

Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 16
(збирка задачи за VII одделение - втор дел)

Скопје, 2020

Одговорен уредник
проф. д-р Алекса Малчески

Рецензенти
проф. д-р Методи Главче
проф. д-р Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Математички талент 16 : (збирка задачи за VII одделение - втор дел) /
Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2020. - 268 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 262-268

ISBN 978-608-4904-54-0

COBISS.MK-ID 51246341

СОДРЖИНА

Предговор	5
I Алгебра	
I.1. Пресметувања	7
I.2. Неравенства	9
I.3. Равенки и неравенства	10
I.4. Дополнителни задачи	12
II Теорија на броеви	
II.1. Деливост	15
II.2. Прости броеви	18
II.3. Најмал заеднички содржател и најголем заеднички делител	19
II.4. Диофантови равенки	20
III Текстуални задачи	
III.1. Броеви и цифри	22
III.2. Пазаруваме и пресметуваме пари	24
III.3. Времето е важно	27
III.4. Задачи со мерни броеви	28
III.5. Задачи со работа	33
III.6. Дополнителни задачи	34
IV Множества, логика и комбинаторика	
IV.1. Множества	40
IV.2. Логички задачи	41
IV.3. Принцип на Дирихле	43
IV.4. Пребројувања	44
IV.5. Дополнителни задачи	45
V Геометрија	
V.1. Отсечки и агли	48
V.2. Триаголник	49
V.3. Четириаголник	58
V.4. Геометриски неравенства	63
V.5. Конструкции	64

Решенија на задачите

I	Алгебра	
	I.1. Пресметувања	67
	I.2. Неравенства	74
	I.3. Равенки и неравенства	76
	I.4. Дополнителни задачи	82
II	Теорија на броеви	
	II.1. Деливост	90
	II.2. Прости броеви	104
	II.3. Најмал заеднички содржател и најголем заеднички делител	110
	II.4. Диофантови равенки	114
III	Текстуални задачи	
	III.1. Броеви и цифри	119
	III.2. Пазаруваме и пресметуваме пари	125
	III.3. Времето е важно	134
	III.4. Задачи со мерни броеви	138
	III.5. Задачи со работа	152
	III.5. Дополнителни задачи	154
IV	Множества, логика и комбинаторика	
	IV.1. Множества	167
	IV.2. Логички задачи	170
	IV.3. Принцип на Дирихле	175
	IV.4. Пребројувања	179
	IV.5. Дополнителни задачи	182
V	Геометрија	
	V.1. Отсечки и агли	188
	V.2. Триаголник	192
	V.3. Четириаголник	226
	V.4. Геометриски неравенства	243
	V.5. Конструктивни задачи	247
	Литература	262

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент 16* е наменета за талентираните ученици по математика од седмо одделение и на извесен начин е продолжение на книгата *Математички 4*. Меѓутоа, сметам дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 481 решени задачи во која во пет одделни дела се обработени алгебарски, аритметички, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски, задачи од теорија на броеви (деливост) и задачи од теоријата на множества, приспособени за учениците на возраст од тринаесет до четиринаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, текстуалните задачи се поделени во шест дела, и тоа: *Броеви и цифри*,

Пазаруваме и пресметуваме пари, Времето е важно, Задачи со мерни броеви, Задачи со работа и Дополнителни задачи, задачите од четвртиот дел се распоредени во пет дела, и тоа: *Множества, Логички задачи, Принцип на Дирихле, Пребројувања и Дополнителни задачи*, а истото се однесува и на разработката на геометриските и на задачите од теоријата на броеви.

Рецензентите, д-р Методи Главче и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодарам.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сум благодарен на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ми биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје
мај, 2020 г.

Авторот

I АЛГЕБРА

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Определи ја цифрата на единиците на бројот

$$18+18^2+18^3+\dots+18^{19}+18^{20}.$$

2. Определи ја цифрата која се наоѓа на 2019 децималното место во децималниот запис на дробката $\frac{469}{1998}$.

3. Која цифра се наоѓа на 2019-тото место во децималниот запис на дробката $\frac{2}{7}$?

4. Определи го збирот на првите 450 децимали во децималниот запис на дробката $\frac{11}{700}$.

5. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{2018+2018+2018}{2018+2018+2028+2018}.$$

6. Пресметај ја вредноста на изразот

$$0,01+0,02+0,03+0,04+\dots+0,67+0,68.$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот

$$1:\{0,68-(\frac{7,7}{2,8}-0,695:1,39):[1+(0,126+0,15):(0,15-0,126)]\},$$

8. Определи ја вредноста на изразот:

$$[(1,08-\frac{2}{25}):\frac{4}{7}]:[(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4})\cdot 2\frac{2}{17}].$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(2+\frac{1}{5}-\frac{5-\frac{1}{2}}{3})\cdot(2+\frac{6}{7})+\frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{44}+\frac{4}{33}}.$$

10. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{\frac{0,21}{0,75-0,6}-\frac{7}{6}\cdot(\frac{1}{15}+\frac{3}{8}+\frac{29}{40})}{\frac{28}{65}\cdot(\frac{9}{2}-\frac{25}{7})}.$$

11. Пресметај ја вредноста на изразот

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6} + \dots + \frac{21}{20} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{20}) .$$

12. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{(2,4+1\frac{1}{2}) \cdot 2,5 + (6\frac{1}{12} : 6 - 1\frac{1}{72}) \cdot (8\frac{5}{7} - 1\frac{5}{21})}{54,75 - 4,5 : 0,1} .$$

13. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{(1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} - 1,75 - 1,125) : \frac{7}{12}}{(\frac{13}{40} - 0,2125) \cdot 400} \cdot (6,79 : 0,7 + 0,3) .$$

14. Определи ја вредноста на изразот

$$[(6\frac{3}{7} - \frac{0,75 \cdot 4 - 2}{0,35}) \cdot 2,8 + 1,75] : 0,05 .$$

15. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{0,725 + 1 - 1 : 40 - 40 \cdot 0,032}{\frac{115}{3} - \frac{5}{3} \cdot 7 + 1\frac{5}{6} \cdot 0,3 \cdot 0,75}$$

16. Пресметај ја вредноста на изразот

$$6 : \frac{1}{3} - 0,8 : \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{1\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1 + 2,2 \cdot 10}} .$$

17. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{(7 - 6,35) : 6,5 + 9,9}{(1,2 : 36 + 1,2 : 0,25 - 1\frac{5}{6}) : \frac{169}{24}} .$$

18. Пресметај $\frac{3}{7}$ од вредноста на изразот

$$\frac{1 - \frac{1}{3} \cdot (2 + \frac{1}{6})}{3\frac{2}{5} + \frac{10 - \frac{1}{3}}{4} \cdot \frac{5}{8}} \cdot 8\frac{3}{5} - \frac{1,5 \cdot \frac{15}{4} \cdot 2,5 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{6}{\frac{12}{11} \cdot (\frac{8}{3} - \frac{7}{4}) \cdot 7}} .$$

19. Пресметај ја вредноста на изразот

$$6 : \frac{1}{3} - 0,8 : \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{1\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1 + 2,2 \cdot 10}} .$$

20. Определи ги бројните вредности на изразите и спореди ги по големина:

$$A = \frac{|5,1|-1,9+0,2|-5,4|}{-0,45-3,1|-4,23-0,27|} \quad \text{и} \quad B = \frac{|4,25-5,35|:(-0,2)-|-5,25|:-0,625|}{|12,55-26,45| \cdot 5}.$$

21. Нека c е цифрата на единиците на четирицифрениот број $\overline{256c}$ кој е делив со 6. Ако

$$a = \frac{3\frac{2}{13} \cdot 4,5 + 4,5 \cdot 6\frac{11}{13}}{7,3513\frac{3}{4} - 5,3513\frac{3}{4}} - 2,5 \quad \text{и} \quad b = 8\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3} : (22 - 21\frac{5}{9})$$

определи ја вредноста на изразот $(2a - \frac{1}{b})c$.

22. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$|a - |b + |c|| + c| + |a + |b - |c|| - c|$$

ако $a = -5, b = -6, c = -7$.

23. Кои собироци треба да се изостават во изразот $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$, за вредноста на новиот збир да биде 1?

24. Нека

$$A = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} \quad \text{и} \quad B = -5 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{1}{2}}}.$$

Докажи дека $C = \frac{7}{11}A + 18B$ е цел број.

1.2. НЕРАВЕНСТВА

25. Нека x е ненулти рационален број. Што е поголемо x или $\frac{1}{x}$? Испитај ги сите можности.
26. Што е поголемо: $\frac{1989}{1990}$ или $\frac{1988}{1989}$?
27. Што е поголемо $\frac{29}{1996}$ или $\frac{7}{500}$?
28. Која дробка е поголема $\frac{5553}{5557}$ или $\frac{6664}{6669}$?
29. Спореди ги дробките $\frac{1+2+3+\dots+50}{2018}$ и $\frac{1275}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9}$.
30. Пресметај ги вредностите на изразите

$$A = \frac{1}{2} - \frac{6}{5} + \frac{2}{3}, B = |1 - A| \text{ и } C = |B| - 2$$

и подреди ги по големина.

31. Нека

$$x = 3, y = -1, z = -7, A = 4 - x(x + y), B = 2x + z + 1, C = z - (1 - z).$$

Спореди ги по големина апсолутните вредности на A, B и C .

32. Што е поголемо: $(-2018)^{2019}$ или $(-2019)^{2018}$?

33. Дадени се множествата $A = \{1, 2, \dots, 1993\}$ и $B = \{0, -1, -2, \dots, -1992\}$. Нека c е збирот на сите броеви од множествата A и B , d нивниот производ и e разликата на збирот на непарните броеви од A и парните броеви од B . Подреди ги броевите $|c - d|$, $|d - e|$ и $|e - c|$ по големина.

34. Докажи дека

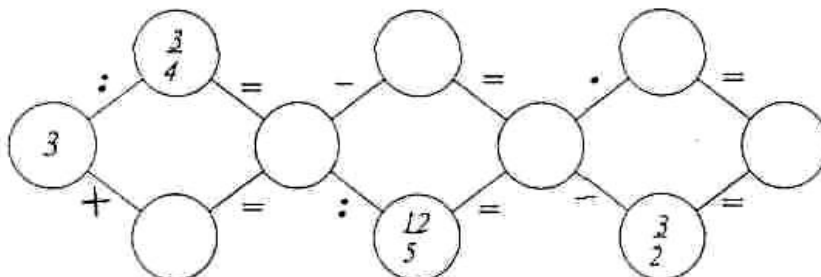
$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2020} < \frac{1}{4}.$$

1.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

35. Определи ги природните броеви a, b, c такви што

$$\frac{283}{255} = 1 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}.$$

36. Во празните кругови запиши ги соодветните броеви така што со изведувањето на назначените операции ќе се добијат точни резултати.



37. Решија равенката

$$(-10) + (-9) + \dots + (x - 1) + x = -27.$$

38. Реши ја равенката

$$\frac{2+4+6+\dots+2018}{1+3+5+\dots+2017} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2018}.$$

39. Реши ја равенката

$$0,4 \cdot \left(\frac{2}{3}x - 1\right) + \frac{3}{5} = \left(-2\frac{1}{4}\right) : 0,9.$$

40. Определи ја вредноста на изразот $A = \frac{a^2 - 2a}{a^2 - 4a + 2}$, ако a е решение на равенката:

$$3a + 1 - (5a - (4a - 10)) + 5 = a - 1.$$

41. Определи ја вредноста на изразот $M = \frac{|a-x|}{3} - \frac{|-a+2x|}{2}$, каде

$$a = \frac{-5(-\frac{1}{7}) + 2,1(-0,3)}{5(-\frac{1}{3}) - 2(-0,25)},$$

а x е решението на равенката

$$-3\frac{1}{3} \cdot 1,2 - x = -3,25 \cdot 1\frac{3}{13} - 6.$$

42. Пресметај

$$M = \frac{169^{12} + 13^{24} - 3^{72}}{81^9 \cdot (-27)^7} \text{ и } N = \left(\frac{2^8 \cdot (-3)^9}{6^4}\right)^3 \cdot \frac{12^5}{(18^4)^3 \cdot ((-4)^3)^2} \cdot \frac{32 \cdot (-6)^3}{(2^3 \cdot 3^5)^4}.$$

Спореди ги вредностите на x и y , ако x е решение на равенката

$$\frac{3}{2} \left(-\frac{5}{6} + 4\left(\left(\frac{5}{24} + \frac{7}{3}\left(x + \frac{5}{24}\right)\right)\right)\right) = -1,$$

а y е решение на равенката $My = N$.

43. Реши ја равенката:

$$2|x| = 6 - x.$$

44. Реши ја равенката

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = 2\frac{1}{5}.$$

45. Реши ја равенката:

$$\frac{|2x-3|}{5} = 6.$$

46. Реши ја равенката:

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{3}{2} - x\right|.$$

47. Нека a, b и c се цели броеви такви што важи $ab = -6, ac = -10$ и $bc = 15$. Определи го производот abc и броевите a, b и c .

48. Определи ги броевите a и b за кои важи

$$a + b = ab = \frac{a}{b}.$$

49. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} A + B = \frac{5}{6} \\ B + C = 1\frac{7}{10} \\ C + A = 5\frac{8}{15}. \end{cases}$$

50. Определи ги сите цели броеви x такви што

$$\frac{1}{3} < \frac{1-x}{5} < \frac{11}{12}.$$

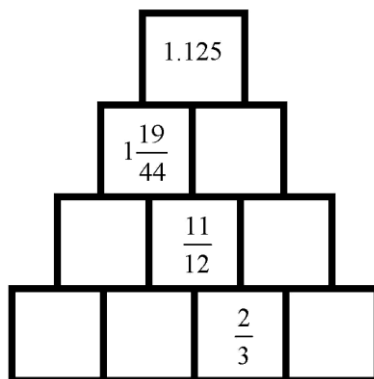
51. Определи ги дробките со именител 9 кои се поголеми од $\frac{2}{3}$ и се помали од $\frac{5}{6}$.

52. Определи ги сите рационални броеви a за кои е точно неравенството

$$\frac{3a-2}{a+1} < 0.$$

1.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

53. Во секое празно поле на фигурата дадена на цртежот десно запиши по еден број така што се исполнети условите: во најгорното поле се наоѓа производот на двата броја кои се непосредно под него; во секое поле од вториот ред се наоѓа клучникот на двата броја кои се непосредно под него и тоа така што левиот број се дели со десниот; во секое поле во третиот ред се наоѓа збирот на двата броја кои се наоѓаат во полињата по него.



54. Во празните полиња на квадратот на цртежот десно запиши цели броеви така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на двете дијагонали ќе биде еднаков.

		-16
-8		-3

55. Во полињата на 4×4 табела распореди прости броеви така што производот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на 1989.
56. Супермагичен $n \times n$ квадрат е квадратот во кој производот на броевите запишани во полињата на секоја колина, секој ред и на секоја дијагонала се еднакви.
- а) Дади пример на супермагичен 3×3 квадрат таков што броевите запишани во сите полиња се различни и производот по колони, редови и дијагонали е еднаков на 1.
- б) Состави супермагичен 3×3 квадрат таков што броевите запишани во сите полиња се различни и збирот на броевите запишани во осумте полиња е еднаков на бројот запишан во деветтото поле намален за 1.
57. Дали може бројот 1 да се запише како збир на различни позитивни броеви со броител 1, секој од кои е помал од $\frac{1}{1000}$?
58. На даден број x го додаваме неговиот реципрчен број $\frac{1}{x}$, потоа со добиениот број ја повторуваме постапката итн. Ако почетниот број е $\frac{1}{3}$, дали е можно после неколкукратна примена на оваа операција да се добие бројот:
- а) $\frac{2018201620142012}{2019201720152013}$, б) $\frac{2018202020222024}{2019202120232025}$?
59. Дали може број од видот $\overline{123456789ab...xy987654321}$ да биде точен квадрат на природен број?
60. Дали е можно производот на некои 99 од броевите $1!, 2!, 3!, \dots, 100!$ да е точен квадрат?
61. Дали постојат три различни природни броја такви што збирот на секои два од нив да е степен на природниот број:
- а) 3 б) 2.

62. Операцијата $*$ е дефинирана на следниот начин: $a*b=b-a$. Пресметај ги вредностите на изразите:

а) $(1*2)*(3*4)$ б) $1*((2*3)*4)$ в) $1*(2*(3*4))$
 г) $((1*2)*3)*4$ д) $(1*(2*3))*4$

63. Премести само едно кибритено чкорче за да добиеш точно равенство:

$$\vee ||| - || = |X$$

Опреди ги сите решенија.

64. Реши го бројниот ребус: $a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}$, во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

65. Опреди ги сите четирицифрени броеви $\overline{abba}$ такви што

$$\overline{abba} \cdot 2 = \overline{ccdd}$$

каде a, b, c и d се различни цифри.

66. Првата цифра одлево на шестцифрениот број е еднаква на 2. Ако оваа цифра се пренесе од првото на последното место добиениот број ќе биде типати поголем од почетниот број. Опреди ги двата броја.

67. Свездичките замени ги со соодветните цифри и пресметај го природниот број n ако $\overline{*71*}:36=n$.

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Определи го четирицифрениот број $\overline{xyzt}$ за кој важи
$$\overline{xyzt} + 4 \cdot \overline{yzt} + 2 \cdot \overline{zt} = 2018.$$
2. Со колку нули завршува производот на првите 150 природни броеви?
3. Докажи дека збирот на десет последователни природни броеви не е делив со бројот 4.
4. Докажи дека:
 - а) не постои природен број n таков што броевите n и $n+2006$ имаат еднаков збир на цифри,
 - б) постојат бесконечно многу природни броеви n такви што броевите n и $n+2007$ имаат еднаков збир на цифри.
5. Нека x е n -цифрен број и y е природен број кој се добива со некакво разместување на цифрите на бројот x . Дали е можно равенството $x + y = 99 \dots 9$, ако
$$\begin{matrix} & n \\ & \text{---} \end{matrix}$$
 - а) $n = 2019$,
 - б) $n = 2020$?
6. При делење на бројот $n+125$ со бројот 19 се добива остаток 7. Определи го остатокот при делење на бројот n со 19.
7. Дадена е дробката $\frac{28a3}{4276}$. Кој број треба да се одземе од броителот и да се додаде на именителот за да се добие дробката $\frac{2}{7}$?
8. Определи два трицифрени броја чиј количник е 7, а збирот им е делив со 336.
9. Нека n е природен број запишан со 2018 единици, 2018 двојки и определен број нули. Докажи дека n не е точен квадрат.

10. Дали постои природен број N кој е делив со 11, чии цифри се различни и се во растечки редослед од лево кон десно?
11. Определи ги цифрите x, y така што бројот $\overline{x74y}$ е делив со 15.
12. Определи ги цифрите a и b така што производот $\overline{31a} \cdot \overline{62b1}$ ќе биде делив со 15.
13. Определи ги непознатите цифри a и b така што бројот $\overline{198aa8b}$ ќе биде делив со 12. Кои броеви ги доби?
14. Определи ги цифрите x и y така што четирицифрениот број $\overline{x04y}$ ќе биде делив со 72.
15. Определи ги непознатите цифри a и b така што бројот $\overline{2018ab}$ биде делив со 72.
16. Определи ги сите трицифрени броеви кои се деливи со 11 и чиј збир на цифри е еднаков на 10.
17. Определи ги цифрите a и b така што бројот $n = \overline{a1995} + \overline{1995b}$ ќе биде делив со 44.
18. За двоцифрените броеви $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ важи $\overline{cd} = 4 \cdot \overline{ab}$. Докажи дека четирицифрениот број $\overline{abcd}$ е делив со 13.
19. Определи ја цифрата a така што изразот $17 \cdot \overline{16a} + 2019 \cdot 2020$ ќе биде делив со 12.
20. Определи ги трицифрените броеви $\overline{abc}$, каде $c \neq 0$ такви што збирот $\overline{abc} + 2 \cdot \overline{cba}$ е делив со 17.
21. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{a783b}$ ќе биде делив со 56.
22. Напиши ги сите четирицифрени броеви кои се деливи со 4 и со 9, кои при делењето со 10 дават остаток 4, а цифрата на илјадитите им е трипати поголема од цифрата на стотките.
23. Докажи дека бројот $2^{1988} - 1$ е делив со 5.

24. Докажи дека збирот $1^{1988} + 2^{1988} + 3^{1988} + 4^{1988} + 5^{1988} + 6^{1988}$ е делив со 5, но не е делив со 10.
25. Докажи дека 81 е делител на $10^{1990} - 10$.
26. За секој природен број n со $S(n)$ да го означиме зирот на неговите цифри. Дали постои природен број k таков што
- а) $S(k) + S(k^2) = 2008$, б) $S(k) + S(k^2) = 2009$.
27. Дали постои природен број k таков што бројот
- а) $n(n+3)(n+4)(n+7)+k$ б) $n(n+3)(n+4)(n+8)+k$
- е точен квадрат за секој природен број n ?
28. Определи ги сите цели броеви n за кои дробката $\frac{5n-6}{n}$ е природен број.
29. Определи ги сите природни броеви n за кои вредноста на дробката $\frac{24}{30-n}$ исто така е природен број.
30. Определи го природниот број a таков што вредноста на дробката $\frac{a+75}{a-3}$ е природен број.
31. Определи ги сите цели броеви n за кои бројот $\frac{n+4}{3n-2}$ е цел.
32. Цифрите a, b, c, d се различни прости броеви. Определи ги сите броеви од видот $\overline{ab10cd}$ кои се деливи со 264.
33. Даден е природен број чиј декаден запис содржи 1994 единици, 1994 двојки и определен број нули. Докажи дека дадениот број не е квадрат на природен број.
34. Страниците на една книга се нумерирани со броевите од 1 до 100. Од книгата се искинати неколку листови. Збирот на броевите со кои се нумерирани страниците на искинатите листови е еднаков на 4949. Колку листови се искинати?
35. Определи ги сите природни броеви n за кои при запишувањето на броевите $5n$ и $11n$ се потребни вкупно девет цифри и секоја од цифрите од 1 до 9 се користи точно по еднаш.

36. Дали постои реален број x таков што $[2x] + [3x] + [5x] = 2019$?

II.2. ПРОСТИ БРОЕВИ

37. Разликата на еден двоцифрен број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е 45. Збирот на овие два броја е точен квадрат на природен број. Определи ги сите двоцифрени броеви кои ги имаат овие својства.

38. Производот на три последователни парни природни броја е 1680. Определи ги овие броеви.

39. Определи ги сите двоцифрени природни броеви такви што тој број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед се прости.

40. Производот на еден двоцифрен и еден трицифрен природен број во декаден запис се запишува само со неколку цифри 2. Определи ги овие броеви.

41. Производот на два трицифрени броја е запишан само со неколку тројки. Кои се тие броеви?

42. Определи го најмалиот природен број кој помножен со бројот 540 дава куб на природен број.

43. Ако p е прост број, тогаш $p + 2017$ е сложен број. Докажи!

44. Ако p е прост број, тогаш $2016p + 1$ е сложен број. Докажи!

45. Ако p е прост број, тогаш $p^{11} + 1989$ е сложен број. Докажи!

46. Ако p е прост број, докажи дека

а) $p^3 + 1987$ е сложен број,

б) $p^{1987} + 1987$ е сложен број.

47. Ако p е прост број, тогаш $p^{1996} + 1997p$ е сложен број. Докажи!

48. Ако p е прост број, докажи дека $p^{1988} + p^{1989}$ е сложен број.

една коза. Определи го најмалиот број кози што може да ги има стадото на Петре.

60. Ако природниот број n се подели со 3, се добива остаток 1, а ако бројот n го поделиме со 37, се добива остаток 33. Определи го остатокот кој се добива кога n ќе се подели со 111?
61. Природен број n при делење со 3 дава остаток a , при делење со 6 дава остаток b и при делење со 9 дава остаток c . Познато е дека $a+b+c=15$. Определи го остатокот при делење на бројот n со 18.
62. Определи три последователни природни броеви чиј производ е 24 пати поголем од најголемиот заеднички делител на броевите 455 и 1001.
63. Производот на два природни броја е 1350, а нивниот најголем заеднички делител е 15. Кои се тие броеви?
64. Определи го најмалиот природен број кој при делење со 2, 3, 4, 5 и 6 дава различни остатоци.
65. Производот на два природни броја е 68040, а нивниот најмал заеднички содржател е 3780. Определи ги овие броеви.
66. Дали постојат природни броеви x и y такви што
- $$\text{NZD}(x, y) + \text{NZD}(x+1, y+1) = x - y?$$
67. Определи го најмалиот позитивен рационален број кој при делење со $\frac{35}{396}$ и со $\frac{28}{297}$ дава целоброен количник.
68. Збирот на 11 природни броеви е 2016. Определи ја најголемата можна вредност на најголемиот заеднички делител на овие природни броеви.

II.4. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

69. Во една соба се наоѓаат столици со 3 и со 4 ногалки. Кога на секоја столица ќе седне човек, во собата има вкупно 69 нозе и ногалки. Колку столици се со 3, а колку со 4 ногалки?

70. Збирот на две дробки со едноцифрени именители е еднаков на $\frac{73}{15}$.
Опреди ги сите дробки со наведеното својство.
71. Куќите на левата страна на улицата се нумерирани со непарни броеви, а куќите на десната страна се нумерирани со парни броеви. Збирот на сите куќни броеви на едната страна на улицата е 1309, а на другата страна на улицата е 2162. Колку куќи има во оваа улица?
72. Опреди ги сите цели броеви x за кои дробката $\frac{4x-17}{5x+9}$ исто така е цел број.
73. За кои цели броеви a равенката $a+5+\frac{2}{x-1}=0$ има целобројни негативни решенија? Опреди ги овие решенија.
74. Најди ги сите парови цели броеви (a,b) за кои важи $a=\frac{4b-5}{b-2}$.
75. Во множеството цели броеви реши ја равенката $x^2+\frac{6}{y}=10$.
76. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1.$$
77. Опреди ги сите природни броеви a,b,c,d,e такви што $2<a<b<c<d<e$ и

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1.$$
78. Во автобусите на една туристичка агенција, треба да се распоредат членовите на една туристичка група, така што во секој автобус да има ист број туристи. На почетокот во секој автобус влегле по 22 туристи при што останал несместен еден турист. Но, еден автобус заминал празен, па во останатите автобуси туристите се распоредиле рамномерно. Колку туристи и колку автобуси биле на почетокот, ако во секој автобус влегле не повеќе од 32 туристи?

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Определи го најголемиот број броеви кои може да бидат запишани еден по друг така што збирот на секои три последователно запишани броеви да е позитивен, а збирот на секои два последователно запишани броеви да е негативен.
2. Збирот на илјада последователни цели броеви е еднаков на 31500. Определи ги најмалиот и најголемиот број.
3. Определи девет последователни цели броеви такви што збирот на првите три, почнувајќи од најмалиот, е еднаков на останатите шест броја.
4. Петруш требало некој број да го подели со 9. Наместо да го подели, тој од бројот одзел 9 и го добил бројот -603 . Кој број требало да го добие Петруш да не згрешел?
5. Илија наместо на тастатурата да отчука двоцифрен број, тој по грешка пред првата цифра и по втората цифра ја отчукал цифрата 4 и добил четирицифрен број кој е 54 пати поголем од двоцифрениот број. Кој број требало да го отчука Илија?
6. При решавање на една задача Јован требало да помножи два двоцифрени броја. Меѓутоа, тој згрешил при што цифрите на едниот број ги запишал во обратен редослед, па добил производ кој е за 3816 поголем од точниот резултат. Определи го производот кој Јован требало да го добие.
7. Збирот на два броја е 836. Цифрата на единиците на еден од броевите е 0. Ако на овој број се избрише цифрата на единиците, т.е. се избрише цифрата 0, тогаш се добива вториот број. Кои се тие броеви?
8. Определи го најголемиот трицифрен број запишан со различни цифри, таков што збирот на сите трицифрени броеви кои може да се запишат со помош на сите три цифри на тој број е еднаков на 2220.

9. Цифрата на единиците на еден број е 2. Ако на бројот му се избрише цифрата на единиците, се добива број кој е за 40529 помал од почетниот број. Определи го почетниот број.
10. Броителот на дропката $\frac{23}{42}$ е зголемен за некој непознат број, а именителот е намален за истиот број, па по скратувањето е добиена дропката $\frac{7}{6}$. Определи го непознатиот број.
11. Дадена е дропката $\frac{1988}{1987}$. Кој број треба да се одземе од броителот и да се додаде на именителот за да по скратувањето се добие дропката $\frac{2}{3}$.
12. Рационалниот број $-\frac{4}{7}$ е добиен со скратување на рационален број чиј збир на броителот и именителот е еднаков на 885. Определи го почетниот рационален број.
13. Разликата на два броја е 63. Ако поголемиот од овие два броја се зголеми 12 пати, а помалиот остане непроменет, тогаш новата разлика е 1999. Определи ги почетните броеви.
14. Определи ги броевите a, b, c за кои се знае дека нивниот збир е поголем од a за $\frac{5}{2}$, од b за $\frac{59}{6}$ и од c за $\frac{5}{3}$.
15. Кога на позитивен децимален број децималната запирка ќе се помести за едно место во лево се добива број кој е за 123,48 помал од почетниот број. Определи го почетниот број.
16. Со кој број треба да се помножи збирот на броевите $2\frac{1}{2}$ и $1\frac{3}{4}$, за да се добие разликата која се добива кога од поголемиот број ќе се одземе помалиот број?
17. Ако на некој број му го додадеме бројот 2, па добиениот збир го помножиме со -3 , од добиениот производ одземеме -5 , а потоа од добиената разлика го одземеме почетниот број, новата разлика ја помножиме со -2 и на крајот од добиениот производ одземеме 9, ќе го добиеме бројот -13 . Определи го почетниот број.
18. Броителот на една дропка е зголемен за 40%. Колку проценти треба да го намалиме именителот за да добиеме два пати поголема дропка од почетната дропка?

19. Илија замислил еден број. Потоа Милан го удвоил неговиот број. Потоа Ангел го утростручил бројот на Милан, а потоа Иван го учетворостручил бројот на Ангел. Збирот на сите добиени броеви е еднаков на точниот квадрат на бројот кој го замисли Илија. Кој број го замисли Илија?
20. Дарко замислил еден број, потоа му додал $\frac{1}{2}$, па добиениот број го помножил со $\frac{2}{3}$ и така добиениот број го зголемил за $\frac{3}{4}$, после што добил $\frac{253}{12}$. Кој број го замислил Дарко?

