mтакво што

$$a\in A,\ m\in M,\ m\leq a \Rightarrow m\in A. \qquad (2.8.2)$$

8.1° Множеството долни сегменти на мрежата M е мрежа, при што $sup\{A,B\}=A\cup B$, $inf\{A,B\}=A\cap B$. ■

Ако M е мрежа, тогаш за долниот сегмент A на M што е затворен во однос на супремум велиме дека е *идеал* на M. Значи, долниот сегмент A на мрежата M е идеал на M акко

$$a,b\in A \Rightarrow sup_M\{a,b\}\in A.$$

Во натамошниот текст наместо $sup_M\{a,b\}$ ќе пишуваме $a\vee b$, а наместо $inf_M\{a,b\}$, $a\wedge b$.

8.2° Секоја конечна мрежа има и најголем и најмал елемент. ■

За едно подредено множество $(M;\leq)$ велиме дека е *комплетна мрежа* ако секое подмножество A од M има и супремум и инфимум во M.

8.3° Секоја конечна мрежа е комплетна. ■

Пример:

5. Множеството реални броеви $\mathbb{R}$ со вообичаеното подредување е мрежа, но не е комплетна мрежа. Имено, кое било двоелементно подмножество има и супремум и инфимум, но целото множество $\mathbb{R}$ нема ни супремум ни инфимум.

8.4° Нека M е комплетна мрежа и $f{:}M\to M$ е пресликување што го запазува подредувањето, т.е. $a\leq b\Rightarrow f(a)\leq f(b)$.

Тогаш:

(i) $A=\{x|x\in M, x\leq f(x)\}\neq\varnothing$.

(ii) Ако $a=supA$, тогаш $f(a)=a$.

Доказ: (i) Бидејќи M е комплетна мрежа, таа има најмал елемент 0. Тогаш $0\leq f(0)$, што значи дека $0\in A$, т.е. $A\neq\emptyset$.

(ii) Нека $a=supA$. Тогаш е $x\leq a$ за секој $x\in A$, што поради својството на f повлекува дека $f(x)\leq f(a)$. Значи, $x\leq f(x)\leq f(a)$, т.е. $f(a)$ е мајорант на A. Бидејќи $a=supA$ е најмал мајорант на A, имаме $a\leq f(a)$, т.е. $a\in A$. Но, од (2.8.1) добиваме $f(a)\leq f(f(a))$, т.е. $f(a)\in A$, што значи дека $f(a)\leq a$. Од двете неравенства што ги добивме следува бараното равенство. ■

2.8.1.Вежби:

1. Нека $\leq$ е подредување на $\mathbb{N}$ определено со:

$x\leq y\Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{N})y=kx$.

Да се провери дали се мрежи следниве подмножества од $\mathbb{N}$:

(а) $M=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$;

(б) $P=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

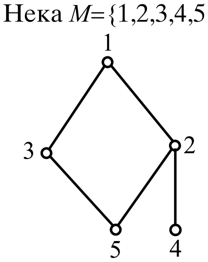
2. Нека M е мрежа и A е конечно подмножество од M. Тогаш во M постојат $supA$ и $infA$.

3. Секоја конечна мрежа има најмал и најголем елемент. Докажи!

4. Секоја конечна мрежа е комплетна. Докажи!

5. Нека $(M,\leq)$ и $(M',\leq')$ се две изоморфно подредени множества. Покажи дека ако едното е мрежа, тогаш и другото е мрежа.

6. Нека $M=\{1,2,3,4,5\}$ е подредено како на дијаграмот



Нека Φ е фамилијата линеарно подредени подмножества од M со барем два елемента. Тогаш Φ е подредено множество во однос на $\subseteq$. Да се нацрта дијаграмот на Φ.

7. Во кој случај секое подмножество од подреденото множество M е верига?

8. Нека M и M' се добро подредени множества со најмали елементи a и a', соодветно. Ако $\varphi:M\to M'$ е изоморфизам, тогаш $\varphi(a)=a'$. Докажи!

9. Нека M е мрежа. Да се докаже дека:

(а) ако A е подмрежа од мрежата M, тогаш и A е мрежа;

(б) едно подмножество A од мрежата M не мора да биде подмрежа од M;

(в) едно подмножество A од мрежата M може да биде мрежа, но сепак да не биде подмрежа од M.

10. Да се најдат сите различни (до изоморфизам) мрежи со 3, 4 и 5 елементи.

11. Нека M е мрежа и A е множеството идеали на M. Да се докаже дека A е мрежа во однос на релацијата инклузија на множества.

2.9. Конечни и преброиви множества

Множеството од првите k природни броеви $\{0, 1, 2,..., k\text{-}1\}$ ќе го означуваме со N_k, при што $N_0=\emptyset$.

За едно множество M велиме дека е *конечно* ако постои природен број k и биекција $\varphi:N_k\to M$.

За едно множество M велиме дека е *преброиво* ако постои биекција $\varphi:N\to M$. Множеството M е *бесконечно* ако постои инјекција $\varphi:N\to M$.

Ако $\varphi:N\to M$ е биекција, тогаш за секој природен број i постои еднозначно определен елемент $m\in M$, таков што $\varphi(i)=m$. Во тој случај наместо m ќе пишуваме m_i. На овој начин вршиме индексирање на елементите од M и нив можеме да ги запишеме во низа.

9.1º Секое преброиво множество е бесконечно.

Доказ: Доказот следува од фактот што секоја биекција е и инјекција. ■

9.2º Ако не постои инјекција од N во M, тогаш M е конечно множество.

Доказ: Тврдењето ќе го докажеме со контрапозиција, т.е. ќе покажеме дека ако M не е конечно множество, тогаш постои инјекција од N во M, што е еквивалентно со тврдењето што треба да го докажеме. Нека M не е конечно множество. Тогаш $M\neq\emptyset$, па постои елемент $a_0\in M$. Нека $\varphi(0)=a_0$. Бидејќи M не е конечно множество, $M\setminus\{a_0\}\neq\emptyset$, па постои $a_1\in M\setminus\{a_0\}$. Нека $\varphi(1)=a_1$. Да претпоставиме дека е дефинирано $\varphi(k)=a_k$ за секој природен број $k\leq n$, при што $a_0,...,a_k$ се попарно различни елементи од M. Тогаш од условот дека M не е конечно множество добиваме дека $M\setminus\{a_0,...,a_k\}\neq\emptyset$, па постои елемент a_{k+1} од $M\setminus\{a_0,...,a_k\}$ и можеме да дефинираме $\varphi(k+1)=a_{k+1}$. На овој начин дефиниравме инјекција $\varphi:N\to M$, т.е. добивме дека M е бесконечно множество. Значи, докажавме дека ако M не е конечно, тогаш постои инјекција од N во M, што е еквивалентно со тврдењето што требаше да го докажеме. ■

Примери:

1. N е преброиво множество (1_N е биекција од N во N).

2. $2N$ е преброиво множество ($\varphi(n)=2n$ е биекција од N во $2N$, каде што со $2N$ е означено множеството парни природни броеви (види пример 1. од 2.5)).

3. Z е преброиво множество.

$$\varphi(n)=\begin{cases} -\dfrac{n}{2}, & n\in 2\mathrm{N} \\ \dfrac{n+1}{2}, & n\in 2\mathrm{N}+1 \end{cases}$$

е биекција од N во Z. (Ова е всушност истиот пример со примерот 2 од 2.5, каде што докажавме дека N и Z се еквивалентни множества.)

9.3º Конечна или преброива унија од преброиви множества е преброиво множество.

Доказ: Ќе го докажеме тврдењето за преброива унија од преброиви множества. Нека A_1, A_2,... е преброива фамилија од преброиви множества. Тогаш за секој природен број k елементите од A_k можеме да ги запишеме во низа, имено $A_k=\{a_{k1}, a_{k2},...\}$. Елементите од дадените множества тогаш ги пишуваме во бесконечна шема

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Елементите од оваа шема ги запишуваме во низа на следниов начин:

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31},....$

Имено, прво го пишуваме елементот a_{11}, потоа оние чиј збир на индекси е 3, па оние со збир на индекси 4, итн.

На овој начин секој елемент од $A=\bigcup_i A_i$ е запишан во оваа низа, но можно е некои елементи да се запишани и повеќе пати. Затоа првото појавување одлево на некој елемент во низата го задржуваме, а останатите појавувања на тој елемент ги бришеме. Бидејќи секое множество A_i е подмножество од A, добиваме дека A е бесконечно множество (инклузијата е инјекција од A_i во A), а бидејќи елементите од A можеме да ги запишеме како низа, добиваме дека A е преброиво множество. ■

9.4º Множеството Q од рационални броеви е преброиво.

Доказ: Да ставиме

$$\mathrm{Q}_n=\left\{\frac{m}{n} \mid m\in \mathrm{Z}, n\in \mathrm{N}\setminus\{0\}\right\}.$$

Јасно е дека Q_n е преброиво множество, и дека $Q=\bigcup Q_n$ е преброива унија од преброиви множества. Од претходното својство тогаш добиваме дека Q е преброиво множество. ■

9.5º Множеството R од реални броеви е бесконечно и непреброиво.

Доказ: Ќе покажеме дека интервалот [0,1] е непреброиво, бесконечно подмножество од R, од што се добива и тврдењето за целото множество R.

Пресликувањето $\varphi: i \mapsto \frac{1}{i+1}$ е инјекција од N во [0,1], значи [0,1] е бесконечно множество. Елементите од сегментот [0,1] ги запишуваме во облик на бесконечни десетични дропки, при што не го користиме записот со конечен број ненулти децимали, туку оној запис што одговара на истиот овој број што содржи периодичен дел од деветки. Да претпоставиме дека овие броеви можеме да ги запишеме во низа:

$a_1=0,a_{11}a_{12}...$
$a_2=0,a_{21}a_{22}...$
$a_3=0,a_{31}a_{32}...$
....

Формираме број $b=0,b_1b_2b_3...$, таков што $b_i=1$ акко $a_{ii}\neq 1$, а во спротивно $b_i=2$. Овој број b се разликува од секој од броевите a_j барем во j-тата децимала, а сепак е елемент од дадениот сегмент. Значи, елементите од сегментот [0,1] не можат да се запишат како низа, па сегментот [0,1] не е преброиво множество. ■

2.9.1.Вежби:

1. Да се докаже дека секое подмножество од преброиво множество е конечно или преброиво множество.
2. Конечна унија од преброиви множества е преброиво множество. Докажи!
3. Да се покаже дека преброива унија од конечни множества е преброиво или конечно множество.
4. Нека M е бесконечно, а A преброиво или конечно множество. Тогаш е $M \sim A \cup M$.
5. Докажи дека $N \times N$ е преброиво множество.
6. Множеството Φ од сите конечни подмножества на едно преброиво множество M е преброиво множество.
7. Да се покаже дека множеството од сите полиноми со рационални коефициенти е преброиво множество.
8. Нека A_1 и A_2 се множествата точки од две кружници, B_1 и B_2 се множествата точки од две отсечки, B_3 множеството реални броеви од интервалот (0,1) и C множеството точки од една права. Да се покаже дека е $A_1 \sim A_2 \sim B_1 \sim B_2 \sim B_3 \sim C$.
8. Нека $A=\{x|m\leq x\leq n\}\subseteq N$, при што m,n се дадени природни броеви. Да се покаже дека A е конечно множество.

2.10. Кардинални броеви

Ако постои природен број k и биекција од N_k во A (т.е. ако A е конечно множество), тогаш велиме дека кардинален број на A е k и пишуваме $|A|=k$. Од својствата на еквивалентни множества тогаш следува:

Две конечни множества имаат ист кардинален број акко тие се еквивалентни.

Да наведеме некои својства за бројот на елементи кај конечни множества:

10.1° $|A|=n$, $|B|=m$, $A\cap B=\varnothing \Rightarrow |A\cup B|=m+n$.

Доказ: Ако $A=\{a_1, a_2,..., a_n\}$, $B=\{b_1, b_2,..., b_m\}$, тогаш $A\cup B=\{a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_m\}$, при што сите елементи се различни, па можеме да дефинираме пресликување $\varphi: N \to A\cup B$ со

$\varphi(i)=a_{i+1}$, ако $i\leq n$, а $\varphi(n-1+j)=b_j$, $j\in\{1,2,...,m\}$.■

10.2° $|A|=n$, $|B|=m$, $A\subseteq B \Rightarrow n\leq m$, $|B\backslash A|=m-n$.