III.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

21. Иван бил во луна парк. Четириесет денари дал за две топки сладолед, а половина од останатите пари ги потрошил за возење со автомобилчиња. Потоа за 20 денари купил чоколадна банана, а половина од остатокот на парите дал за возење со рингишпилот. Потоа купил топка сладолед за 20 денари и половина од остатокот на парите ги дал за влез во тунелот на стравот. Откако излегол од тунелот на стравот купил колач за 20 денари и половина од остатокот на парите ги дал за возење со вовчето. На крајот му останале само 30 денари. Колку пари имал Иван кога дошол во луна паркот?
22. Иван на екскурзија понел извесна сума пари. За влезница во музеј потрошил $\frac{3}{7}$ од целокупната сума, за сок потрошил $\frac{3}{5}$ од остатокот, а потоа за купување сувенир потрошил $\frac{3}{8}$ од парите кои му останале после купувањето на влезницата за музеј и сокот. Колку пари имал Иван на почетокот, ако му останале 80 денари?
23. Три сестри Јана, Даниела и Ана сакале да купат исти шешири. Но, на Јана и недостасувале пари за третина од цената на шеширот, на Даниела четвртина, а на Ана шестина. Кога шеширот поефтинил за 940 денари сестрите ги обединиле своите заштеди и купиле три шешири, при што не им останал ниту еден денар. Колку чинел еден шешир пред поефтинувањето?

24. Филип, Александари Марио поделиле 2229 денари. Колку добил секој од нив ако делот на Марио е шест пати поголем од една петтина на делот на Филип, а две петтини од делот на Филип се за 20 денари повеќе од сумата пари која ја добил Александар?
25. Тројца другари треба да поделат 7777 денари. Колку ќе добие секој од нив, ако две петтини од сумата на Јово се еднакви на сумата на Милан, а седум деветтини од сумата на Милан се еднакви на сумата на Симон?
26. Богдан влегол во книжарница со намера да купи збирка по математика и планирал да потроши $\frac{5}{6}$ од парите кои ги понел. При купувањето дознал дека збирката поефтинила за 40%. Богдан ја купил збирката, купил една гума за 50 денари и му останале 700 денари. Колку пари имал Богдан пред да влезе во книжарата?
27. Цената на една книга е намалена за 20%, по што книгата се продавала за 1988 денари. Определи ја цената на книгата пред намалувањето.
28. Марко се договорил со Мирко да бере лешници 6 часа, за што требало да му плати 800 денари и да ги задржи заштитните ракавици кои ќе ги користи при берењето. Меѓутоа Мирко работел 5 часа и Марко му исплатил 650 денари, со тоа што Мирко ги задржал ракавиците. Колку пари чинат ракавиците?
29. Цената на влезницата за ракометен натпревар е 2000 денари. Кога цената на влезницата се намалила, бројот на посетителите се зголемил за 50%, а приходот се зголемил за 20%. Определи ја новата цена на влезницата.
30. Ема со третина од парите кои ги имала купила книга, со четвртина купила тетратка и со шестина купила молив, по што и останале 75 денари. Колку пари имала Ема на почетокот и по колку пари платила за секоја од купените работи?
31. Јанко и Саво имале еднакви суми пари. Јанко купил компири по цена 15 денари за килограм, а Саво по цена 10 денари за килограм. По која цена треба заедно да ги продадат компирите за да без заработувачка ги вратат вложените пари?
32. Горјан и Јована заедно имале 460 денари и решиле со учество по половина да купат топка. Горјан дал $\frac{2}{3}$ од своите пари, а Јована дала $\frac{3}{7}$

- од своите пари. Колку пари чини топката и колку пари имал секој од нив?
33. Марко работи како градинар за годишна плата од 160000 денари и едно одело. По 10 месеци тој ја напуштил работата и сопственикот на имотот му платил 130000 денари и одело. Колку чини оделото на Марко?
34. Кога четвртина од една сума пари се собере со третина од друга сума пари, која е за 20 денари поголема од првата, се добива сума која е за 280 денари поголема од половината на трета сума пари, која е за 50 денари помала од првата сума. Определи ги трите суми пари.
35. Милан, Лилјана и Ивана заедно имале 2540 денари. Кога Милан потрошил $\frac{1}{3}$ од своите пари, Лилјана потрошила $\frac{1}{4}$ од своите пари и Ивана потрошила $\frac{1}{5}$ од своите пари, на сите тројца им останала иста сума пари. Колку пари имал секој од нив?
36. Две третини од некоја стока се продадени со загуба од 20%, а четвртина од првобитното количество стока е продадено со добивка од 50%. Со колку проценти добивка или загуба треба да се продаде преостанатото количество стока за да се оствари планираната цена?
37. Цената на златото на берзата секое претпладне се покачува за 10%, а секое попладне се намалува за 10%. Дали по 50 дена работа на берзата цената на златото ќе биде поголема, помала или еднаква на половината од почетната цена?
38. Двајца рибари отишле на риболов. Едниот уловил 3 риби, а другиот 5 риби. Кога почнале да ги печат, наишол некој патник и седнал со нив да руча при што ги изеле сите риби, но така што тројцата добиле еднакви порции. По ручекот патникот на рибарите за својот оброк им дал 400 денари. Како меѓу себе рибарите правилно ќе ги поделат парите?
39. Половина керамида чини колку половина цигла и уште 10 денари, а три цигли чинат колку две керамиди и уште 10 денари. Колку чини една керамида, а колку една цигла?
40. Четири другари заеднички купиле компјутер. Првиот платил 50% од вредноста на компјутерот, вториот дал третина од сумата која ја дале останатите тројца, третиот уплатил 25% од сумата која ја дале оста-

натите тројца и четвртиот дал 1000 денари. Определи ја цената на компјутерот.

41. Четворица другари заеднички купиле топка. Првиот ја платил половината од вредноста на топката, вториот дал третина од парите кои ги дале останатите тројца, а третиот дал четвртина од сумата која ја дале останатите тројца. Четвртиот другар дал 50 денари. Колку чинела топката?
42. Таткото има пет сина, кои се на различна возраст. Тој има определена сума пари која ја поделил на своите синови. На најмладиот син му дал најмалку пари, а на секој следен по возраст син му дал по 4500 евра повеќе отколку на претходниот син. Најстариот син добил 13 пати повеќе пари отколку најмладиот син. Колку пари добил синот кој е трет по возраст?
43. Елена го пратила Горјан да купи поштенски марки од 1, 2, 3, 5 и 10 денари. Горјан требало да купи по четири марки од два вида, а по три од останатите три вида, но заборавил колку марки од кој вид. Добил само монети од 10 денари и тоа точно колку што требало да ги плати сите марки. Колку марки од кој вид требало да купи Горјан?

III.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

44. Пет ученици за пет минути јадат пет хамбургири. За кое време петнаесет ученици кои јадат со истиот апетит ќе изедат петнаесет хамбургери?
45. Автомобил патот меѓу местата A и B го поминува за 6 часа, а автобус за 10 часа. Ако автомобилот и автобусот тргнат истовремено, еден од местото A , а друг од местото B , по колку време ќе се сретнат.
46. Илија од дома до училиште пешачи 30 минути, а неговиот помал брат Марко пешачи 40 минути. По колку минути Илија ќе го стигне Марко, ако Марко тргнал 5 минути пред Илија?
47. Определи го помалиот агол меѓу стрелките на часовникот во 3 часот и 40 минути.

48. Определи го аголот што го зафаќаат минутната и часовната стрелка на часовникот во 5 часот и 12 минути.
49. Во еден момент големата и малата стрелка на часовникот зафаќаат агол од 27° . Определи го аголот меѓу стрелките на часовникот после точно 6 часа.
50. Кога меѓу 5 и 6 часот стрелките на часовникот по втор пат ќе зафаќаат агол од 90° ?
51. Ана и Билјана во ист ден тргнале на работа. Ана работи три дена последователно, потоа одмара еден ден и на ист начин продолжува понатаму (3 дена работи, па 1 ден одмара). Билјана работи седум дена последователно, потоа одмара 3 дена и на ист начин продолжува понатаму (7 дена одмара, па 3 дена одмара). Колку заеднички денови одмор ќе имаат Ана и Билјана во првите 1000 дена од тргнувањето на работа?
52. Софија е постара од своите тројца браќа 1, 2 и 5 години. Ако следната година таа ги собере годините на своите браќа, тогаш добиениот збир ќе биде за 20 поголем од годините кои Софија ќе ги има тогаш. Колку години има Софија денес?
53. Ѓорѓи е двапати постар од Митко. Цифрата на единиците на годините на Митко е еднаква на збирот на цифрите на годините на Ѓорѓи, а цифрата на десетките на годините на Митко е еднаква на разликата на цифрите на годините на Ѓорѓи. Колку години има Митко?
54. За три часа возење автомобил поминал 180 km . Првиот час поминал 0,375 од целиот пат, а вториот час поминал 0,9 од патот кој го поминал првиот час. Колку километри поминал автомобилот во третиот час од возењето?

III.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

55. Ако топката од некоја висина слободно падне на земјата, таа секој пат после удирањето од земјата отскокнува до $\frac{5}{9}$ од висината од која паднала. Топката ја пуштаме да падне од висна од 108 cm . Определи

ја висината која топката ќе ја постигне откако четири пати ќе отскокне од земјата.

56. Гумено топче кое слободно паѓа секој пат отскокнува од земјата до висина која е за $\frac{1}{4}$ помала од висината од кое паднало. Определи од која висина е пуштено топчето ако тоа по третото отскокнување ја достигнало висината од 432 mm . До која висина топчето ќе отскокне по петтото отскокнување?
57. Кога Никола поминал $\frac{1}{4}$ од патот и уште 5 km , му останало да помине уште $\frac{1}{3}$ од патот и уште 10 km . Колку километри е долг патот кој Никола требало да го помине?
58. Три парчиња жица имаат вкупна должина 34 m . Ако од првото отсече четвртина од неговата должина, од второто отсече половина од неговата должина и од третото отсече шестина од неговата должина, преостанатите парчиња жица ќе имаат иста должина. Определи ја должината на секое парче жица пред сечењето.
59. Висината на скалите кои водат од приземјето до првиот кат во училиштето на Кирил е меѓу 3 и 4 метри. Кирил прво ги искачил половината од скалилата, потоа искачил $\frac{1}{3}$ од преостанатите скалила и на крајот искачил $\frac{1}{8}$ од преостанатите скалила. Висината на едно скалило е $0,16\text{ m}$. Уште колку скалила треба да искачи Кирил за да се качи на првиот кат?
60. Михајло пеш тргнал од местото A до местото B . Откако поминал 1 km и половина од остатокот на патот, му останала уште третина од целиот пат и уште 1 km . Определи го растојанието од местото A до местото B .
61. Марко патувал со велосипед од Прилеп за Крушево. Кога поминал $\frac{1}{4}$ од патот и уште 5 km , му останале $\frac{1}{3}$ од патот и уште 10 km . Колку е долг патот од Прилеп до Крушево?
62. Мирко патувал 4 дена. Првиот ден поминал $\frac{3}{11}$ од вкупната должина на патот, вториот ден $\frac{7}{20}$ од должината на остатокот на патот, третиот

ден $\frac{5}{13}$ од должината на остатокот од патот по вториот ден, а четвртиот ден ги поминал последните 320 km од патот. Колку километри патувал Мирко?

63. Од местото A тргнал автобус за местото B со брзина од 48 km/h , После половина час возење на автобусот, моторциклист кој се движел исто така од местото A кон местото B со брзина од 60 km/h го стигнал автобусот и одма продолжил кон местото B . После пристигнувањето во местото B моторциклистот се задржал во местото B 12 min и продолжил да вози назад кон местото A , па така со автобусот се сретнал на 12 km од местото B . Определи го растојанието меѓу A и B .
64. Горјан и Стојан се наоѓаат на права улица на определено растојание еден од друг. Тие истовремено со велосипеди тргнале еден кон друг, при што во секоја секунда Горјан поминува пат од 6 m , а Стојан поминува пат од 8 m . По 30 секунди од почетокот на возењето Горјан и Никола биле меѓусебно оддалечени како и по 40 секунди од почетокот на возењето. Колку метри Горјан и Стојан биле меѓусебно оддалечени на почетокот на возењето?
65. Ако од висината на Милан се одземе една десеттина и се додаде на висината на Маријана, тогаш Маријана би била повисока за една деветтина од својата висина, а 17 cm повисока од Милан. Колку е висок Милан, а колку е висока Маријана?
66. Врверица за 20 минути истрчува од своето гнездо до стебло на орев и донесува еден орев. Без орев трча со брзина 5 km/h , а со орев трча со брзина 3 km/h . Определи го растојанието од оревото стебло до леглото на верверицата.
67. Од едно шише сок на растворање од 750 ml може да се наполнат 16 чаши од 250 ml . Колку шишиња и колку милилитри сок на растворање се потребни да се добијат 12 l растворен сок?
68. Триесет литри сок се запакувани во 39 шишиња од по $\frac{4}{5}\text{ l}$ и од по $\frac{3}{4}\text{ l}$. Колку шишиња има од по $\frac{4}{5}\text{ l}$, а колку од по $\frac{3}{4}\text{ l}$?
69. Во два сада има $4\frac{1}{6}$ и $3\frac{1}{2}$ литри вода соодветно. Колку вода треба да се претури од првиот во вториот сад, така што после претурањето во

двата сада да има исто количество вода? Образложи го својот одговор!

70. Ако од едно полно буре прелееме во друго празно буре $\frac{1}{6}$ од течноста, а потоа ако сакаме да прелееме уште $\frac{2}{3}$ од преостанатата течност, тогаш во второто буре нема да има место за 48 литри течност. Првото буре собира двапати повеќе течност од второто. Колку литри собира секое буре?
71. Колку литри чиста дистилирана вода треба да се измеша со 120 литри десетпроцентен раствор на алкохол за да се добие четирипроцентен раствор на алкохол?
72. Во два сада има вода. Кога од првиот сад се прелеат во вториот 4,75l, тогаш во вториот сад ќе има 6,5l вода повеќе отколку во првиот сад. Колку вода имало пред прелевањето во првиот, а колку во вториот ако во двата сада вкупно има 50l вода?
73. Во садот A се измешани 9l оцет и 6l вода, а во садот B се измешани 12l оцет и 6l вода. Потоа од двата сада одлеваме по 7l течност и 7l од садот A ги тураме во садот B, 7l од садот ги тураме во садот A. Пресметај колку литри оцет и колку литри вода ќе има во садот A, а колку во садот B.
74. Во садот A се измешани 8 литри вода и 7 литри вински оцет. Во садот B се измешани 11 литри вода и 9 литри вински оцет. Од двата сада се одлеани по 7 литри течност, а потоа оние 7 литри од садот A се турени во садот B, а оние 7 литри од садот B се турени во садот A. Колку литри вински оцет по прелевањето има во садот A, а колку во садот B?
75. Во три цистерни имало вкупно 1560 литри млеко. Ако од првата се одлее $\frac{3}{7}$, од втората $\frac{1}{4}$ и од третата $\frac{1}{5}$ од млекото, тогаш во сите три цистерни ќе остане исто количество млеко. Колку млеко има во секоја цистерна?
76. Три цистерни се полни со млеко. Ако од првата цистерна се одлее $\frac{1}{4}$ од млекото, од втората $\frac{1}{5}$ од млекото и од третата $\frac{1}{6}$ од млекото,

тогаш во сите цистерни ќе остане еднакво количество млеко. Колку млеко има во сите три цистерни, ако во трите цистерни има вкупно 1135 литри млеко.

77. Во 1000 kg свежи јагоди има 99% вода. Во текот на транспортот испарило извесно количество вода, така што тежината на јагодите сега е 500 kg . Колкав процент вода сега содржат јагодите?
78. Дедо Рампо од својата овошна градина набрал $5\frac{3}{4}\text{ kg}$ боровинк, $4\frac{1}{2}\text{ kg}$ преши, $2\frac{19}{20}\text{ kg}$ малини и $1\frac{4}{5}\text{ kg}$ рибизли. Одлучил овошјето да го стави во фрижидер во кутии кои собираат по 750 g . Овошје од различни видов и може да става во иста кутија. Определи колку најмалку кутии му се потребни на дедо Рампо.
79. Вкупната маса на сад наполнет со вода е еднаква на 2000 g . Ако од садот одлееме 20% од водата, тогаш масата ќе се намали на 88% од почетната маса. Определи ја масата на празниот сад и масата на водата.
80. Во една пекара отвориле 4 вреќи со брашно и од првата вреќа зеле $\frac{1}{3}$ од брашното, од втората вреќа зеле $\frac{1}{4}$ од брашното, од третата зеле $\frac{2}{5}$ од брашното и од четвртата зеле $\frac{1}{6}$ од брашното, по што во секоја вреќа останало еднакво количество брашно. Колку брашно имало во секоја вреќа, ако вкупно биле земени 51 kg брашно?
81. Во една продавница имало 98 kg круши и јаболка. Продадени се $\frac{4}{9}$ од крушите и $\frac{3}{5}$ од јаболката, со што е продадено половината од целото количество јаболка и круѓи. Колку килограми биле јаболка, а колку круши?
82. Гуска, патка и кокошка заедно имат маса 12 kg . Гуската има два пати поголема маса од патката и кокошката заедно, а патката е три пати потешка од кокошката. Определи ја масата на патката.
83. Во продавница за овошје има пет лубеници. Првата и втората лубеница заедно се тешки 12 kg , втората и третата заедно се тешки $13,5\text{ kg}$,

третата и четвртата заедно се тешки $11,5\text{ kg}$, четвртата и петтата заедно се тешки 8 kg , додека првата, третата и петтата заедно се тешки 16 kg . Колку тежи секоја од петте лубеници.

84. Стојан донел на пазар 258 kg јаболка од кои дел продал. Ако продадел 15 kg повеќе ќе му останела само шестина од вкупното количество јаболка. Три осмини од продадените јаболка и уште 5 kg јаболка продал по цена 35 денари за килограм. За остатокот од јаболката добил $\frac{15}{7}$ повеќе пари отколку за јаболката кои ги продал по 35 денари за килограм. По која цена го продал Стојан остатокот од јаболката?
85. Во еден магацин има шајки запакувани во сандаци од 16, 17 и 40 kg . Како магационерот, без да распакува ниту еден сандак, на купувачот му испорачал точно 100 kg шајки?
86. Бранко, Ванчо и Данчо отишле на риболов. Тежината на рибите, кои што ги уловил Бранко била 11 пати поголема од тежината на рибите уловени од Ванчо. Бранко двете најлесни свои риби му ги дал на Данчо и тежината на рибите кои му останале била 8 пати поголема од тежината на рибите уловени од Ванчо. Колку риби уловил Бранко?
87. Со една косилка за 2 часа може да се искоси $2\frac{1}{2}\text{ ha}$ ливада, а со друга, помала косилка може да 1 час и 30 минути да се искоси $1\frac{1}{4}\text{ ha}$. Определи ја плоштината на ливадата која за 3 часа и 36 минути може да се искоси ако се коси истовремено со двете косилки.

III.5. ЗАДАЧИ СО РАБОТА

88. Милан може една работа да ја заврши за 12 дена, Павел истата работа ја завршува за 15 дена, а Мирко оваа работа ја завршува за 20 дена. Колку дена треба тројцата да работат заедно за да ја завршат оваа работа?
89. Еден трактор може да изора некоја нива за 9 часа, а друг трактор истата нива може да ја изора за 12 часа. Прво првиот трактор сам орал

на нивата 3 часа, по заради дефект престанал да ора. Преостанатиот дел на нивата ја изорал вториот трактор. За колку часа целата нива била изорана?

90. Трактористот Матеј може да изора една парцела за 10 дена. Ако му се приклучи трактористот Павел и му помогне во работата два дена, тогаш парцелата ќе биде изорана за 6 дена. Колку дена му се потребни на Павел сам да ја изора парцелата?
91. Еден работник сработува една работа за 30 минути, друг за 60 минути, а трет работник истата работа ја сработува за 180 минути. За колку минути ќе биде сработена работата ако тројцата работници работат заедно?
92. Еден дактилограф може да отчука определен број страници за 5 часа и 20 минути, а на друг дактилограф истиот текст му се потребни 4 часа и 40 минути. Работејќи на ист текст вториот дактилограф отчукал 3 страници повеќе од првиот. Колку страници имал дадениот тест?
93. Базен се полни од две цевки, а се празни од една цевка. Првата цевка го полни базенот за 6 часа, втората го полни базенот за 10 часа, а третата прзни полн базен за 5 часа. За колку часа ќе се наполни базенот ако истовремено се отворени сите три цевки?
94. Расеана домаќинка ја отворила славината од чешмата над кадата и заборавила кадата да ја затвори. Познато е дека кадата се полни за 20 минути, а се празни за 30 минути. По 36 минути домаќинката се сетила дека пуштила вода да се полни кадата. Дали во кадата ќе има вода и колку?
95. Марко ја оставил целосно отворена славината за вода над кадата и заборавил да го стави чепот. Познато е дека кога славината е целосно отворена кадата се полни за 20 минути, а полна када се празни за 30 минути. После 48 минути Марко се сетил дека го заборавил чепот. Колку вода тогаш имало во кадата? Дали водата во кадата прелеала?

III.6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

96. Кокошка и пол за ден и пол неси јајце и пол. Колку јајца ќе снесат 60 кокошки за 36 дена?

97. Мачка и пол за три и пол дена уловува четири и пол глувци. Колку глувци ќе уловат пет и пол мачки за 21 ден?
98. На автобуска постојка стигнал автобус со 72 патника. Од автобусот се симнале $\frac{5}{12}$ од патниците и се качиле 6 патници. На следната постоја повторно се симнале $\frac{5}{12}$ од патниците, а се качиле 8 нови патници. И на третата постојка се симнале $\frac{5}{12}$ од патниците, а се качиле 10 патници. Колку патници имало во автобусот по третата постојка?
99. Учениците од седмо одделение на некое училиште одат на зимовање. Се пријавиле $\frac{2}{9}$ ученици повеќе отколку што било планирано. Пред поаѓањето заради болест се откажале $\frac{3}{11}$ од пријавените ученици, па на зимовање отишле 5 ученици помалку отколку што било планирано. Колку ученици отишле на зимовање?
100. Во одделението на Илина учениците седат во клупи по двајца. Во одделението има повеќе девојчиња од момчиња, па затоа четири петтини од вкупниот број ученици седат во мешани парови (момче и девојче), а три пара се само од девојчиња. Колку момчиња и колку девојчиња учат во одделението на Илина?
101. Од оделението на Михаил на училишниот натпревар по математика учествувале $\frac{1}{3}$ од учениците. Од нив бројот учениците кои се квалификувале за општинскиот натпревар е еднаков на $\frac{1}{9}$ од бројот на учениците во одделението, а 6 ученици не се квалификувало за општинскиот натпревар. Колку ученици има во одделението на Михаил? Колку соученици на Михаил учествувале на училишниот натпревар, а колку се квалификувале за општинскиот натпревар?
102. Во едно одделение заради болест бројот на отсутните ученици бил еднаков на една шестина од бројот на присутните. Кога се разболел уште еден од присутните ученици, тогаш бројот на отсутните ученици бил една петтина од бројот на присутните. Колку ученици има во тоа одделение?
103. Во едно училиште има 240 момчиња и девојчиња. $\frac{3}{5}$ од бројот на девојчињата е еднаков на $\frac{3}{7}$ од бројот на момчињата.

Опредили колку момчиња и колку девојчиња учат во ова училиште.

104. Во училиштето за надарени ученици се запишале $\frac{1}{7}$ ученици повеќе од планираниот број, а до крајот на годината училиштето го напуштиле $\frac{1}{24}$ од запишаните ученици, така што на крајот имало 10 ученици повеќе од планираниот број. Колку ученици било планирано да се запишат?
105. Во едно училиште 30% од учениците се помали од 10 години, $\frac{1}{20}$ имаат точно 10 години, $\frac{3}{10}$ се постари од 10 но помали од 12 години, а останатите 70 ученици имаат 12 и повеќе години. Колку ученици имаат точно 10 години?
106. Јана имала неколку бомбони. Половината бомбони ги дала на својот брат, а шестина од преостанатите бомбони ги изела. По пат изгубила 2 или 3 бомбони, а на својот пријател Петар му дала 6 бомбони. На крајот и останале 21 бомбона. Колку бомбони имала Јана на почетокот?
107. Јован, Иван и Марко биле на гости кај нивната баба Јованка. Бабата извадила кутија бомбони и и рекла дека секој внук може да земе од кутијата колку сака бомбони. Прво Јован зел $\frac{1}{3}$ од бомбоните, но се премислил и вратил 4 бомбони во кутијата. По него Иван од кутијата зел $\frac{1}{4}$ од преостанатите бомбони, но и тој 3 бомбони вратил назад. На крајот Марко зел $\frac{1}{2}$ од преостанатите бомбони, но и тој вратил 2 бомбони во кутијата, по што во кутијата останале 17 бомбони. Колку бомбони имало на почетокот во кутијата?
108. Двајца пријатели Михајло и Ивко имале еднаков број сликчиња кои меѓусебно се ги поклонуваа. Прво Ивко му дал 20 сликчиња на Михајло. Потоа Михајло му дал на Ивко две третини од сликчињата кои ги имал во моментот, по што имал четири пати помалку сликчиња од Ивко. Колку сликчиња имал секој од нив на почетокот?
109. Петтина од едно јато слетала на едно дрво, а третина на друго дрво. Трикратната разлика на птиците меѓу овие два дела на јатото слетала на трето стебло, додека во воздухот останала само една птица. Колку птици имало во јатото?

110. Марија има огрлица од разнобојни мониста и тоа: $\frac{1}{3}$ од монистата се бели, $\frac{1}{4}$ се црвени, $\frac{1}{5}$ се жолти, $\frac{1}{6}$ се сини и 6 мониста се портокалови. Колку мониста има во огрлицата на Марија?
111. Павел читал книга. Откако прочитал половина од книгата и уште 20 страници, му останало да прочита уште третина од книгата. Колку страници има книгата која ја читал Павел?
112. Ана прочитала една книга за 31 ден при што секој ден читала еднаков број страници. Марија истата книга ја прочитала за ист број денови како Ана, но таа приот ден прочитала $\frac{1}{4}$ од бројот на страниците кои дневно ги читала Ана, а секој следен ден читала по една страница повеќе од претходниот. Колку страници има книгата која ја читале Ана и Марија?
113. Ангелина првиот ден прочитала $\frac{1}{7}$ од една книга, вториот ден прочитала 0,3 од остатокот, а третиот ден прочитала $\frac{1}{2}$ од новиот остаток, по што и останале непрочитани 42 страници од книгата. Колку страници имала книгата која ја читала Ангелина? Колку страници Ангелина читала секој од првите три дена?
114. Учениците Раде, Јане и Матеј решиле 100 задачи така што секој од нив решил по 60 задачи. Сите решени задачи се распоредени во две групи: *тешки* се оние задачи кои ги решил само еден ученик и *лесни* се оние задачи кои ги решиле сите тројца. Колку лесни и колку тешки задачи биле решени?
115. Во едно пакување има 240 семиња. Сања ги посадила сите. 60% од нив изртеле, 75% од оние што изртеле се развиле во растенија. $\frac{1}{3}$ од растенијата имаат жолти цветови, а преостанатите имаат црвени цветови. Колку растенија имаат црвени цветови?
116. Од полн сад со чист алкохол се одлева $\frac{1}{4}$ од алкохолот и се долева вода. Потоа од садот се одлева $\frac{1}{3}$ од течноста и се долева вода. Што има повеќе во садот вода или алкохол?

117. Во ковница за пари имало 400 исти златни прачки. Од секоја прачка се изработуваат 10 златници и останува злато толку што од остатокот од 20 прачки може да се излие една нова прачка. Определи го вкупниот број златници кои што се изработени од дадените прачки злато.
118. Славица однела на пазар корпа полна со јајца. Првиот купувач купил половина од јајцата и уште две јајца. Вториот купувач купил половина од преостанатите јајца и уште две јајца. Третиот купувач купил половина од јајцата кои останале по вториот купувач и уште две јајца. Кога четвртиот купувач зел половина од преостанатите јајца и уште две јајца, во корпата не останало ниту едно јајце. Колку јајца продала Славица?
119. Неколку браќа поделиле определена сума златници. Првиот брат зел 100 златници и една шестина од остатокот. Вториот брат потоа зел 200 златници и една шестина од новиот остаток. Третиот брат потоа зел 300 златници и една шестина од новиот остаток итн. Последниот брат ги зел сите златници кои ги оставиле неговите браќа. Се покажало дека сите браќа зеле ист број златници. Колку браќа учествувале во поделбата?
120. Ана и Симон подготвувале за печат една книга и меѓу себе поделиле за чување 416 страници текст. Кога Ана отчукала $\frac{2}{3}$ од својот дел, а Симон отчукал $\frac{4}{7}$ од својот дел, на двајцата им останале еднаков број неотчукани страници. Колку страници требало да отчука Ана, а колку Симон?
121. Зграда има три ката. На вториот и третиот кат вкупно живеат 20 станари, а на првиот и вториот кат вкупно живеат 22 станари. Колку станари живеат на секој спрат ако бројот на станарите на вториот кат е еднаков на вкупниот број станари на првиот и третиот кат?
122. Во три села вкупно има 12000 жители. Колку жители има во секое село, ако $\frac{2}{3}$ од првото, $\frac{1}{2}$ од второто и $\frac{2}{5}$ од третото село имаат еднаков број жители?
123. Во три корпи вкупно има 300 јаболка. Ако од првата корпа земеме $\frac{1}{3}$, од втората $\frac{3}{5}$ и од третата $\frac{3}{4}$ од јаболката, тогаш сме зеле 160 јаболка.

Ако земевме само $\frac{2}{5}$ од првата и $\frac{5}{8}$ од третата корпа, колку јаболка ќе имавме?

124. Во една кутија има n топчиња. Секое топче е обоено или во плава или во црвена боја. Ако извадиме три црвени топчиња, тогаш една четвртина од преостанатите топчиња се црвени, а ако извадиме седум плави топчиња, тогаш една третина од преостанатите топчиња се црвени. Колку топчиња има во кутијата?
125. Во 14 кутии се распределени 25 топчиња така што секоја кутија содржи по 1, 2 или 3 топчиња. Бројот на кутиите кои содржат точно 1 топче е поголем од 6. Вкупниот број топчиња кои се наоѓаат во кутии кои содржат повеќе од 1 топче е поголем од 17.
Колку кутии содржат точно 1 топче, колку точно 2 топчиња и колку точно 3 топчиња?
126. На ракометен турнир учествувале 10 тимови и секој тим со секој од останатите тимови играл по еден натпревар. На крајот на турнирот е констатирано дека бројот на натпреварите кои завршиле со победа на еден од тимовите е 2,75 пати поголем од бројот на натпреварите кои завршиле нерешено. Колку натпревари завршиле со нерешен резултат?