Доказ: Да одбележиме дека $A\cap(B\backslash A)=\varnothing$ и $B=A\cup(B\backslash A)$. Според **10.1°** имаме

$|B|=|A\cup(B\backslash A)|=|A|+|B\backslash A|$, т.е.
$m=n+|B\backslash A|$, т.е. $|B\backslash A|=m-n$. ■

10.3° Ако A и B се конечни множества, тогаш $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

Доказ: $A\cup B=A\cup(B\backslash(A\cap B))$, при што $A\cap B\subseteq B$ и $A\cap(B\backslash(A\cap B))=\varnothing$. Тогаш според претходните две својства имаме

$|A\cup B|=|A|+|B\backslash(A\cap B)|=|A|+|B|-|A\cap B|$.■

Својството **10.3°** може да се обопшти за произволна конечна фамилија конечни множества. Имено :

10.4° (*Закон за вклучување и исклучување*). Ако A_1 ,...,A_k се конечни множества, тогаш

$|\cup A_i|=\Sigma|A_i|-\Sigma|A_i\cap A_j|+...+(-1)^{n+1}|A_1\cap...\cap A_k|$.

Доказ: Ќе напомeнеме само дека доказот се изведува со индукција по бројот k. ■

Ако го изоставиме ограничувањето множествата да бидат конечни, доаѓаме до поимот кардинален број кај произволни множества. Имено велиме дека множествата A и B *имаат еднаков кардинален број* или "еднаков број елементи" акко тие се еквивалентни, т.е. акко постои биекција од A во B. Значи, на две еквивалентни множества им придружуваме еден ист кардинален број.

Најмал кардинален број на бесконечно множество е оној на природните броеви (значи на преброивите множества) и тој се означува со $\aleph_o$, т.е $|N| = \aleph_o$.

Во претходниот дел видовме дека N и R не се еквивалентни множества. Кардиналниот број на множеството R обично се означува со c (од зборот *continuum*). Значи, $\aleph_o \neq c$.

Со наредниве неколку својства сакаме да докажеме дека постојат бесконечно многу различни бесконечни кардинални броеви.

10.5^o Не постои сурјекција од A во $\mathcal{B}(A)$.

Доказ: Нека $\varphi : A \rightarrow \mathcal{B}(A)$ е сурјекција и нека $B = \{a \in A | a \notin \varphi(a)\}$. Бидејќи φ е сурјекција, постои $b \in A$, такво што $\varphi(b) = B$. Се поставува прашањето дали b е елемнт од B. Кога би било точно тврдењето дека $b \in B$, тогаш од дефиницијата на B би добиле дека $b \notin B$. Значи, $b \notin B$. Но во тој случај имаме $b \notin \varphi(b)$, така што од дефиницијата на множеството B се добива $b \in B$. Значи, претпоставката дека постои сурјекција $\varphi : A \rightarrow \mathcal{B}(A)$ доведува до апсурд. ■

Можеме да дефинираме релација за подредување на кардинални броеви. Имено, ако $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$ и постои инјекција од A во B, тогаш велиме дека *кардиналниот број* α *е помал од кардиналниот број* β и пишуваме $\alpha \leq \beta$.

Лесно се проверува рефлексивноста и транзитивноста на оваа релација помеѓу кардинални броеви. За да се докаже антисиметричноста се користи следнава теорема, позната како *теорема на Кантор Берштајн*, која поради гломазност на доказот ќе ја наведеме без доказ (види [8] стр.86).

10.6^o Ако $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ се инјекции, тогаш постои биекција $h : A \rightarrow B$. ■

Со наредното својство се докажува постоење на бесконечно многу различни бесконечни кардинални броеви.

Нека $|A| = \alpha$, $|\mathcal{B}(A)| = 2^{\alpha}$, тогаш од **10.5^o** го добиваме и следното својство:

10.7^o За секој конечен или бесконечен кардинален број a може да се формира бесконечна верига

$$\alpha < 2^{\alpha} < 2^{2^{\alpha}} < \ldots$$

од различни кардинални броеви.

Доказ: Ова својство е последица од **10.5^o** и фактот дека $x \mapsto \{x\}$ е инјекција од A во $\mathcal{B}(A)$. ■

Со последново својство покажавме дека за секој кардинален број (конечен или бесконечен) постои бесконечна растечка низа различни кардиналнио броеви. Со тоа покажавме и егзистенција на бесконечно многу различни бесконечни кардинални броеви, а со тоа ја оправдавме и потребата да се гради цела теорија за кардиналните броеви, како и да се воведуваат операции со нив.

2.10.1. Вежби:

1. Нека A_1, A_2 се множества точки од две кружни линии, B_1, B_2 множества точки од две отсечки, а C множеството точки од една права. Да се покаже дека $|A_1| = |A_2| = |B_1| = |B_2| = |C|$.

2. Нека f е сурјекција од множеството S на множеството T. Ако S е преброиво, да се докаже дека T е преброиво или конечно. Поопшто, да се докаже дека во секој случај важи $|T| \leq |S|$.

3. Да се докаже дека множеството ирационални броеви има ист кардинален број како и $\mathbb{R}$.

4. Да се покаже дека:

(а) $|A| \leq |B|, |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$;

(б) $|A| \leq |B|, |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$;

(в) $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$, но може да биде $|A| = |B|$ и при $A \subset B$.

(г) Да се покаже дека пресликувањето $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathbb{Q})$, дефинирано со

$$(\forall a \in \mathbb{R}) f(a) = \{x | x \in \mathbb{Q}, x < a\},$$

е инјекција, т.е. $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{B}(\mathbb{Q})|$.

5. Да се покаже дека $|I| = |I \times I|$, каде што $I = (0,1)$.

6. Да се покаже дека $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$.

7. Ако множеството B има барем два елемента, тогаш за кое било множество X важи $|X| < |B^X|$. (Притоа со B^X е означено множеството од сите пресликувања од X во B.)

2.11. Операции со кардинални броеви

Збир $\alpha+\beta$ на кардиналните броеви $\alpha=|A|$ и $\beta=|B|$, каде што $A \cap B = \varnothing$, се дефинира со $\alpha+\beta=|A \cup B|$.

Вака дефиниран збир е добро дефиниран. Тоа ќе го покажеме во **11.1°.** Покрај тоа ако $\alpha=|A|$, $\beta=|B|$, при што $A \cap B \neq \varnothing$, тогаш ставаме $A' = \{(x,1) | x \in A\}$, $B' = \{(y,2) | y \in B\}$, при што $\alpha=|A'|$, $\beta=|B'|$ и $A' \cap B' = \varnothing$, па $\alpha+\beta=|A' \cup B'|$.

Нека $\alpha=|A|$, а $\beta=|B|$. Дефинираме *производ* $\alpha\cdot\beta$ на кардиналните броеви α и β со $\alpha\cdot\beta=|A \times B|$.

Наредното својство покажува дека дефинираните операции се во согласност со еднаквоста на кардиналните броеви.

11.1° Ако $|A|=|C|$, $|B|=|D|$, тогаш $|A|+|B|=|C|+|D|$, $|A|\cdot|B|=|C|\cdot|D|$.

Доказ: Ако f е биекција од A на C, а g биекција од B на D, тогаш h:$A\times B\rightarrow C\times D$ дефинирано со $h(x,y)=(f(x),g(y))$ е биекција од $A\times B$ во $C\times D$.

Нека $A\cap C=\varnothing$ и $B\cap D=\varnothing$ и нека $U=A\cup C$, $V=B\cup D$. Ако е $x\in U$, тогаш x му припаѓа само на едно од множествата A односно C, на пример на A, и тогаш ставаме $h^*(x)=f(x)$, а ако е $y\in C$, тогаш $h^*(y)=g(y)$. На тој начин е дефинирана биекција h од $A\cup C$ во $B\cup D$. ■

Користејќи ги својствата на унијата и директниот производ, се добива следното својство:

11.2º Множењето и собирањето на кардинални броеви се комутативни и асоцијативни операции. Притоа множењето е дистрибутивно во однос на собирањето. ■

Степенувањето на кардинални броеви се дефинира со

$$|X|^{|Y|}=|X^Y|,$$

каде што, како и досега, со X^Y е означено множеството пресликувања од Y во X.

11.3º (i) $|X|^{|Y|}\cdot|X|^{|Z|}=|X|^{|Y|+|Z|}$;

(ii) $(|X|^{|Y|})^{|Z|}=|X|^{|Y|\cdot|Z|}$;

(iii) $|\mathcal{B}(X)|=2^{|X|}$.

Доказ: Ќе го докажеме само својството (iii). Треба да покажеме дека постои биекција од множеството $\{0,1\}^X$ во $\mathcal{B}(X)$. Нека е $f\in\{0,1\}^X$, т.е. f е пресликување од X во $\{0,1\}$. Со A да го означиме подмножеството од X дефинирано со

$$x\in A_f\Leftrightarrow f(x)=1.$$

Ако f и g се различни елементи од $\{0,1\}^X$, тогаш ќе имаме $f(a)\neq g(a)$ за некој $a\in X$. Од тоа следува дека и множествата A_f и A_g ќе бидат различни. Според тоа пресликувањето φ:$f\mapsto A_f$ е инјекција. Нека е $B\subseteq X$. Дефинираме пресликување h:$X\rightarrow\{0,1\}$ со:

$$h(b)=\begin{cases}1, & b\in B\\ 0, & b\notin B\end{cases}.$$

Тогаш h е пресликување од X во $\{0,1\}$, па φ е и сурјекција. ■

Да наведеме некои својства за собирање и множење на бесконечни кардинални броеви, од кои ќе се види дека за нив не важат законите за кратење:

11.4º $\aleph_o+\aleph_o=\aleph_o=\aleph_o\cdot\aleph_o$.

Доказ: Првиот дел од равенството следува од својството **9.3º**, т.е. дека унија од конечно многу (во овој случај две) преброиви множества е преброиво множество.

Да ставиме $S=N\times N$, т.е. нека C е множеството од сите парови природни броеви. Со S_k да го означиме множеството $\{(1,k),(2,k),...,(n,k),...\}$. Тогаш $S=\cup S_k$, т.е S може да се претстави како преброива унија од преброиви множества, што, повторно од **9.3º**, го дава бараниот резултат дека S е преброиво множество. ■

Обопштување на овие својства може да се даде на следниов начин.

11.5º Ако γ е бесконечен кардинален број, тогаш

$$\alpha+\gamma=\gamma=\gamma\gamma$$

за произволен кардинален број α, таков што $\alpha\leq\gamma$.■

Да забележиме дека доказ на дел од ова својство ќе дадеме во наредниот дел.

Спомнавме дека $\aleph_o$ е најмалиот бесконечен кардинален број. Потоа следуваат

$$\aleph_1,\aleph_2,....$$

Се поставува прашањето каде се наоѓа во оваа низа кардиналниот број c што одговара на множеството реални броеви.

Кантор ја дал следнава *хипотеза на континуум*: $c=\aleph_1$. Гедел докажал дека оваа хипотеза не е противречна со стандардната теорија на множествата. Во 1963 година Коен докажал дека хипотезата $\aleph_1<c$ исто така не е противречна со стандардната теорија на множествата. Од овие тврдења пак, следува дека хипотезата на континуум не е решлива во стандардната теорија на множествата.

2.11.1.Вежби:

1. Нека A е бесконечно, а B преброиво множество. Тогаш $|A\cup B|=|A|$.

2. Ако α, β, и γ се кардинални броеви, да се покаже дека:
   (а) $(\alpha+ \beta)+\gamma = \alpha+ (\beta+\gamma)$;
   (б) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;
   (в) $\alpha+ \beta=\beta+ \alpha$;
   (г) $\alpha\beta = \beta\alpha$;
   (д) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+ \alpha\gamma$.

3. Ако α и β се кардинални броеви од кои барем еден е бесконечен, тогаш $\alpha+\beta=max\{\alpha,\beta\}$.

4. Ако α, β, γ и δ се кардинални броеви, такви што $\alpha\leq\beta$, $\gamma\leq\delta$, тогаш
   (а) $\alpha+\gamma\leq\beta+\delta$,
   (б) $\alpha\gamma\leq\beta\delta$.

5. Степен со природен експонент кај кардинални броеви може да се дефинира на вообичаен начин, а имено со
   $\alpha^1=\alpha,\ \alpha^{n+1}=\alpha^n\,\alpha$.
   Да се покаже дека оваа дефиниција на степен е во согласност со општата дефиниција за степен дадена во разделот 2.11.

6. Да се докаже дека ако α, β, γ се кардинални броеви, тогаш:

(а) $\alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}=\alpha^{\beta+\gamma}$;
(б) $(\alpha\beta)^{\gamma}=\alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$;
(в) $(\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta\gamma}$.

7. Нека α, β, γ се кардинални броеви и $\alpha\leq\beta$. Да се покаже дека:
(а) $\alpha^{\gamma}\leq\beta^{\gamma}$;
(б) $\gamma^{\alpha}\leq\gamma^{\beta}$;
(в) ако α и β се конечни, поголеми од 1, а γ бесконечен, тогаш $\alpha^{\gamma}=\beta^{\gamma}$.