IV МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. МНОЖЕСТВА

1. Множеството B е формирано од целобројните решенија на неравенката $|x-4|\leq 3$. Определи ја разликата $B\setminus A$ каде

$$A=\{x|x\in\mathbb{N}\text{ и }5<x<10\}.$$

2. Определи ги пресекот и унијата на множествата цели броеви кои се решенија на равенките

$$-8\frac{1}{4}<3x<5\frac{2}{5}\text{ и }-8\frac{1}{4}<-3x<5\frac{2}{5}.$$

3. Горјан запишал 1200 последователни природни броеви. Потоа, прво ги избришал сите броеви кои завршуваат со нула, па ги избришал сите броеви кои се деливи со 4 и на крајот ги избришал сите броеви кои се деливи со 3. Колку броеви останале?
4. Во едно основно училиште 94 ученици учат во седмо одделение. Некои ученици се вклучени секциите по англиски и германски јазик и во спортските клубови. Во секцијата по англиски јазик има 40 ученици, во секцијата по германски јазик има 27 ученици, а со спортски активности се занимаваат 60 ученици. Од учениците вклучени во спортските активности 24 ученици одат и на англиски јазик. Десет ученици кои одат на англиски јазик одат и на германски јазик. Дванаесет ученици кои одат на германски јазик се занимаваат и со спортски активности. Во сите три воннаставни активности се вклучени 4 ученици. Колку ученици се занимаваат само со една активност, а колку не се занимаваат со ниту една активност?
5. $\frac{2}{3}$ од учениците во едно училиште сакаат фудбал, а $\frac{3}{4}$ од учениците во истото училиште сакаат тенис. Колкав дел од учениците ги сакаат и двата спорта?

6. Дали може множеството природни броеви да се подели на три непразни заемно дисјунктни подмножества така што ако x припаѓа на првото подмножество и y припаѓа на второто подмножество, тогаш $x + y + xy$ да припаѓа на третото подмножество.

IV.2. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

7. Во едно одделение кое има 25 ученици најмалку 17 ученици говорат француски јазик, најмалку 17 ученици говорат англиски јазик и најмалку 17 ученици говорат германски јазик. Докажи дека најмалку еден ученик ги говори сите три јазици.
8. Група од 65 момчиња треба да поделат 2019 џамлии. Докажи дека при секоја можна поделба секогаш ќе има две момчиња кои добиваат еднаков број џамлии.
9. Во една кутија има 2017 црвени, 2018 сини и 2019 бели топчиња. Определени го најмалиот број топчиња кои треба да се земат од кутијата (без гледање и без враќање) за да меѓу извлечените топчиња сигурно има три топчиња:
- од иста боја
 - со различни бои.
10. Во три корпи се наоѓаат 6, 7 и 11 јаболки. Од една во друга корпа може да се префрлаат онолку јаболка колку што има во втората корпа. Со три префрлања треба да се изедначи бројот на јаболката во секоја корпа. Како тоа може да се направи?
11. Тодор, Бојан, Горјан и Мартин во своите градови биле најуспешни на натпреварите по математика. Тие живеат во Прилеп, Ресен, Скопје и Кавадарци и освен со математика секој од нив се занимава со точно еден од следниве четири спорта: пливање, скијање, фудбал и кошарка. Со кој спорт се занимава секој од нив и во кој град живее ако е познато дека:
- Горјан тренира кошарка,
 - Бојан не живее, ниту во Ресен ниту во Кавадарци,
 - Тој што живее во Ресен се занимава со фудбал,
 - Тој што живее во Прилеп не знае ниту да скија, ниту да плива,
 - Тодор и Бојан не се занимаваат со пливање?

12. На левиот брег на една река има чамец, неколку рибари и 20 деца, а на десниот брег има само рибари без чамец. Во чамецот може да се превезат или еден рибар и едно дете или четири деца и не смее да се возат ниту помалку, ниту повеќе луѓе. Дали може децата да се префрлат на десниот брег?
13. На една роденденска прослава се собрале девет деца. Дали е можно секое дете претходно да се познавало со точно три деца?
14. Во група од $2n$, $n \geq 2$ луѓе секој човек познава најмалку n од останатите членови на групата. Познанството е симетрично, т.е. ако A го познава B , тогаш и B го познава A . Докажи дека од оваа група може да се одделат 4 луѓе и да седнат на тркалезна маса така што секој од нив да седи меѓу своите познаници.
15. Од три момчиња и три девојчиња секое момче познава точно две девојчиња и секое девојче познава точно две момчиња. Докажи дека девојчињата и момчињата може да се распоредат во парови така што во секој пар се наоѓаат познаници.
16. Како само со помош на садови од 3 и 7 литри од чешма можеме да донесеме точно 5 литри вода? (Водата од садовите може да се претура и истура.)
17. Даден е квадрат $ABCD$ и неколку на него складни квадрати. Во темињата на секој од дадените квадрати се запишува по еден од броевите 1, 2, 3, 4, така што за секој квадрат секое теме е означено со различен број. Потоа сите квадрати се поставуваат еден врз друг така што темињата им се поклошуваат. Нека S_A, S_B, S_C, S_D се збирите на броевите на вертикалите над темињата A, B, C, D . Дали може сите зборови да се еднакви на 2019?
18. На општинскиот натпревар по математика учествувале 18 ученици од едно училиште. За да се квалификува на регионалниот натпревар ученикот треба да реши 3 од зададените 5 задачи. Ако овие ученици решиле вкупно 45 задачи, докажи дека најмалку 3 ученици се квалификувале за регионалниот натпревар.
19. Професорот има 24 моливи во 4 бои, по 6 моливи од секоја боја. Моливите ги разделува на 6 ученици, така што секој ученик добил по 4 моливи. Определи го минималниот број ученици, кои може да бидат

избрани така што тие да имаат моливи од сите бои независно од распределбата на моливите.

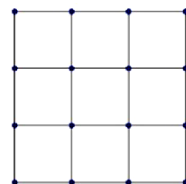
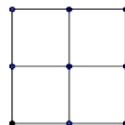
IV.3. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

20. Градовите A, B, C, D, E, F се поврзани секој со секој со автобуска или железничка линија (но не и со двата вида линии). Докажи дека при било каков распоред на линиите секогаш постојат три града кои меѓусебно се поврзани со линии од ист вид.
21. На регионалниот натпевар по математика од петто до деветто одделение учествувале 2019 ученици. Секој натпреварувач е роден 2007, 2006, 2005 или 2004 година.
 - а) Докажи дека постојат два ученика кои се родени во иста година, ист месец во таа година и ист ден во тој месец.
 - б) Докажи дека постојат најмалку 6 ученици кои се родени во ист месец и ист ден во тој месец.
22. Во еден регион на натпреварот по математика во IV, V, VI, VII, VIII и IX одделение учествувале 2200 ученици кои се родени 2003, 2004, 2005, 2006, 2007 и 2008 година. Докажи дека постојат најмалку два ученика кои се родени во ист ден и во иста година. Докажи дека најмалку 7 ученици слават роденден во ист ден.
23. Во полињата на 3×3 квадрат се распоредени броевите 1, 2 и 3. Дали постои распоред таков што зборовите во сите редови, сите колони и на сите дијагонали се различни?
24. Во едно деветгодишно училиште во секое одделение има по 4 паралелки, а вкупниот број ученици е 1232. Докажи дека постои паралелка во која има 35 ученици.
25. Човекот има најмногу 32 заби. Докажи дека во училиште во кое има 2019 ученици секогаш може да се формира група од најмалку 62 ученика, при што сите членови на групата имаат еднаков број заби.
26. Во една училиште учат 1111 ученици. Докажи дека во ова училиште постојат најмалку два ученика кои имаат идентични инцијали и има најмалку четири ученици кои слават роденден во ист ден.

27. Дали од 100 произволни цели броеви секогаш може да се изберат 15 броеви такви што разликата на секои два броја од избраните 15 броеви е делива со бројот 7?
28. Тепих со димензија $4m \times 4m$ го нагризале молци и направиле 15 дупки со занемарливи големини. Дали може од тепихот да се исече парче со димензии $1m \times 1m$ на кое нема да има дупки?
29. Во рамностран триаголник со должина на страна $1cm$ произволно се избрани пет точки. Докажи дека постојат најмалку две точки кои се на растојание помало или еднакво на $0,5cm$.
30. Во рамностран триаголник ABC со страна $a = 3cm$ на случаен начин се распоредени 10 точки. Докажи дека меѓу овие 10 точки постојат две точки такви растојанието меѓу нив е помало или еднакво на $1cm$.
31. На државниот натпревар по спортско стрелаштво учествувале 290 ученици. Докажи дека меѓу учесниците на натпреварот може да се изберат 18 ученици кои живеат во исто населено место или живеат во 18 различни населени места.

IV.4. ПРЕБРОЈУВАЊА

32. Ако квадратот поделиме на 4 еднакви делови, ќе добиеме 9 точки (цртеж десно). Ако квадратот поделиме на 9 еднакви делови ќе добиеме 16 точки. Колку точки ќе добиеме ако квадратот го поделиме на 3600 еднакви квадрати?

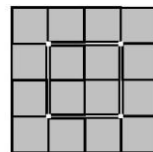
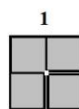


33. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на двоцифрениот број кој се добива ако од трицифрениот број се избрише цифрата на единиците.
34. Определи ги сите трицифрени природни броеви кои се запишани со различни цифри, деливи се со 6 и чиј збир на цифри е делив со 6. Колку такви броеви постојат?

35. Определи го збирот на сите четирицифрени броеви запишани со помош на цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, кај кои цифрите не се повторуваат.
36. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј производ на цифри е еднаков на нула.
37. Определи го бројот на природните броеви кои се поголеми од 100 и се помали од 10000 такви што во декадниот запис точно три цифри им се еднакви.
38. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 3000 и чиј производ на цифрите е еднаков на 210.
39. Определи го бројот на природните броеви кои се деливи со 4, се запишани со парни цифри и се помали од 1000.
40. Определи го бројот на тројките последователни месеци од јуни 2014 година до септември 2018 година, кај кои аритметичката средина на бројот на деновите во секоја тојка е природен број.

IV.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

41. Определи ги сите трицифрени броеви помали од 550 такви што цифрата на стотките е еднаква на производот на другите две цифри.
42. Рамностран триаголник со должина на страна 2019 dm треба целосно да се покрие со плочки во облик на рамностран триаголник со должина на страна 1 dm така што плочките не смее да се преклопуваат. Колку плочки се потребни за такво покривање?
43. Располагаме со доволно фигури од видот 1 (белите линии се точно на средината). Со четири такви фигури е составен прикажаниот квадрат, во кој белите линии формираат затворена линија со периметар 8. Определи го најмалиот број фигури од видот 1 кој е потребен за да се формира затворена линија со поголем периметар.



44. На кружница се запишани 2019 броеви и тоа 1010 единици и 1009 нули. Во секоја секунда се извршува една од следниве операции: меѓу секои два соседни броја се запишува 1, ако тие соседни броја се еднакви, и 0, ако тие соседни броја се различни, при што старите броеви се бришат. Дали може во еден момент сите запишани броеви на кружницата да се еднакви?
45. На кружница, во произволен редослед се запишани броевите 50, 100, 150, ..., 1500. Докажи, дека меѓу запишаните броеви постојат три последователни броја чиј збир е поголем или еднаков на 2350.
46. Околу кружна маса се наредени 11 столчиња, а на почетокот седат 10 деца чии столчиња во насока на движењето на стрелките на часовникот се означени со броевите од 1 до 10. Треба да им се приклучи уште Павел. Откако сите ќе седнат околу масата децата играат игра на испаѓање: почнуваат во насока на движењето на стрелките на часовникот да бројат од детето кое седи на столчето означено со бројот 1 и испаѓа тринаесеттото дете. Останатите продолжуваат со играта таму каде што застанало броењето, тринаесеттиот пак испаѓа итн, додека не остане само едно дете. На кое место, односно меѓу кои две деца од десетте кои веќе седеле на масата, треба да седне Павел, за да победи во играта?
47. Со даден природен број може да се реализира некоја од следниве две операции:
- 1) Бројот да се подели со 2 ако бројот е парен.
 - 2) По последната цифра на бројот да му се допише цифрата 6.
- Почетниот број е 1. Дали со помош на конечен број операции од видот 1) и 2), реализирани во некој редослед може да се добие бројот:
- а) 1994,
 - б) 1995,
 - в) 2000.
48. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 распореди ги во темињата на коцка така што збирот на броевите запишани на сите страни на коцката ќе биде еднаков.
49. Броевите од 1 до 1000 последователно се запишани на кружница. Почнувајќи од бројот 1 го прецртуваме секој петнаесетти број, при што при повторното обиколување на кружницата веќе прецртаните броеви повторно ги броиме. Колку броеви ќе останат непрецртани.

50. Даден е 2013-аголник $A_1A_2\dots A_{2013}$. Неговите темиња се означени со броеви, така што збирот на броевите со кои се означени било кои 9 последователни темиња е константен и е еднаков на 300. Ако е познато дека темето A_{13} е означено со бројот 13, а темето A_{20} со бројот 20, да се определи со кој број е означено темето A_{2013} .

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

1. На бројната права земени се точки A и B со координати $A(-2)$ и $B(15)$. Определи ги координатите на точката M на оваа права ако $\overline{AM} : \overline{MB} = 3:14$.

2. Точките $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{20}$ се распоредени на една права во дадениот редослед, при што важи

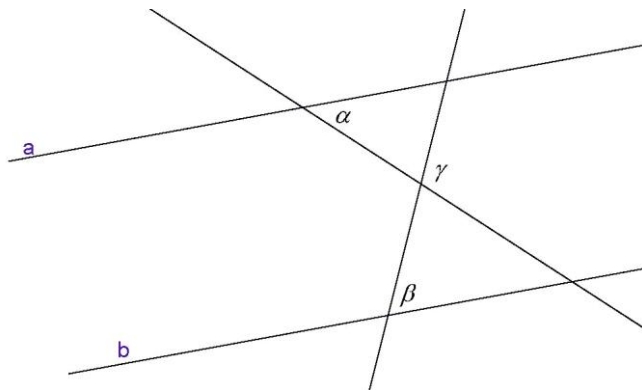
$$\overline{A_0A_1} = \overline{A_1A_2} = 3cm, \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = 5cm \text{ итн.,}$$

т.е.

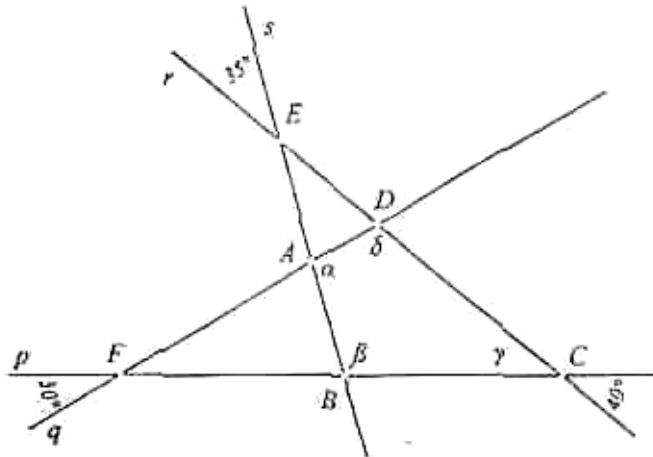
$$\overline{A_{2i}A_{2i+1}} = \overline{A_{2i+1}A_{2i+2}} = 2i + 3cm, \text{ за } i = 0, 1, 2, \dots, 9.$$

Определи ја должината на отсечката A_4A_{19} .

3. Во областа на аголот $\angle AOB$ се повлечени симетралата OC и полуправа OD така што $\angle AOD$ е еднаков на $\frac{1}{5}$ од аголот $\angle AOB$. Пресметај го аголот $\angle AOB$, ако $\angle COD = 30^\circ$.
4. Нека C и D се точки во внатрешноста на $\angle AOB = 105^\circ$ такви што важи $5\angle COD = 4\angle AOC$ и $3\angle COD = 2\angle DOB$. Определи го $\angle COD$.
5. Пресметај го аголот γ ако $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 65^\circ$ и $a \parallel b$ (види цртеж).

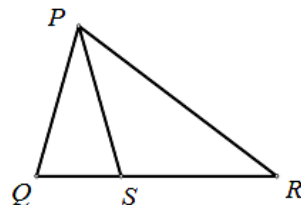


6. Разликата на два агли со паралелни краци е еднаква на половината од помалиот од двата агли. Определи ги овие агли.
7. Аголот α е помал од својот суплементен агол β за толку степени за колку што е поголем од аголот γ со кој заедно формира половина од рамен агол. Определи ги аглите α, β и γ .
8. Нацртај два остри агли со заемно нормални краци при што темето на секој од аглите е надвор од другиот агол. Определи го аголот меѓу симетралите на овие агли.
9. Правите p, q и r се сечат во точките A, B, C, D, E и F (види цртеж). Некои агли се познати. Определи ги аглите α, β, γ и δ .



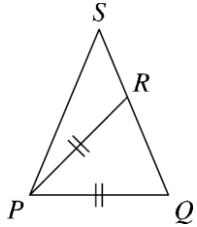
V.2. ТРИАГОЛНИК

10. За триаголникот QPR (цртеж десно) важи: $\overline{PQ} = \overline{PS} = \overline{RS}$ и $\angle QPS = 12^\circ$. Определи го $\angle QPR$.



11. Определи ги внатрешните агли на триаголникот ABC ако е познато дека аголот α е еднаков на $\frac{2}{5}$ од аголот β , односно е еднаков на $\frac{1}{4}$ од аголот γ .

12. Едниот агол на даден триаголник е за 50% помал од вториот агол, а третиот агол е еднаков на 50% од збирот на другите два агли. Определи ги аглите на триаголникот.
13. Разликата меѓу најголемиот и најмалиот агол на еден рамнокрак триаголник е еднаква на 12° . Определи ги аглите на овој триаголник.
14. Во рамнокрак триаголник симетралата на надворешниот агол при врвот и симетралата на внатрешниот агол при основата се сечат под агол од 28° . Определи ги аглите на овој триаголник.
15. Даден е остроаголен триаголник $\triangle ABC$. Симетралата на аголот $\angle BAC$, симетралата на страната AC и висината повлечена од темето C се сечат во една точка. Определи го аголот $\angle BAC$.
16. Во рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AB} = \overline{BC}$) аголот при врвот изнесува 72° . Основата AC е продолжена на двете страни до точки M и N такви што $\overline{MA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CN}$. Одреди ги внатрешните агли на $\triangle MNB$.
17. Даден е $\triangle ABC$. На продолжението на страната AB преку темето C земена е точка E таква што $\overline{AE} = \overline{AC}$, а на продолжението на страната AB преку темето B земена е точка D таква што $\overline{BD} = \overline{BC}$. Определи го $\angle ECD$, ако $\angle ACB = 74^\circ$.
18. Даден е триаголник ABC со внатрешни агли α, β, γ и надворешен агол β_1 при темето B . Докажи, дека симетралите на аглите α и β_1 зафаќаат агол $\frac{\gamma}{2}$.
19. Надворешниот и нему соседниот агол на еден триаголник се разликуваат за 25° . Преостанатите два агли на триаголникот се разликуваат за 25° . Определи ги аглите на овој триаголник.
20. Нека S е центарот на впишаната кружница во правоаголниот триаголник ABC со прав агол во темето A . Определи ги аглите на триаголникот ако разликата на аглите $\angle ASB$ и $\angle ASC$ е 30° .
21. Во $\triangle ABD$ на страната AB се наоѓа точка C таква што $\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CD}$ и $\angle BCD = z^\circ$. Определи го $\angle ADB$.

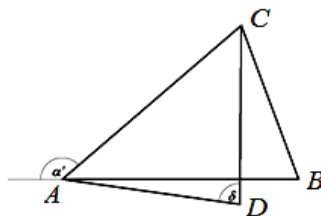
22. Ако симетралите на внатрешните агли на триаголникот формираат еднакви агли, тогаш триаголникот е рамностран. Докажи!
23. Внатрешните агли на триаголникот се α, β, γ . Симетралите на аглите α и β се сечат под агол 115° , а симетралите на аглите β и γ се сечат под агол 125° . Определи ги аглите α, β и γ .
24. На цртежот десно важи $\overline{SP} = \overline{SQ}$, $\overline{PQ} = \overline{PR}$ и $\angle SPR = 36^\circ$. Пресметај го аголот PQR .
- 
25. Во остроаголен триаголник ABC ($\overline{BC} > \overline{AC}$) дадена е висината CE . Симетралата на надворешниот агол на триаголникот во темето C ја сече правата AB во точката D така што $\overline{CD} = 2\overline{CE}$. Докажи дека $\alpha - \beta = 60^\circ$.
26. Ако O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ докажи дека $\angle BOC = 2\angle BAC$.
27. Во $\triangle ABC$ важи $\alpha - \beta = 30^\circ$. На страната BC е дадена точка D така што $\overline{AC} = \overline{CD}$. Определи го $\angle BAD$.
28. На продолжението преку точката C на кракот AC на рамнокракиот триаголник ABC земена е точка C таква што $\overline{CD} = \overline{AC}$. Докажи дека триаголникот ABD е правоаголен.
29. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со основа BC таков што $\angle BAC > 30^\circ$. На основата BC земена е точка M таква што $\angle BAM = 30^\circ$, а на кракот AC точка N таква што $\overline{AM} = \overline{AN}$. Определи го $\angle CMN$.
30. Даден е $\triangle ABC$ во кој висината повлечена кон страната AB минува низ пресечната точка на симетралата на $\angle BAC$ и симетралата на страната AC . Определи го $\angle BAC$.
31. Во $\triangle ABC$ должината на висината CH , $H \in AB$ е еднаква на половина од должината на страната AB и важи $\angle BAC = 75^\circ$. Определи го аголот $\angle ABC$.

32. Даден е триаголник ABC . Нека E и D се произволни точки на страните AC и BC , соодветно. Симетралите на $\angle CAD$ и $\angle CBE$ се сечат во точката F . Докажи дека

$$\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB.$$

33. Даден е триаголник ABC . Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол при темето C зафаќаат со правата AB еднакви агли. Определи ги аглите $\angle ACB$ и $\angle ABC$ ако $\angle CAB = 20^\circ$.

34. Триаголниците ABC и ADC имаат заедничка страна AC (види цртеж). При тоа точни се следниве равенства $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AD} = \overline{DC}$ и $\alpha' + \delta = 200^\circ$, каде α' е надворешниот агол при темето A во $\triangle ABC$, δ е аголот при темето D во $\triangle ADC$. Определи го $\angle BCD$.



35. Даден е рамностран триаголник ABC и произволна точка D на страната AB . Нека точката E е таква што триаголникот CDE е рамностран при што точките B и E се од иста страна на правата CD . Определи го $\angle ABE$.
36. Во $\triangle ABC$ точката D припаѓа на страната AB . Ако $\overline{AC} = \overline{CD}$ и $\angle A - \angle B = 37^\circ$ определи го $\angle BCD$.
37. Симетралите на два внатрешни агли на триаголникот ABC се сечат под агол од 135° . Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.
38. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C . Хипотенузата AB ја продолжиме преку темето A за отсечка $\overline{AM} = \overline{AC}$ и преку темето B за отсечка $\overline{BN} = \overline{BC}$. Определи го $\angle MCN$.
39. На хипотенузата AB на правоаголниот $\triangle ABC$ земени се точки M и N такви што $\overline{AM} = \overline{AC}$ и $\overline{BN} = \overline{BC}$. Определи го $\angle MCN$.
40. Во триаголникот ABC аголот при темето C е еднаков на 40° . Симетралите на надворешниот и внатрешниот агол во темето C се сечат со правата AB во точките D и E при што $\triangle CDE$ е рамнокрак. Определи ги аглите на триаголникот ABC .

41. Надворешниот агол при основата на рамнокрак триаголник се однесува спрема надворешниот агол при врвот на триаголникот како $29:32$. Определи ги внатрешните агли на овој триаголник.
42. Права p минува низ темето на правиот агол на правоаголен триаголник и е симетрала на аголот меѓу висината и тежишната линија повлечени кон хипотенузата на триаголникот. Определи ги аглите кои правата p ги зафаќа со катетите на триаголникот.
43. Во правоаголен триаголник аголот кој го зафаќаат висината и тежишната линија повлечени кон хипотенузата е еднаков на 24° . Определи го аголот меѓу тежишната линија повлечена кон хипотенузата и симетралата на правиот агол.
44. Даден е правоаголен триаголник, со агол во темето A еднаков на 40° . Докажи дека симетралата на правиот агол го преполовува аголот кој го формираат висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол.
45. Еден остар агол на правоаголниот триаголник е еднаков на 36° . Определи го аголот меѓу висината и тежишната линија кои соодветствуваат на хипотенузата.
46. Висината CC' и тежишната линија CM на триаголникот ABC го делат $\angle ACB$ на три еднакви дела. Определи ги аглите на триаголникот.
47. Во остроаголен рамнокрак триаголник основата е подолга од кракот. Симетралата на аголот при основата и висината повлечена од темето на тој агол кон спротивниот крак зафаќаат агол од 16° . Определи ги внатрешните агли на овој триаголник.
48. Во рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, симетралите на аглите при основата се сечат по агол од 110° . Определи го аголот меѓу симетралата на аголот и висината повлечени од темето B .
49. Даден е триаголник ABC таков што аглите $\angle B$ и $\angle C$ се остри и $\angle B > \angle C$. Докажи дека аголот меѓу висината и симетралата на аголот во темето A е еднаков на $\frac{\angle B - \angle C}{2}$.

50. На продолжението на страната AB на триаголникот ABC преку темето B земена е точка M таква што $\overline{BM} = \overline{BC}$. Докажи дека правата MC е паралелна на симетралата на $\angle B$.
51. Во рамнокрак триаголник ABC , $\overline{AC} = \overline{BC}$ симетралата на $\angle BAC$ и висината AD се сечат под агол од 15° . Определи ги аглиите на триаголникот
52. Во рамнокрак $\triangle ABC$ со основа AB и остар агол $\angle ACB$, висината од темето B го сече кракот AC во точката E . Нека D е точка на правата AB таква што $\triangle BED$ е рамнокрак со основа DB . Определи го аголот меѓу правите DE и BC .
53. Даден е рамнокрак триаголник ABC . Над кракот AC од надворешната страна е нацртан квадрат $ACDE$, а над кракот BC од надворешната страна е нацртан рамностран триаголник BFC . Дијагоналите AD и EC на квадратот се сечат во точката S , а правата AF го сече кракот BC во точката G . Правата SG го сече кракот AC во точката H . Ако $\angle DAF = 85^\circ$, определи го аголот $\angle AHS$.
54. Во внатрешноста на рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$), со агол при врвот $\angle ACB = 80^\circ$, земена е точка O таква што $\angle ABO = 30^\circ$ и $\angle BAO = 10^\circ$. Определи го $\angle ACO$
55. Даден е остроаголен триаголник ABC таков што $\angle CAB = 45^\circ$. Низ темето A е повлечена нормала на симетралата на $\angle CAB$ и таа симетрала ја сече правата BC во точката M . Ако важи $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BM}$, определи ги преостанатите два агли на триаголникот ABC .
56. Даден е рамнокрак правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C . Над катетата BC е конструиран рамностран $\triangle BCD$. Определи го $\angle ADB$.
57. Во рамнината Σ се дадени две точки A и B , $A \neq B$. Определи го бројот на точките C кои лежат во Σ и се такви што точките A, B и C се темиња на рамнокрак правоаголен триаголник.
58. Во триаголникот ABC аголот при темето A е еднаков на 75° . Определи ги останатите агли на триаголникот ако е познато дека на стра-

ната BC се наоѓа точка D таква што триаголниците ABD и ACD се рамнокраки.

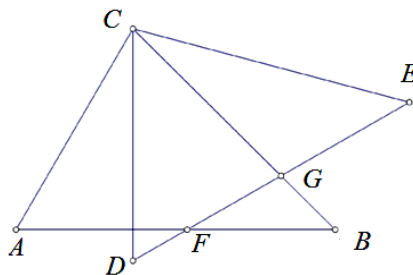
59. Определи го периметарот на триаголникот кај кој должините на двете страни се еднакви на 11 cm и 77 cm , а должината на третата страна е содржател на најмалата страна.
60. Даден е триаголник ABC . На продолжението на страната AB преку темето A избрана е точка M таква што $\overline{AM} = \overline{AC}$, а на продолжението на страната AB преку темето B избрана е точка N таква што $\overline{BN} = \overline{BC}$. Притоа важи $\angle CMN = 27^\circ$ и $\angle CNM = 32^\circ$. Определи ги внатрешните агли на триаголникот ABC . Определи го периметарот на триаголникот ABC , ако $\overline{MN} = 47\text{ cm}$.
61. Даден е рамностран триаголник ABC со должина на страна 8 cm и точка D на страната BC таква што $\overline{DC} = 2\text{ cm}$. Од точката D се повлечени нормали DE и DF на страните AB и AC (E припаѓа на страната AB , а F припаѓа на страната AC). Определи ги должините на отсечките BE и CF .
62. Даден е триаголник ABC со агли $\angle ABC = 15^\circ$ и $\angle ACB = 30^\circ$. На страната BC е избрана точка D таква што правата AD е нормална на правата AB . Докажи дека $\overline{BD} = 2\overline{AC}$.
63. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB} = c$ и $\overline{AC} = b$. Нека A_1 е средината на страната BC , а P е подножјето на нормалата повлечена од темето B на симетралата на $\angle BAC$. Определи ја должината на отсечката A_1P како функција од b и c .
64. Должината на основата на рамнокрак триаголник е 8 cm . Отсечката која поврзува крајна точка на основата со средината на спротивната страна го дели триаголникот на два триаголника така што периметарот на едниот од овие два триаголника е за 2 cm поголем од периметаро на другиот триаголник. Определи ја должината на кракот на рамнокракиот триаголник.
65. Во $\triangle ABC$ точно е равенството $2 \cdot \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$. Симетралите на $\angle BAC$ и на $\angle ABC$ се сечат во точката S . Правата која минува низ

точката S и е паралелна на страната AB ги сече страните AC и BC во точките D и E , соодветно. Определи го периметарот на $\triangle ABC$, ако периметарот на $\triangle CDE$ е еднаков на 40 cm .

66. Даден е триаголник ABC . Од темето A е конструирана отсечка AD нормална на AC така што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и отсечка AE нормална на AB така што $\overline{AE} = \overline{AB}$. Притоа точките D и B се на различни страни од правата AC , а точките C и E се на различни страни од правата AB . Докажи дека $\overline{BD} = \overline{CE}$.
67. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB . На страната BC избрана е точка E , а на продолжението на отсечката CA преку темето A избрана е точка D така што $\overline{AD} = \overline{BE}$. Докажи дека страната AB ја преполовува отсечката DE .
68. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C . Во надворешноста на квадратот се конструирани квадрати $ABMN$ и $ACPQ$. Докажи дека центрите на овие квадрати се еднакво оддалечени од средината A' на катетата BC .
69. Во разностран триаголник ABC е впишана кружница k , чиј центар е точката O . Низ точката O се повлечени прави p и q така што $p \parallel AC$ и $q \parallel BC$. Ако правата p ја сече страната AB во точката M , а правата q ја сече страната AB во точката N , тогаш периметарот на триаголникот OMN е еднаков на должината на страната AB . Докажи!
70. Дадени се рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) и произволна точка M на основата AB на триаголникот ABC . Потоа е конструиран паралелограм $MBCD$. Докажи дека $\angle DAB = \angle AMC$. Ако пресекот на отсечките MC и BD е точката P , а P е средина на страната AB , тогаш $\overline{MN} = \overline{PN}$. Докажи!
71. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Низ темето C е повлечена права p паралелна на страната AB . Симетралата на $\angle ABC$ ја сече правата p во точката D , а симетралата на $\angle BAC$ ја сече правата p во точката E . Докажи, дека $\overline{DE} = \overline{AC} + \overline{BC}$.

72. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. На краците AC и BC на $\triangle ABC$ земени се точки E и D , соодветно, такви што $\overline{CE} = \overline{CD}$, а точката F е средина на основата AB . Докажи, дека $\triangle EDF$ е рамнокрак.
73. Даден е рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$). Докажи дека тежишните линии кои соодветствуваат на краците на триаголникот се меѓусебно еднакви.
74. Аголот β на рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) е еднаков на 72° . На продолжението на кракот AC , по точката A , избрана е точка D таква што $\overline{AD} = \overline{AB}$. Докажи дека триаголникот BCD е рамнокрак.
75. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со основа BC . На краците AB и AC од надворешната страна на $\triangle ABC$ се конструирани рамнострани триаголници BAM и ACN . Ако точката P е средина на основата BC , тогаш триаголникот MPN е рамнокрак. Докажи!
76. Даден е триаголник ABC . Нека точките P и Q припаѓаат на страните AC и BC , соодветно и се такви што периметарот на триаголникот ABP е еднаков на периметарот на триаголникот ABQ , а периметарот на триаголникот AQC е еднаков на периметарот на триаголникот BCP . Докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.
77. Дадени се рамнокрак триаголник ABC и права p која е нормална на основата AB . Правата p го сече кракот BC во точката M и продолжението на кракот AC во точката N . Докажи дека триаголникот MCN е рамнокрак.
78. Во триаголникот ABC точката M е средина на страната AB . Правата p која минува низ точката M и е паралелна на симетралата на $\angle ACB$ ги сече правите BC и AC во точките D и E , соодветно. Докажи дека триаголникот CDE е рамнокрак.
79. Даден е $\triangle ABC$. Точките P и Q лежат на страните AC и BC , соодветно и се такви што периметарот на $\triangle ABP$ е еднаков со периметарот на $\triangle ABQ$, а периметарот на $\triangle AQC$ е еднаков со периметарот на $\triangle PBC$. Докажи, дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

80. За триаголникот ABC важи $\angle CAB = 60^\circ$ и $\angle ABC = 45^\circ$. Понатаму, триаголниците ABC и CDE се складни и важи $\angle DCA = 30^\circ$ (цртеж десно). Докажи дека триаголникот CFG е рамнокрак.



81. На краците на остриот агол $\angle XOY$ дадени се точки A и B така што $\overline{OA} = \overline{OB}$. Ако M е произволна точка на симетралата на аголот $\angle XOY$, тогаш $\overline{MA} = \overline{MB}$. Докажи!
82. На страните AB, BC, CA на рамностраниот триаголник ABC земени се точки N, P, R , соодветно такви што $\overline{AN} = \overline{BP} = \overline{CR}$. Докажи, дека триаголникот NPR е рамностран.
83. Даден е рамностран триаголник ABC . Секоја од страните AB, BC, CA е продолжена преку темињата B, C, A , соодветно за отсечка d така што $\overline{BM} = \overline{CN} = \overline{AP} = d$. Докажи дека триаголникот MNP е рамностран.
84. Дадена е отсечката AD на која се избрани точки B и C такви што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Над отсечките AC и CD од иста страна на правата AD се конструирани рамнострани триаголници ACF и CDE . Докажи дека триаголникот BEF е рамностран.

V.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

85. На страната AB на квадратот $ABCD$ конструиран е рамностран триаголник ABE при што точката E лежи во внатрешноста на квадратот. Пресметај го аголот $\angle DEC$.
86. Над страната AB на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран $\triangle ABE$ таков што точката E е во внатрешноста на квадратот. Определи го $\angle DEC$.
87. Над катетите AC и BC во надворешноста на правоаголен триаголник ABC конструирани се квадрати $ACDM$ и $BCEN$. Нека M' и N' се

подножјата на нормалите повлечени од точките M и N на правата AB , соодветно. Докажи дека $\overline{MM'} + \overline{NN'} = \overline{AB}$.

88. На страните AB, BC, CD, DA на квадратот $ABCD$ земени се точки M, N, P, Q , соодветно, така што $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е квадрат.
89. Даден е правоаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. На страната AB избрана е точка M таква што $\angle AMD = \angle CMD$. Определи го аголот $\angle CMD$.
90. Над страните на паралелграмот $ABCD$ од надворешната страна се конструираат квадрати. Докажи дека центрите на овие квадрати се темиња на квадрат.
91. Даден е правоаголник $ABCD$. Симетралата на дијагоналата AC ја сече страната AB во точката E , а страната CD во точката F така што триаголникот EBC е рамнокрак. Определи го аголот $\angle DFE$.
92. Даден е квадрат $ABCD$ и во неговата внатрешност е избрана точка P така што триаголникот BCP е рамностран. Правата AP ја сече страната CD во точката E . Определи го аголот $\angle CPE$.
93. Даден е правоаголник $ABCD$ ($\overline{AB} > \overline{BC}$). Нормалата од темето B повлечена кон дијагоналата AC ја сече дијагоналата AC во точката E така што отсечката AE е трипати подолга од отсечката CE . Определи го аголот под кој се сечат дијагоналите на правоаголникот.
94. Во правоаголник $ABCD$ симетралата на аголот во темето B ги сече правите AC и AD во точките E и F , соодветно. Низ точката E е повлечена права паралелна со AB која ја сече дијагоналата BD во точката K . Докажи дека правата FK е нормална на дијагоналата AC .
95. Во правоаголникот $ABCD$ важи $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. На страната AB е земена точка P таква што $\angle APD = \angle DPC$. Определи го овој агол.
96. Во надворешноста на правоаголникот $ABCD$ се конструирани рамнострани триаголници BCE и CFD . Докажи дека триаголникот AEF е рамностран.

97. Даден е правоаголник со страни a и b . Страната a ја зголемуваме за $\frac{1}{4}$ од нејзината должина, а страната b ја намалуваме $\frac{1}{3}$ од нејзината должина. Дали плоштината на правоаголникот ќе се зголеми или ќе се намали?
98. Во правоаголникот $ABCD$ важи $\overline{AD}=12\text{ cm}$. На правата AC преку темето C земена е точка E таква што периметарот на четириаголникот $ABED$ е еднаков на 123 cm , а периметарот на триаголникот BEC е еднаков на 64 cm . Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.
99. Правоаголна нива чија ширина е двапати помала од должината, нацртана е на два плана, на едниот во размер $1:7500$, а на другиот во размер $1:2500$. Збирот на периметрите на правоаголниците на двата плана е 144 mm . Пресметај ги реалните должина и ширина на нивата.
100. Површината на билијарската маса има облик на правоаголник чии темиња се A, B, C, D . Билијарската топка се движела така што прво ја удрила страната AD , се одбила од неа во страната AB , па повторно се одбила. Што може да се каже за смерот на движење на топката после одбивањето од страната AB во споредба со движењето на топката пред таа да удри во страната AD ?
101. Секогаш кога ќе исполни желба на сопственикот должината на правоаголниот волшебен килим се намалува за $\frac{1}{2}$ од постојната должина, а ширината се намалува за $\frac{1}{3}$ од постојната ширина. По три исполнети желби килимот имал плоштина 18 dm^2 . Почетната ширина на килимот била $1,8\text{ m}$. Определи ја почетната должина на килимот. Определи ја почетната плоштина на килимот.
102. Ако страната на квадратот се зголеми за 6 cm , тогаш неговата плоштина се зголемува за 120 cm^2 . Определи ја должината на страната на почетниот квадрат.
103. Определи ги сите правоаголници чии должини на страни се природни броеви, а чиј мерен број на плоштината е еднаков на мерниот број на периметарот на правоаголникот.

104. Ако должината на страната на еден квадрат се намали за 4 cm , тогаш неговата плоштина се намалува за 80 cm^2 . Определи ја должината на страната на овој квадрат?
105. Плоштината на еден правоаголник е 2016 cm^2 . Должината на едната страна е парен број сантиметри, а на другата страна е непарен број сантиметри. Определи го периметарот на овој правоаголник.
106. Даден е ромбоид $ABCD$ таков што страната AB е двапати подолга од страната BC . Ако M е средина на страната CD , определи го $\angle AMB$.
107. Даден е паралелограм $ABCD$ ($\overline{AB} > \overline{BC}$). Над страните AB и BC , надвор од паралелограмот, се конструирани квадрати $ABMN$ и $BCPQ$. Докажи дека $\overline{BD} = \overline{MQ}$.
108. Даден е паралелограм $ABCD$. Над страните AB и AD , надвор од паралелограмот $ABCD$, се конструирани рамнострани триаголници ABF и DAE . Докажи, дека триаголникот ECF е рамностран.
109. Во паралелограм $ABCD$ на страната AB е земена точка K таква што $\angle AKD = \angle DKC$. Ако S е средината на отсечката KD , докажи дека правата CS е нормална на правата DK .
110. Аглите кои дијагоналите на еден ромб ги зафаќаат со една негова страна се однесуваат како $3:7$. Пресметај ги агли на овој ромб.
111. Даден е паралелограм $ABCD$ со тап агол при темето A . Нека точката E е осно симетрична сличка на темето B во однос на правата AC , а точката F е пресекот на правите CD и AE . Докажи, дека триаголниците AFD и CFE се складни.
112. Даден е паралелограм $ABCD$ и точка M на страната AB таква што $\angle AMD = \angle CMD$. Докажи, дека ако точката P е средина на отсечката MD , тогаш $CP \perp DM$.
113. Дадени се паралелограм $ABCD$ и права p која со паралелограмот има само една заедничка точка и тоа е темето D . Нека се A', B' и C' подножјатана нормалите повлечени од точките A, B и C на правата p , соодветно. Докажи дека $\overline{AA'} + \overline{CC'} = \overline{BB'}$.

114. Даден е паралелограм чии страни се со должини 12 cm и 8 cm . Подолгата страна AB е продолжена преку точката B за 5 cm и е добиена точката E . Правите EC и AD се сечат во точката F . Пресметај ја должината на отсечката DF .
115. Даден е паралелограм $ABCD$ со тап агол во темето B . Страните AB и BC на паралелограмот се продолжени преку темето B и на продолженијата се земено точки E и F така што отсечките BE и BF се основи на рамнокраки триаголници BCE и ABF . Докажи дека триаголникот DEF е рамнокрак.
116. Во рамнокрак трапез должината на кракот е еднаква на должината на помалата основа. Докажи дека дијагоналите на трапезот се симетрала на аглите на трапезот при поголемата основа.
117. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ ја сечат средната линија EF на трапезот во точките M и N така што $\overline{MN} = \overline{EM} + \overline{NF}$. Должината на помалата основа на трапезот е еднаква на 10 cm . Определи ја должината на поголемата основа на трапезот.
118. Даден е разнокрак трапез $ABCD$. Нека M и N се средините на основите AB и CD на трапезот и нека отсечката MN е еднаква на полуразликата на основите на трапезот. Определи го збирот на аглите на поголемата основа на трапезот.
119. Во трапез едниот крак е поголем од другиот за 4 cm , а поголемиот крак е за 2 cm помал од поголемата основа. Збирот на помалата основа и краците е еднаков на 40 cm , а една од дијагоналите го полови аголот при основата. Определи ги страните на овој трапез.
120. Подели триаголник ABC на три дела така што од нив да може да се состави правоаголник.
121. Од долго парче жица се обликуваат триаголници на следниов начин: Се мери еден дел од 10 cm и два дела од по 8 cm и од нив се составува рамнокрак триаголник, без притоа жицата да се сечи. Потоа обликувањето на рамнокраките триаголници од остатокот од жицата продолжува така што сите должини на страните на секој следен триаголник се за 2 cm пократки од должините на соодветните страни на претходниот триаголник (притоа триаголниците имаат едно заедничко те-

ме). Постапката продолжува без сечење на жицата додека тоа е можно.

а) Определи го најголемио број триаголници кои може да се состават со опишаната постапка.

б) Кога на опишаниот начин ќе се формираат сите можни триаголници се сече жицата. Определи го збирот на периметрите на добиените триаголници.

в) Од добиеното парче жица се формира правоаголник таков што должините на соседните страни се разликуваат за 12 cm . Пресметај ја плоштината на добиениот правоаголник.

V.4. ГЕОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

122. Збирот на растојанијата меѓу три точки е 12 cm . Тие растојанија се изразуваат со три последователни природни броеви. Дали тие точки лежат на иста права? Одговорот да се образложи!

123. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB}=6,5\text{ dm}$ и $\overline{BC}=0,8\text{ dm}$. Определи ја должината на страната AC ако е познато дека таа изразена во дециметри е природен број.

124. Должините на страните на рамнокрак триаголник се изразени со природни броеви (во сантиметри). Производот на должините на сите страни на триаголникот е еднаков на 2016. Определи го периметарот на овој триаголник.

125. Определи ги сите триаголници чии должини на страни изразени во сантиметри се цели броеви и кои имаат периметар 13 cm .

126. Должините на две страни на еден триаголник, изразени во сантиметри, се решенија на равенките:

$$0,3 - \frac{2}{a} = 0 \text{ и } 2\frac{2}{3} : [b - \frac{3}{5}(\frac{2,5-7,3,5}{80,125} - 1,5)] = \frac{2}{3}.$$

Колкава може да биде должината на третата страна, ако таа изразена во сантиметри е природен број?

127. Докажи дека во произволен триаголник должината на секоја тежишна линија е помала од полупериметарот на триаголникот.

128. Нека a, b и c се должините на страните и t_c е должината на тежишната линија повлечена од темето C во $\triangle ABC$. Докажи дека важи $\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}$.
129. Даден е рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) со агол при основата $\alpha = 50^\circ$. На продолжението на кракот BC преку темето C дадена е точка M таква што $\overline{BC} = \overline{CM}$. Докажи дека $AM \perp AB$ и $\overline{AM} > \overline{AB}$.
130. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Нека точката M е средина на страната AB , а точката N е средина на страната CD .
- а) Докажи дека $\overline{AD} + \overline{BC} \geq 2\overline{MN}$.
- б) Каков е четириаголникот $ABCD$ ако под а) важи знак за равенство?
131. Нека S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и нека за страните важи $a > b > c$. Докажи дека $\overline{SA} < \overline{SB} < \overline{SC}$.

V.5. КОНСТРУКЦИИ

132. Даден е $\angle aOb$. Со геометриска конструкција подели го $\angle aOb$ на три дела така што вториот дел е три пати поголем од првиот, а третиот дел е четири пати поголем од првиот дел.
133. а) На полуправата OX нанеси отсечка со должина a .
- б) Конструирај отсечка чија должина е еднаква на збирот на должините на две дадени отсечки.
- в) Конструирај отсечка чија должина е еднаква на разликата на должините на две дадени отсечки.
134. Дадена е отсечката AB . Конструирај ја нејзината симетрала.
135. Даден е $\angle XOY$. Конструирај ја неговата симетрала.
136. Даден е $\angle XOY$ и точка A . Конструирај $\angle BAC$ таков, што $\angle XOY = \angle BAC$.
137. Дадени се права p и точка P , $P \notin p$. Конструирај права која минува низ точката P и е паралелна на правата p .

138. Дадени се права p и точка P . Конструирај права која минува низ точката P и е нормална на правата p .
139. Конструирај триаголник ако се дадени должините на неговите страни a, b и c
140. Конструирај триаголник ако се дадени должините на неговите страни a и b и аголот γ што го зафаќаат.
141. Конструирај триаголник ако е дадена должината на една негова страна c и аглите α и β што лежат на таа страна.
142. Конструирај триаголник ако се дадени должините на неговите страни a и b и аголот α спроти страната a .
143. Во триаголникот ABC , A' и B' се подножјата на висините повлечени од темињата A и B соодветно. Конструирај го триаголникот ABC ако се дадени отсечките: $\overline{AB} = 5\text{ cm}$, $\overline{A'B} = 3\text{ cm}$ и $\overline{A'B'} = 2\text{ cm}$.
144. Во рамнината се дадени права p и точки A' и B' кои се наоѓаат на иста страна од правата p . Конструирај триаголник ABC чии темиња A и B се наоѓаат на правата p и отсечките AA' и BB' се висини на триаголникот ABC .
145. Конструирај правоаголен триаголник ако се дадени хипотенузата $c = 5\text{ cm}$ и збирот на катетите $d = 7\text{ cm}$.
146. Конструирај правоаголен триаголник ABC , со прав агол во темето C , зададен со a и t_c .
147. Конструирај рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$), зададен со h_b и t_b .
148. Конструирај триаголник ABC ако $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\angle CAB = 45^\circ$ и $\angle ABC = 60^\circ$, а потоа конструирај права p која ги сече отсечката AB во точка D и отсечката BC во точка E такви што $\overline{DB} = \overline{DE} = \overline{CE}$.
149. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени: висината $\overline{CC'} = h_c = 3\text{ cm}$, тежишната линија $\overline{CC_1} = t_c = 4\text{ cm}$ и радиусот $R = 3\text{ cm}$ на опишаната кружна околу $\triangle ABC$

150. Конструирај триаголник ABC ако се дадени: аголот $\angle BAC = 60^\circ$, висината $\overline{BB'} = 4\text{ cm}$ и висината $\overline{CC'} = 3\text{ cm}$.
151. Конструирај триаголник ABC ако е даден збирот на страните $\overline{AB} + \overline{BC} = b + c = 8\text{ cm}$, $\angle CAB = \alpha = 60^\circ$ и висината $\overline{CC'} = h_c = 3\text{ cm}$.
152. Конструирај триаголник ABC за кој се познати висината $\overline{CC'} = h_c = 3\text{ cm}$, страната $\overline{AC} = b = 4\text{ cm}$ и тежишната линија $\overline{AM} = t_a = 5\text{ cm}$.
153. Дадени се три неколинеарни точки A_1, B_1 и C' . Конструирај триаголник ABC ако A_1 и B_1 се средини на страните BC и AC , соодветно, а C' е подножјето на висина h_c .
154. Конструирај $\triangle ABC$ за кој се познати висината $\overline{AA'} = h_a = 4\text{ cm}$, тежишната линија $\overline{AA_1} = t_a = 6\text{ cm}$ и тежишната линија $\overline{BB_1} = t_b = 9\text{ cm}$.
155. Конструирај рамностран триаголник ABC ако е даден збирот на страната и висината на триаголникот $d = 5\text{ cm}$.
156. Дадени се паралелни прави a и b кои се на растојание 3 cm една од друга. На правата a е дадена точка A , а на правата b е дадена точка B при што важи $\overline{AB} > 3\text{ cm}$. На отсечката AB е избрана точка C таква што $\overline{AC} > \overline{BC}$. Конструирај права p која ја содржи точката C , правата a ја сече во точка M , правата b ја сече во точка N и $\overline{AM} + \overline{BN} = 5\text{ cm}$.
157. Конструирај квадрат ако е даден збирот на дијагоналата и полупериметарот на квадратот $\overline{MN} = 6\text{ cm}$.
158. Конструирај правоаголник за кој се дадени страна $b = 10\text{ cm}$ и збирот на другата страна и дијагоналата на правоаголникот $a + d = 15\text{ cm}$.
159. Дадени се три неколинеарни точки A, C и E . Конструирај правоаголник $ABCD$ ако A и C се негови темиња, а E е точка на дијагоналата BD .
160. Конструирај траpez $ABCD (AB \parallel CD)$, ако $\overline{AB} = 7\text{ cm}$, $\overline{DC} = 3\text{ cm}$, $\overline{AC} = 8\text{ cm}$ и $\overline{BD} = 6\text{ cm}$.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I АЛГЕБРА

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Определи ја цифрата на единиците на бројот

$$18+18^2+18^3+\dots+18^{19}+18^{20}.$$

Решение. Цифрата на единиците на бројот 18^n е иста со цифрата на единиците на бројот 8^n . Низата цифри на единиците на броевите 8^n , $n=1,2,3,4,5,6,\dots$ е 8, 4, 2, 6, 8, 4, ..., т.е. таа е периодична со период 4. Но, цифрата на единиците на збирот на било кои 4 последователни броја е еднаква на цифрата на единиците на збирот $8+4+2+6=20$, т.е. е еднаква на 0. Конечно, бидејќи во збирот

$$18+18^2+18^3+\dots+18^{19}+18^{20}$$

имаме пет групи од по 4 собирци, цифрата на единиците на овој збир е еднаква на 0.

2. Определи ја цифрата која се наоѓа на 2019 децималното место во децималниот запис на дробката $\frac{469}{1998}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{469}{1998} = 0,2347347347\dots,$$

што значи дека по децималната запирка прво е цифрата 2, а потоа се повторува групата цифри 3, 4 и 7, во овој редослед. Бидејќи

$$2019-1=3\cdot 672+2$$

заклучуваме дека на 2019 децимално место во децималниот запис се наоѓа втората цифра од дадената група цифри, т.е. цифрата 4.

3. Која цифра се наоѓа на 2019-тото место во децималниот запис на дробката $\frac{2}{7}$?

Решение. Имаме $\frac{2}{7} = 0,285714\ 285714\ 285714\dots$, што значи дека децималниот запис на $\frac{2}{7}$ е чист периодичен децимален број со должина на периодата еднаква на 6. Бидејќи $2019=6\cdot 336+3$ добиваме дека на 2019-тото место е третата цифра на периодата, т.е. цифрата 5.

4. Определи го збирот на првите 450 децимали во децималниот запис на дробката $\frac{11}{700}$.

Решение. Имаме $\frac{11}{700} = 0,01571428571428... = 0,01\overline{571428}$. Според тоа, децималниот запис се состои од претпериод 01 и шестцифрена периода 571428. Збирот на првите две цифри е еднаков на 1. Треба да се пресмета збирот на останатите 448 цифри. Бидејќи $448 = 6 \cdot 74 + 4$ групата од шест цифри се повторува 74 пати, па потоа имаме уште четири цифри од периодата. Збирот на цифрите во еприодата е 27, па затоа бараниот збир е $1 + 74 \cdot 27 + 5 + 7 + 1 + 4 = 2016$.

5. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{2018+2018+2018}{2018+2018+2028+2018}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{2018+2018+2018}{2018+2018+2018+2018} = \frac{3 \cdot 2018}{4 \cdot 2018} = \frac{3}{4}.$$

6. Пресметај ја вредноста на изразот

$$0,01 + 0,02 + 0,03 + 0,04 + \dots + 0,67 + 0,68.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 0,01 + 0,02 + 0,03 + 0,04 + \dots + 0,67 + 0,68 &= \frac{1}{100} (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 67 + 68) \\ &= \frac{1}{100} \cdot \frac{68 \cdot 69}{2} = \frac{2346}{100} = 23,46 \end{aligned}$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот

$$1 : \{0,68 - (\frac{7,7}{2,8} - 0,695 : 1,39) : [1 + (0,126 + 0,15) : (0,15 - 0,126)]\},$$

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} 1 : \{0,68 - (\frac{7,7}{2,8} - 0,695 : 1,39) : [1 + (0,126 + 0,15) : (0,15 - 0,126)]\} &= \\ &= 1 : \{0,68 - (2,75 - 0,5) : [1 + 0,276 : 0,024]\} \\ &= 1 : \{0,68 - 2,25 : [1 + 11,5]\} \\ &= 1 : \{0,68 - 2,25 : 12,5\} \\ &= 1 : \{0,68 - 0,18\} \\ &= 1 + 0,5 = 2. \end{aligned}$$

8. Определи ја вредноста на изразот:

$$[(1,08 - \frac{2}{25}) : \frac{4}{7}] : [(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}) \cdot 2\frac{2}{17}].$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} [(1,08 - \frac{2}{25}) : \frac{4}{7}] : [(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}) \cdot 2\frac{2}{17}] &= [(\frac{108}{100} - \frac{2}{25}) : \frac{4}{7}] : [(\frac{59}{9} - \frac{13}{4}) \cdot \frac{36}{17}] \\ &= [1 : \frac{4}{7}] : (\frac{119}{36} \cdot \frac{36}{17}) = \frac{7}{4} : 7 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(2 + \frac{1}{5} - \frac{5 - \frac{1}{2}}{3}) \cdot (2 + \frac{6}{7}) + \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{44} + \frac{4}{33}}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} (2 + \frac{1}{5} - \frac{5 - \frac{1}{2}}{3}) \cdot (2 + \frac{6}{7}) + \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{44} + \frac{4}{33}} &= (2 + \frac{1}{5} - \frac{9}{6}) \cdot \frac{20}{7} + \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{11} \cdot (\frac{3}{4} + \frac{4}{3})} \\ &= (2 + \frac{1}{5} - \frac{3}{2}) \cdot \frac{20}{7} + 11 \\ &= \frac{20 + 2 - 15}{10} \cdot \frac{20}{7} + 11 \\ &= \frac{7}{10} \cdot \frac{20}{7} + 11 = 2 + 11 = 13. \end{aligned}$$

10. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{\frac{0,21}{0,75-0,6} - \frac{7}{6} \cdot (\frac{1}{15} + \frac{3}{8} + \frac{29}{40})}{\frac{28}{65} \cdot (\frac{9}{2} - \frac{25}{7})}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{\frac{0,21}{0,75-0,6} - \frac{7}{6} \cdot (\frac{1}{15} + \frac{3}{8} + \frac{29}{40})}{\frac{28}{65} \cdot (\frac{9}{2} - \frac{25}{7})} = \frac{\frac{0,21}{0,15} - \frac{7 \cdot 140}{6 \cdot 120}}{\frac{28 \cdot 13}{65 \cdot 14}} = \frac{\frac{7}{5} - 1}{\frac{28 \cdot 13}{65 \cdot 14}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = 1.$$

11. Пресметај ја вредноста на изразот

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6} + \dots + \frac{21}{20} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{20}).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6} + \dots + \frac{21}{20} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{20}) &= \\ &= (1-1) + (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{5}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{7}{6} - \frac{1}{6}) + (\frac{21}{20} - \frac{1}{20}) \\ &= 0 + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{10 \text{ единици}} = 10. \end{aligned}$$

12. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{(2,4 + 1\frac{1}{2}) \cdot 2,5 + (6\frac{1}{12} \cdot 6 - 1\frac{1}{72}) \cdot (8\frac{5}{7} - 1\frac{5}{21})}{54,75 - 4,5 : 0,1}.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{(2,4+1\frac{1}{2}) \cdot 2,5 + (6\frac{1}{12} \cdot 6 - 1\frac{1}{72}) \cdot (8\frac{5}{7} - 1\frac{5}{21})}{54,75 - 4,5 \cdot 0,1} = \frac{(2,4+1,5) \cdot 2,5 + (1\frac{1}{72} - 1\frac{1}{72}) \cdot (8\frac{15}{21} - 1\frac{5}{21})}{54,75 - 4,5} \\ = \frac{3,9 \cdot 2,5 + 0,7\frac{10}{21}}{9,75} = \frac{9,75}{9,75} = 1.$$

13. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{(1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} - 1,75 \cdot 1,125) \cdot \frac{7}{12}}{(\frac{13}{40} - 0,2125) \cdot 400} \cdot (6,79 : 0,7 + 0,3).$$

Решение. Имаме:

$$\frac{(1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} - 1,75 \cdot 1,125) \cdot \frac{7}{12}}{(\frac{13}{40} - 0,2125) \cdot 400} \cdot (6,79 : 0,7 + 0,3) = \frac{(\frac{7}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{7}{4} \cdot \frac{9}{8}) \cdot \frac{7}{12}}{(0,325 - 0,2125) \cdot 400} \cdot (9,7 + 0,3) \\ = \frac{(\frac{21}{8} - \frac{63}{32}) \cdot \frac{12}{7}}{0,1125 \cdot 400} \cdot 10 = \frac{\frac{21}{32} \cdot \frac{12}{7}}{\frac{45}{10}} \cdot 10 = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{45}{10}} \cdot 10 = \frac{1}{4}.$$

14. Определи ја вредноста на изразот

$$[(6\frac{3}{7} - \frac{0,75 \cdot 4 - 2}{0,35}) \cdot 2,8 + 1,75] : 0,05.$$

Решение. Имаме

$$[(6\frac{3}{7} - \frac{0,75 \cdot 4 - 2}{0,35}) \cdot 2,8 + 1,75] : 0,05 = [(\frac{45}{7} - \frac{3-2}{0,35}) \cdot 2,8 + 1,75] : 0,05 \\ = [(\frac{45}{7} - \frac{100}{35}) \cdot 2,8 + 1,75] : 0,05 \\ = [\frac{125}{35} \cdot \frac{28}{10} + 1,75] : 0,05 = [10 + 1,75] : 0,05 \\ = 11,75 : 0,05 = 1175 : 5 = 235.$$

15. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{0,725+1-1:40-40:0,032}{\frac{115}{3}-\frac{5}{3} \cdot 7+1\frac{5}{6}:0,30,75}$$

Решение. Имаме

$$\frac{0,725+1-1:40-40:0,032}{\frac{115}{3}-\frac{5}{3} \cdot 7+1\frac{5}{6}:0,30,75} = \frac{0,725+1-0,025-1,28}{\frac{115}{3}-\frac{35}{3}+\frac{11}{6} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1,725-0,025-1,28}{\frac{80}{3}+\frac{11}{6} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{4}} \\ = \frac{1,7-1,28}{\frac{80}{3}+\frac{55}{12}} = \frac{0,42}{\frac{320+55}{12}} = \frac{\frac{42}{100}}{\frac{375}{12}} = \frac{12 \cdot 42}{100 \cdot 375} = \frac{42}{3125}.$$

16. Пресметај ја вредноста на изразот

$$6 : \frac{1}{3} - 0,8 : \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{1\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1+2,2 \cdot 10}}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
 6 \cdot \frac{1}{3} - 0,8 \cdot \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{1 \cdot \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1+2,2 \cdot 10}} &= 6 \cdot \frac{1}{3} - 0,8 \cdot \frac{1,5}{\frac{1,2}{2} \cdot \frac{50}{1 \cdot 2}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 4}{6 - \frac{46}{1+22}} \\
 &= 18 - 0,8 \cdot \frac{1,5}{0,6 \cdot 25} + \frac{1}{4} + \frac{1+2}{6-2} \\
 &= 18 - 0,8 \cdot \frac{15}{1,5} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\
 &= 18 - 0,8 \cdot 10 + 1 = 11.
 \end{aligned}$$

17. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{(7-6,35):6,5+9,9}{(1,2:36+1,2:0,25-1\frac{5}{16}): \frac{169}{24}}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
 \frac{(7-6,35):6,5+9,9}{(1,2:36+1,2:0,25-1\frac{5}{16}): \frac{169}{24}} &= \frac{0,65:6,5+9,9}{(\frac{1}{30}+\frac{24}{5}-\frac{21}{16}): \frac{169}{24}} = \frac{0,1+9,9}{\frac{16+2304-630}{480} \cdot \frac{169}{24}} \\
 &= \frac{10}{\frac{1690 \cdot 169}{480 \cdot 24}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20.
 \end{aligned}$$

18. Пресметај $\frac{3}{7}$ од вредноста на изразот

$$\frac{1-\frac{1}{3}:(2+\frac{1}{6})}{3\frac{2}{5}+\frac{10-\frac{1}{3}}{3}:\frac{5}{8}} \cdot 8\frac{3}{5} - \frac{1,5:\frac{15}{4} \cdot 2,5+\frac{3}{5-\frac{2}{3}}}{1+\frac{1}{7}+\frac{6}{11(\frac{8}{3}-\frac{7}{4}) \cdot 7}}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
 \frac{1-\frac{1}{3}:(2+\frac{1}{6})}{3\frac{2}{5}+\frac{10-\frac{1}{3}}{3}:\frac{5}{8}} \cdot 8\frac{3}{5} - \frac{1,5:\frac{15}{4} \cdot 2,5+\frac{3}{5-\frac{2}{3}}}{1+\frac{1}{7}+\frac{6}{11(\frac{8}{3}-\frac{7}{4}) \cdot 7}} &= \frac{1-\frac{1}{3}:\frac{13}{6}}{3\frac{2}{5}+\frac{10-\frac{1}{3}}{3}:\frac{5}{8}} \cdot \frac{43}{5} - \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{2}+\frac{3}{\frac{13}{3}}}{1+\frac{1}{7}+\frac{6}{11(\frac{8}{3}-\frac{7}{4}) \cdot 7}} \\
 &= \frac{1-\frac{2}{13}}{\frac{17}{5}+\frac{13}{4} \cdot \frac{8}{5}} \cdot \frac{43}{5} - \frac{1+\frac{9}{13}}{\frac{8}{7}+\frac{6}{11 \cdot \frac{11}{12} \cdot 7}} = \frac{\frac{11}{13}}{\frac{17}{5}+\frac{26}{5}} \cdot \frac{43}{5} - \frac{\frac{22}{13}}{\frac{8}{7}+\frac{6}{7}} \\
 &= \frac{\frac{11}{13}}{\frac{43}{5}} \cdot \frac{43}{5} - \frac{\frac{22}{13}}{\frac{14}{7}} = \frac{11}{13} - \frac{11}{13} = 0.
 \end{aligned}$$

Конечно, $\frac{3}{7}$ од 0 е 0.