2.12. Лемата на Цорн и нејзини еквиваленти

Во овој дел ќе спомнеме едно прашање што предизвикува голема дискусија меѓу математичарите. Нека $(A_i|i\in I)$ е фамилија непразни множества и нека во секое множество A_i од таа фамилија фиксираме елемент a_i. Функцијата $f(A_i)=a_i$ се вика *функција на избор*, а тврдењето што обезбедува егзистенција на таква функција *аксиома на избор*. Во алгебрата се добиваат многу резултати со помош на оваа аксиома, но не е мал број на математичари кои одбиваат да ја признаат нејзината универзална легитимност.

Честопати наместо аксиомата на избор користиме други, еквивалентни со неа, тврдења. Да наведеме неколку.

Лема на Цорн: Ако $\boldsymbol{L}$ е непразно подредено множество во коешто секоја верига е мајорирана, тогаш за секој елемент $x\in\boldsymbol{L}$ постои барем еден максимален елемент $m\in\boldsymbol{L}$, таков што $x\leq m$.

Теорема на Цермело: Секое множество може добро да се подреди.

Аксиома на избор (друг облик): За секое непразно множество A постои пресликување $f:\mathcal{B}(A)\to A$ такво што $X\neq\varnothing\Rightarrow(\forall X\in\mathcal{B}(A))f(X)\in X$.

Да наведеме неколку примени на Лемата на Цорн.

12.1° Ако A и B се множества, тогаш или постои инјекција од A во B или постои инјекција од B во A. (Со други зборови, кардиналните броеви се линеарно подредено множество.)

Доказ: Нека $\boldsymbol{L}=\{(A_i,\ B_i,\ f_i)|A_i\subseteq A,\ B_i\subseteq B,\ f_i:A_i\to B_i$ е биекција$\}$. $\boldsymbol{L}\neq\varnothing$, бидејќи $\varnothing:\varnothing\to\varnothing$ е биекција. Во $\boldsymbol{L}$ дефинираме релација $\leq$ на следниот начин

$$(A_i, B_i, f_i)\leq(A_j, B_j, f_j)\Leftrightarrow A_i\subseteq A_j,\ B_i\subseteq B_j\text{ , и } f_{j/A_i}=f_i\text{ .}$$

Јасно е дека оваа релација е рефлексивна и транзитивна.

Ако $(A_i, B_i, f_i)\leq(A_j, B_j, f_j)$ и $(A_j, B_j, f_j)\leq(A_i, B_i, f_i)$, тогаш $A_i=A_j$, $B_i=B_j$, и $f_{j/A_i}=f_{j/A_j}=f_j=f_i$.

Значи $\leq$ е подредување.

Нека $\boldsymbol{V}$ е верига во $\boldsymbol{L}$. Да ставиме

$$A_o = \bigcup_{A_i \in V} A_i\ ,\ B_o = \bigcup_{B_i \in V} B_i\ .$$

Дефинираме пресликување f_{o} $:A_{\text{o}} \to B_{\text{o}}$ со $f_{\text{o}}(x)=f_i(x)$ акко $x \in A_i$. Ова пресликување е добро дефинирано, бидејќи ако $x \in A_j$, тогаш од фактот дека $\boldsymbol{V}$ е верига имаме $A_i \subseteq A_j$ или $A_j \subseteq A_i$, т.е. за $A_i \subseteq A_j$, $f_{j/Ai} = f_i$, па $f_j(x)=f_i(x)$, за секој $x \in A_i$. Ќе покажеме дека е $(A_{\text{o}},B_{\text{o}},f_{\text{o}}) \in \boldsymbol{L}$, од што веднаш ќе следува дека $(A_{\text{o}},B_{\text{o}},f_{\text{o}})$ е мајорант на $\boldsymbol{V}$.

f_{o} *е инјекција*. Нека е $x,y \in A_{\text{o}}$ и $f_{\text{o}}(x)=f_{\text{o}}(y)$. Постојат A_i, A_j такви што $x \in A_i$, $y \in A_j$. Значи, $f_{\text{o}}(x)=f_i(x)$, $f_{\text{o}}(y)=f_j(y)$ и $f_i(x)=f_j(y)$. Но, или $A_i \subseteq A_j$ или $A_j \subseteq A_i$. Нека е $A_i \subseteq A_j$. Тогаш $f_i(x)=f_j(x)$. Но, бидејќи f_j е биекција и $f_j(x)=f_j(y)$, добиваме $x=y$.

f *е сурјекција*. Нека е $z \in B_{\text{o}}$. Тогаш е $z \in B_k$ за некој природен број k. Бидејќи f_k е биекција, постои $x \in A_k$ таков што $f_k(x)=z$, т.е. $f_{\text{o}}(x)=z$.

Според лемата на Цорн $\boldsymbol{L}$ содржи некој максимален елемент (A',B',f'). Да забележиме дека $A=A'$ или $B=B'$, бидејќи во спротивно ќе се добие (A'',B'',f'') таков што $(A',B',f') \leq (A'',B'',f'')$. Имено, ако $a \in A \backslash A'$, $b \in B \backslash B'$, $A''=A' \cup \{a\}$, $B''=B' \cup \{b\}$,тогаш дефинираме биекција $f'':A'' \to B''$ на очигледен начин:

$f''(x)=f'(x)$, за $x \neq a$, $f''(a)=b$,

што противречи на максималноста на (A',B',f'). ■

12.2º Секое бесконечно множество A може да се претстави како дисјунктна унија од преброиви подмножества.

Доказ: Формираме множество $\boldsymbol{L}$ од елементи X и подредување на $\boldsymbol{L}$ на следниов начин:

X се состои од преброиви подмножества на A кои се меѓусебно дисјунктни.

$\boldsymbol{L}$ е подредено со инклузија.

Нека $\boldsymbol{V}$ е верига во $\boldsymbol{L}$. Значи, $\boldsymbol{V}=\{X_i | i \in I\}$, каде што X_i, $X_j \in \boldsymbol{V}$ повлекува $X_i \subseteq X_j$ или $X_j \subseteq X_i$ за секои $i,j \in I$. Нека $S=\cup X_i$. Ќе покажеме дека S е мајоранта на $\boldsymbol{V}$ што припаѓа на $\boldsymbol{L}$. Елементите на S се преброиви множества. Нека C и D се елементи од S. Тогаш се $C \in X_i$, $D \in X_j$ за некои i и j од I. Бидејќи $\boldsymbol{V}$ е верига, $X_i \subseteq X_j$ или $X_j \subseteq X_i$. Нека е $X_i \subseteq X_j$. Тогаш C и D се елементи од X_j, па C и D се преброиви меѓусебно дисјунктни множества. Значи, $S \in \boldsymbol{V}$. Според лемата на Цорн, во $\boldsymbol{L}$ е содржан максимален елемент M.

Нека $B = \bigcup_{Y \in M} Y$. Ако $A \backslash B$ е бесконечно множество, тогаш постои преброиво подмножество $C \subseteq A \backslash B$, па $M \cup \{C\}$ не е подмножество од M, што ѝ противречи на максималноста на M. Значи, $A \backslash B$ е конечно множество. Нека сега Y_{o} е фиксиран елемент од M и нека $Y_1 = Y_{\text{o}} \cup \{A \backslash B\}$. Добиваме дека Y_1 е преброиво множество и дека $A=Y_1 \cup (\bigcup_{Y \in M} Y)$ е бараното претставување на A како дисјунктна унија од преброиви множества. ■

Сега да дадеме доказ на првиот дел од **11.5°**, т.е. ако d е бесконечен кардинален број, a е таков кардинален број што $a \leq d$, тогаш $a+d=d$.

Јасно е дека $d \leq a+d \leq d+d$. Ќе докажеме дека $d+d=d$, од што ќе следува тврдењето. Нека $d=|D|$ и нека d е бесконечен кардинален број. Според **12.2°** $D=\cup S_i$, каде што S_i се преброиви множества и $S_i \cap S_j=\varnothing$ за секои i,j, $i \neq j$. Секое од множествата S_i е унија од две дисјунктни преброиви множества, т.е. $S_i=A_i \cup B_i$, $A_i \cap B_i=\varnothing$. Да ставиме $A=\cup A_i$, $B=\cup B_i$. Очигледно $d=|A|=|B|$, и $A \cap B=\varnothing$, а оттука и од $D=A \cup B$ добиваме дека $d=d+d$. ■

2.13. Добро подредени множества

Да се потсетиме, ако A е подредено множество во кое секое непразно подмножество има најмал елемент, тогаш велиме дека A е *добро подредено множество*. Докажавме дека секое добро подредено множество е верига и дадовме примери на подредени множества коишто се вериги, но не се добро подредени множества.

Следново својство дава карактеризација на добро подредените множества:

13.1° Една верига е добро подредена акко не содржи бескрајна опаѓачка низа.

Доказ: Нека A е добро подредено множество. Кога би постоела бесконечна опаѓачка низа $a_o > a_1 > a_2 > \ldots$ на елементи од A, тогаш таа, како подмножество од A, нема најмал елемент. Значи, A не може да има бесконечна опаѓачка низа.

Нека A е верига што не е добро подредено множество. Тогаш постои подмножество S од A што нема најмал елемент. Нека е $a_o \in S$. Бидејќи S нема најмал елемент, постои $a_1 \in S$ таков што $a_o > a_1$. Повторно, бидејќи a_1 не е најмал елемент на S, постои $a_2 \in S$ таков што $a_o > a_1 > a_2$. Со оваа постапка се добива бесконечна опаѓачка низа. ■

Во делот 2.8 дефиниравме поим долен сегмент кај мрежи. Таа дефиниција може да се даде поопшто, за произволно подредено множество. Имено, ако A е подредено множество и S подмножество од A со својството

$$x \in S, y \in A, y \leq x \Rightarrow y \in S,$$

тогаш велиме дека S е *долен сегмент* (или само сегмент) во A.

Нека A е подредно множество, $a \in A$ и $S(a)$ подмножество од A дефинирано со

$$S(a)=\{x \in A | x < a\}.$$

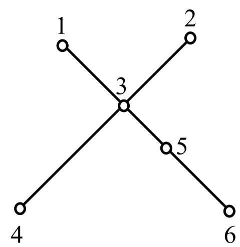
За $S(a)$ велиме дека е *идеал на А генериран од а*.

Кога разгледуваме вериги, тогаш има многу мала разлика помеѓу долен сегмент и идеал. Меѓутоа, во општ случај важи следново тврдење:

13.2° Секој идеал $S(a)$ на подредено множество A е долен сегмент на A. ■

Пример

1. Нека $A=\{1,2,3,4,5\}$ е подредено множество со следново подредување:



Тогаш: $S(5)=\{6\}$, $S(3)=\{4,5,6\}$, $S()=\{3,4,5,6\}$ се идеали на A, а $\{4,6\}$, $\{4,5,6\}$, $\{5,6\}$ се долни сегменти на A. Притоа $\{4,6\}$ и $\{5,6\}$ не се идеали на A.

13.3° Долен сегмент во добро подредено множество A е или A или идеал на A.

Доказ: Ако I е сегмент во A и $I\subset A$, тогаш во $A\backslash I$ има најмал елемент a. Да докажеме дека $I=S(a)$. Ако е $x\in I$, тогаш е $x<a$. Имено, ако е $x\in I$ и $x\geq a$, тогаш е $a\in I$, што е во противречност со изборот на a. Значи, $I\subseteq S(a)$. Обратно, ако е $x\in S(a)$, тогаш е $x<a$, па не е можно да биде $x\in A\backslash I$, бидејќи a е најмал елемент на $A\backslash I$. Значи, добивме дека е и $S(a)\subseteq I$. ■

13.4° Ако секој идеал на една верига A е добро подредено множество, тогаш и A е добро подредено множество.

Доказ: Нека A е верига што не е добро подредена. Тогаш постои бесконечна опаѓачка низа во A:

$a_o>a_1>a_2>...$,

при што е $\{a_o,a_1,a_2,...\}\subseteq S(a_o)$. Но $\{a_o,a_1,a_2,...\}\neq\varnothing$ и нема најмал елемент, што значи дека $S(a_o)$ не е добро подредено множество. ■

13.5° Не постои биекција што го запазува подредувањето од добро подредено множество A во некој идеал на A .

Доказ: Нека е $a\in A$ и $f{:}A\to S(a)$ е биекција што запазува подредување. Нека $T=\{x\in A|f(x)<x\}$. Множеството T е непразно, бидејќи $f(a)<a$. Нека b е најмалиот елемент на T. Значи, $f(b)<b$. Оттука, бидејќи f запазува подредување, добиваме $f(f(b))<f(b)$, т.е. $f(b)\in T$, што му противречи на изборот на b. Значи, претпоставката дека постои пресликување f со бараните својства не е можна. ■

2.14. Ординални броеви

Кардинални броеви придружуваме на множества, при што еквивалентни множества имаат ист кардинален број. Ако разгледуваме добро подредени множества и на секое добро подредено множество му придружиме број, при што на добро подредени множества меѓу кои постои биекција што запазува подредување им придружиме еднакви броеви, добиваме *ординални броеви*. На множеството N_k со стандардното подредување $0,1,2,...,k$-1 му го придружуваме ординалниот број $\boldsymbol{k}$. Да забележиме дека кај конечните множества различни подредувања, што го чинат множеството добро подредено, дозволуваат биекција што запазува подредување.