19. Пресметај ја вредноста на изразот

$$6 \cdot \frac{1}{3} - 0,8 \cdot \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{1 \cdot \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1+2,2 \cdot 10}}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
6 \div \frac{1}{3} - 0,8 \div \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{1 \cdot \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 \cdot \frac{46}{1+2,2 \cdot 10}} &= 6 \cdot 3 - \frac{8}{10} \div \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{50}{2}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 4}{6 \cdot \frac{46}{1+22}} \\
&= 18 - \frac{4}{5} \div \frac{\frac{3}{2}}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1+2}{6 \cdot 2} \\
&= 18 - \frac{4}{5} \div \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\
&= 18 - \frac{4}{5} \cdot 10 + 1 \\
&= 18 - 8 + 1 = 11.
\end{aligned}$$

20. Определи ги бројните вредности на изразите и спореди ги по големина:

$$A = \frac{|5,1| - 1,9 + 0,2| - 5,4|}{-0,45 - 3,1| - 4,23 - 0,27|} \quad \text{и} \quad B = \frac{|4,25 - 5,35| \cdot (-0,2) - |5,25| \cdot |-0,625|}{|12,55 - 26,45| \cdot 5}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
A &= \frac{|5,1| - 1,9 + 0,2| - 5,4|}{-0,45 - 3,1| - 4,23 - 0,27|} = \frac{|5,1|, 7 - 5,4|}{-0,45 - 3,14,5} = \frac{|3 - 5,4|}{-0,45 - 13,95} = \frac{2,4}{-14,4} = -\frac{1}{6}. \\
B &= \frac{|4,25 - 5,35| \cdot (-0,2) - |5,25| \cdot |-0,625|}{|12,55 - 26,45| \cdot 5} = \frac{1,1 \cdot (-0,2) - 5,25 \cdot 0,625}{13,9 \cdot 5} \\
&= \frac{-5,5 - 8,4}{13,9 \cdot 5} = \frac{-13,9}{13,9 \cdot 5} = -\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Но, $-\frac{1}{6} > -\frac{1}{5}$, од каде следува, дека $A > B$.

21. Нека c е цифрата на единиците на четирицифрениот број $\overline{256c}$ кој е делив со 6. Ако

$$a = \frac{3\frac{2}{13} \cdot 4,5 + 4,5 \cdot 6\frac{11}{13}}{7,351 \cdot 3\frac{3}{4} - 5,351 \cdot 3\frac{3}{4}} - 2,5 \quad \text{и} \quad b = 8\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3} : (22 - 21\frac{5}{9})$$

определи ја вредноста на изразот $(2a - \frac{1}{b})c$.

Решение. Еден број е делив со 6 ако и само ако е делив со 2 и со 3. Од деливоста со 2 следува дека цифрата c е парна, а од деливоста со 3 следува дека збирот $2 + 5 + 6 + c = 13 + c$ е делив со 3. Лесно се гледа дека и двата услови се исполнети ако $c = 2$ или $c = 8$. Понатаму,

$$a = \frac{3\frac{2}{13} \cdot 4,5 + 4,5 \cdot 6\frac{11}{13}}{7,351 \cdot 3\frac{3}{4} - 5,351 \cdot 3\frac{3}{4}} - 2,5 = \frac{(\frac{41}{13} + \frac{89}{13}) \cdot 4,5}{(7,351 - 5,351) \cdot \frac{15}{4}} - 2,5 = \frac{45}{\frac{15}{2}} - 2,5 = 6 - 2,5 = 3,5 \quad \text{и}$$

$$b = 8\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3} : (22 - 21\frac{5}{9}) = 8\frac{2}{3} - \frac{4}{3} : \frac{4}{9} = 8\frac{2}{3} - 3 = 5\frac{2}{3}.$$

За $c = 2$ имаме $(2a - \frac{1}{b})c = 13\frac{11}{17}$, а за $c = 8$ имаме $(2a - \frac{1}{b})c = 54\frac{10}{17}$.

22. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$|a - |b + |c|| + c| + |a + |b - |c|| - c|$$

ако $a = -5, b = -6, c = -7$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} |a - |b + |c|| + c| + |a + |b - |c|| - c| &= |-5 - |-6 + 7| - 7| + |-5 + |-6 - 7| + 7| \\ &= |-5 - 1 - 7| + |-5 + 13 + 7| = 13 + 15 = 28. \end{aligned}$$

23. Кои собироци треба да се изостават во изразот $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$, за вредноста на новиот збир да биде 1?

Решение. Бидејќи $\frac{120}{120} = 1$ и

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{60}{120} + \frac{30}{120} + \frac{20}{120} + \frac{15}{120} + \frac{12}{120} + \frac{10}{120} = \frac{147}{120}$$

треба да избришеме собироци кои дават збир $\frac{147}{120} - \frac{120}{120} = \frac{27}{120}$. Значи

треба да ги избришеме собиорците $\frac{15}{120}$ и $\frac{12}{120}$, односно собиорците $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{10}$.

24. Нека

$$A = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} \text{ и } B = -5 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{1}{2}}}.$$

Докажи дека $C = \frac{7}{11}A + 18B$ е цел број.

Решение. Имаме,

$$A = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{4}} = 1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$$

и

$$\begin{aligned} B &= -5 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{1}{2}}} = -5 + \frac{1}{2 + \frac{2}{\frac{7}{2}}} = -5 + \frac{1}{2 + \frac{4}{7}} \\ &= -5 + \frac{1}{\frac{18}{7}} = -5 + \frac{7}{18} = -\frac{83}{18}. \end{aligned}$$

Затоа

$$C = \frac{7}{11}A + 18B = \frac{7}{11} \cdot \frac{11}{7} + 18 \cdot \left(-\frac{83}{18}\right) = 1 - 83 = -82.$$

1.2. НЕРАВЕНСТВА

25. Нека x е ненулта рационален број. Што е поголемо x или $\frac{1}{x}$? Испитај ги сите можности.

Решение. Можн се следниве случаи:

- 1) Ако $x < -1$, тогаш $x < \frac{1}{x}$.
- 2) Ако $-1 < x < 0$, тогаш $x > \frac{1}{x}$.
- 3) Ако $0 < x < 1$, тогаш $x < \frac{1}{x}$.
- 4) Ако $x > 1$, тогаш $x > \frac{1}{x}$.
- 5) Ако $x = -1$ или $x = 1$, тогаш $x = \frac{1}{x}$.

26. Што е поголемо: $\frac{1989}{1990}$ или $\frac{1988}{1989}$?

Решение. Имаме $1 - \frac{1989}{1990} = \frac{1}{1990}$ и $1 - \frac{1988}{1989} = \frac{1}{1989}$. Бидејќи $\frac{1}{1989} > \frac{1}{1990}$, добиваме дека $1 - \frac{1988}{1989} > 1 - \frac{1989}{1990}$, па затоа $\frac{1988}{1989} < \frac{1989}{1990}$.

27. Што е поголемо $\frac{29}{1996}$ или $\frac{7}{500}$?

Решение. Имаме, $\frac{29}{1996} > \frac{28}{1996} = \frac{7}{499} > \frac{7}{500}$.

28. Која дробка е поголема $\frac{5553}{5557}$ или $\frac{6664}{6669}$?

Решение. Имаме $A = \frac{5553}{5557} = \frac{a-4}{a}$ и $B = \frac{6664}{6669} = \frac{b-5}{b}$, каде $a = 5557$ и $b = 6669$. Според тоа, $A - B = \frac{a-4}{a} - \frac{b-5}{b} = \frac{5a-4b}{ab}$. Бидејќи $5a = 27785$ и $4b = 26676$, добиваме дека $5a - 4b > 0$, односно $A - B > 0$, па затоа $A > B$.

29. Спореди ги дробките $\frac{1+2+3+\dots+50}{2018}$ и $\frac{1275}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{1+2+3+\dots+50}{2018} = \frac{(1+50)+(2+49)+\dots+(25+26)}{2018} = \frac{25 \cdot 51}{2018} = \frac{1275}{2018} \text{ и}$$

$$\frac{1275}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{1275}{32 \cdot 63} = \frac{1275}{2016}.$$

Од $2018 > 2016$ следува $\frac{1}{2018} < \frac{1}{2016}$, односно $\frac{1275}{2018} < \frac{1275}{2016}$, па затоа $\frac{1+2+3+\dots+50}{2018} < \frac{1275}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9}$.

30. Пресметај ги вредностите на изразите $A = \frac{1}{2} - \frac{6}{5} + \frac{2}{3}$, $B = |1 - A|$ и $C = |B| - 2$ и подреди ги по големина.

Решение. Имаме:

$$A = \frac{1}{2} - \frac{6}{5} + \frac{2}{3} = \frac{15 - 36 + 20}{30} = -\frac{1}{30}, \quad B = |1 - (-\frac{1}{30})| = \frac{31}{30} \text{ и } C = \frac{31}{30} - 2 = -\frac{29}{30},$$

па затоа $C < A < B$.

31. Нека

$$x = 3, y = -1, z = -7, A = 4 - x(x + y), B = 2x + z + 1, C = z - (1 - z).$$

Спореди ги по големина апсолутните вредности на A, B и C .

Решение. Имаме

$$A = 4 - x(x + y) = 4 - 3(3 - 1) = -2$$

$$B = 2x + z + 1 = 2 \cdot 3 - 7 + 1 = 0$$

$$C = z - (1 - z) = -7 - (1 + 7) = -15,$$

т.е. $|A| = 2, |B| = 0, |C| = 15$, па затоа $|B| < |A| < |C|$.

32. Што е поголемо: $(-2018)^{2019}$ или $(-2019)^{2018}$?

Решение. Бидејќи 2019 е непарен број па важи $(-2018)^{2019} < 0$, а бидејќи 2018 е парен број важи $(-2019)^{2018} > 0$. Значи,

$$(-2018)^{2019} < (-2019)^{2018}.$$

33. Дадени се множествата $A = \{1, 2, \dots, 1993\}$ и $B = \{0, -1, -2, \dots, -1992\}$. Нека c е збирот на сите броеви од множествата A и B , d нивниот производ и e разликата на збирот на непарните броеви од A и парните броеви од B . Подреди ги броевите $|c - d|, |d - e|$ и $|e - c|$ по големина.

Решение. Имаме:

$$c = 1 + 2 + 3 + \dots + 1993 + (0 - 1 - 2 - \dots - 1992) = 1993,$$

$$d = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1993 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-1992) = 0 \text{ и}$$

$$e = 1 + 3 + \dots + 1993 - (-2 - 4 - \dots - 1992) = 1 + 2 + \dots + 1993 = 997 \cdot 1993.$$

Значи, $|c - d| = 1993, |d - e| = 997 \cdot 1993$ и $|e - c| = 996 \cdot 1993$, па затоа

$$|c - d| < |e - c| < |d - e|.$$

34. Докажи дека

$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2020} < \frac{1}{4}.$$

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2020} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1009 \cdot 1010} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1010-1009}{1009 \cdot 1010} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1009} - \frac{1}{1010} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{1010} \right) < \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

1.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

35. Определи ги природните броеви a, b, c такви што

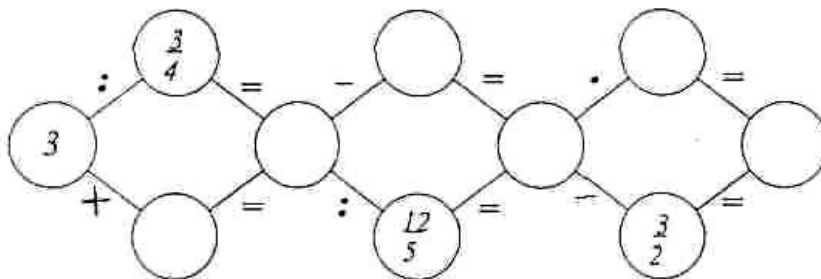
$$\frac{283}{255} = 1 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}.$$

Решение. Од $\frac{283}{255} = 1 + \frac{28}{255}$ следува

$$1 + \frac{28}{255} = 1 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}, \text{ т.е. } \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} = \frac{28}{255} = \frac{1}{\frac{255}{28}} = \frac{1}{9 + \frac{3}{28}} = \frac{1}{9 + \frac{1}{\frac{28}{3}}} = \frac{1}{9 + \frac{1}{9 + \frac{1}{3}}},$$

од каде следува $a=9$, $b=9$ и $c=3$.

36. Во празните кругови запиши ги соодветните броеви така што со изведувањето на назначените операции ќе се добијат точни резултати.



Решение. Последователно добиваме:

$$3 : \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4,$$

$$3 + x = 4, \text{ т.е. } x = 1,$$

$$4 : \frac{12}{5} = 4 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{3},$$

$$4 - x = \frac{5}{3}, \text{ т.е. } x = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3},$$

$$\frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{10-9}{6} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{5}{3}x = \frac{1}{6}, \text{ т.е. } x = \frac{1}{6} : \frac{5}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}.$$

37. Решија равенката

$$(-10) + (-9) + \dots + (x-1) + x = -27.$$

Решение. Можни се два случаја $x < 0$ и $x \geq 0$. Ако $x < 0$, тогаш би-дејќи $(-10) + (-9) + (-8) = -27$ добиваме дека $x = -8$. Ако $x \geq 0$, то-гаш

$$(-10) + (-9) + (-8) + (-7) + \dots + (-1) + 0 + 1 + \dots + x = -27,$$

$$-27 + (-7) + \dots + (-1) + 0 + 1 + \dots + x = 27,$$

$$(-7) + \dots + (-1) + 0 + 1 + \dots + x = 0,$$

$$x = -7.$$

38. Реши ја равенката

$$\frac{2+4+6+\dots+2018}{1+3+5+\dots+2017} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2018}.$$

Решение. Имаме:

$$2+4+6+\dots+2018 = 2 \cdot (1+2+3+\dots+1009) = 2 \cdot \frac{1009 \cdot (1009+1)}{2} = 1009 \cdot 1010$$

и

$$\begin{aligned} 1+3+5+\dots+2017 &= 1+2+3+\dots+2018 - (2+4+6+\dots+2018) \\ &= \frac{2018 \cdot (2018+1)}{2} - 1009 \cdot 1010 = 1009 \cdot 2019 - 1009 \cdot 1010 \\ &= 1009 \cdot (2019 - 1010) = 1009 \cdot 1009. \end{aligned}$$

Со замена во равенката добиваме

$$\frac{1009 \cdot 1010}{1009 \cdot 1009} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2018}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1010}{1009} - \frac{1}{2018}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2020-1}{2018}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2019}{2018}$$

$$x = \frac{2018}{2019}.$$

39. Реши ја равенката

$$0,4 \cdot \left(\frac{2}{3}x - 1\right) + \frac{3}{5} = \left(-2\frac{1}{4}\right) : 0,9.$$

Решение. Последователно добиваме

$$0,4 \cdot \left(\frac{2}{3}x - 1\right) + \frac{3}{5} = \left(-2\frac{1}{4}\right) : 0,9$$

$$\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}x - 1\right) + \frac{3}{5} = \left(-\frac{9}{4}\right) : \frac{9}{10}$$

$$\frac{4}{15}x - \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \left(-\frac{9}{4}\right) \cdot \frac{10}{9}$$

$$\frac{4}{15}x = -\frac{1}{5} - \frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{27}{10} \cdot \frac{15}{4} = -\frac{81}{8}.$$

40. Определи ја вредноста на изразот

$$A = \frac{a^2 - 2a}{a^2 - 4a + 2},$$

ако a е решение на равенката:

$$3a + 1 - (5a - (4a - 10)) + 5 = a - 1.$$

Решение. Имаме

$$3a + 1 - (5a - (4a - 10)) + 5 = a - 1$$

$$3a + 1 - (a + 10) + 5 = a - 1$$

$$3a + 1 - a - 10 + 5 = a - 1$$

$$2a - 4 = a - 1$$

$$a = 3,$$

па затоа

$$A = \frac{3^2 - 2 \cdot 3}{3^2 - 4 \cdot 3 + 2} = \frac{9 - 6}{9 - 12 + 2} = \frac{3}{-1} = -3.$$

41. Определи ја вредноста на изразот $M = \frac{|a-x|}{3} - \frac{|-a+2x|}{2}$, каде

$$a = \frac{-5(-\frac{1}{7}) + 2,1(-0,3)}{5(-\frac{1}{3}) - 2(-0,25)},$$

а x е решението на равенката

$$-3\frac{1}{3} \cdot 1,2 - x = -3,25 \cdot 1\frac{3}{13} - 6.$$

Решение. Имаме

$$a = \frac{-5(-\frac{1}{7}) + 2,1(-0,3)}{5(-\frac{1}{3}) - 2(-0,25)} = \frac{-35-7}{-15+8} = \frac{28}{-7} = -4$$

и

$$-3\frac{1}{3} \cdot 1,2 - x = -3,25 \cdot 1\frac{3}{13} - 6$$

$$-\frac{10}{3} \cdot \frac{12}{10} - x = -\frac{325}{100} \cdot \frac{16}{13} - 6$$

$$-4 - x = -4 - 6$$

$$x = -6.$$

Затоа,

$$M = \frac{|a-x|}{3} - \frac{|-a+2x|}{2} = \frac{|-4-6|}{3} - \frac{|-(-4)+2\cdot 6|}{2} = \frac{10}{3} - \frac{16}{2} \\ = \frac{10}{3} - 8 = \frac{10-24}{3} = -\frac{14}{3} = -4\frac{2}{3}.$$

42. Пресметај

$$M = \frac{169^{12} + |13^{24} - 3^{72}|}{81^9 \cdot (-27)^7} \text{ и } N = \left(\frac{2^8 \cdot (-3)^9}{6^4}\right)^3 \cdot \frac{12^5}{(18^4)^3 \cdot ((-4)^3)^2} \cdot \frac{32 \cdot (-6)^3}{(2^3 \cdot 3^5)^4}.$$

Спореди ги вредностите на x и y , ако x е решение на равенката

$$\frac{3}{2} \left(-\frac{5}{6} + 4 \left(\left(\frac{5}{24} + \frac{7}{3} \left(x + \frac{5}{24} \right) \right) \right) \right) = -1,$$

а y е решение на равенката $My = N$.

Решение. Имаме

$$M = \frac{169^{12} + |13^{24} - 3^{72}|}{81^9 \cdot (-27)^7} = \frac{169^{12} + |13^{24} - 3^{72}|}{-(3^4)^9 \cdot (3^3)^7} = \frac{13^{24} - 13^{24} + (3^3)^{24}}{-(3^4)^9 \cdot (3^3)^7} = -\frac{3^{72}}{3^{57}} = -3^{15}$$

и

$$N = \left(\frac{2^8 \cdot (-3)^9}{6^4}\right)^3 \cdot \frac{12^5}{(18^4)^3 \cdot ((-4)^3)^2} \cdot \frac{32 \cdot (-6)^3}{(2^3 \cdot 3^5)^4} = \frac{-2^{24} \cdot 3^{27}}{3^{12} \cdot 2^{12}} \cdot \frac{4^5 \cdot 3^5}{(2^4 \cdot 9^4)^3 \cdot 4^6} \cdot \frac{2^{12} \cdot 3^{20}}{2^5 \cdot (-2^3 \cdot 3^3)} \\ = \frac{2^{24} \cdot 3^{27} \cdot 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 2^{12} \cdot 3^{20}}{3^{12} \cdot 2^{12} \cdot 2^{12} \cdot 3^{24} \cdot 2^{12} \cdot 2^8 \cdot 3^3} = 4 \cdot 3^{13}.$$

Според тоа, за y ја добиваме равенката $-3^{15}y = 4 \cdot 3^{13}$, од каде $y = -\frac{4}{9}$.

После последователни еквивалентни трансформации од втората равенка добиваме:

$$-\frac{5}{6} + 4 \left(\left(\frac{5}{24} + \frac{7}{3} \left(x + \frac{5}{24} \right) \right) \right) = -\frac{2}{3} \\ 4 \left(\left(\frac{5}{24} + \frac{7}{3} \left(x + \frac{5}{24} \right) \right) \right) = \frac{1}{6} \\ \frac{5}{24} + \frac{7}{3} \left(x + \frac{5}{24} \right) = \frac{1}{24} \\ \frac{7}{3} \left(x + \frac{5}{24} \right) = -\frac{4}{24} \\ x + \frac{5}{24} = -\frac{4}{24} \cdot \frac{3}{7} \\ x = -\frac{1}{14} - \frac{5}{14} = -\frac{3}{7}.$$

Бидејќи

$$x = -\frac{3}{7} = -\frac{27}{63}, y = -\frac{4}{9} = -\frac{28}{63},$$

добиваме $x > y$.

43. Реши ја равенката:

$$2|x| = 6 - x.$$

Решение. Бидејќи

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

за $x \geq 0$ равенката има облик $2x = 6 - x$, па затоа $x = 2$ и ова е решение на почетната равенка, а за $x < 0$ равенката има облик $-2x = 6 - x$, па е $x = -6$ и ова исто така е решение на почетната равенка.

44. Реши ја равенката $|x - \frac{1}{2}| = 2\frac{1}{5}$.

Решение. Имаме, $x - \frac{1}{2} = \pm 2\frac{1}{5}$, т.е. $x = \frac{1}{2} + \pm 2\frac{1}{5}$, па затоа $x = -\frac{17}{10}$ или $x = \frac{27}{10}$.

45. Реши ја равенката:

$$\frac{|2x - \frac{3}{4}|}{5} = 6.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} |2x - \frac{3}{4}| &= 30 \\ \left[\begin{aligned} 2x - \frac{3}{4} &= 30 \\ 2x - \frac{3}{4} &= -30 \end{aligned} \right. \\ \left[\begin{aligned} x &= \frac{123}{8} \\ x &= -\frac{117}{8}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

46. Реши ја равенката:

$$|x - \frac{1}{2}| = |\frac{3}{2} - x|.$$

Решение. Имаме: $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - x$ или $x - \frac{1}{2} = -(\frac{3}{2} - x)$. Во првиот случај последователно добиваме:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} - x \\ x &= 1, \end{aligned}$$

а вториот случај доведува до противречност. Според тоа, единствено решение на равенката е $x = 1$.

47. Нека a, b и c се цели броеви такви што важи

$$ab = -6, ac = -10 \text{ и } bc = 15.$$

Опреди го производот abc и броевите a, b и c .

Решение. Бидејќи a е цел број кој е делител на броевите -6 и -10 добиваме дека $a \in \{-1, 1, -2, 2\}$. Во случаите кога $a=1$ или $a=-1$ добиваме дека $bc=60$, што не е точно. Ако $a=2$, тогаш $b=-3$ и $c=-5$, па $bc=15$ и затоа $abc=30$. Ако $a=-2$, тогаш $b=3$ и $c=5$, па $bc=15$ и затоа $abc=-30$.

Значи единствени решенија на задачата се:

$$a=2, b=-3, c=-5, abc=30 \text{ и } a=-2, b=3, c=5, abc=-30.$$

48. Определи ги броевите a и b за кои важи $a+b=ab=\frac{a}{b}$.

Решение. Од $ab=\frac{a}{b}$ следува $b=1$ или $b=-1$. Ако $b=1$, тогаш $a+1=a$, што е противречност. За $b=-1$ добиваме $a-1=-a$, од каде следува $a=\frac{1}{2}$.

49. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} A+B=\frac{5}{6} \\ B+C=1\frac{7}{10} \\ C+A=5\frac{8}{15}. \end{cases}$$

Решение. Имаме:

$$(A+B)+(B+C)+(C+A)=\frac{5}{6}+1\frac{7}{10}+5\frac{8}{15}$$

$$2(A+B+C)=\frac{242}{30}$$

$$A+B+C=\frac{121}{30},$$

$$\text{па затоа } C=\frac{121}{30}-\frac{5}{6}=\frac{16}{5}, A=\frac{121}{30}-\frac{17}{10}=\frac{7}{3}, B=\frac{121}{30}-\frac{83}{15}=-\frac{3}{2}.$$

50. Определи ги сите цели броеви x такви што $\frac{1}{3} < \frac{1-x}{5} < \frac{11}{12}$.

Решение. Последователно добиваме

$$\frac{1}{3} < \frac{1-x}{5} < \frac{11}{12}$$

$$\frac{5}{3} < 1-x < \frac{55}{12}$$

$$\frac{2}{3} < -x < \frac{43}{12}$$

$$-3\frac{7}{12} < x < -\frac{2}{3},$$

$$\text{па затоа } x \in \{-3, -2, -1\}.$$

51. Определи ги дробките со именител 9 кои се поголеми од $\frac{2}{3}$ и се помали од $\frac{5}{6}$.

Решение. Бидејќи $\frac{2}{3} = \frac{12}{18} < \frac{x}{9} = \frac{2x}{18} < \frac{15}{18}$, треба да важи $12 < 2x < 15$, од каде добиваме $2x=14$, т.е. $x=7$. Според тоа, единствена дробка со саканото својство е дробката $\frac{7}{9}$.

52. Определи ги сите рационални броеви a за кои е точно неравенството $\frac{3a-2}{a+1} < 0$.

Решение. Бидејќи количник на два броја е негативен ако броевите се со спротивни знаци, од $\frac{3a-2}{a+1} < 0$ следува

$$\begin{cases} 3a-2 < 0 \\ a+1 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3a-2 > 0 \\ a+1 < 0 \end{cases}$$

- 1) Ако

$$\begin{cases} 3a-2 < 0 \\ a+1 > 0 \end{cases},$$

тогаш решение на задачата е $-1 < a < \frac{2}{3}$.

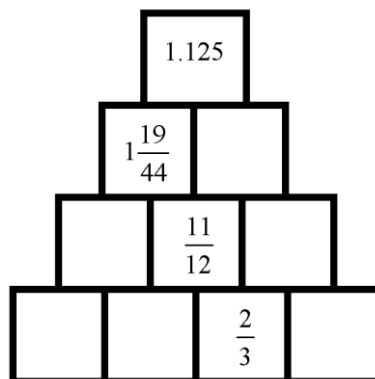
- 2) Ако

$$\begin{cases} 3a-2 > 0 \\ a+1 < 0 \end{cases}$$

тогаш $a > \frac{2}{3}$ и $a < -1$, т.е. во овој случај задачата нема решение бидејќи не постои рационален број кој е помал од -1 , а е поголем од $\frac{2}{3}$.

1.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

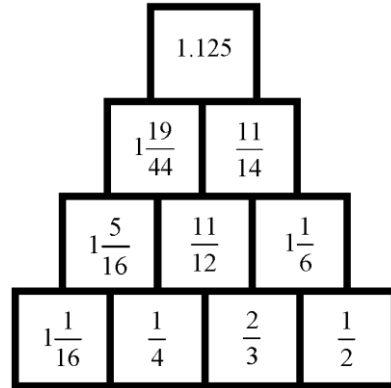
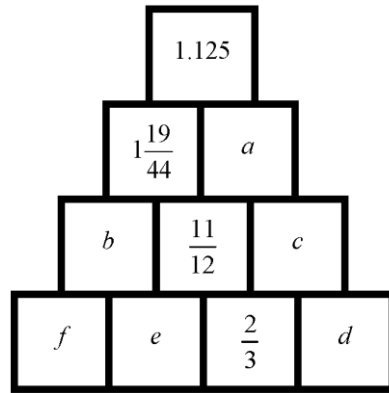
53. Во секое празно поле на фигурата дадена на цртежот десно запиши по еден број така што се исполнети условите: во најгорното поле се наоѓа производот на двата броја кои се непосредно под него; во секое поле од вториот ред се наоѓа кличникот на двата броја кои



се непосредно под него и тоа така што левиот број се дели со десниот; во секое поле во третиот ред се наоѓа збирот на двата броја кои се наоѓаат во полињата по него.

Решение. Непознатите броеви да ги означиме со a, b, c, d, e, f (цртеж десно). Имаме:

$$\begin{aligned} 1,125 &= 1\frac{19}{44}a & b \cdot \frac{11}{12} &= \frac{63}{44} \\ a &= \frac{9}{8} \cdot \frac{63}{44} & b &= \frac{63}{44} \cdot \frac{11}{12} \\ a &= \frac{9}{8} \cdot \frac{44}{63} = \frac{11}{14} & b &= \frac{21}{16} = 1\frac{5}{16} \\ \frac{11}{12} : c &= \frac{11}{14} & \frac{2}{3} + d &= 1\frac{1}{6} \\ c &= \frac{11}{12} : \frac{11}{14} & d &= \frac{7}{6} - \frac{2}{3} \\ c &= \frac{11}{12} \cdot \frac{14}{11} = 1\frac{1}{6} & d &= \frac{7}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{2} \\ e + \frac{2}{3} &= \frac{11}{12} \\ e &= \frac{11}{12} - \frac{2}{3} \\ e &= \frac{11}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{6} \\ f + \frac{1}{4} &= 1\frac{5}{16} \\ f &= 1\frac{5}{16} - \frac{1}{4} \\ f &= 1\frac{5}{16} - \frac{4}{16} = 1\frac{1}{16} \end{aligned}$$



Пополнетата фигура е прикажана на цртежот десно.

54. Во празните полиња на квадратот на цртежот десно запиши цели броеви така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на двете дијагонали ќе биде еднаков.

Решение. Нека во централното поле на квадратот е запишан бројот x . Збирите на броевите запишани на дијагоналите се еднакви, па затоа во горното лево поле треба да биде запишан бројот $x - 16 - 8 - (x - 3) = -21$. Збирот на броевите запишани на дијагоналата и броевите запишани во третиот ред треба да се еднакви, па затоа во празното поле на третиот ред треба да е

		-16
-8		-3

		-16
	x	
-8		-3

запишан бројот

$$x - 24 - (-8 - 3) = x - 13.$$

Аналогно, во празното поле на првиот ред треба да е запишан бројот

$$x - 24 - (-21 - 16) = x + 13,$$

во празното поле на првата колона треба да е запишан бројот

$$x - 24 - (-21 - 8) = x + 5$$

и во празното поле на третата колона треба да е запишан бројот

$$x - 24 - (-16 - 3) = x - 5.$$

Така ја добиваме табелата прикажана на цртежот десно.

-21	$x + 13$	-16
$x + 5$	x	$x - 5$
-8	$x - 13$	-3

Збирот на броевите во втората колона е еднаков на $3x$, па затоа $3x = x - 24$, од каде добиваме $2x = -24$, односно $x = -12$. Со замена за x ја добиваме табелата прикажана на цртежот десно во која збиротвите на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на двете дијагонали е еднаков на -36 .

-21	1	-16
-7	-12	-17
-8	-25	-3

55. Во полињата на 4×4 табела распореди прости броеви така што производот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на 1989.

Решение. Имаме $1989 = 3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17$,

што значи дека во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала треба да распоредиме по две тројки, една тринаесетка и една седумнаесетка. Пожелно е прво да ги распоредиш тројките, а потоа другите два броја. Едно решение на задачата е дадено на цртежот десно.

3	17	3	13
13	3	17	3
17	3	13	3
3	13	3	17

56. Супермагичен $n \times n$ квадрат е квадратот во кој производот на броевите запишани во полињата на секоја колона, секој ред и на секоја дијагонала се еднакви.

а) Дади пример на супермагичен 3×3 квадрат таков што броевите запишани во сите полиња се различни и производот по колони, редови и дијагонали е еднаков на 1.

б) Состави супермагичен 3×3 квадрат таков што броевите запишани во сите полиња се различни и збирот на броевите запишани во осумте полиња е еднаков на бројот запишан во деветтото поле намален за 1.

Решение. а) Постојат повеќе решенија на задачата, од кои едно е дадено на цртежот десно. Други решенија може да се добијат ако на пример природните броеви се $1, k, k^2, k^3, k^4$, а дробките се $\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}$,

8	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{16}$	1	16
2	4	$\frac{1}{8}$

$\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k^4}$ и истите се распоредат на идентичен начин

како на цртежот десно.

б) Пример на супермагичен квадрат кој ги задоволува условите на задачата може да се добие ако сите броеви од примерот под а) ги помножимо со 16. Во тој случај ќе се добие магичниот квадрат прикажан на цртежот десно, за кој важи

128	4	8
1	16	256
32	64	2

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 255 = 256 - 1 = 2^8 - 1.$$

57. Дали може бројот 1 да се запише како збир на различни позитивни броеви со броител 1, секој од кои е помал од $\frac{1}{1000}$?

Решение. Да забележиме дека $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. Потоа, ако го искористиме

равенството $\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}$, ја заменуваме секоја од дробките на

десната страна на равенството со збир на две дробки со броител 1 и со именители поголеми од претходните. На пример, во вториот чекор добиваме $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{42}$. Ако во некој чекор на десната страна на равенството добиеме две еднакви дробки, тогаш на едната од нив го применуваме горното равенство итн. Јасно, во секој чекор најмалиот именител на дробките на десната страна е поголем од најмалиот именител на дробките пред направениот чекор. Затоа, по конечен број такви чекори ќе го добиеме саканото претставување.

58. На даден број x го додаваме неговиот реципрчен број $\frac{1}{x}$, потоа со добиениот број ја повторуваме постапката итн. Ако почетниот број е $\frac{1}{3}$, дали е можно после неколкукратна примена на оваа операција да се добие бројот:

а) $\frac{2018201620142012}{2019201720152013}$,

б) $\frac{2018202020222024}{2019202120232025}$?

Решение. Ќе докажеме дека ако еден рационален број е запишан како нескратлива дробка $\frac{a}{b}$ каде a е непарен број, а b е парен број, тогаш $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ е број од истиот вид. Навистина, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$ и ab е парен број, а a^2+b^2 е непарен број. Може да се докаже дека при дадените ограничувања за a и b дробката $\frac{a^2+b^2}{ab}$ е нескратлива, но тоа не е неопходно. Имено, дури и да е дробката $\frac{a^2+b^2}{ab}$ скратлива, по евентуалното скратување новиот броител и именител ќе се со иста парност. Во конкретниот случај од $\frac{1}{3}$ добиваме $\frac{10}{3}$, а потоа $\frac{109}{30}$ и сега е јасно дека во секој следен чекор ќе се добива број со непарен броител и парен именител, па затоа никако не може да се добијат дробките $\frac{2018201620142012}{2019201720152013}$ и $\frac{2018202020222024}{2019202120232025}$.

59. Дали може број од видот $\overline{123456789ab...xy987654321}$ да биде точен квадрат на природен број?

Решение. Да забележиме дека се точни равенствата:

$$11^2 = 121, 111^2 = 12321, \dots, 111111111^2 = 12345678987654321.$$

Сега добиваме

$$\begin{aligned} 111111111011111111^2 &= (111111111 \cdot 10^{10} + 111111111)^2 \\ &= (111111111^2 \cdot (10^{10} + 1))^2 \\ &= 123456789987654321 \cdot (10^{20} + 2 \cdot 10^{10} + 1) \\ &= 1234567899012345679765432098987654321, \end{aligned}$$

што значи дека одговорот на поставеното прашање е позитивен.

60. Дали е можно производот на некои 99 од броевите $1!, 2!, 3!, \dots, 100!$ да е точен квадрат?

Решение. Секој природен број n , $2 \leq n \leq 100$ учествува во производот $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 99! \cdot 100!$ точно $101-n$ пати. Значи,

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 99! \cdot 100! = 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot 4^{97} \cdot \dots \cdot 99^2 \cdot 100.$$

Сите непарни броеви на десната страна се со парни степености показатели, што значи дека нивниот производ е точен квадрат. Производот на парните множители може да биде запишан во видот

$$(2^{98} \cdot 4^{96} \cdot 6^{94} \cdot \dots \cdot 98^2) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100).$$

- a) 3 б) 2.

- б) Нека $a \leq b \leq c$. Нека претпоставиме дека $a \mid b = 2^k$, $b \mid c = 2^m$ и

- a) $(1*2)*(3*4)$ б) $1*((2*3)*4)$ в) $1*(2*(3*4))$

- Г) $((1*2)*3)*4$ Д) $(1*(2*3))*4$

- $$6) 1 * ((2 * 3) * 4) - (4 - (3 - 2)) - 1 - 2$$

- R) $1*(2*(3*4)) - ((4-3)-2) - 1 - -2$

- $$\Gamma_1((1*2)*3)*4-4-(3-(2-1))-2 \text{ и}$$

- II) $(1 * (2 * 3)) * 4 - 4 - ((3 - 2) - 1) - 4$

$$\vee ||| - || = |X$$

Опреди ги сите решенија.

Решение. Задачата ги има следниве три решенија:

$$\begin{array}{r} \vee || + || = |X \\ \vee ||| + | = |X \\ \vee ||| + || = X \end{array}$$

64. Реши го бројниот ребус: $a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}$, во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Од $a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}$ следува $a \cdot b \cdot \overline{ab} = b \cdot 111$, т.е. $a \cdot \overline{ab} = 111$. Понатаму, бидејќи $111 = 3 \cdot 37$ добиваме $a = 3$ и $b = 37$, што значи $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$.

65. Опреди ги сите четирицифрени броеви $\overline{abba}$ такви што

$$\overline{abba} \cdot 2 = \overline{ccdd}$$

каде a, b, c и d се различни цифри.

Решение. Очигледно $a < 5$, бидејќи за $a \geq 5$ бројот на десната страна на равенството ќе биде петцифрен број, што не е можно. Понатаму, левата страна на равенството е делива со 2, па затоа и десната страна е делива со 2, т.е. бројот $\overline{ccdd}$ е парен. Значи, d може да биде 0, 2, 4, 6 или 8.

Ако $d = 0$, тогаш цифрата a може да биде 0 или 5, што не е можно бидејќи $a < 5$ и a, b, c и d се различни цифри.

Ако $d = 2$, тогаш цифрата a може да биде 1 или 6. Но, $a < 5$, па затоа $a = 1$. Ако $a = 1$, тогаш цифрата b може да биде 1 или 6. Но, a и b се различни цифри, па затоа $b = 6$. Сега за $b = 6$ добиваме $c = 3$. Бараниот четирицифрен број е $\overline{abba} = 1661$ и притоа $\overline{ccdd} = 3322$.

Ако $d = 4$, тогаш цифрата a може да биде 2 или 7. Но, $a < 5$, па затоа $a = 2$. Ако $a = 2$, тогаш цифрата b може да биде 2 или 7. Но, a и b се различни цифри, па затоа $b = 7$. Сега за $b = 7$ добиваме $c = 5$. Бараниот четирицифрен број е $\overline{abba} = 2772$ и притоа $\overline{ccdd} = 5544$.

Ако $d = 6$, тогаш цифрата a може да биде 3 или 8. Но, $a < 5$, па затоа $a = 3$. Ако $a = 3$, тогаш цифрата b може да биде 3 или 8. Но, a и b

се различни цифри, па затоа $b=8$. Сега за $b=8$ добиваме $c=7$. Бараниот четирицифрен број е $\overline{abba}=3883$ и притоа $\overline{ccdd}=7766$.

Ако $d=8$, тогаш цифрата a може да биде 4 или 9. Но, $a < 5$, па затоа $a=4$. Ако $a=4$, тогаш цифрата b може да биде 4 или 9. Но, a и b се различни цифри, па затоа $b=9$. Сега за $b=9$ добиваме $c=9$, што не е можно, бидејќи a, b, c и d се различни цифри.

66. Првата цифра одлево на шестцифрениот број е еднаква на 2. Ако оваа цифра се пренесе од првото на последното место добиениот број ќе биде типати поголем од почетниот број. Определи ги двата броја.

Решение. Нека $\overline{2abcde}$ е почетниот број. Новодобиениот број е $\overline{abcde2}$ и важи

$$\begin{aligned}\overline{abcde2} &= 3 \cdot \overline{2abcde} \\ 10 \cdot \overline{abcde} + 2 &= 3 \cdot (200000 + \overline{abcde}) \\ 10 \cdot \overline{abcde} - 3 \cdot \overline{abcde} &= 600000 - 2 \\ 7 \cdot \overline{abcde} &= 599998 \\ \overline{abcde} &= 85714\end{aligned}$$

Според тоа, почетниот број е 285714, а новодобиениот број е 857142.

67. Свездичките замени ги со соодветните цифри и пресметај го природниот број n ако $\overline{*71*}:36=n$.

Решение. Бројот $\overline{*71*}$ мора да биде делив со 36, што значи дека треба да биде делив со 4 и со 9. Од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток на бројот мора да биде делив со 4, па затоа неговиот двоцифрен завршеток е 12 или 16. Во првиот случај имаме $\overline{*712}$, па заради деливоста со 9 збирот на цифрите $*+10$ треба да е дели со 9, т.е. бројот е 8712 и тогаш $n=8712:36=242$. Во вториот случај имаме $\overline{*716}$, па заради деливоста со 9 збирот на цифрите $*+14$ треба да биде делив со 9, т.е. бројот е 4716 и тогаш $n=4716:36=131$.

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Определи го четирицифрениот број $\overline{xyzt}$ за кој важи

$$\overline{xyzt} + 4 \cdot \overline{yzt} + 2 \cdot \overline{zt} = 2018.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\overline{xyzt} + 4 \cdot \overline{yzt} + 2 \cdot \overline{zt} = 2018$$

$$1000x + 500y + 70z + 7t = 2018$$

Цифрата на единиците на првите три собирци во последното равенство е 0, па за да цифрата на единиците на збирот е 8, потребно е цифрата на единиците на производот $7t$ да е 8. Единствена можност е $t = 4$, што значи дека равенството го добива обликот

$$1000x + 500y + 70z = 1990,$$

односно $100x + 50y + 7z = 199$. Цифрата на единиците на првите два собирка е 0, па за цифрата на единиците на збирот е 9, единствена можност е $z = 7$, т.е. $100x + 50y = 150$. Конечно, бидејќи бараниот број е четирицифрен од последното равенство следува $x = y = 1$ и затоа $\overline{xyzt} = 1174$.

2. Со колку нули завршува производот на првите 150 природни броеви?

Решение. Бидејќи бројот на парните броеви е поголем од бројот на броевите кои се деливи со 5, бројот на нулите на производот на првите 150 природни броеви е определен со тоа колку пати бројот 5 се јавува како множител во производот. Меѓу првите 150 природни броеви има 30 броеви деливи со 5, од кои 6 се деливи со 25 и 1 е делив со 125. Значи, бројот 5 како множител се јавува $30 + 6 + 1 = 37$ пати, што значи дека производот на првите 150 природни броеви завршува на 37 нули.

3. Докажи дека збирот на десет последователни природни броеви не е делив со бројот 4.

Решение. Нека $n, n+1, n+2, \dots, n+9$ се десет последователни броја.

Нивниот збир е еднаков на

$$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+9) &= 10n + (1 + 2 + 3 + \dots + 9) \\ &= 10n + 45. \end{aligned}$$

Бројот $10n+45$ е непарен број, па затоа тој не е делив со 2, што значи дека не е делив и со 4.

4. Докажи дека:

а) не постои природен број n таков што броевите n и $n+2006$ имаат еднаков збир на цифри,

б) постојат бесконечно многу природни броеви n такви што броевите n и $n+2007$ имаат еднаков збир на цифри.

Решение. а) За секој природен број n броевите n и $n+2006$ даваат различни остатоци при делење со 3. Тоа значи дека и зборовите на цифрите со кои се запишани ќе даваат различни остатоци при делење со 3, па затоа тие не може да бидат еднакви.

б) Броевите од видот $n=10\dots03$, каде бројот на нулите е произволен имаат збир на цифри 4, а и секој од броевите $n+2007$ има збир на цифри 4.

5. Нека x е n -цифрен број и y е природен број кој се добива со некакво разместување на цифрите на бројот x . Дали е можно равенството $x+y=99\dots9$, ако

а) $n=2019$, б) $n=2020$?

Решение. Нека $x=\overline{a_1a_2\dots a_n}$, $y=\overline{b_1b_2\dots b_n}$, $x+y=99\dots9$ и цифрите на

y се цифрите на x , разместени на некој начин. Бидејќи a_i, b_i , $i=1,2,\dots,n$ се цифри, важи $a_i+b_i\leq 18$, за $i=1,2,\dots,n$, што значи дека при собирањето на x и y никогаш не се добива пренос. Тоа значи дека $a_i+b_i=9$, за $i=1,2,\dots,n$, па затоа

$$a_1+a_2+\dots+a_n+b_1+b_2+\dots+b_n=9n. \quad (1)$$

Од друга страна

$$a_1+a_2+\dots+a_n+b_1+b_2+\dots+b_n=2(a_1+a_2+\dots+a_n). \quad (2)$$

Сега, од (1) и (2) следува $2(a_1+a_2+\dots+a_n)=9n$, што значи дека n е парен број.

а) Бидејќи $n=2019$ е непарен број, од претходните разгледувања следува во овој случај одговорот на поставеното прашање е негативен.

б) За $n=2020$ одговорот на прашањето е позитивен. На пример, такви се броевите $x=\underbrace{1818\dots18}_{2020}$ и $y=\underbrace{8181\dots81}_{2020}$.

6. При делење на бројот $n+125$ со бројот 19 се добива остаток 7. Определи го остатокот при делење на бројот n со 19.

Решение. Според условот на задачата добиваме $n+125=19q+7$, за некој природен број q . Според тоа,

$$\begin{aligned} n &= 19q + 7 - 125 = 19q - 118 = 19q - 133 + 15 \\ &= 19q - 19 \cdot 7 + 15 = 19(q - 7) + 15, \end{aligned}$$

што значи дека при делење на бројот n со 19 се добива остаток 15.

7. Дадена е дробката $\frac{\overline{28a3}}{4276}$. Кој број треба да се одземе од броителот и да се додаде на именителот за да се добие дробката $\frac{2}{7}$?

Решение. Збирот на броителот и именителот не се менува ако на едниот се додаде некој број, а од другиот се одземе истиот број. Од $\frac{\overline{28a3}}{4276} = \frac{2k}{7k}$ добиваме $\overline{28a3} + 4376 = 2k + 7k = 9k$, од што следува дека збирот $\overline{28a3} + 4376 = 7179 + 10a$ е делив со 9. Последно е можно само за $a = 4$. Значи, $\frac{\overline{2843-x}}{4276+x} = \frac{2}{7}$, одкаде добиваме $x = 1261$.

8. Определи два трицифрени броја чиј количник е 7, а збирот им е делив со 336.

Решение. Ако количникот на два трицифрени броја е 7, тогаш бараните броеви се a и $7a$. Нивниот збир е еднаков на $a + 7a = 8a$ и е делив со 336, т.е. $8a = 336k$, каде k е природен број. Според тоа, $a = 42k$, па како a и $7a$ се трицифрени броеви добиваме

$$99 < 42k < 294k < 1000$$

од каде добиваме $2 < k < 4$, односно $k = 3$. Бараните броеви се 126 и 882.

9. Нека n е природен број запишан со 2018 единици, 2018 двојки и определен број нули. Докажи дека n не е точен квадрат.

Решение. Збирот на цифрите на дадениот број е $2018(1+2) = 2018 \cdot 3$, од каде следува дека 3 е делител на n . Но, $3 \nmid 2018$, што значи дека $9 \nmid n$.

Според тоа, дадениот број не може да биде точен квадрат на природен број.

10. Дали постои природен број N кој е делив со 11, чии цифри се различни и се во растечки редослед од лево кон десно?

Решение. Нека претпоставиме дека таков број постои и нека N е најмалиот број со саканото својство. Нека N има k цифри. Јасно, $k \geq 3$. Но, тогаш и бројот $N - \underbrace{1100\dots 0}_{k-2}$ е од разгледуваниот вид и е

помал од N , што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои број со саканите својства.

11. Определи ги цифрите x, y така што бројот $\overline{x74y}$ е делив со 15.

Решение. Бидејќи бројот $\overline{x74y}$ е делив со 15, тој е делив со 3 и со 5, па затоа y може да биде 0 или 5.

Ако $y=0$, тогаш од деливоста со 3 следува дека збирот на цифрите $x+7+4+0=x+11$ е делив со 3, што е можно ако $x=1$ или $x=4$ или $x=7$, па се добиваат броевите 1740, 4740 и 7740.

Ако $y=5$, тогаш повторно од деливоста со 3 следува дека збирот на цифрите $x+7+4+5=x+16$ е делив со 3, што е можно ако $x=2$ или $x=5$ или $x=8$, па ги добиваме броевите 2745, 5745 и 8745.

12. Определи ги цифрите a и b така што производот $\overline{31a} \cdot \overline{62b1}$ ќе биде делив со 15.

Решение. За да производот $\overline{31a} \cdot \overline{62b1}$ биде делив со 15 мора барем еден од множителите да биде делив со 5 и барем еден од множителите да биде делив со 3. Број е делив со 5 ако и само ако цифрата на единиците е 0 или 5. Цифрата на единиците на бројот $\overline{62b1}$ е 1, па затоа бројот $\overline{31a}$ мора да е делив со 5, што значи дека $a=0$ или $a=5$.

Ако $a=0$, тогаш збирот на цифрите на бројот 310 е 4, што значи дека тој не е делив со 3. Значи бројот $\overline{62b1}$ треба да е делив со 3, т.е. збирот на неговите цифри $6+2+b+1=9+b$ треба да е делив со 3. Последното е можно ако и само ако $b=0, 3, 6, 9$.

Ако $a=5$, тогаш збирот на цифрите на бројот 315 е 9, па затоа тој е делив со 3. Значи, во овој случај цифрата b е било која од десетте цифри. Конечно,

$$(a, b) \in \{(5, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (0, 0), (0, 3), (0, 6), (0, 9)\}.$$

13. Определи ги непознатите цифри a и b така што бројот $\overline{198aa8b}$ ќе биде делив со 12. Кои броеви ги доби?

Решение. Еден број е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. Од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток на бројот $\overline{8b}$ е делив со 4, што значи $b \in \{0, 4, 8\}$.

За $b=0$ добиваме дека бројот $\overline{198aa80}$ треба да е делив со 3, што значи дека збирот на неговите цифри $26+2a$ треба да е делив со 3. Последното е можно само ако $a \in \{2, 5, 8\}$ и тогаш ги добиваме броевите 1982280, 1985580 и 1988880.

За $b=4$ добиваме дека бројот $\overline{198aa84}$ треба да е делив со 3, што значи дека збирот на неговите цифри $30+2a$ треба да е делив со 3. Последното е можно само ако $a \in \{0, 3, 6, 9\}$ и тогаш ги добиваме броевите 1980084, 1983384, 1986684 и 1989984.

За $b=8$ добиваме дека бројот $\overline{198aa88}$ треба да е делив со 3, што значи дека збирот на неговите цифри $34+2a$ треба да е делив со 3. Последното е можно само ако $a \in \{1, 4, 7\}$ и тогаш ги добиваме броевите 1981188, 1984488 и 1987788.

14. Определи ги цифрите x и y така што четирицифрениот број $\overline{x04y}$ ќе биде делив со 72.

Решение. Број е делив со 72 ако и само ако е делив со 8 и со 9. Број е делив со 8 ако и само неговиот трицифрен завршеток е делив со 8, па затоа трицифрениот завршеток $\overline{04y}$ треба да е делив со 8. Тоа значи дека бројот $\overline{4y}$ треба да е делив со 8. Според тоа, $y=0$ или $y=8$.

Број е делив со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 9, па затоа $x+0+4+y=x+y+4$ треба да е делив со 9. За $y=0$ треба $x+4$ е делив со 9, од каде добиваме $x=5$, а за $y=8$ треба $x+12$ да е делив со 9, од каде добиваме $x=6$.

15. Определи ги непознатите цифри a и b така што бројот $\overline{2018ab}$ биде делив со 72.

Решение. Еден број е делив со 72 ако и само ако е делив со 9 и со 8. Еден број е делив со 8 ако и само ако неговиот трицифрен завршеток е делив со 8. Последното значи дека бројот $\overline{8ab}$ треба да е делив со 8, што значи дека можни вредности за $\overline{ab}$ се 08, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64,

72, 80, 88 и 96. Еден број е делив со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 9, што во случајов значи дека $11+a+b$ треба да е делив со 9, односно $2+a+b$ треба да е делив со 9. Со непосредна проверка се добива дека единствени решенија на задачата се броевите 201816 и 201888.

16. Определи ги сите трицифрени броеви кои се деливи со 11 и чиј збир на цифри е еднаков на 10.

Решение. Нека бараните трицифрени броеви се од видот $\overline{abc}$. Тогаш $a+b+c=10$, па затоа

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c = 99a + 9b + 10.$$

Бројот $\overline{abc}$ е делив со 11, а бидејќи собирокот $99a$ е делив со 11, заклучуваме дека собирокот $9b+10$ треба да е делив со 11. Но, b е цифра, па со непосредна проверка се добива дека $9b+10$ е делив со 11 ако и само ако $b=5$. Понатаму, од $a+b+c=10$ следува $a+c=5$.

За $a=5, c=0$ го добиваме бројот 550.

За $a=4, c=1$, односно $a=1, c=4$ ги добиваме броевите 451 и 154.

За $a=3, c=2$ односно $a=2, c=3$ ги добиваме броевите 352 и 253.

17. Определи ги цифрите a и b така што бројот $n = \overline{a1995} + \overline{1995b}$ ќе биде делив со 44.

Решение. Еден број е делив со 44 ако и само ако е делив со 4 и со 11. Бидејќи $n = \overline{a1995} + \overline{1995b}$ е делив со 4, тој е парен број, па затоа цифрата b мора да биде непарна, а двоцифрениот завршеток на n мора да е делив со 4. Последното е можно само за $b=3$ (двоцифрениот завршеток е 48) и $b=7$ (двоцифрениот завршеток е 52). Според тоа, $n = \overline{(a+2)1948}$ или $n = \overline{(a+2)1952}$. За да бројот n е делив со 11 потребно и доволно е разликата на цифрите на парните и непарните места да е делива со 11. Во првиот случај треба $a+14$ да е делив со 11, па затоа $a=8$, а во вториот случај треба $a+7$ да е делив со 11, па затоа $a=4$. Според тоа, задачата има две решенија и тоа

$$81995 + 19953 = 101948 \text{ и } 41995 + 19957 = 61952.$$

18. За двоцифрените броеви $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ важи $\overline{cd} = 4 \cdot \overline{ab}$. Докажи дека четирицифрениот број $\overline{abcd}$ е делив со 13.

Решение. Имаме

$$\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 100 \cdot \overline{ab} + 4 \cdot \overline{ab} = 104 \cdot \overline{ab}.$$

Бидејќи $104 = 13 \cdot 8$, заклучуваме дека $13 | 104 \cdot \overline{ab}$, т.е. $13 | \overline{abcd}$.

19. Определи ја цифрата a така што изразот $17 \cdot \overline{16a} + 2019 \cdot 2020$ ќе биде делив со 12.

Решение. Еден број е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. Бидејќи $3 | 2019$ и $4 | 2020$, заклучуваме дека $12 | 2019 \cdot 2020$. Според тоа, дадениот израз е делив со 12 ако и само ако $12 | 17 \cdot \overline{16a}$. Понатаму, од $\text{NZD}(17, 12) = 1$ следува дека $12 | 17 \cdot \overline{16a}$ ако и само ако $12 | \overline{16a}$. Сега, $4 | \overline{16a}$ ако и само ако $a \in \{0, 4, 8\}$. За $a = 0$ збирот на цифрите на бројот 160 е $1 + 6 + 0 = 7$, па затоа тој не е делив со 3. За $a = 4$, збирот на цифрите на бројот 164 е $1 + 6 + 4 = 11$, па затоа тој не е делив со 3. За $a = 8$, збирот на цифрите на бројот 168 е $1 + 6 + 8 = 15$, па затоа тој е делив со 3. Конечно, единствено решение на задачата е $a = 8$.

20. Определи ги трицифрените броеви $\overline{abc}$, каде $c \neq 0$ такви што збирот $\overline{abc} + 2 \cdot \overline{cba}$ е делив со 17.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} \overline{abc} + 2 \cdot \overline{cba} &= 100a + 10b + c + 200c + 20b + 2a \\ &= 102a + 30b + 201c \\ &= 102a + 34b + 204c - (4b + 3c) \\ &= 17 \cdot (6a + 2b + 12c) - (4b + 3c). \end{aligned}$$

На десната страна собирокот $17 \cdot (6a + 2b + 12c)$ е делив со 17, па затоа $\overline{abc} + 2 \cdot \overline{cba}$ е делив со 17 ако и само ако $4b + 3c$ е делив со 17. Но, a и b се цифри, и како $c \neq 0$ добиваме $0 < 4b + 3c \leq 4 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 63$. Затоа се можни следив случаи: $4b + 3c = 17$, $4b + 3c = 34$ и $4b + 3c = 51$.

Ако $4b + 3c = 17$, тогаш $b = 2, c = 3$, па како a може да биде било која цифра освен 0 ги добиваме решенијата: 123, 223, 323, 423, 523, 623, 723, 823 и 923.

Ако $4b + 3c = 34$, тогаш $b = 4, c = 6$ или $b = 7, c = 2$, па како a може да биде било која цифра освен 0 ги добиваме решенијата: 146, 246, 346, 446, 546, 646, 746, 846 и 946, односно 172, 272, 372, 472, 572, 672, 772, 872 и 972.