На природните броеви со стандардното подредување му го придружуваме ординалниот број ω. Да забележиме дека постојат различни подредувања на природните броеви, такви што добиеното подредено множество да биде добро подредено и притоа меѓу две такви различни подредувања да не постои биекција што запазува подредување. Имено, меѓу стандардното подредување на природните броеви и она што се добива кога прво ќе се наредат парните природни броеви, а потоа непарните, не постои биекција што запазува подредување. Значи, за секое вакво подредување на природните броеви придружуваме по еден ординален број. Значи, на множеството N одговара еден кардинален број $\aleph_0$, но на секое вакво подредување одговара по еден ординален број.

На множеството ординални броеви можеме да дефинираме релација за подредување $\leq$ на следниов начин:

Нека λ и μ се ординални броеви што одговараат на добро подредените множества L и M, соодветно. $\lambda\leq\mu$ акко L е долен сегмент на M (односно, постои инјекција $f:L\rightarrow M$ што го запазува подредувањето, при што $f(L)$ е долен сегмент на M).

Вака дефинирана релацијата $\leq$ е релација за подредување на множеството ординални броеви.

14.1° Нека λ е ординален број. Тогаш ординалниот број на множеството ординални броеви $\{\mu|\mu<\lambda\}$ е λ.

Доказ: Нека λ е ординален број придружен на добро подреденото множество L и $\mu<\lambda$. Тогаш постои добро подредено множество M што му одговара на ординалниот број μ, такво што $M\subseteq L$ и M е долен сегмент на L. Но, од добрата подреденост на L и $\mu<\lambda$ добиваме дека M е идеал на L, т.е. постои таков $l\in L$, што $S(l)=M$.

Дефинираме пресликување $f:\{\mu|\mu<\lambda\}\rightarrow L$ со $f(\mu)=l$. Ова пресликување е биекција што запазува подредување, што значи дека ординалниот број на $\{\mu|\mu<\lambda\}$ е еднаков со ординалниот број на множеството L, т.е. тој е λ.■

Со ординалните броеви се обопштува поимот математичка индукција до таканаречената *трансфинитна индукција* која се базира на следниов принцип:

Нека $P(\lambda)$ е некое својство за ординални броеви λ. Ако $P(0)$ е точно и ако од тоа што $P(\mu)$ е точно за секој ординален број $\mu<\nu$ следува дека е точно и $P(\nu)$, тогаш $P(\lambda)$ е точно за секој ординален број λ.

3. ВОВЕД ВО МАТЕМАТИЧКАТА ЛОГИКА

Во овој дел исказното и предикатното сметање ќе ги дефинираме како конкретни формални теории и ќе докажеме некои својства за нив. Потоа ќе ги определиме множествата теореми во секоја од овие формални теории.

За таа цел прво ќе ги дефинираме формалните теории.

3.1. Формални теории

Во овој дел за секое непразно множество A ќе велиме дека е *азбука*, елементите од A ќе ги викаме *букви*, а секоја конечна низа букви ќе велиме дека е *збор*. Множеството од сите зборови во азбуката A го означуваме со A^+. Во некои случаи, е погодно да се користи и "празна" низа букви. За празната низа букви во која било азбука ќе велиме дека е *празен збор* и ќе го означуваме со λ . Тогаш со A^* го означуваме множеството од сите зборови во азбуката A, вклучувајќи го и празниот збор. Значи, $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$.

Примери:

1. Нека $A=\{a,b,c\}$. Тогаш $A^+ = \{a,b,c,ab,ac,bc,abc,...\}$.
2. $B=\{+,–,\bullet,(,),1,2,3,4,5,...\}$
   $B^+ = \{(1+2)\bullet3–4,\ 2+2,\ 1–7,\ +–(\ ),\ (\ (\ (\ (\ ),...\}$.

Должина на зборот α, што ќе ја означуваме со $|\alpha|$, е бројот на сите букви што се јавуваат во α. По дефиниција, должината на празниот збор е 0, т.е.

$$|\lambda|=0.$$

Примери:

3. $|abaab|=5$, каде што $abaab \in \mathrm{A}^+$ од примерот 1.
4. $|(1+2)\bullet4–3|=9$, каде што $(1+2)\bullet4\text{-}3 \in \mathrm{B}^+$ од примерот 2.

За секоја четворка $T=(A,Form,Ax,R)$ велиме дека е *формална теорија* ако таа е таква што:

- A е непразно множество (азбука на теоријата)

- *Form* е непразно подмножество од A^+ (множество зборови), такво што постои алгоритам којшто одлучува дали еден збор е елемент од *Form*. Елементите на *Form* ги викаме *формули*.
- *Ax* е непразно подмножество од *Form*. Неговите елементи ги викаме *аксиоми*. Ако постои алгоритам којшто одредува дали една формула е аксиома, тогаш велиме дека теоријата *T* е *аксиоматска*.
- *R* е непразно множество од правила за изведување, при што правило за изведување е низа формули $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, $n \geq 1$. Обично правилата за изведување се запишуваат во облик $\dfrac{\mathcal{A}_1 \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ \mathcal{A}_{n-1}}{\mathcal{A}_n}$, и за $\mathcal{A}_n$ велиме дека е *директна последица* од $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_{n-1}$.

За секоја конечна низа формули $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n$, при што за секој *i* важи барем еден од следниве услови:

$\mathcal{A}_i$ е аксиома,

или

$\mathcal{A}_i$ е добиена од некои од претходните формули $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_{i-1}$ со некое од правилата за изведување,

велиме дека е *доказ* во формалната теорија *T*.

За формулата $\mathcal{A}$ велиме дека е *теорема* во *T* ако постои таков доказ во *T* што последната формула $\mathcal{A}_n$ од доказот е точно формулата $\mathcal{A}$. Тогаш пишуваме $\vdash_T \mathcal{A}$. Ако е јасно за која теорија станува збор, пишуваме само $\vdash \mathcal{A}$.

1.1° Нека *T* е формална теорија. Тогаш секоја аксиома од *T* е теорема.

Доказ: Нека α е аксиома. Тогаш низата што се состои само од α е доказ на α.■

Примери:

5. $A=\{a,b\}$, $Form=A^+$, $Ax=\{a\}$, $R=\left\{\dfrac{\alpha}{b\alpha}; \alpha \in Form\right\}$. Во оваа теорија една теорема е формулата *bbba* со доказ *a*,*ba*,*bba*,*bbba* .

Ако b^n е кратенка за $\underbrace{b\ldots b}_{n}$, а b^0 е празниот збор (збор што не содржи ни една буква), тогаш за оваа формална теорија важи следното тврдење:

Една формула е теорема акко има облик $b^k a$, за $k \geq 0$.

6. $A=\{|\}$, $Form=A^+$, $Ax=\{||\}$, $R=\{\alpha/\alpha| \ ; \alpha \in Form\}$.

Со следното тврдење даден е опис на теоремите во оваа формална теорија:

Една формула е теорема акко се состои од најмалку две црти.

7. $A=\{a,b\}$, $Form=\{a^n b^m \mid n,m\geq 0, n+m>0\}$, $Ax=\{a,b\}$,

$R=\{a^{n+1} b^{m+1} / a^n b^m \mid n,m\geq 0, n+m>0\}$.

Единствени теореми во оваа теорија се аксиомите.

Нека T е формална теорија. Дури и во случај кога T е аксиоматска (т.е. постои алгоритам за проверка дали една формула е аксиома), поимот теорема во општ случај не е ефективен, т.е. не постои алгоритам кој за дадена формула ќе одреди дали таа е теорема или не е. За теории за коишто постои ваков алгоритам велиме дека се *одлучливи*, а во спротивно дека се *неодлучливи*. Грубо речено, одлучлива теорија е онаа за која може да се конструира алгоритам кој ќе проверува дали една формула е теорема или не.

Нека T е теорија и $\Gamma\subseteq Form$. За една формула $\mathcal{A}\in Form$ велиме дека е последица од Γ и пишуваме $\Gamma\vdash_T\mathcal{A}$, ако постои таква низа формули $\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_n$, што $\mathcal{A}_n=\mathcal{A}$, и ако за секое $1\leq i\leq n$ важи еден од следниве услови:

(1) $\mathcal{A}_i$ е аксиома,

(2) $\mathcal{A}_i\in\Gamma$,

(3) $\mathcal{A}_i$ е добиена од претходните формули со некое правило за изведување.

За множеството Γ велиме дека е *множество претпоставки* или *хипотези*.

Пример:

8. Во формалната теорија од примерот 5 да избереме множество претпоставки $\Gamma=\{ab^k|k>1\}$. Тогаш множество последици од Γ е множеството формули од облик $b^m ab^n$, каде што $m>0$, $n>0$.

Ќе дадеме четири едноставни тврдења за поимот последица.

1.2° Ако $\Gamma\subseteq\Delta$, и ако $\Gamma\vdash\mathcal{A}$, тогаш и $\Delta\vdash\mathcal{A}$. ■

1.3° $\Gamma\vdash\mathcal{A}$ акко постои конечно подмножество $\Delta\subseteq\Gamma$, такво што $\Delta\vdash\mathcal{A}$. ■

1.4° Ако $\Delta\vdash\mathcal{A}$ и ако за секое $\mathcal{B}\in\Delta$ следува $\Gamma\vdash\mathcal{B}$, тогаш и $\Gamma\vdash\mathcal{A}$. ■

1.5° $\vdash\mathcal{A}$ акко за секое множество претпоставки Γ, $\Gamma\vdash\mathcal{A}$.■

Да забележиме дека наместо формална теорија често се користи и терминот *формално сметање*.

3.1.1. Вежби:

1. Да се опишат сите теореми на формалната теорија:
$A=\{a,b\}$, $Form=A^+$, $Ax=\{aba\}$, $R=\{x/xa, x/bx|\ x\in Form\}$.
2. Да се опишат сите теореми на формалната теорија:
$A=\{(,)\}$, $Form=A^+$, $Ax=\{()\}$, $R=\{x/(x),\ x/x(x)\ |\ x\in Form\}$.
3. Да се опишат сите теореми на формалната теорија:
$A=\{0,1\}$, $Form=A^+$, $Ax=\{1\}$, $R=\{x/x01|x\in Form\}$.
4. Да се докаже теоремата 2211321 во следнава формална теорија:
$A=\{1,2,3\}$, $Form=A^+$, $Ax=\{2\}$, $R=\{213x/x,\ x/x11,\ x1/x321|x\in Form\}$.
5. Дадена е формалната теорија со азбука $A=\{a,b\}$, множество формули $Form=A^*$, аксиоми $Ax=\{b\}$ и правила за изведување $R=\{x/axbb,\ xb/aax,\ axb/x|x\in Form\}$.

(а) Да се покаже дека $\vdash ab^{1993}$.

(б) Да се докаже дека $\dfrac{x}{ax}$ е последица од правилата R.

(в) Да се опишат теоремите во оваа теорија.

6. Нека $\boldsymbol{n}$ е скратена ознака за $\underbrace{||...|}_{n}$ и нека е дадена следнава формална теорија:

$A=\{|, +, =\}$, $Form=\{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{m}|\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}>0\}$, $Ax=\{|+|=||\}$,

$R=\left\{\dfrac{x+y=z}{x\,|+y=z\,|},\quad \dfrac{x+y=z}{x+y\,|=z\,|}\,|\ x,y,z\in Form\right\}$.

Да се покаже:

(а) 2+3=5;

(б) $\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}=(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m})$, каде што $(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m})$ е бројот што е збир на $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{m}$;

(в) $x+y=z\Leftrightarrow y+x=z$;

(г) $\neg(\vdash 1+1=1)$;

(д) Второто правило може да се замени со правилото $\dfrac{x+y=z}{y+x=z}$.

3.2. Исказно сметање

Во овој дел ќе изградиме формална теорија којашто за теореми ќе ги има точно тавтологиите. Оваа теорија ќе ја означуваме со $\boldsymbol{L}$ и ќе ја викаме *исказно сметање*. Таа е дефинирана на следниов начин:

• азбуката L на $\boldsymbol{L}$ се состои од буквите $\top$, $\bot$, $\neg$, $\Rightarrow$, $p_1,...,p_n$,...,(,), каде што $\top$, $\bot$ се константи, $\neg$ и $\Rightarrow$ логички сврзници, p_i исказни променливи, а (,) се помошни симболи.

• множеството формули на $\boldsymbol{L}$ (*Form* $\boldsymbol{L}$, или само *Form*) се дефинира индуктивно на следниов начин:

(*i*) секоја константа или променлива е исказна формула;

(*ii*) ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ се формули, тогаш и $(\neg\, \mathcal{A},)$ и $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ се формули;

(*iii*) еден збор во азбуката L е формула ако и само ако е добиен со конечна примена на (*i*) и (*ii*).

Пример:

1. $p_1, p_2, ..., (\neg p_1), (p_1 \Rightarrow p_2), (\neg(p_1 \Rightarrow p_3)) \in Form$, но
$(p_1), p_1 \Rightarrow p_2, \Rightarrow p_3, p_2 \Rightarrow, \neg p \neg \notin Form$.

Да забележиме дека вака зададено множество *Form* е такво што постои алгоритам за проверка дали еден збор во L е исказна формула или не е.

• Аксиоми на $\boldsymbol{L}$ се сите формули од следниве три вида:

А1: $(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$,

А2: $((\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})))$,

А3: $((\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A}) \Rightarrow ((\neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}))$.

Во суштина со овие три вида формули е зададено бесконечно множество аксиоми. Во овој случај наместо аксиоми велиме *шеми аксиоми*.

• Единствено правило на изведување е *модус йоненс* (МП):

$\mathcal{B}$ е директна последица од $\mathcal{A}$ и $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, т.е. $\dfrac{\mathcal{A}, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$.

Натаму ќе го користиме нашиот договор за ослободување од загради од одделот 1.2.

Другите сврзници ги дефинираме на следниов начин:

$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ е скратена ознака за $\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \neg \mathcal{B})$,

$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ е скратена ознака за $\neg \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, а

$(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ е скратена ознака за $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.

2.1º За секоја формула $\mathcal{A}$ е $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$.

Доказ: Од дефиницијата за теорема во формална теорија следува дека треба да најдеме таква низа формули, што секој нејзин член е или аксиома или е добиен со правило за изведување од некои од претходните формули во низата и притоа последната формула во низата да биде онаа што треба да докажеме дека е теорема. За формулата $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ таа низа се состои од следниве пет формули:

(1) $\mathcal{A} \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A})$ (A1)

(2) $(\mathcal{A} \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A})) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A})) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}))$ (A2)

(3) $((\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A})) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}))$ (1,2,МП)

(4) $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A})$ (A1)

(5) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A})$ (3,4,МП)

Притоа, формулата (1) е една од аксиомите зададена со шемата A1, во која улога на $\mathcal{B}$ игра формулата $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A})$; формулата (2) е аксиома од облик A2, во која улога на формулата $\mathcal{B}$ има формулата $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A})$, а на $\mathcal{C}$ формулата $\mathcal{A}$. Формулата (3) е добиена од (1) и (2) со правилото на изведување (модус поненс). Четврта формула во низата е формула од облик A1, во која улога на $\mathcal{B}$ има формулата $\mathcal{A}$, а последниот член од низата е добиен од (3) и (4) со помош на правилото за изведување модус поненс.

(Да забележиме дека доказ на теорема во формална теорија, па и во исказното сметање како еден пример на формална теорија, не мора да биде еднозначно определена низа формули.) ■

2.2º (*Теорема за дедукција*). Нека Γ е множество формули, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ се формули. Тогаш, $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, акко $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Специјално, $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ акко $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Доказ: Нека $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n$ е доказ на $\mathcal{B}$ од $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$, каде што $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}$. Со индукција по i ќе докажеме дека $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$, за секое $1 \le i \le n$.

Прво, $\mathcal{B}_1$ мора да биде или формула од Γ или аксиома или $\mathcal{A}$. Тогаш, од (A1), $\mathcal{B}_1 \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_1)$ е аксиома во $\boldsymbol{L}$. Значи, во првите два случаи $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_1$. Во третиот случај, кога $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}$, имаме $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_1$, по тврдење **2.1º**, што значи дека е $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_1$.

Да претпоставиме сега дека е $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_k$, за секое $k<i$. Тогаш,

или

$\mathcal{B}_i$ е аксиома,

или

$\mathcal{B}_i$ е елемент од Γ,

или

$\mathcal{B}_i$ е $\mathcal{A}$,

или пак

$\mathcal{B}_i$ е добиено со модус поненс од некое $\mathcal{B}_j$ и $\mathcal{B}_m$, каде што $j<i$, $m<i$, и $\mathcal{B}_i$ има облик $\mathcal{B}_j \Rightarrow \mathcal{B}_m$.

Во првите три случаи $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$ се докажува како и во случајот i=1. Во последниот случај по индуктивната хипотеза имаме $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j$ и $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B}_j \Rightarrow \mathcal{B}_i)$.

Но, тогаш од шемата аксиоми (A2) имаме

$\vdash (\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B}_j \Rightarrow \mathcal{B}_i)) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j))$.

Оттука, по примена на модус поненс, се добива

$\Gamma \vdash (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j)$,

а потоа и

$\Gamma \vdash (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i)$.

Бараниот резултат е случајот $i=n$.

Обратно, нека е $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Тогаш постои доказ $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ на $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ од множеството хипотези Г. Тогаш низата формули $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ е доказ на $\mathcal{B}$ од $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$, па

$\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$.

(Да забележиме дека доказов ни дава можност да конструираме доказ на $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ од Г. Исто така, да забележиме дека во доказот на теоремата за дедукција се користат само шемите аксиоми А1 и А2.) ■

Примери:

2. Да се докаже:

$\vdash (\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}$.

Решение:

(1) $\vdash (\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow ((\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}$	(А3)
(2) $\vdash (\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$	(**2.1º**)
(3) $\vdash (\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}$	(1,2,МП)

3. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.

Решение:

(1) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	претпост.
(2) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	претпост.
(3) $\mathcal{A}$	претпост.
(4) $\mathcal{B}$	(1,3,МП)
(5) $\mathcal{C}$	(2,4,МП)

Значи, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{C}$. Тогаш, според теоремата за дедукција, имаме:

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.

4. $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \vdash \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$.

5. $\vdash (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$.

Решение:

(1) $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	претпост.
(2) $\mathcal{A}$	претпост.
(3) $(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow ((\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B})$	(А3)
(4) $(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}$	(1,3,МП)
(5) $(\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$	(А1)
(6) $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	(2,5,МП)
(7) $\mathcal{B}$	(4,6,МП)

Значи:

$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, од каде што со помош на теоремата за дедукција се добива

$\vdash (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$.

2.3º $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.

Доказ:

(1) $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ претпост.

(2) $\mathcal{B}$ претпост.

(3) $\mathcal{A}$ претпост.

(4) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ (1,3,МП)

(5) $\mathcal{C}$ (2,4,МП)

Значи: $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{B}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{C}$. После примена на теоремата за дедукција се добива

$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$. ■

2.4º За произволни формули $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ следниве формули се теореми во ***L***:

(а) $\neg\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$;

(б) $\mathcal{B} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$;

(в) $\neg\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$;

(г) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$;

(д) $\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}))$;

(ѓ) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B})$.

Доказ:

(а) (1) $(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}) \Rightarrow ((\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B})$ (А3)

(2) $\vdash \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{B}$ (**2.1º**)

(3) $(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$ (1,2, **2.3º**)

(4) $\neg\neg\mathcal{B} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B})$ (А1)

(5) $\neg\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ (3,4,пример 3.)

(б) (1) $(\neg\neg\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{B}) \Rightarrow ((\neg\neg\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$ (А3)

(2) $(\neg\neg\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{B})$ (**2.4º**а)

(3) $(\neg\neg\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$ (1,2,МП)

(4) $\mathcal{B} \Rightarrow (\neg\neg\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B})$ (А1)

(5) $\mathcal{B} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$ (3,4,пример 3.)

(в) (1) $\neg\mathcal{A}$ прет.

(2) $\mathcal{A}$ прет.

(3) $\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ (А1)

(4) $\neg\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$ (А1)

(5) $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ (2,3,МП)

(6) $\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A}$ (1,4,МП)

(7) $(\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A})\Rightarrow((\neg\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{B})$ (А3)

(8) $(\neg\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{B}$ (6,7,МП)

(9) $\mathcal{B}$ (5,8,МП)

(г) (1) $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ прет.

(2) $\neg\neg\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$ (**2.4°**а)

(3) $\neg\neg\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ (1,2,пример 3.)

(4) $\mathcal{B}\Rightarrow\neg\neg\mathcal{B}$ (**2.4°**б)

(5) $\neg\neg\mathcal{A}\Rightarrow\neg\neg\mathcal{B}$ (3,4,пример 3.)

(6) $(\neg\neg\mathcal{A}\Rightarrow\neg\neg\mathcal{B})\Rightarrow(\neg\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})$ (пример 5.)

(7) $(\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A})$ (5,6,МП)

Значи, $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}\vdash\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A}$. По примена на теоремата за дедукција се добива: $\vdash(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A})$.

(д) (1) $\mathcal{A},\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}\vdash\mathcal{B}$ (МП)

(2) $\vdash\mathcal{A}\Rightarrow((\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow\mathcal{B})$ (2хТ.Д.)

(3) $\vdash((\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}))$ (**2.4°**г)

(4) $\vdash\mathcal{A}\Rightarrow(\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}))$ (2,3,пример 3.)

(ѓ) (1) $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ прет.

(2) $\neg\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ прет.

(3) $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A})$ (**2.4°**г)

(4) $\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A}$ (1,3,МП)

(5) $(\neg\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\neg\mathcal{A})$ (**2.4°**г)

(6) $\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\neg\mathcal{A}$ (2,5,МП)

(7) $(\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\neg\mathcal{A})\Rightarrow((\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{B})$ (А3)

(8) $((\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{B})$ (6,7,МП)

(9) $\mathcal{B}$ (4,8,МП)

Со две примени на теоремата за дедукција се добива

$\vdash(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow((\neg\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow\mathcal{B})$. ■

Пример:

6. Да се докаже дека $\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}))$ е теорема во $\boldsymbol{L}$.

Решение: Ако земеме предвид дека $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ е скратена форма на $\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B})$, треба да докажеме дека формулата

$\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B}))$

е теорема во $\boldsymbol{L}$.

(1) $\mathcal{A},\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B}\vdash\neg\mathcal{B}$ (МП)

(2) $\vdash\mathcal{A}\Rightarrow((\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B})\Rightarrow\neg\mathcal{B})$ (1,Т.Д.)

(3) $\vdash((\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B})\Rightarrow\neg\mathcal{B})\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B}))$ (2, **2.4.°д**)

(4) $\vdash\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B}))$. (2,3,пример 3.)

Како што спомнавме на почетокот од овој дел, формалната теорија $\boldsymbol{L}$ ја дефинираме со цел теореми да бидат точно тавтологиите. Со наредниве неколку својства ќе докажеме дека исказното сметање е формална теорија што ги задоволува нашите барања, т.е. ќе ја докажеме таканаречената теорема за комплетност која тврди дека една формула во исказното сметање е теорема ако и само ако е тавтологија.

2.5º Секоја теорема во теоријата $\boldsymbol{L}$ е тавтологија.

Доказ: Со директна проверка, користејќи го правилото за замена (**1.4.2º**), лесно се проверува дека секоја аксиома е тавтологија, а од **1.4.1º** дека со правилото МП од тавтологии се добиваат тавтологии. ■

2.6º (*Лема*). Нека $\mathcal{A}$ е исказна формула, а $B_1, ..., B_k$ исказните букви што се појавуваат во формулата $\mathcal{A}$. За дадени вредности на вистинитост придружени на $B_1, ..., B_k$, нека B'_i биде B_i, ако B_i има вредност $\top$, а $\neg B_i$ ако B има вредност $\perp$. Нека $\mathcal{A}'$ е $\mathcal{A}$ ако $\mathcal{A}$ добива вредност $\top$, а $\neg\mathcal{A}$ ако $\mathcal{A}$ добива вредност $\perp$ за придружените вредности на вистинитост на исказните променливи. Тогаш

$$B'_1, ..., B'_k \vdash \mathcal{A}'.$$

Доказ: Доказот ќе го спроведеме со индукција по бројот n на основните сврзници во $\mathcal{A}$ (притоа претпоставуваме дека формулата $\mathcal{A}$ е запишана без скратени ознаки за некои формули). Ако n=0, тогаш $\mathcal{A}$ се состои само од исказна буква B и тврдењето се редуцира на $B_1 \vdash B_1$, односно $\neg B_1 \vdash \neg B_1$.

Да претпоставиме дека лемата важи за секој број $j<n$.

I. $\mathcal{A}$ е $\neg\mathcal{B}$. Тогаш $\mathcal{B}$ има помал број појавувања на сврзници отколку $\mathcal{A}$.

I*а*. Нека $\mathcal{B}$ има вредност $\top$ за придружените вредности на исказните променливи. Тогаш $\mathcal{A}$ има вредност $\perp$. Значи $\mathcal{B}'=\mathcal{B}$, а $\mathcal{A}'=\neg\mathcal{A}$. Според индуктивната претпоставка применета на $\mathcal{B}$ имаме

$$B'_1, ..., B'_k \vdash \mathcal{B}.$$

Според **2.4ºб** и МП имаме

$$B'_1, ..., B'_k \vdash \neg\neg\mathcal{B},$$

при што $\neg\neg\mathcal{B}$ е $\mathcal{A}'$.