Ако $4b + 3c = 51$, тогаш $b = 6, c = 9$ или $b = 9, c = 5$, па како a може да биде било која цифра освен 0 ги добиваме решенијата: 169, 269, 369,

469, 569, 669, 769, 869 и 969, односно 195, 295, 395, 495, 595, 695, 795, 895 и 995.

21. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{a783b}$ ќе биде делив со 56.

Решение. Бидејќи $56=7 \cdot 8$ и $\text{NZD}(7,8)=1$ доволно е да ги определиме цифрите a и b така што $7|\overline{a783b}$ и $8|\overline{a783b}$. Бидејќи $8|\overline{a783b}$, ако и само ако $8|\overline{83b}$, т.е. ако и само ако $8|(800+30+b)$. Но, $8|800$, па затоа $8|\overline{a783b}$ ако и само ако $8|(30+b)$, од каде добиваме $b=2$.

Според тоа, $\overline{a783b} = \overline{a7832} = 10000a + 7832$ и бидејќи

$$10000a = 7 \cdot 1428a + 4a \text{ и } 7832 = 7 \cdot 1118 + 6,$$

добиваме $\overline{a7832} = 7(1428a + 1118) + 2(2a + 3)$, па затоа $7|\overline{a7832}$ ако и само ако $7|2(2a + 3)$. Но, $\text{NZD}(2,7)=1$, па затоа $7|\overline{a7832}$ ако и само ако $7|(2a + 3)$, од каде добиваме $a=2$ или $a=9$.

Конечно, $(a,b) \in \{(2,2), (9,2)\}$.

22. Напиши ги сите четирицифрени броеви кои се деливи со 4 и со 9, кои при делењето со 10 дават остаток 4, а цифрата на илјадитите им е трипати поголема од цифрата на стотките.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{abcd}$. Бидејќи при делење со 10 се добива остаток 4 добиваме $d=4$. Понатаму, од деливоста со 4 следува $c \in \{0,2,4,6,8\}$. Понатаму, $a=3b$, па затоа $b \leq 3$ и збирот на цифрите е $a+b+c+4=4b+c+4$. Сега,

- за $c=0$ збирот на цифрите е $4b+4$, па од деливоста со 9 следува $b=8$, што не е можно бидејќи треба да е $b \leq 3$,
- за $c=2$ збирот на цифрите е $4b+6$, па од деливоста со 9 следува $b=3$ и едно решение на задачата е бројот 9324,
- за $c=4$ збирот на цифрите е $4b+8$, па од деливоста со 9 следува $b=7$, што не е можно бидејќи треба да е $b \leq 3$,
- за $c=6$ збирот на цифрите е $4b+10$, па од деливоста со 9 следува $b=2$ и друго решение на задачата е бројот 6264,
- за $c=8$ збирот на цифрите е $4b+12$, па од деливоста со 9 следува $b=6$, што не е можно бидејќи треба да е $b \leq 3$.

Конечно, решенија на задачата се броевите 9324 и 6264.

23. Докажи дека бројот $2^{1988} - 1$ е делив со 5.

Решение. Имаме

$$2^{1988} - 1 = 2^{4 \cdot 497} - 1 = (2^4)^{497} - 1 = 16^{497} - 1.$$

Понатаму, ако цифрите на единиците на два броја се 6, тогаш и нивниот производ има цифра на единици 6. Последното значи дека цифрата на единиците на бројот 16^{497} е 6, што значи дека цифрата на единиците на бројот $16^{497} - 1$ е 5, па од критериумот за деливост со 5 следува дека тој е делив со 5.

24. Докажи дека збирот $1^{1988} + 2^{1988} + 3^{1988} + 4^{1988} + 5^{1988} + 6^{1988}$ е делив со 5, но не е делив со 10.

Решение. Бројот 1^{1988} завршува на цифрата 1, бројот 2^{1988} завршува на цифрата 6, бројот 3^{1988} завршува на цифрата 1, бројот 4^{1988} завршува на цифрата 6, бројот 5^{1988} завршува на цифрата 5 и бројот 6^{1988} завршува на цифрата 6. Според тоа, цифрата на единиците на збирот $1^{1988} + 2^{1988} + 3^{1988} + 4^{1988} + 5^{1988} + 6^{1988}$ е еднаква на цифрата на единиците на збирот $1+6+1+6+5+6=25$, т.е. е 5, па затоа дадениот збир е делив со 5, но не е делив со 10.

25. Докажи дека 81 е делител на $10^{1990} - 10$.

Решение. Имаме,

$$10^{1990} - 10 = \underbrace{999 \dots 999}_\text{1989 пати 9} 0 = 9 \cdot \underbrace{111 \dots 111}_\text{1989 пати 1} 0.$$

Понатаму, збирот на цифрите на вториот множител е еднаков на $1989 = 9 \cdot 221$, па значи вториот множител е делив со 9. Според тоа, бројот $10^{1990} - 10$ е делив со $9 \cdot 9 = 81$.

26. За секој природен број n со $S(n)$ да го означиме зирот на неговите цифри. Дали постои природен број k таков што

а) $S(k) + S(k^2) = 2008$,

б) $S(k) + S(k^2) = 2009$.

Решение. а) Нека k е делив со 3. Тогаш k^2 , $S(k)$ и $S(k^2)$ се деливи со 3, додека 2008 не е делив со 3. Ако k не е делив со 3, тогаш и $S(k)$ не е делив со 3. Но, тогаш броевите k^2 и $S(k^2)$ при делење со 3 ќе да-

ваат остаток 1. Ако допуштиме дека постои k со саканото својство, тогаш k не е делив со 3, па затоа и $S(k)$ не е делив со 3. Од друга страна $S(k) = 2008 - S(k^2)$ и бидејќи броевите 2008 и $S(k^2)$ даваат остаток 1 при делење со 3, добиваме дека $S(k)$ е делив со 3, што е противречност.

б) Да го разгледаме бројот $k = 33\dots34$. Имаме

$$k = \underbrace{33\dots3}_{n+1} + 1 = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{99\dots9}_{n+1} + 1 = \frac{1}{3} \cdot (10^{n+1} - 1) + 1 = \frac{10^{n+1} + 2}{3},$$

па затоа

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4}{9} = \frac{10^{2n+2} - 1 + 1 + 4 \cdot 10^{n+1} - 4 + 4 + 4}{9} \\ &= \frac{10^{2n+2} - 1}{9} + \frac{4 \cdot (10^{n+1} - 1)}{9} + 1 = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{99\dots9}_{2n+2} + \frac{4}{9} \cdot \underbrace{99\dots9}_{n+1} + 1 \\ &= \underbrace{11\dots11}_{2n+2} + \underbrace{44\dots44}_{n+1} + 1 = \underbrace{11\dots11}_{n+1} \underbrace{55\dots56}_{n+1}. \end{aligned}$$

Значи, $S(k) = 3n + 4$ и $S(k^2) = 6n + 7$, па затоа $3n + 4 + 6n + 7 = 2009$, т.е. $n = 222$. Конечно, бројот $k = 33\dots34$ го задоволува условот на за-

222

дачата.

27. Дали постои природен број k таков што бројот

а) $n(n+3)(n+4)(n+7) + k$ б) $n(n+3)(n+4)(n+8) + k$

е точен квадрат за секој природен број n ?

Решение. а) Ако означиме $n(n+7) = m$, тогаш

$$n(n+3)(n+4)(n+7) + k = m(m+12) + k = (m+6)^2 + 36 - k,$$

што значи дека за $k = 36$ сите броеви од видот

$$n(n+3)(n+4)(n+7) + k$$

се точни квадрати на природни броеви.

б) Нека претпоставиме дека постои k со саканото својство. Тогаш при $n = 2$ добиваме дека бројот $600 + k$ треба да е точен квадрат, т.е. $600 + k = a^2$ за некој природен број a . За $n = 3$ добиваме дека бројот $1386 + k$ треба да е точен квадрат, т.е. $1386 + k = b^2$ за некој природен број b . Од добиените равенства следува $b^2 - a^2 = 786$. Понатаму,

броевите a и b се со иста парност, па затоа $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ е делив со 4, но бројот 786 не е делив со 4, што е противречност.

28. Определи ги сите цели броеви n за кои дробката $\frac{5n-6}{n}$ е природен број.

Решение. Имаме $\frac{5n-6}{n} = \frac{5n}{n} - \frac{6}{n} = 5 - \frac{6}{n}$, што значи дека $\frac{5n-6}{n}$ е цел број ако и само ако $n \mid 6$, т.е. $n \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$. Сега лесно се проверува дека за најдените вредности на n бројот $\frac{5n-6}{n}$ е природен број ако $n \neq 1$. Конечно, решение на задачата се броевите $-6, -3, -2, -1, 2, 3$ и 6 .

29. Определи ги сите природни броеви n за кои вредноста на дробката $\frac{24}{30-n}$ исто така е природен број.

Решение. Дробката $\frac{24}{30-n}$ е природен број ако и само ако бројот $3n-4$ е делител на 24. Според тоа, $3n-4$ треба да биде еднаков на некој од броевите 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 или 24, т.е. $3n$ треба да биде еднаков на некој од броевите 5, 6, 7, 8, 10, 12, 16 или 28. Очигледно дека бројот $3n$ може да биде само еден од броевите 6 и 12, па затоа $n=2$ или $n=4$.

30. Определи го природниот број a таков што вредноста на дробката $\frac{a+75}{a-3}$ е природен број.

Решение. Имаме:

$$\frac{a+75}{a-3} = \frac{a-3+3+75}{a-3} = 1 + \frac{78}{a-3}.$$

За да вредноста на дробката $\frac{a+75}{a-3}$ е природен број потребно е $(a-3) \mid 78$. Понатаму, од $78 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$ следува

$$a-3 \in \{1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78\}, \text{ т.е. } a \in \{4, 5, 6, 9, 16, 29, 42, 81\}.$$

Вредностите на дробката $\frac{a+75}{a-3}$ се: 79, 40, 27, 14, 7, 4, 3 и 2.

31. Определи ги сите цели броеви n за кои бројот $\frac{n+4}{3n-2}$ е цел.

Решение. Ако $\frac{n+4}{3n-2}$ е цел број, тогаш и

$$3 \cdot \frac{n+4}{3n-2} = \frac{3n+12}{3n-2} = \frac{3n-2+14}{3n-2} = 1 + \frac{14}{3n-2}$$

е цел број, па затоа $3n-2 \mid 14$, односно $3n-2 \in \{\pm 14, \pm 7, \pm 2, \pm 1\}$ и како n е цел број добиваме $n \in \{-4, 0, 1, 3\}$. За $n = -4$ добиваме $\frac{n+4}{3n-2} = 0$, за $n = 0$ добиваме $\frac{n+4}{3n-2} = -2$, за $n = 1$ добиваме $\frac{n+4}{3n-2} = 5$ и за $n = 3$ добиваме $\frac{n+4}{3n-2} = 1$.

32. Цифрите a, b, c, d се различни прости броеви. Определи ги сите броеви од видот $\overline{ab10cd}$ кои се деливи со 264.

Решение. Имаме $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$. Бројот $\overline{ab10cd}$ е делив со 264, што значи дека тој е парен број и како 2 е единствениот парен прост број следува дека бројот е од видот $\overline{ab10c2}$. Останатите три цифри се 3, 5 и 7. Бараниот број е делив со 3, бидејќи $3+5+7+1+0+2=18$ е делив со 3, но тој треба да е делив и со 8 и со 11. Од деливоста со 11 следува дека $(a+1+c)-(b+0+2)$ треба да е делив со 11 и како оваа разлика е помала од 11 добиваме

$$(a+1+c)-(b+0+2)=0.$$

Значи, $b=7$ и $a+c=8$, па можни решенија се броевите 571032 и 371052. Првиот број е делив со 8, а вториот не е делив со 8, па затоа единствено решение на задачата е бројот 571032.

33. Даден е природен број чиј декаден запис содржи 1994 единици, 1994 двојки и определен број нули. Докажи дека дадениот број не е квадрат на природен број.

Решение. Збирот на цифрите на дадениот број е $1994 \cdot (1+2) = 1994 \cdot 3$. Значи, дадениот број е делив со 3, но не е делив со 9, бидејќи $1994 = 3 \cdot 664 + 2$. Затоа дадениот број не е квадрат на природен број.

34. Страниците на една книга се нумерирани со броевите од 1 до 100. Од книгата се искинати неколку листови. Збирот на броевите со кои се нумерирани страниците на искинатите листови е еднаков на 4949. Колку листови се искинати?

Решение. Бидејќи секој лист е нумериран со броеви од видот $2n-1$ и $2n$, заклучуваме дека збирот на броевите запишани на секој лист е еднаков на $4n-1$, каде $1 \leq n \leq 50$. Нека останале k нескинати листови. Тогаш збирот на броевите со кои се нумерирани овие страници е еднаков на

$$(4n_1 - 1) + (4n_2 - 1) + \dots + (4n_k - 1) = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 - 4949,$$

т.е.

$$4(n_1 + 4n_2 + \dots + n_k) - k = 101.$$

Збирот $4(n_1 + 4n_2 + \dots + n_k)$ е делив со 4, па затоа $101 + k = 4 \cdot 25 + k + 1$ треба да е делив со 4, што значи дека остатокот при делење на k со 4 треба да е 3. Според тоа,

$$k \in \{3, 7, 11, 15, \dots, 87, 91, 95, 99\}.$$

Но, за $k \geq 7$, добиваме

$$4(n_1 + 4n_2 + \dots + n_k) - k \geq 4(1 + 2 + \dots + 7) - 7 = 105 > 101,$$

па затоа единствено решение на задачата е $k = 3$, од каде следува дека од книгата се скинати $50 - 3 = 47$ листови.

35. Определи ги сите природни броеви n за кои при запишувањето на броевите $5n$ и $11n$ се потребни вкупно девет цифри и секоја од цифрите од 1 до 9 се користи точно по еднаш.

Решение. Бидејќи $5n < 11n$, заклучуваме дека бројот $5n$ е најмногу четирицифрен, а бројот $11n$ е најмалку петцифрен. Понатаму, ако $5n < 1000$, тогаш $n < 200$, па затоа $11n < 10000$, што значи дека при запишувањето на $5n$ и $11n$ вкупно се помалку од 9 цифри. Од досега изнесеното следува дека единствена можност да се исполнети условите на задачата е $4n$ да е четирицифрен и $11n$ да е петцифрен број, т.е. $5n = \overline{abcd}$ и $11n = \overline{efghi}$, каде $a, b, \dots, i$ се цифрите од 1 до 9, во некој редослед. Од првото равенство следува $55n = 11 \cdot \overline{abcd}$, а од второто равенство следува $55n = 5 \cdot \overline{efghi}$, па затоа $5 \cdot \overline{efghi} = 11 \cdot \overline{abcd}$. Бидејќи $11 \cdot \overline{abcd} < 110000$, добиваме $\overline{efghi} < 22000$, па затоа $e = 1$ или $e = 2$. Освен тоа, $5 \mid \overline{abcd}$, па затоа $d = 5$. Понатаму, збирот $\overline{efghi} + \overline{abcd}$ при делење со 9 дава ист остаток како и збирот $1 + 2 + \dots + 9 = 45$, што значи дека $\overline{efghi} + \overline{abcd}$ е делив со 9. Но, тогаш и

$$5(\overline{efghi} + \overline{abcd}) = 5 \cdot \overline{efghi} + 5 \cdot \overline{abcd} = 5 \cdot \overline{efghi} + 11 \cdot \overline{efghi} = 16 \cdot \overline{efghi}$$

ќе биде делив со 9, што значи дека $9 \mid \overline{efghi}$, па затоа и $9 \mid \overline{abcd}$. Сега, ако ги земеме предвид неравенствата

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \leq e + f + g + h + i \leq 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$$

и искористиме дека збирот $e + f + g + h + i$ е делив со 9, добиваме дека $e + f + g + h + i = 27$ или $e + f + g + h + i = 18$.

Ако $e+f+g+h+i=27$, тогаш $a+b+c+d=45-27=18$. Сега од признакот за деливост со 11 следува дека еден од збирите $e+g+i$, $f+h$ се разликува од другиот за содржател на 11 и бидејќи во случајов збирот на двата збира е 27 (непарен број), заклучуваме дека едниот од нив е точно за 11 поголем од другиот. Значи, ако помалиот од збирите $e+g+i$, $f+h$ е S , тогаш поголемиот е $S+11$, па затоа $2S+11=27$, т.е. $S=8$ и $S+11=19$. Јасно, $f+h\leq 17$, па затоа $f+h=8$ и $e+g+i=19$. Бидејќи $e\leq 2$ и $g+i\leq 17$, добиваме дека равенството $e+g+i=19$ е можно само за $e=2$ и $g+i=17$, т.е. кога $e=2$ и g и i се 8 и 9, или обратно. Но, i е непарна цифра, па затоа $g=8$, $i=9$. Но, освен тоа $e=2$ и $\overline{efghi} < 22000$, па затоа мора да е $f=1$ и тогаш $h=7$. Останува да провериме само дали бројот 21879 го задоволува равенството $5 \cdot \overline{efghi} = 11 \cdot \overline{abcd}$. Добиваме

$$5 \cdot 21879 = 109395 \text{ и } 109395 : 11 = 9945,$$

што значи дека во случајов имаме повторување на цифрите и затоа ова не е решение на задачата.

Ако $e+f+g+h+i=18$, тогаш $a+b+c+d=27$. Но, $d=5$, па затоа $a+b+c=22$. Бројот 22 како збир на три различни едноцифрени броеви може да се претстави само на два начина и тоа $22=9+8+5$ и $22=9+7+6$. Првиот случај не е можен, бидејќи ќе имаме повторување на цифрата 5, а во вториот случај бројот $\overline{abcd}$ е некој од броевите 9765, 9675, 7965, 7695, 6975 или 6795. За овие шест броја проверуваме дали е исполнето равенството

$$5 \cdot \overline{efghi} = 11 \cdot \overline{abcd}$$

и добиваме дека само бројот 9765 води до решение на задачата и притоа важи $\overline{efghi} = 21483$ и $n=1953$.

36. Дали постои реален број x таков што $[2x]+[3x]+[5x]=2019$?

Решение. Ќе искористиме дека за секој природен број n и за секој реален број x важи

$$n[x] \leq [nx] \leq n[x] + n - 1.$$

Ако овие неравенства ги запишеме за $n=2, 3$ и 5 и ги собереме добиваме

$$10[x] \leq [2x] + [3x] + [5x] \leq 10[x] + 7.$$

Последното значи дека ако некој цел број k може да се запише во облик $[2x]+[3x]+[5x]$, тогаш при делење на k со 10 треба да се добие некој од остатоците 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 7. Но, бројот 2019 при делење со 10 дава остаток 9, па затоа не постои реален број x со саканото својство.

II.2. ПРОСТИ БРОЕВИ

37. Разликата на еден двоцифрен број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е 45. Збирот на овие два броја е точен квадрат на природен број. Определи ги сите двоцифрени броеви кои ги имаат овие својства.

Решение. Нека $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ се бараните броеви и нека $\overline{ab} > \overline{ba}$. Од првиот услов на задачата следува дека $10a+b-(10b+a)=45$, т.е. $a=b+5$. Понатаму,

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a + b)$$

и како $\overline{ab} + \overline{ba}$ е точен квадрат на природен број, а 11 е прост број добиваме дека $a+b=11$. Ако во последната равенка замениме $a=b+5$ добиваме $b+5+b=11$, т.е. $b=3$. Значи, $a=5+3=8$ и бараните броеви се 83 и 38.

38. Производот на три последователни парни природни броја е 1680. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека трите последователни парни броеви се $2n, 2n+2$ и $2n+4$. Имаме, $2n(2n+2)(2n+4)=1680$, па затоа $n(n+1)(n+2)=210$. Сега, 210 е производ на три последователни природни броеви и бидејќи $210=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ заклучуваме дека $210=5 \cdot 6 \cdot 7$, односно $n=5$. Конечно, бараните броеви се $2n=10$, $2n+2=12$ и $2n+4=14$.

39. Определи ги сите двоцифрени природни броеви такви што тој број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед се прости.

Решение. Двоцифрените прости броеви не може да завршуваат на цифрите 0, 2, 4, 6 и 8 (тогаш се деливи со 2) и на цифрата 5 (тогаш се деливи со 5). Според тоа, може да завршуваат само на цифрите 1, 3, 7 и 9 и како и бројот запишан во обратен редослед треба да биде прост, можните решенија се меѓу броевите: 11, 13, 17, 19, 31, 33, 37, 39, 71,

73, 77, 79, 91, 93, 97 и 99. Условите на задачата ги задоволуваат само броевите: 11, 13, 17, 31, 27, 71, 73, 79 и 97.

40. Производот на еден двоцифрен и еден трицифрен природен број во декаден запис се запишува само со неколку цифри 2. Определи ги овие броеви.

Решение. Производот на еден двоцифрен и еден трицифрен број е поголем од $10 \cdot 100 = 1000$, а е помал од $100 \cdot 1000 = 100000$, па затоа бараниот производ може да биде 2222 или 22222. Ако производот е $2222 = 2 \cdot 11 \cdot 101$, тогаш бараните броеви се 11 и 202, или 22 и 101. Ако производот е $22222 = 2 \cdot 41 \cdot 271$, тогаш бараните броеви се 41 и 542, или 82 и 271.

41. Производот на два трицифрени броја е запишан само со неколку тројки. Кои се тие броеви?

Решение. Производот на два трицифрени броеви е поголем или еднаков на $100 \cdot 100 = 10000$ и е помал од $1000 \cdot 1000 = 1000000$, па затоа тој е петцифрен или шестцифрен број. Ако производот е петцифрен број, тогаш од $33333 = 3 \cdot 11111 = 3 \cdot 41 \cdot 271$ следува дека бараните броеви се $3 \cdot 41 = 123$ и 271. Ако производот е шестцифрен број, тогаш бидејќи $333333 = 3 \cdot 111111 = 3 \cdot 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ имаме повеќе можности и тоа: $(3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11) \cdot (13 \cdot 37) = 693 \cdot 481$ и бараните броеви се 693 и 481; $(3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13) \cdot (11 \cdot 37) = 819 \cdot 407$ и бараните броеви се 819 и 407; $(3 \cdot 7 \cdot 37) \cdot (3 \cdot 11 \cdot 13) = 777 \cdot 429$ и бараните броеви се 777 и 429.

42. Определи го најмалиот природен број кој помножен со бројот 540 дава куб на природен број.

Решение. Нека n е бараниот број. Имаме: $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, па за да бројот $540n$ е точен куб треба степените на простите броеви да се деливи со 3. Последното значи дека треба да помножиме со 2 и со 5^2 . Конечно, бараниот број е $n = 2 \cdot 5^2 = 50$ и тогаш $540n = 540 \cdot 50 = 30^3$.

43. Ако p е прост број, тогаш $p + 2017$ е сложен број. Докажи!

Решение. Ако $p = 2$, тогаш $p + 2017 = 2019 = 3 \cdot 673$, т.е. $p + 2017$ е сложен број. Ако $p > 2$, тогаш p е непарен број, па затоа $p + 2017$ е парен број поголем од 2, т.е. е сложен број.

44. Ако p е прост број, тогаш $2016p + 1$ е сложен број. Докажи!

Решение. Ако $p=2$, тогаш $2016p+1=4037=11 \cdot 367$ и тоа е сложен број. Ако $p \geq 3$, тогаш p е непарен број, па затоа $2016p+1$ е парен број поголем од 2, што значи е сложен број.

45. Ако p е прост број, тогаш $p^{11}+1989$ е сложен број. Докажи!

Решение. Ако $p=2$, тогаш

$$p^{11}+1989=2^{11}+1989=2048+1989=4037=11 \cdot 367$$

што значи е сложен број. Ако $p > 2$, тогаш p е непарен број, па и p^{11} е непарен број, што значи дека $p^{11}+1989$ е парен број и како е поголем од 2 тој е сложен број.

46. Ако p е прост број, докажи дека

а) p^3+1987 е сложен број,

б) $p^{1987}+1987$ е сложен број.

Решение. а) Ако $p=2$, тогаш $p^3+1987=8+1987=1995$ и овој број е сложен бидејќи е поголем од 5 и е делив со 5. Ако $p > 2$, тогаш тој не е непарен број, што значи дека бројот p^3 е непарен, па затоа p^3+1987 е парен број поголем од 2, т.е. е сложен број.

б) Ако $p=2$, тогаш

$$p^{1987}=2^{1987}=2^{1984} \cdot 2^3=2^{4 \cdot 496} \cdot 2^3=(2^4)^{496} \cdot 8=16^{496} \cdot 8.$$

Цифрата на единиците на бројот 16^{496} е 6, па затоа цифрата на единиците на бројот $16^{496} \cdot 8$ е 8. Според тоа, цифрата на единиците на бројот

$$p^{1987}+1987=2^{1987}+1987$$

е 5, па затоа тој е делив со 5, т.е. е сложен број. Ако $p > 2$, тогаш тој не е непарен број, што значи дека бројот p^{1987} е непарен, па затоа $p^{1987}+1987$ е парен број, т.е. е сложен број.

47. Ако p е прост број, тогаш $p^{1996}+1997p$ е сложен број. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Имаме $p^{1996}+1997p=p(p^{1995}+1997)$, $p \geq 2$ и $p^{1992}+1997 \geq 2^{1995}+1997 > 2$, па затоа $p^{1996}+1997p$ е сложен број.

Втор начин. Ако $p=2$, тогаш бројот $p^{1996}+1997p$ е парен број поголем од 2, што значи е сложен број. Ако $p \geq 3$, тогаш p е непарен број, па затоа броевите p^{1996} и $1997p$ се непарни. Нивниот збир е парен број поголем од 2, што значи е сложен број.

48. Ако p е прост број, докажи дека $p^{1988} + p^{1989}$ е сложен број.

Решение. Имаме:

$$p^{1988} + p^{1989} = p^{1988}(1 + p).$$

Бидејќи p^{1988} и $1+p$ се броеви поголеми или еднакви на 3 заклучуваме дека $p^{1988} + p^{1989}$ е сложен број.

49. Ако p е прост број, докажи дека $p^{1992} + 1993p$ е сложен број.

Решение. Ако $p=2$, тогаш $2^{1992} = 2^{4 \cdot 498} = (2^4)^{498} = 16^{498}$ завршува на цифрата 6, а бројот 1993^2 завршува на цифрата 9. Значи, бројот $2^{1992} + 1993^2$ завршува на цифрата 5, па затоа е сложен број. Ако $p > 2$, тогаш p е непарен број, па затоа и p^{1992} е непарен број. Понатаму, $1993p$ е непарен број, па затоа $p^{1992} + 1993p$ е парен број, т.е. е сложен број.

50. Определи ги сите прости броеви p за кои и броевите $p+8$ и $p+10$ се исто така прости.

Решение. Ако $p=2$, тогаш $p+8=10$ е сложен број. За $p=3$ броевите $p+8=11$ и $p+10=13$ се прости. Ако $p > 3$, тогаш p е од обликот $6k-1$ или $6k+1$. За $p=6k-1$ бројот $p+10=6k+9$ е делив со 3, т.е. е сложен број. За $p=6k+1$ бројот $p+8=6k+9$ е делив со 3, т.е. е сложен број. Значи, единствено решение на задачата е $p=3$.

51. Определи ги сите природни броеви n такви што броевите $3n-4$, $4n-5$ и $5n-3$ се прости броеви.

Решение. Збирот на броевите $3n-4$, $4n-5$ и $5n-3$ е парен број, па мора еден од нив да е парен број. Бројот $4n-5$ не може да биде парен, бидејќи $4n$ е парен, а 5 е непарен. Значи, парни може да бидат само броевите $3n-4$ и $5n-3$. Бидејќи 2 е единствениот парен прост број, може да биде $3n-4=2$ или $5n-3=2$.

Оттука добиваме дека $n=2$ или $n=1$. Притоа не е можно $n=1$. За $n=2$ ги добиваме простите броеви $3n-4=2$, $4n-5=3$ и $5n-3=7$. Значи, $n=2$ е бараниот природен број.

52. Дали постои природен број со следново својство: Ако на бројот му ја избришеме првата одлево-надесно цифра, тогаш бројот се намалува:

а) 58 пати, б) 57 пати.

Решение. а) Нека претпоставиме дека постои таков број и нека тој има $k \geq 2$ цифри, при што прва од лево е цифрата x . Нека по пречкртувањето на x се добива бројот y кој има $k-1$ цифра. Тогаш точно е равенството $10^{k-1}x + y = 58y$, т.е. равенството $10^{k-1}x = 3 \cdot 19y$. Последното равенство не е можно, бидејќи x е цифра и 19 е прост број кој не е делител на $10^{k-1} = 2^{k-1}5^{k-1}$ за ниту еден број k .

б) Аналогно како во а) го добиваме равенството $10^{k-1}x + y = 57y$, кое е еквивалентно со равенството $10^{k-1}x = 2^3 \cdot 7y$. Бидејќи x цифра и $7 \nmid 10^{k-1}$, од последното равенство добиваме $x=7$, што значи $10^{k-1} = 2^3y$, односно $y = 2^{k-4}5^{k-1}$. Сега за $k=4$ добиваме $y=125$, што значи дека бројот 7125 е со саканото својство и тоа не е единствен таков број.

53. За кој прост број p вредноста на изразот $\frac{2p-24}{13-p}$ е цел број?

Решение. Имаме,

$$\frac{2p-24}{13-p} = \frac{2p-26+2}{13-p} = \frac{-2(13-p)+2}{13-p} = \frac{-2(13-p)}{13-p} + \frac{2}{13-p} = -2 + \frac{2}{13-p}.$$

За да вредноста на дадениот израз биде цел број потребно и доволно е $13-p \mid 2$, односно $13-p \in \{1, -1, 2, -2\}$. Значи, $-p \in \{-15, -14, -12, -11\}$, т.е. $p \in \{11, 12, 14, 15\}$ и како p е прост број добиваме $p=11$.

54. Определи ги сите прости броеви p такви што $\frac{4}{23} < \frac{1}{p} < \frac{8}{19}$.

Решение. Дадените неравенства се еквивалентни со неравенствата $\frac{8}{46} < \frac{8}{8p} < \frac{8}{19}$, т.е. со неравенствата $19 < 8p < 46$. Последното значи дека $8p \in \{24, 32, 40\}$, па затоа $p \in \{3, 4, 5\}$. Но, p е прост број, што значи $p \in \{3, 5\}$.