I*б*. Нека $\mathcal{B}$ има вредност $\perp$. Значи, $\mathcal{A}$ има вредност $\top$. Тогаш $\mathcal{B}'$ е $\neg\mathcal{B}$, а $\mathcal{A}'$ е $\mathcal{A}$. Според индуктивната претпоставка имаме

$$B'_1, ..., B'_k \vdash \neg\mathcal{B},$$

но $\neg\mathcal{B}$ е $\mathcal{A}'$.

II. Нека $\mathcal{A}$ е $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$. Тогаш и $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ имаат помал број појавувања на основни сврзници од $\mathcal{A}$, и според индуктивната претпоставка имаме

$$B'_1, ..., B'_k \vdash \mathcal{B}',$$

$B'_1,...,B'_k \vdash \mathcal{C}'$

II*а*. Нека $\mathcal{B}$ има вредност $\perp$. Значи, $\mathcal{A}$ има вредност T. Тогаш $\mathcal{B}'$ е $\neg\mathcal{B}$, а $\mathcal{A}'$ е $\mathcal{A}$. Значи, $B'_1,...,B'_k \vdash \neg\mathcal{B}$. Од **2.4º.в** имаме

$B'_1,...,B'_k \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$,

каде што $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ е $\mathcal{A}$, а $\mathcal{A}'$ е $\mathcal{A}$.

II*б*. Нека $\mathcal{B}$ има вредност T, а $\mathcal{C}$ вредност $\perp$. Тогаш $\mathcal{A}$ има вредност $\perp$, па имаме $\mathcal{B}'$ е $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}'$ е $\neg\mathcal{C}$, а $\mathcal{A}'$ е $\neg\mathcal{A}$. Од индуктивната претпоставка имаме

$B'_1,...,B'_k \vdash \mathcal{B}$, и $B'_1,...,B'_k \vdash \neg\mathcal{C}$.

Според **2.4ºд** имаме

$B'_1,...,B'_k \vdash \neg(B \Rightarrow \mathcal{C})$,

но $\neg(B \Rightarrow \mathcal{C})$ е $\mathcal{A}'$.

II*в*. Нека $\mathcal{B}$ има вредност T и $\mathcal{C}$ има вредност T. Тогаш и $\mathcal{A}$ има вредност T, па $\mathcal{C}'$ е $\mathcal{C}$, а $\mathcal{A}'$ е $\mathcal{A}$. Од индуктивната претпоставка имаме

$B'_1,...,B'_k \vdash \mathcal{B}$,

а од аксиомите А1,

$B'_1,...,B'_k \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$,

при што $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ е $\mathcal{A}'$. ■

2.7º (*Теорема за комӣлеӣносӣ*). Една исказна формула $\mathcal{A}$ е тавтологија акко таа е теорема во $\boldsymbol{L}$.

Доказ: Едната насока е докажана со **2.5º**. Нека $\mathcal{A}$ е исказна формула, а $B_1,...,B_k$ исказните букви што се појавуваат во формулата $\mathcal{A}$. Според **2.6º**., за која било вредност на вистинитост на променливите $B_1,...,B_k$ имаме $B'_1,...,B'_k \vdash \mathcal{A}$ (во овој случај $\mathcal{A}$ секогаш има вредност T). Значи, ако B_k има вредност T, тогаш $B'_1,...,B'_{k-1},B_k \vdash \mathcal{A}$, а ако B_k има вредност $\perp$, тогаш $B'_1,...,B'_{k-1},\neg B_k \vdash \mathcal{A}$. Од теоремата за дедукција добиваме:

$B'_1,...,B'_{k-1} \vdash B_k \Rightarrow \mathcal{A}$,

$B'_1,...,B'_{k-1} \vdash \neg B_k \Rightarrow \mathcal{A}$,

Од **2.4º.ѓ** добиваме дека е $B'_1,...,B'_{k-1} \vdash \mathcal{A}$, т.е. дека множеството претпоставки сме го намалиле за 1.

Ако продолжиме со оваа постапка, после k чекори ќе добиеме дека е $\vdash \mathcal{A}$. ■

2.8º Ако $\mathcal{B}$ е израз што содржи знаци $\neg$, $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, којшто е скратена форма од исказна формула $\mathcal{A}$ од $\boldsymbol{L}$, тогаш $\mathcal{B}$ е тавтологија акко $\mathcal{A}$ е теорема во $\boldsymbol{L}$.

Доказ: Дефиницијата на скратени форми овозможува при замена во дадена исказна формула на израз со соодветна скратена форма да се добие израз логички еквивалентен на почетниот. Тогаш $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ се логички еквивалентни и $\mathcal{B}$ е тавтологија акко $\mathcal{A}$ е тавтологија. Според теоремата за комплетност тогаш имаме дека $\mathcal{B}$ е тавтологија акко $\mathcal{A}$ е теорема во $\boldsymbol{L}$. ■

За една формална теорија T велиме дека е *непротивречна* ако не содржи формула $\mathcal{A}$ таква што и $\mathcal{A}$ и $\neg\mathcal{A}$ се теореми во T.

2.9° Формалната теорија $\boldsymbol{L}$ е непротивречна.

Доказ: Од **2.5°** имаме дека секоја теорема на $\boldsymbol{L}$ е тавтологија. Истотака негација на тавтологија не може да биде тавтологија, што значи невозможно е и $\mathcal{A}$ и $\neg\mathcal{A}$ да бидат теореми во $\boldsymbol{L}$. ■

Забелешка. Да забележиме дека формалната теорија $\boldsymbol{L}$ е непротивречна акко постои формула којашто не е теорема на $\boldsymbol{L}$. Ако $\boldsymbol{L}$ е непротивречна, тогаш јасно е дека постојат формули коишто не се теореми на $\boldsymbol{L}$, како што се, на пример, негации на тавтологии. Од друга страна, бидејќи формулата $\neg\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ е теорема на $\boldsymbol{L}$, доколку $\boldsymbol{L}$ не би била непротивречна теорија, т.е. доколку постои формула $\mathcal{A}$ таква што и $\mathcal{A}$ и $\neg\mathcal{A}$ имаат доказ во $\boldsymbol{L}$, тогаш, од горната теорема и МП би следувало дека секоја формула $\mathcal{B}$ има доказ (т.е. дека е теорема на $\boldsymbol{L}$).

(Оваа еквивалентност важи за секоја теорија којашто има правило за изведување модус поненс и во којашто горната формула има доказ.)

За една теорија во којашто постои формула којашто не е теорема велиме дека е *апсолутно непротивречна теорија*. Оваа дефиниција е применлива дури и на теории кои не содржат знак за негација.

3.2.1. Вежби:

1. Да се покаже дека за произволни формули $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, следните формули се тавтологии во $\boldsymbol{L}$, што значи дека се теореми на $\boldsymbol{L}$.

(а) $((\mathcal{A}\vee\mathcal{B})\wedge(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C})\wedge(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}))\Rightarrow\mathcal{C}$.

(б) $\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})\Leftrightarrow(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\Rightarrow\mathcal{C}$.

2. Да се покаже дека:

(а) $\mathcal{A},\mathcal{B}\vdash\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$,

(б) $\mathcal{A},\neg\mathcal{B}\vdash\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$,

(в) $\neg\mathcal{A},\mathcal{B}\vdash\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$,

(г) $\neg\mathcal{A},\neg\mathcal{B}\vdash\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$,

(д) $\vdash\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$,

(ѓ) $\vdash((\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{A}$.

3. Нека $\mathcal{A}$ е исказна формула, којашто не е тавтологија. Нека $\boldsymbol{L}^+$ е формална теорија добиена од $\boldsymbol{L}$ додавајќи како нова шема аксиоми сите формули коишто се добиваат од $\mathcal{A}$ со замена на исказните букви со исказни формули, при што исти исказни букви се заменети со исти исказни формули. Да се покаже дека $\boldsymbol{L}^+$ не е непротивречна теорија. (Упатство: $\mathcal{A}$ не е тавтологија. Ако $\neg\mathcal{A}$ е тавтологија, тогаш и $\mathcal{A}$ и $\neg\mathcal{A}$ се теореми во $\boldsymbol{L}^+$, па $\boldsymbol{L}^+$

не е непротивречна. Затоа нека ни $\mathcal{A}$ ни $\neg\mathcal{A}$ не се тавтологии. Тогаш постојат вредности на променливите $a_1, ..., a_n$ што се појавуваат во $\mathcal{A}$ (да речеме $\sigma_1, ..., \sigma_n$) за кои формулата $\mathcal{A}$ прима вредност $\perp$. Нека $\mathcal{B}$ е формула добиена од $\mathcal{A}$, така што a_i се заменува со формулата $(p\Rightarrow p)$ ако a_i е $\top$, а со $\neg(p\Rightarrow p)$, ако a_i е $\perp$. Провери дека $\mathcal{B}$ е контрадикција во $\boldsymbol{L}$ и истовремено $\mathcal{B}$ е аксиома во $\boldsymbol{L}^+$, па и $\mathcal{B}$ и $\neg\mathcal{B}$ се теореми во $\boldsymbol{L}^+$.)

4. Да се провери дали се точни тврдењата:

(а) $\neg\mathcal{A}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$;

(б) $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$;

(в) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$;

(г) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \vdash \neg\mathcal{B}$;

(д) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}, \mathcal{A} \vee \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \wedge \mathcal{D}$.

5. Да се покаже дека

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}, \mathcal{C} \vee \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{F}$

6. Да се покаже дека за секој природен број n поголем од 1 е точно дека $\vdash \mathcal{A}_n$, каде што $\mathcal{A}_n$ е формулата

$(p_o \Rightarrow p_1) \Rightarrow ((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (...((p_{n-1} \Rightarrow p_n) \Rightarrow (p_o \Rightarrow p_n)))...)$.

3.3. Други аксиоматизации на исказното сметање.

За исказното сметање можат да се најдат и други системи аксиоми коишто ќе го дадат истиот резултат. Ќе дадеме неколку примери на формални теории на исказното сметање, при што ќе користиме множество сврзници од коешто можат да се изведат сите други основни сврзници на исказното сметање.

$\boldsymbol{L_1}$: $\vee$, $\neg$ се основни сврзници.
(Користиме $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ како скратена ознака за $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.)
Множеството формули се дефинира како и порано.
Имаме четири шеми аксиоми:

$\mathcal{A} \vee \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ $(A_1 1)$

$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ $(A_1 2)$

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$ $(A_1 3)$

$(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{C})$ $(A_1 4)$

Единствено правило за изведување е модус поненс.

$\boldsymbol{L_2}$: $\wedge$, $\neg$ се основни сврзници. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ е кратенка за $\neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$. Има три шеми аксиоми:

$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{A})$ $(A_2 1)$

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ $(A_2 2)$

$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \neg(\mathcal{C} \wedge \mathcal{A}))$ $(A_2 3)$

Единствено правило за изведување е модус поненс.

$\boldsymbol{L_3}$: Оваа теорија има иста азбука како и $\boldsymbol{L}$. Се разликува единствено по шемите аксиоми. Оваа теорија содржи три одредени аксиоми:

$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ $\quad$ ($A_3$1)

$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ $\quad$ ($A_3$2)

$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$ $\quad$ ($A_3$3)

Правила за изведување се модус поненс и правило на супституција, т.е. дадена исказна променлива можеме да замениме со исказна формула, и тоа на сите места на кои таа се појавува во дадената исказна формула.

$\boldsymbol{L_4}$: Основни сврзници се $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, и $\neg$. Модус поненс е единствено правило за изведување, а аксиомите се зададени со следниве шеми аксиоми:

$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ $\quad$ ($A_4$1)

$(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}))$ $\quad$ ($A_4$2)

$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}$ $\quad$ ($A_4$3)

$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$ $\quad$ ($A_4$4)

$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$ $\quad$ ($A_4$5)

$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ $\quad$ ($A_4$6)

$\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ $\quad$ ($A_4$7)

$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}))$ $\quad$ ($A_4$8)

$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}) \Rightarrow \neg\mathcal{C})$ $\quad$ ($A_4$9)

$\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ $\quad$ ($A_4$10)

Како и обично, и тука дефинираме $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ да биде $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.

3.4. Теорија на квантификатори

За формализација на математичките теории не ни е доволно само исказното сметање. Разлогот е во тоа што во математиката обично имаме множество објекти и испитуваме различни релации помеѓу тие објекти. Така, некои објекти можат да бидат во релација, а некои не, или пак сите објекти да бидат во релација. За таа цел ги користиме *квантификаторите* (или кванторите), за кои зборувавме и во првата глава. Како и кај исказното сметање, каде што логичките заклучувања зависеа од сврзниците, и во овој случај ќе изградиме теорија во којашто логичките заклучувања ќе зависат од сврзниците, но и од квантификаторите. Оваа теорија ќе ја бележиме со $\boldsymbol{K}$ и ќе ја викаме *теорија на кванторното сметање*. Во неа, покрај тавтологиите, теореми ќе бидат точно "логички точните" формули.

Прво ќе го дефинираме јазикот, односно основните знаци и симболи со чија помош ќе градиме терми и реченици (формули) во теоријата $\boldsymbol{K}$.

Се договараме дека азбуката на оваа формална теорија се состои од следниве симболи:

- x_1, x_2, x_3 ,.... *индивидуални променливи* (или само *променливи*),
- a_1, a_2, a_3,.....*индивидуални константи* (или, само *константи*),
- $f_1^1, f_2^1, \ldots, f_1^2, \ldots, f_i^j, \ldots$ *функциски знаци* (операциски знаци),

каде што горниот индекс означува должина на функцискиот знак, т.е. број на аргументи на кои е применлив, а долниот е само индекс.

- $A_1^1, A_2^1, \ldots, A_1^2, \ldots, A_i^j, \ldots$ *предикатски симболи* (релациски

симболи), при што индексите се користени на ист начин како и кај функциските симболи.

- $\neg, \Rightarrow$ *логички сврзници,*
- $\forall x$ *универзален квантификатор.*

Во запишувањето на "зборови" и "реченици" ќе користиме и помошни симболи: загради и запирки.

Функционалните симболи применети на променливи и константи генерираат *терми*. Имено, термите ќе ги дефинираме индуктивно на следниов начин:

(1) Променливите и константите се терми.

(2) Ако f_i^n е n-арен функциски симбол, а $t_1,\ldots,t_n$ се терми, тогаш и $f_i^n(t_1,\ldots,t_n)$ е терм.

(3) Еден израз е терм ако и само ако е добиен со конечна примена на (1) и (2).

Да дадеме алгоритам за проверка дали еден израз е терм.

На секој симбол x од испитуваната низа му придружуваме број $|x|$ на следниов начин:

$|x_i|=|a_j|=1$, за секоја променлива x_i и за секоја константа a_j.

Ако f е n-арен функционален симбол, тогаш

$|f|=1-n$, а $|(| = |)| = |,| = 0$.

Ако $u_1 \ldots u_n$ е низа симболи, тогаш

$|u_1 \ldots u_n| = \Sigma|u_i|$.

Една низа симболи е терм акко $|u_1 \ldots u_i| < 0$, за $i < n$, а $|u_1 \ldots u_n| =1$.

Со примена на предикатни симболи и терми се добиваат *атомарни формули*, т.е. ако A_i^k е k-арен предикатен симбол, а $t_1,\ldots,t_k$ се терми, тогаш $A_i^k(t_1,\ldots,t_k)$ е *атомарна формула*.

Формулите на теоријата со квантификатори се дефинираат индуктивно на следниов начин:

(1) Секоја атомарна формула е формула.

(2) Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ се формули, а x е променлива, тогаш $(\neg\mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ и $((\forall x)\mathcal{A})$ се формули.

(3) Еден израз е формула акко може да се добие со конечна примена на правилата (1) и (2).

Да забележиме дека во формулата $((\forall x)\mathcal{A}\ )$, x не мора да биде променлива што се појавува во $\mathcal{A}$. Ако променливата x не се појавува во $\mathcal{A}$, тогаш сметаме дека $((\forall x)\mathcal{A}\ ))$ има исто значење како и $\mathcal{A}$. Формулата $\mathcal{A}$ во изразот $((\forall x)\mathcal{A}\ ))$ велиме дека е *поле на влијание на кванши̅фикаторот̅* $(\forall x)$.

Изразите $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ се дефинираат како и во теоријата $\boldsymbol{L}$, како скратени ознаки на изрази добиени со помош на основните логички сврзници.

Не е неопходно воведување на егзистенцијален квантификатор, бидејќи можеме да го дефинираме со помош на негацијата и универзалниот квантификатор на следниов начин:

$(\exists x)\mathcal{A}$ е скратена формула за $\neg((\forall x)(\neg\mathcal{A}\ ))$.

Правилата за ослободување од загради се користат и во овој случај, со тоа што универзалниот и егзистенцијалниот квантификатор се подредени меѓу $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, и $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Исто така, ако се појавуваат повеќе квантификатори еден по друг, заградите се изоставуваат.

Примери:

1. Да се напишат следните формули со сите загради:

(а) $(\forall x_1) A_1^1 (x_1) \Rightarrow A_1^2 (x_1, x_2)$;

одговор: $(((\forall x_1) A_1^1 (x_1)) \Rightarrow (A_1^2 (x_1, x_2)))$;

(б) $(\forall x_1) A_1^1 (x_1) \vee A_1^2(x_1 ,x_2)$;

одговор: $(((\forall x_1) A_1^1 (x_1)) \vee (A_1^2(x_1 ,x_2)))$;

(в) $(\forall x_1)\neg A_1^2 (x_1 ,x_2)\Rightarrow A_2^3 (x_1 ,x_1 ,x_2) \vee (\forall x_1) A_2^1 (x_1)$;

одговор: $(((\forall x_1)(\neg A_1^2 (x_1 ,x_2)))\Rightarrow((A_2^3 (x_1 ,x_1 ,x_2)) \vee((\forall x_1) A_2^1 (x_1))))$;

(г) $\neg(\forall x_1) A_1^1 (x_1) \Rightarrow(\exists x_2) A_2^1 (x_2) \Rightarrow A_1^2 (x_1 ,x_2) \vee A_1^1 (x_2)$;

одговор: $((((\neg(\forall x_1)) A_1^1 (x_1)) \Rightarrow((\exists x_2) A_2^1 (x_2))) \Rightarrow(A_1^2 (x_1 ,x_2) \vee A_1^1(x_2)))$;

(д) $(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_4) A_1^3 (x_1, x_2, x_4)$;

одговор: $((\forall x_1)((\exists x_2)((\forall x_4) A_1^3 (x_1, x_2, x_4))))$;

(ѓ) $(\forall x_1)(\exists x_3)(\forall x_4) A_1^1 (x_1) \Rightarrow A_2^1 (x_3) \wedge\neg A_1^1 (x_1)$;

одговор: $(((\forall x_1)((\exists x_3)((\forall x_4) A_1^1 (x_1))) \Rightarrow(A_2^1 (x_3) \wedge(\neg A_1^1 (x_1))))$;

(е) $(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3) A_1^1 (x_1) \vee (\exists x_2)\neg(\forall x_3) A_1^2 (x_3, x_2)$;

одговор: $((\exists x_1)((\forall x_2)((\exists x_3)((A_1^1 (x_1) \vee ((\exists x_2)(\neg(\forall x_3) A_1^2 (x_3, x_2)))))))$.

Поимите за слободно и врзано појавување на некоја променлива во дадена формула се дефинираат на следниов начин:

Едно појавување на променливата x е *врзано* ако тоа е променливата од квантификаторот $(\forall x)$ или ако се наоѓа во полето на влијание на квантификаторот $(\forall x)$ во дадената формула. Во секој друг случај велиме дека едно појавување на променливата x е *слободно*.

За една променлива велиме дека е *слободна* (или *врзана*) во дадена формула ако има слободно (врзано) појавување во таа формула, соодветно.

Значи, *една променлива во дадена формула може истовремено да биде и слободна и врзана*.

Примери:

2. $A_1^2\ (x_1, x_2)$

3. $A_1^2\ (x_1, x_2) \Rightarrow (\forall x_1)\, A_1^1\ (x_1)$

4. $(\forall x_1)\, A_1^2\ (x_1, x_2) \Rightarrow (\forall x_1)\, A_1^1\ (x_1)$.

Во примерот 2 единственото појавување на x_1 е слободно. Во 3 првото појавување на x_1 е слободно, додека второто и третото се врзани. Во 4 сите појавувања на x_1 се врзани.

Примери:

5. Да се определи кои се слободни, а кои врзани појавувања на променливите во следниве формули:

(а) $(\forall x_3)(((\exists x_4)\, A_1^2\ (x_1, x_2)) \Rightarrow A_1^2\ (x_3, a_1))$

(б) $(\forall x_2)\, A_1^2\ (x_1, x_2) \Rightarrow (\forall x_3)\, A_1^2\ (x_3, x_2)$.

(в) $((\forall x_2)(\exists x_1)\, A_1^3(x_1, x_2, f_1^2(x_1, x_2))) \vee \neg(\forall x_1)\, A_1^2(x_1, f_1^1(x_1))$.

Во формулата под (а) слободни се појавувањата на променливите x_1 и x_2, а сите појавувања на променливата x_3 се врзани; единственото појавување на x_4 е врзано.

Во формулата под (б) првото и второто појавување на променливите x_2 и x_3 се врзани, а првото појавување на x_1 и третото појавување на x_2 се слободни.

Во формулата под (в) сите појавувања на променливите x_1 и x_2 се врзани.

Ако $\mathcal{A}$ е формула и t е терм, тогаш за t велиме дека *е слободен за променливата* x_i во $\mathcal{A}$ ако ни едно слободно појавување на x_i во $\mathcal{A}$ не се наоѓа во полето на влијание на квантификатор $(\forall x_j)$, каде што x_j е променлива во t.

Примери:

6. Термот x_j е слободен за x_i во $A_1^1(x_i)$, но x_j не е слободен за x_i во $(\forall x_j) A_1^1(x_i)$. Термот $f_1^2(x_1, x_3)$ е слободен за променливата x_1 во формулата $(\forall x_2) A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^1(x_1)$, но не е слободен за променливата x_1 во $(\exists x_3)(\forall x_2) A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^1(x_1)$.

7. Секој терм без променливи е слободен за секоја променлива од произволна формула.

8. Еден терм t е слободен за секоја променлива во формулата $\mathcal{A}$ ако ни една од променливите од t не е врзана во $\mathcal{A}$.

9. x_i е слободна за x_i во секоја формула.

10. Секој терм е слободен за променливата x_i ако x_i не се појавува слободно во $\mathcal{A}$.

11. Термот $f_1^2(x_1, x_2)$ е слободен за x_1 во $A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow (\forall x_2) A_1^1(x_2)$, но не е слободен за променливата x_1 во формулата

$$((\forall x_2) A_1^2(x_2, a_1)) \vee (\exists x_2) A_1^2(x_1, x_2).$$

Реченица (или *затворена формула*) е онаа формула во којашто нема слободни појавувања на променливи.

Интерпретација $(D;\varphi)$ на формула $\mathcal{A}$ се состои од непразно множество D и пресликување φ од јазикот $\boldsymbol{K}$ на формулата $\mathcal{A}$ во множеството операции и релации на D, така што константите ги пресликува во одредени елементи од D, а функционалните и предикатските симболи во операции и релации на D, при што n-арен функционален симбол пресликува во n-арна операција, а n-арен предикатен симбол во n-арна релација (n-арна релација на D е подмножество од D^n).

Пример

12. Нека $\mathcal{A}$ е следнава формула

$$A_1^2(g(f(x, y)), h(g(x), g(y)))$$

каде што g е унарен функционален симбол, а f и h се бинарни.

Ќе дадеме три интерпретации на оваа формула:

I) $D=\mathbb{R}$, φ: $A_1^2 \mapsto \leq$; $g \mapsto ||$; $f, h \mapsto +$.

Интерпретацијата на $\mathcal{A}$ е

$$\leq (||(+(x, y)), +(||(x), ||(y))).$$

Со користење на вообичаените ознаки овој израз го добива следниов облик:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

II) $D=\mathbb{R}^+$, φ: $A_1^2 \mapsto =$; $g \mapsto \sqrt{\ }$; $f \mapsto *$; $h \mapsto +$.

$\sqrt{x * y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

III) $D=\mathbb{R}^{+}$, $\varphi: A_1^2 \mapsto =;\ g \mapsto \lg;\ f \mapsto *;\ h \mapsto +$.
$lg\,(x*y) = lg\,(x) + lg\,(y)$.

Уочуваме дека:

интерпретацијата на една формула $\mathcal{A}$ е исказна функција $\mathcal{A}_\varphi$ во некоја структура. Една формула може да има и интерпретација којашто е точна исказна функција и интерпретација којашто е неточна исказна функција.

Во нашиов пример исказните функции од првата и третата интерпретација се точни, додека втората не е точна исказна функција, т.е. за некои вредности на променливите таа е точен исказ, а за други неточен.

3.5. Вистинитосни вредности на формули. Модели. Логички точни формули

Една формула $\mathcal{A}$ во јазикот $\boldsymbol{K}$ е *точна* во некоја структура $\boldsymbol{D}=(D; F, R)$, каде што F е множество операции, а R множество релации на D, при интерпретација $(D;\varphi)$ на $\mathcal{A}$ во D, ако соодветната исказна функција $\mathcal{A}_\varphi$ е точна во структурата $\boldsymbol{D}$, т.е. заменувајќи ги променливите со произволни елементи од D, секогаш се добива точен исказ. $\mathcal{A}$ е *неточна* во структурата $\boldsymbol{D}$ ако $\neg\mathcal{A}$ е точна во $\boldsymbol{D}$. $\mathcal{A}$ е *исполнета* во $\boldsymbol{D}$ акко соодветната исказна функција е точна за некоја замена на променливите од $\mathcal{A}$ со елементи од D. Во случај кога една формула $\mathcal{A}$ е точна во $\boldsymbol{D}$ велиме дека $\boldsymbol{D}$ е *модел* на $\mathcal{A}$. Ако Σ е множество формули од јазикот $\boldsymbol{K}$, *модел на* Σ е онаа структура во која секоја од формулите од Σ е точна.

Пример:

1. Нека f е бинарен функциски симбол, g е унарен, a е константа и A е бинарна релација. Нека Σ е следното множество формули:

$A(f(x, f(y, z)), f(f(x, y), z))$;
$A(f(x, g(x)) f(g(x), x))$;
$A(f(x, g(x)), a)$;
$A(f(x, a), x)$;
$A(f(a, x), x)$.

Секоја група $\boldsymbol{G}=(G; \circ, ^{-1}, e)$ е модел на Σ, при следнава интерпретација:

$\varphi: A \mapsto =;\ f \mapsto \circ;\ g \mapsto ^{-1};\ a \mapsto e.$

Во овој случај $\circ$ е бинарна операција, $^{-1}$ е унарна, а e е неутралниот елемент на групата. (Да забележиме дека иако во овој курс поимот група не е дефиниран, тој е обработуван во курсот по математика за прва година во средните училишта.)

Постојат формули коишто се точни во секоја структура во којашто можат да се интерпретираат. Ваквите формули ги викаме *логички точни формули*.

На пример $A(x) \vee \neg A(x)$ е логички точна формула.

Логички точните формули се закони на "формалното мислење".

За формулата $\mathcal{A}$ велиме дека е *контрадикторна* ако $\neg\mathcal{A}$ е логички точна формула, а за формулата $\mathcal{B}$ велиме дека е *логичка последица* од формулата $\mathcal{A}$ ако $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ е логички точна формула.

Според ова, една формула $\mathcal{A}$ не е логички точна акко може да се најде интерпретација таква што соодветната исказна функција да не биде точна.

Да наведеме некои ознаки. Ако $\mathcal{A}$ е формула таква што структурата $\boldsymbol{D}$ е модел за $\mathcal{A}$, тогаш пишуваме $\boldsymbol{D} \models \mathcal{A}$. Ако пак $\mathcal{A}$ е логички точна формула, тогаш пишуваме $\models \mathcal{A}$.

Вежби 3.5.1:

1. Да се покаже дека следните формули не се логички точни:

(а) $(((\forall x)\ A_1^1\ (x)) \Rightarrow ((\forall x)\ A_2^1\ (x))) \Rightarrow ((\forall x)(\ A_1^1\ (x) \Rightarrow A_2^1\ (x)))$.

(б) $((\forall x)\ (\ A_1^1\ (x) \vee A_2^1\ (x)) \Rightarrow (((\forall x)\ (\ A_1^1\ (x)) \vee ((\forall x)\ A_2^1\ (x)))$.

2. Да се најдат својствата или релациите определени со следниве формули и интерпретации:

(а) $[(\exists u)\,A_1^2(\,f_1^2(x,u),y)] \wedge [(\exists v)\,A_1^2(\,f_1^2(x,v),z)]$, каде што доменот D е множеството цели броеви, $A_1^2(u,v)$ означува $u=v$, а $f_1^2(u,v)$, uv;

(б) $(\exists x_3)\,A_1^2(\,f_1^2(x_1,x_3),x_2)$, каде што доменот D е множеството позитивни цели броеви, $A_1^2(u,v)$ означува $u=v$, а $f_1^2(u,v)$, uv.

3.6. Јазици од прв ред

Во случај на исказното сметање, таблиците на вистинитост обезбедуваат ефикасен метод за проверка дали дадена формула е тавтологија. Ваков метод не е погоден кога се работи за формалната теорија на предикатното сметање. Аксиоматскиот метод, којшто кај исказното сметање изгледаше дека не е неопходен, во случај на предикатното сметање е неопходен. Затоа да ги разгледаме теориите од прв ред, кои често пати се нарекуваат јазици од прв ред.

Во претходните делови ја дефиниравме азбуката и формулите на јазиците од прв ред. Аксиомите на оваа формална теорија се делат на две класи аксиоми: логички и сопствени аксиоми; притоа *логичките аксиоми се аксиоми на секоја теорија од прв ред*, додека *сопствените зависат од конкретната теорија што сакаме да ја разгледуваме*. Затоа сопствените аксиоми не можеме да ги специфицираме. Формална теорија во која нема сопствени аксиоми се вика *предикатно сметање*.

Логички аксиоми се:

(1) $\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})$

(2) $(\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}))\Rightarrow((\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C}))$

(3) $(\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A})\Rightarrow((\neg\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{B})$

(4) $(\forall x)\mathcal{A}(x)\Rightarrow\mathcal{A}(t)$,

ако $\mathcal{A}(x)$ е формула, а t е терм слободен за x во $\mathcal{A}$.

(5) $(\forall x)(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow(\forall x)\mathcal{B})$

ако $\mathcal{A}$ е формула којашто не содржи слободни појавувања на x .

Правила за изведување се:

модус поненс (МП),

генерализација: $(\forall x)\mathcal{A}$ е изведено од $\mathcal{A}$ (ГЕН).

Модел на теорија од прв ред е интерпретација во којашто сите аксиоми се точни.

Да забележиме дека примена на правилото МП на логички точните формули дава логички точна формула, и примена на правилото ГЕН на логички точна формула дава логички точна формула. Значи секоја теорема од оваа теорија е точна во секој нејзин модел.

Да дадеме некои објаснувања за рестрикциите на аксиомите (4) и (5).

Ако t е терм којшто не е слободен за променливата x_i во $\mathcal{A}$, се добива незадоволителен резултат. Имено, ако $\mathcal{A}(x_1)$ е $\neg(\forall x_2)\,A_1^2(x_1, x_2)$ и t е x_2, тогаш t не е слободен терм за x_1 во $\mathcal{A}$ и добиваме:

$$(\forall x_1)(\neg(\forall x_2)\,A_1^2(x_1, x_2)) \Rightarrow\neg(\forall x_2)\,A_1^2(x_2, x_2).$$

Ако за интерпретација земеме домен со најмалку два различни елементи, а A_1^2 е интерпретирано како равенство, тогаш претпоставката во $\mathcal{A}$ е точна, а последицата неточна.

Во аксиомата (5) ако x се појавува слободно во $\mathcal{A}$, на пример $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ се $A_1^1(x)$, се добива следниот резултат:

$(\forall x)\,((A_1^1(x) \Rightarrow (A_1^1(x)) \Rightarrow (\,(A_1^1(x) \Rightarrow (\forall x)\,(A_1^1(x))$.

Претпоставката во $\mathcal{A}$ е логички точна, додека последицата не е.

Да дадеме неколку примери на теории од прв ред.

Примери:

1. Претподредување

Нека ***K*** е теорија од прв ред што содржи единствен (бинарен) предикатен симбол A_1^2, а не содржи функциски симболи и константи. Ќе пишуваме $x < y$ наместо $A_1^2(x,y)$, а $x \not< y$, наместо $\neg(x < y)$.

Имаме две сопствени аксиоми:

$(\forall x)(x \not< x)$ (нерефлексивност)

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$ (транзитивност)

Секој модел на оваа теорија се вика *претподредена структура*.

2. Групи.

Нека ***K*** има само еден (бинарен) предикатен симбол A_1^2, еден (бинарен) функциски симбол f_1^2, и една константа a. (Заради вообичаените ознаки во теоријата на групи ќе пишуваме $t = s$, наместо $A_1^2\,(t, s)$, $t + s$, наместо $f_1^2\,(t, s)$, а 0 наместо a.)

Има шест сопствени аксиоми:

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + (y + z) = (x + y) + z)$ (асоцијативност)

$(\forall x)(0 + x = x)$ (неутрален ел.)

$(\forall x)(\exists y)(y + x = 0)$ (инверзен ел.)

$(\forall x)(x = x)$ (рефлекс. на =)

$(\forall x)(\forall y)(x = y \Rightarrow y = x)$ (симетричн. на =)

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)$ (транзит. на =)

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(y = z \Rightarrow (x + y = x + z \wedge y + x = z + x))$

Секој модел на оваа теорија се вика *група*. Ако покрај овие е задоволена и следнава аксиома

$(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$ (ком. на +)

тогаш за моделот на оваа теорија велиме дека е *абелова* (или *комутативна*) *група*.

На крајот да спомeнеме дека јазиците од прв ред се формални теории, па поимите теорема и доказ дефинирани кај формалните теории директно се пренесуваат и на секоја специјална формална теорија.

3.7. Својства на јазиците од прв ред

7.1° Секоја формула $\mathcal{A}$ од теорија од прв ред, којашто е примерок на тавтологија е теорема и може да се докаже само со помош на аксиомите (1) - (3) и МП.

Доказ: $\mathcal{A}$ се добива од тавтологија $\mathcal{W}$ со замена на некои исказни променливи со формули. Бидејќи секоја тавтологија е теорема на исказното сметање, постои доказ на $\mathcal{W}$ во **L**. Во овој доказ, ако се извршат истите замени како во $\mathcal{W}$ за добивање на $\mathcal{A}$, а оние исказни променливи што не се јавуваат во $\mathcal{W}$ се заменат со произволна формула, се добива низа формули којашто е доказ на $\mathcal{A}$ во ***K***. Овој доказ ги користи само аксиомите (1) - (3) и МП. ■

Пример:

1. Ако $\mathcal{A}$ е формулата $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$, каде што $\mathcal{B}$ е формула во теоријата ***K***, тогаш $\mathcal{A}$ е теорема во ***K***.

7.2° Теоријата ***K*** на предикатното сметање е непротивречна.

Доказ: За секоја формула $\mathcal{A}$ од ***K*** нека со $h(\mathcal{A})$ е означен изразот добиен од $\mathcal{A}$ со бришење на сите квантификатори и терми во $\mathcal{A}$ (заедно со придружните загради и запирки). На пример, $h((\forall x) A_1^2(x, y) \Rightarrow A_1^1(z))$ е $A_1^2 \Rightarrow A_1^1$. Според тоа $h(\mathcal{A})$ е исказна формула во којашто симболите A_i^j играат улога на исказни променливи. Јасно е дека $h(\neg\mathcal{A}) = \neg(h(\mathcal{A}))$, а $h(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = h(\mathcal{A}) \Rightarrow h(\mathcal{B})$. При ова секоја аксиома од видот (1) - (5) се трансформира во тавтологија. Ова тврдење е јасно за аксиомите (1) - (3). Аксиомата (4) се трансформира во тавтологија од облик $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$, а (5) во тавтологија од облик $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}) \Rightarrow (\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E})$.

Ако $h(\mathcal{A})$ и $h(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ се тавтологии, тогаш и $h(\mathcal{B})$ е тавтологија.

Ако пак $h(\mathcal{A})$ е тавтологија, тогаш и $h((\forall x)\mathcal{A}) = h(\mathcal{A})$ е исто така тавтологија. Значи, $h(\mathcal{A})$ е тавтологија секогаш кога $\mathcal{A}$ е теорема во ***K***. Ако постои формула $\mathcal{B}$ од ***K*** така што и $\mathcal{B}$ и $\neg\mathcal{B}$ се теореми на ***K***, тогаш се добива дека $h(\mathcal{B})$ и $\neg h(\mathcal{B})$ се тавтологии, што противречи на непротивречноста на исказното сметање. ■

7.3° (*Теорема за комплетност*). Една формула од ***K*** *предикатното сметање) е теорема акко е логички точна формула. ■

ИНДЕКС

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Девиде: Увод во математичката логика, Скопје 1973.
[2] С. Прешиќ: Елементи од математичката логика, Скопје 1973.
[3] А. Самарџиски и Н. Целакоски: Збирка задачи по алгебра, МНОЖЕСТВА, Скопје 1975.
[4] А. Самарџиски и Н. Целакоски: Решени задачи по алгебра I, Скопје 1968.
[5] Ѓ. Чупона: Предавања по алгебра I, Скопје 1968.
[6] Ѓ. Чупона и Б. Трпеновски: Предавања по алгебра II, Скопје 1973.
[7] Ѓ. Чупона: Алгебарски структури и реални броеви, Скопје 1976.
[8] P. Halmos: Naive Set Theory, New York 1963.
[9] E. Mendelson: Introduction to Mathematical Logic, Van Nostrand Co, 1972.
[10] S. Milić: Elementi matematičke logike i teorije skupova, Beograd 1991.