55. Определи ги сите прости броеви p за кои се точни неравенствата

$$\frac{2}{145} < \frac{1}{p} < \frac{3}{194}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \frac{2}{145} &< \frac{1}{p} < \frac{3}{194} \\ \frac{194}{3} &< p < \frac{145}{2} \\ 64\frac{2}{3} &< p < 72\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Единствени прости броеви кои ги задоволуваат последните неравенства се 67 и 71, и тоа се бараните броеви.

56. Определи ги сите прости броеви p такви што

$$\frac{665}{1993} < \frac{5}{p} < \frac{997}{1994}.$$

Решение. Имаме: $\frac{1994}{997} < \frac{p}{5} < \frac{1993}{665}$, т.е. $\frac{9970}{997} < p < \frac{9965}{665}$, што значи $10 < p < 14\frac{655}{665}$. Единствени прости броеви кои ги задоволуваат последните неравенства се 11 и 13.

57. Дали може на кружница да се запишат 2019 различни природни броеви такви што за секои два соседни броја количникот на поголемиот и помалиот број да е прост број?

Решение. Нека претпоставиме дека е можно да се постават броевите a_i , $i=1,2,\dots,2019$ на саканиот начин. Ако $a_i > a_{i+1}$, тогаш $\frac{a_i}{a_{i+1}} = p_j$, каде p_j е некој прост број. Ако $a_i < a_{i+1}$, тогаш $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{1}{q_j}$, каде q_j е некој прост број. Според условот на задачата $a_i \neq a_{i+1}$ за секој i . Тогаш

$$1 = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \dots \cdot \frac{a_{2004}}{a_{2005}} \cdot \frac{a_{2005}}{a_1} = \frac{p_1 p_2 \dots p_{k-1} p_k}{q_1 q_2 \dots q_{2019-k}}.$$

Но, за да се добие 1, треба во броителот и именителот да имаме еднаков број броеви, т.е. треба $k = 2019 - k$, односно $2k = 2019$, што е противречност.

58. За секој природен број n со $\sigma^*(n)$ го означуваме збирот на сите делители на n кои се помали од n . Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n за кои $\sigma^*(\sigma^*(n)) > \sigma^*(n) > n$.

Решение. Ќе докажеме дека сите броеви од видот $24p$, каде $p > 3$ е прост број го задоволуваат условот на задачата. Вистинските делители на бројот n се $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, p, 2p, 3p, 4p, 6p, 8p, 12p$, а нивниот збир е $\sigma^*(n) = 12(3p+5)$. Јасно, $\sigma^*(n) > n$. За да го докажеме второто неравенство треба да докажеме дека $\sigma^*(12(3p+5)) > 12(3p+5)$, кое следува од тоа што броевите $6(3p+5)$, $4(3p+5)$ и $3(3p+5)$ се вистински делители на $12(3p+5)$.

II.3. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

59. На прашањето колку кози има во стадото Петре одговорил дека кога во трлото влегуваат по две, по три, по четири, по пет и по шест, тогаш секогаш останува по една коза, а кога влегуваат по 7 не останува ниту една коза. Определи го најмалиот број кози што може да ги има стадото на Петре.

Решение. Бидејќи кога козите влегуваат во трлото по 2, 3, 4, 5 или 6, секогаш останува по една коза, заклучуваме дека при делење на бројот на козите со броевите 2, 3, 4, 5 и 6 се добива остаток 1, што значи дека и при делење со $NZS(2,3,4,5,6) = 60$ се добива остаток 1. Значи, бројот на козите е од видот $x = 60k + 1$, за $k = 1, 2, 3, \dots$ и овој број треба да е делив со 7.

За $k = 1$ добиваме $x = 61$ и овој број не е делив со 7.

За $k = 2$ добиваме $x = 121$ и овој број не е делив со 7.

За $k = 3$ добиваме $x = 181$ и овој број не е делив со 7.

За $k = 4$ добиваме $x = 241$ и овој број не е делив со 7.

За $k = 5$ добиваме $x = 301 = 7 \cdot 43$, што значи дека во стадото на Петре може да има најмалку 301 коза.

60. Ако природниот број n се подели со 3, се добива остаток 1, а ако бројот n го поделиме со 37, се добива остаток 33. Определи го остатокот кој се добива кога n ќе се подели со 111?

Решение. Нека бараниот број е $n = 3 \cdot 37m + r = 111m + r, 0 \leq r < 111$. Тогаш r е најмалиот природен број кој при делење со 3 дава остаток 1, а при делење со 37 дава остаток 33. При делење со 37 остаток 33 даваат броевите 33, 70 и 107, а од овие три броја само бројот 70 при

делење со 3 дава остаток 1. Значи, при делење на бројот n со 111 се добива остаток 70.

61. Природен број n при делење со 3 дава остаток a , при делење со 6 дава остаток b и при делење со 9 дава остаток c . Познато е дека $a+b+c=15$. Определи го остатокот при делење на бројот n со 18.

Решение. Од условот на задачата следува дека бројот n може да се запише во облиците $n=3p+a$, $n=6q+b$ и $n=9r+c$, при што бидејќи a, b, c се остатоци при делењето на n со 3, 6, 9, соодветно, важи $0 \leq a \leq 2$, $0 \leq b \leq 5$, $0 \leq c \leq 8$, па затоа $0 \leq a+b+c \leq 15$. Понатаму, бидејќи $a+b+c=15$, добиваме дека $a=2$, $b=5$ и $c=8$. Сега, $n+1=3p+3=6q+6=9r+9$. Според тоа, бројот $n+1$ е делив со 3, 6, 9, па затоа $n+1$ е делив со $\text{NZS}(3,6,9)=18$. Конечно, бројот n при делење со 18 дава остаток 17.

62. Определи три последователни природни броеви чиј производ е 24 пати поголем од најголемиот заеднички делител на броевите 455 и 1001.

Решение. Броевите 455 и 1001 разложени на прости множители се $455=5 \cdot 7 \cdot 13$ и $1001=7 \cdot 11 \cdot 13$.

Најголемиот заеднички делител на 455 и 1001 е $7 \cdot 13=91$. Од условот на задачата, производот на три последователни броеви е еднаков на $91 \cdot 24=2184$. Бидејќи, $2184=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$, бараните три последователни броеви се 12, 13, 14.

63. Производот на два природни броја е 1350, а нивниот најголем заеднички делител е 15. Кои се тие броеви?

Решение. Нека бараните броеви се a и b . Имаме

$$ab = \text{NZS}(a,b) \cdot \text{NZD}(a,b),$$

$$1350 = 15 \cdot \text{NZS}(a,b),$$

па затоа $\text{NZS}(a,b)=90$. Бидејќи $90=2 \cdot 3 \cdot 15=2 \cdot 3 \cdot \text{NZD}(a,b)$ добиваме дека бараните броеви се $a=15, b=90$ и $a=2 \cdot 15=30, b=3 \cdot 15=45$.

64. Определи го најмалиот природен број кој при делење со 2, 3, 4, 5 и 6 дава различни остатоци.

Решение. Ги разгледуваме сите броеви со ова својство. Бараниот број да го означиме со M . Ако M е парен, то можните остатоци се дадени во табелата:

делител	2	4	6	3	5
остаток	0	2	4	1	3

Бројот $M+2$ е делив на 2, 3, 4, 5 и 6 без остаток и затоа

$$M+2 = \text{NZS}(2, 3, 4, 5, 6) = 60, \text{ т.е. } M = 58.$$

Сега ќе ги разгледаме остатоците при непарен M . Аналогно добиваме:

делител	2	4	6	3	5
остаток	1	3	5	2	0 или 4

Ако при делење на M со 5 се добива остаток 4, тогаш

$$M+1 = \text{NZS}(2, 3, 4, 5, 6) = 60,$$

па затоа $M = 59$. Ако при делење на M со 5 се добива остаток 0, тогаш $M+1$ е делив со $\text{NZS}(2, 3, 4, 6) = 12$ и дава остаток 1 при делење со 5. Најмалиот број со ова својство е $M+1 = 36$. Наоѓаме дека $M = 35$ и тоа е решението на задачата.

65. Производот на два природни броја е 68040, а нивниот најмал заеднички содржател е 3780. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека m и n , $m < n$ се бараните природни броеви. Тогаш $mn = 68040$ и $\text{NZS}(m, n) = 3780$. Од $\text{NZD}(m, n) \cdot \text{NZS}(m, n) = mn$ добиваме $3780 \cdot \text{NZD}(m, n) = 68040$, т.е. $\text{NZD}(m, n) = 18$. Ако земеме предвид дека $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ и $3780 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, добиваме дека при $m < n$ се можни следниве случаи:

m	n
$2 \cdot 3 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

т.е.

m	n
18	3780
36	1890
54	1260
90	756
126	540
108	630
180	378
252	270

66. Дали постојат природни броеви x и y такви што

$$\text{NZD}(x, y) + \text{NZD}(x+1, y+1) = x - y?$$

Решение. Нека претпоставиме дека такви природни броеви постојат и нека $d = \text{NZD}(x, y)$. Бидејќи d е делител на $x - y$, заклучуваме дека d е делител на $\text{NZD}(x+1, y+1)$, па затоа $d \mid x+1$ и $d \mid y+1$. Сега од

$d|x+1$ и $d|x$ следува $d|x+1-x=1$, т.е. $d=\text{NZD}(x,y)=1$, што значи дека x и y се заемно прости. Нека сега $d'=\text{NZD}(x+1,y+1)$. Според тоа, $1+d'=x-y$, т.е. $1+d'=(x+1)-(y+1)$. Десната страна на последното равенство е делива со d' , па затоа и левата страна е делива со d' , што значи дека $d'|1$, односно $d'=1$. Според тоа, $x-y=2$, па затоа x и y се со иста парност. Но, тоа значи дека ако тие се парни добиваме противречност со $d=1$, а ако се непарни добиваме противречност со $d'=1$. Конечно, од добиената противречност заклучуваме дека не постојат природни броеви x и y за кои е исполнето даденото равенство.

67. Определи го најмалиот позитивен рационален број кој при делење со $\frac{35}{396}$ и со $\frac{28}{297}$ дава целоброен количник.

Решение. Нека x е бараната дробка. Тогаш $x:\frac{35}{396}=\frac{396}{35}x=\frac{499}{57}x$ и $x:\frac{28}{297}=\frac{297}{28}x=\frac{399}{47}x$ се природни броеви. Јасно, броителот на x мора да биде делив со 35 и со 28, т.е. со $\text{NZS}(35,28)=140$. Според тоа, најмалиот природен број со саканите својства е бројот 140, а најмалата дробка се добивам кога 140 се подели со $\text{NZD}(396,297)=99$ и тоа е дробката $\frac{140}{99}$.

68. Збирот на 11 природни броеви е 2016. Определи ја најголемата можна вредност на најголемиот заеднички делител на овие природни броеви.

Решение. Нека $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ се природни броеви чиј збир е 2016 и нека $d=\text{NZD}(x_1, x_2, \dots, x_{11})$. Бидејќи секој од броевите $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ е делив со d , добиваме дека и нивниот збир $x_1 + x_2 + \dots + x_{11} = 2016$ е делив со d , односно

$$d(n_1 + n_2 + \dots + n_{11}) = 2016,$$

каде $n_1, n_2, \dots, n_{11}$ се природни броеви. Јасно, $n_1 + n_2 + \dots + n_{11} \geq 11$ и како $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, добиваме дека најмалата можна вредност на збирот $n_1 + n_2 + \dots + n_{11}$ е $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, што значи дека најголемата можна вредност на d е $2016:12=168$. Вредноста $d=168$ се достигнува за броевите $x_i=168$, за $i=1, 2, \dots, 10$ и $x_{11}=336$.

II.4. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

69. Во една соба се наоѓаат столици со 3 и со 4 ногалки. Кога на секоја столица ќе седне човек, во собата има вкупно 69 нозе и ногалки. Колку столици се со 3, а колку со 4 ногалки?

Решение. Нека имаме x столици со 3 ногалки и y столици со 4 ногалки. Значи, во собата има $x+y$ луѓе, па затоа вкупниот број ногалки и нозе е $3x+4y+2(x+y)$, што значи дека $5x+6y=69$. Јасно, x е број делив со 3, па како $x<14$, добиваме дека можни решенија за x се 0, 3, 6, 9 и 12. Имаме:

- ако $x=0$, тогаш $6y=69$ и оваа равенка нема целобројно решение,
- ако $x=3$, тогаш $6y=54$, т.е. $y=9$,
- ако $x=6$, тогаш $6y=33$ и оваа равенка нема целобројно решение,
- ако $x=9$, тогаш $6y=24$, т.е. $y=5$,
- ако $x=12$, тогаш $6y=9$ и оваа равенка нема целобројно решение.

70. Збирот на две дробки со едноцифрени именители е еднаков на $\frac{73}{15}$.

Опреди ги сите дробки со наведеното својство.

Решение. Нека броителите на бараните дробки се x и y . Тогаш $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = \frac{73}{15}$, па затоа $5x+3y=73$. Бидејќи x и y се природни броеви, треба да ја решиме добиената Диофантова равенка. Едно нејзино решение е $(x,y)=(14,1)$, а сите решенија се дадени со формулите $x=14-3t$, $y=1+5t$, каде $t \in \mathbb{Z}$. Но, x и y се природни броеви, па затоа решенија се само паровите $(14,1)$, $(11,6)$, $(8,11)$, $(5,16)$ и $(2,21)$. Конечно, бараните зборови се

$$\frac{14}{3} + \frac{1}{5}, \frac{11}{3} + \frac{6}{5}, \frac{8}{3} + \frac{11}{5}, \frac{5}{3} + \frac{16}{5}, \frac{2}{3} + \frac{21}{5}.$$

71. Куќите на левата страна на улицата се нумерирани со непарни броеви, а куќите на десната страна се нумерирани со парни броеви. Збирот на сите куќни броеви на едната страна на улицата е 1309, а на другата страна на улицата е 2162. Колку куќи има во оваа улица?

Решение. На едната страна на улицата се броевите 1, 3, 5, 7, ..., а на другата страна на улицата се броевите 2, 4, 6, 8, Бидејќи збир на парни броеви е парен број, а бројот 1309 е непарен број, заклучуваме

дека збирот на непарните броеви е 1309, а збирот на парните броеви е 2162.

Нека n е бројот на куќите на непарната страна. Првиот куќен број на таа страна е 1, а последниот е $2n-1$. Ако го собере првиот и последниот куќен број, вториот и претпоследниот итн., тогаш имаме $\frac{n}{2}$ бирци еднакви на

$$2n-1+1=2n-3+3=\dots=2n,$$

па затоа

$$1+3+\dots+(2n-3)+(2n-1)=\frac{(2n-1+1)\cdot n}{2}=n\cdot n.$$

Значи, $n\cdot n=1309$. Бројот n мора да биде меѓу 30 и 40, бидејќи $30\cdot 30=900$, а $40\cdot 40=1600$. Бидејќи цифрата на единиците на производот е 9, цифрата на единиците на бројот n мора да е 3 или 7. Со проверка се добива дека $n=37$.

Нека m е бројот на куќите на парната страна. Првиот куќен број е 2, а последниот е $2m$. Имаме

$$2+4+6+\dots+2m=2(1+2+3+\dots+m)=2\cdot\frac{m(m+1)}{2}=m(m+1).$$

Значи, $m(m+1)=2162$. Со разложување на бројот 2162 на множители добиваме $2162=2\cdot 23\cdot 47=46\cdot 47$, па затоа $m(m+1)=46\cdot 47$, односно $m=46$.

Конечно, на едната страна имаме 37, а на другата 46 куќи, што значи дека на улицата има 83 куќи.

72. Определи ги сите цели броеви x за кои дропката $\frac{4x-17}{5x+9}$ исто така е цел број.

Решение. Бројот $5\cdot\frac{4x-17}{5x+9}=\frac{20x-85}{5x+9}$ е цел број. Имаме:

$$\frac{20x-85}{5x+9}=\frac{20x+36-121}{5x+9}=\frac{5(5x+9)-121}{5x+9}=4-\frac{121}{5x+9},$$

па за да дропката $\frac{20x-85}{5x+9}$ е цел број потребно е $2x+9|121$. Делители на бројот 121 се 1, -1, 11, -11, 121, -121. За позитивните делители 1, 11, 121 не се добиваат целобројни решенија.

Ако $5x+9=-1$, тогаш $x=-2$ и $\frac{4x-17}{5x+9}=25$. Ако $5x+9=-11$, тогаш $x=-4$ и $\frac{4x-17}{5x+9}=3$. Ако $5x+9=-121$, тогаш $x=-26$ и $\frac{4x-17}{5x+9}=1$.

Конечно, решение на задачата се броевите -2, -4, -26.

73. За кои цели броеви a равенката $a+5+\frac{2}{x-1}=0$ има целобројни негативни решенија? Определи ги овие решенија.

Решение. Од a е цел број следува дека $\frac{2}{x-1}$ е цел број. Според тоа $x-1 \mid 2$, од каде следува $x-1 \in \{1, -1, 2, -2\}$, т.е. $x \in \{0, 2, -1, 3\}$. Но, x е негативен број, па затоа $x = -1$ и тогаш $a = -4$.

74. Најди ги сите парови цели броеви (a, b) за кои важи $a = \frac{4b-5}{b-2}$.

Решение. Дадениот израз може да се трансформира на следниов начин:

$$a = \frac{4b-5}{b-2} = \frac{4(b-2)+8-5}{b-2} = \frac{4(b-2)}{b-2} + \frac{3}{b-2} = 4 + \frac{3}{b-2}.$$

Сега лесно се воочува дека бројот a ќе биде цел број ако и само ако $\frac{3}{b-2}$ е цел број, односно ако и само ако $b-2$ е делител на 3, т.е. ако и само ако $b-2 \in \{1, -1, 3, -3\}$. Според тоа, постојат четири можности и тоа:

- За $b-2=1$ добиваме $b=3, a=4+3=7$,
- За $b-2=-1$ добиваме $b=1, a=4-3=1$,
- За $b-2=3$ добиваме $b=5, a=4+1=5$ и
- За $b-2=-3$ добиваме $b=-1, a=4-1=3$.

Бараните парови се: $(7, 3)$, $(1, 1)$, $(5, 5)$ и $(3, -1)$.

75. Во множеството цели броеви реши ја равенката $x^2 + \frac{6}{y} = 10$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $x^2 - 10 = \frac{6}{y}$.

Левата страна на последната равенка е цел број, па затоа и десната страна мора да е цел број, од каде следува $y \mid 6$. Последното значи, $y \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Понатаму, за $y=1$ добиваме $x^2=4$, т.е. $x=\pm 2$, за $y=-1$ добиваме $x^2=16$, т.е. $x=\pm 4$, за $y=6$ добиваме $x^2=9$, т.е. $x=\pm 3$, а додека за преостанатите вредности на y задачата нема решение (Зошто?).

76. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1.$$

Решение. Јасно, сите три собурци не може да се помали од $\frac{1}{3}$, бидејќи тогаш збирот би бил помал од 1. Значи, барем еден собирок мора да е поголем или еднаков на $\frac{1}{3}$. Нека, на пример, $\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{3}$, т.е. $ab \leq 3$. Сите парови кои се решение на оваа неравенка се: (1,1), (1,2), (2,1), (1,3) и (3,1). Сега лесно добиваме дека сите решенија на дадената равенка се: (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2) и (3,2,1).

77. Определи ги сите природни броеви a, b, c, d, e такви што $2 < a < b < c < d < e$ и

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 1.$$

Решение. Од $2 < a < b < c < d < e$ следува $a \geq 3, b \geq 4, c \geq 5, d \geq 6, e \geq 7$, па затоа $\frac{5}{e} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 1 < \frac{5}{a}$, што значи $a < 5$, т.е. $a = 3$ или $a = 4$.

Ако $a = 4$, тогаш $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{3}{4}$ и $5 \leq b < c < d < e$. Бидејќи

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{1066}{1680} < \frac{3}{4},$$

заклучуваме дека во овој случај задачата нема решение.

Ако $a = 3$, тогаш $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{2}{3}$ и $4 \leq b < c < d < e$. Тогаш

$$\frac{4}{e} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{2}{3} < \frac{4}{b},$$

па затоа $b < 6$, т.е. $b = 4$ или $b = 5$. Ако $b = 5$, тогаш $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{7}{15}$. Од

друга страна $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{146}{336} < \frac{7}{15}$, што значи дека за $b = 5$

задачата нема решение. Според тоа, $b = 4$, па затоа $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{5}{12}$ и

$5 \leq c < d < e$. Значи, $\frac{3}{e} < \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{5}{12} < \frac{3}{c}$, па затоа $c < \frac{36}{5}$, односно

$c \in \{5, 6, 7\}$. Ако $c = 7$, тогаш $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{17}{72} < \frac{5}{12} - \frac{1}{7} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$, т.е. во

овој случај задачата нема решение. Ако $c = 6$, тогаш $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{3}{12}$, па

затоа $\frac{2}{e} < \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{3}{12} < \frac{2}{d}$, $d < 8$. Тогаш единствена можност за d е

$d = 7$, но во овој случај важи $\frac{1}{e} = \frac{3}{12} - \frac{1}{7} = \frac{3}{28}$, што значи дека e не е

природен број, што е противречност. Значи, $c = 5$, па затоа

$$\frac{2}{e} < \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13}{42} < \frac{2}{d}, \text{ т.е. } d < \frac{84}{13}.$$

Единствена можност е $d = 6$ и притоа добиваме

$$\frac{1}{e} = \frac{5}{12} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{25-12-10}{60} = \frac{1}{20}, \text{ т.е. } e=20.$$

Конечно, единствено решение на задачата е

$$a=3, b=4, c=5, d=6, e=20.$$

78. Во автобусите на една туристичка агенција, треба да се распоредат членовите на една туристичка група, така што во секој автобус да има ист број туристи. На почетокот во секој автобус влегле по 22 туристи при што останал несместен еден турист. Но, еден автобус заминал празен, па во останатите автобуси туристите се распоредиле рамномерно. Колку туристи и колку автобуси биле на почетокот, ако во секој автобус влегле не повеќе од 32 туристи?

Решение. Нека k е бројот на автобуси кои што туристичката агенција ги пратила на почетокот. Од условот на задачата следува дека $k \geq 2$, а бројот на туристи е $22k+1$. Откако заминал еден автобус, туристите можеле да се сместат во $k-1$ автобус подеднакво. Значи, бројот $22k+1$ е делив со $k-1$. Задачата се сведува на тоа да се определат броевите k, n така што $k \geq 2$ и $n = \frac{22k+1}{k-1}$ е цел број, таков што $n \leq 32$.

Бројот $n = 22 + \frac{23}{k-1}$ е цел број ако и само ако $\frac{23}{k-1}$ е цел број. Но, тоа е можно само за $k=2$ и $k=24$. Ако $k=2$, тогаш $n=45$ што не е можно, бидејќи $n \leq 32$. Ако $k=24$, тогаш $n=23$. Значи, на почетокот имало 24 автобуси, а бројот на туристи бил $n(k-1) = 23 \cdot 23 = 529$.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Определи го најголемиот број броеви кои може да бидат запишани еден по друг така што збирот на секои три последователно запишани броеви да е позитивен, а збирот на секои два последователно запишани броеви да е негативен.

Решение. Нека претпоставиме дека може да се запишат повеќе од три броја на саканиот начин и нека a, b, c, d се првите четири од запишаните броеви. Тогаш треба да се точни неравенствата

- 1) $a + b < 0$,
- 2) $b + c < 0$,
- 3) $c + d < 0$,
- 4) $a + b + c > 0$,
- 5) $b + c + d > 0$.

Ако ги собереме неравенствата 1), 2) и 3) добиваме $a + 2b + 2c + d < 0$, а ако ги собереме неравенствата 4) и 5) добиваме $a + 2b + 2c + d > 0$, што е противречност бидејќи не може истовремено еден ист збир да е и позитивен и негативен. Според тоа, може да се запишат не повеќе од три броја со саканото својство. Броевите $2, -3, 2$ се со саканото својство и нивниот број е 3.

2. Збирот на илјада последователни цели броеви е еднаков на 31500. Определи ги најмалиот и најголемиот број.

Решение. Нека најмалиот број го означиме со x . Тогаш

$$x + (x + 1) + \dots + (x + 999) = 31500$$

$$1000x + (1 + 2 + \dots + 999) = 31500$$

$$1000x + \frac{999 \cdot (999 + 1)}{2} = 31500$$

$$1000x + 499500 = 31500$$

$$1000x = -468000$$

$$x = -468.$$

Според тоа, најмалиот број е -468 , а најголемиот е $-468 + 999 = 531$.

3. Определи девет последователни цели броеви такви што збирот на првите три, почнувајќи од најмалиот, е еднаков на останатите шест броја.

Решение. Нека x е најмалиот од бараните броеви. Тогаш бараните броеви се $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6, x+7, x+8$. Од условот на задачата следува

$$x + x + 1 + x + 2 = x + 3 + x + 4 + x + 5 + x + 6 + x + 7 + x + 8$$

$$3x + 3 = 6x + 33$$

$$6x - 3x = 3 - 33$$

$$3x = -30$$

$$x = -10.$$

Значи, бараните броеви се $-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2$.

4. Петруш требало некој број да го подели со 9. Наместо да го подели, тој од бројот одзел 9 и го добил бројот -603 . Кој број требало да го добие Петруш да не згрешел?

Решение. Нека x е бараниот број. При грешката Петруш пресметал $x - 9 = -603$, од каде добиваме $x = 603 + 9 = -594$. Според тоа, да не згрешел Петруш требало да добие бројот

$$-594 : 9 = -66.$$

5. Илија наместо на тастатурата да отчука двоцифрен број, тој по грешка пред првата цифра и по втората цифра ја отчукал цифрата 4 и добил четирицифрен број кој е 54 пати поголем од двоцифрениот број. Кој број требало да го отчука Илија?

Решение. Нека бараниот број е $\overline{ab}$. Илија го отчукал бројот $\overline{4ab4}$, па затоа $\overline{4ab4} = 54 \cdot \overline{ab}$, од каде последователно добиваме

$$4004 + 10 \cdot \overline{ab} = 54 \cdot \overline{ab}$$

$$44 \cdot \overline{ab} = 4004$$

$$\overline{ab} = 4004 : 44 = 91.$$

6. При решавање на една задача Јован требало да помножи два двоцифрени броја. Меѓутоа, тој згрешил при што цифрите на едниот број ги запишал во обратен редослед, па добил производ кој е за 3816 поголем од точниот резултат. Определи го производот кој Јован требало да го добие.

Решение. Нека се $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ дадените двоцифрени броеви. Според условот на задачата важи

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} + 3816 = \overline{ab} \cdot \overline{dc},$$

односно

$$\overline{ab} \cdot \overline{dc} - \overline{ab} \cdot \overline{cd} = 3816$$

$$\overline{ab} \cdot (\overline{dc} - \overline{cd}) = 3816$$

$$\overline{ab} \cdot (10d + c - 10c - d) = 3816$$

$$9 \cdot \overline{ab} \cdot (d - c) = 3816$$

$$\overline{ab} \cdot (d - c) = 424.$$

Бројот 424 го разложуваме на прости множители и добиваме $424 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 53$. Значи, $\overline{ab} \cdot (d - c) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 53$, па затоа двоцифрениот број е $\overline{ab} = 53$, а разликата е $d - c = 8$. Значи, $d = 9, c = 1$, т.е. $\overline{cd} = 19$. Конечно, производот кој Јован требало да го добие е $53 \cdot 19 = 1007$.

7. Збирот на два броја е 836. Цифрата на единиците на еден од броевите е 0. Ако на овој број се избрише цифрата на единиците, т.е. се избрише цифрата 0, тогаш се добива вториот број. Кои се тие броеви?

Решение. Од условот на задачата следува дека бараните броеви се $\overline{xy0}$ и $\overline{xy}$. Сега, $\overline{xy0} + \overline{xy} = 836$ заклучуваме дека $y = 6$, т.е. броевите се $\overline{x60}$ и $\overline{x6}$. Понатаму, од $\overline{x60} + \overline{x6} = 836$ следува $x = 7$. Значи, броевите се 760 и 76.

8. Определи го најголемиот трицифрен број запишан со различни цифри, таков што збирот на сите трицифрени броеви кои може да се запишат со помош на сите три цифри на тој број е еднаков на 2220.

Решение. *Прв начин.* Нека бараниот број е $\overline{abc}$, $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Од условот на задачата следува $a > b > c$.

Во зависност од цифрата c ќе разгледаме два случаја: $c = 0$ и $c \neq 0$.

- 1) Ако $c = 0$, тогаш единствени трицифрени броеви кои може да се запишат со дадените цифри се $\overline{ab0}$, $\overline{a0b}$, $\overline{ba0}$, $\overline{b0a}$ и нивниот збир е $\overline{ab0} + \overline{a0b} + \overline{ba0} + \overline{b0a} = 211a + 211b = 211(a + b)$.

Значи, $211(a + b) = 2220$ и како 211 не е делител на 2220 заклучуваме дека во овој случај задачата нема решение.

- 2) Ако $c \neq 0$, тогаш сите броеви кои можат да се запишат со сите цифри се: $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$ и нивниот збир е

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c)$$

Според тоа, $222(a + b + c) = 2220$, односно $a + b + c = 10$. Го бараме најголемиот број $\overline{abc}$ за кој $a > b > c > 0$.

Ако $a=9$, тогаш добиваме $b+c=1$, што не е можно за $b>c>0$.
 Ако $a=8$, тогаш добиваме $b+c=2$, што не е можно за $b>c>0$.
 Ако $a=7$, тогаш добиваме $b+c=3$ и како $b>c>0$ имаме $b=2, c=1$. Конечно, бараниот број е 721.

Втор начин. Нека бараниот број е $\overline{abc}$. Броевите кои се добиваат со разместување на неговите цифри се $\overline{bca}, \overline{cab}, \overline{bac}, \overline{acb}, \overline{cba}$. Од условот на задачата добиваме

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{bac} + \overline{acb} + \overline{cba} = 2220$$

$$222(a+b+c) = 2220$$

$$a+b+c=10.$$

Ако $a=9$, тогаш $b+c=1$, па затоа $b=1$ и $c=0$, или $b=0$ и $c=1$, што не е можно (зошто?). Ако $a=8$, тогаш $b+c=2$, па затоа $b=1$ и $c=1$, или $b=0$ и $c=2$, или $b=2$ и $c=0$ што повторно не е можно (зошто?). Ако $a=7$, тогаш $b+c=3$, па затоа $b=2$ и $c=1$, или $b=1$ и $c=2$. Бидејќи се бара најголемиот број со разгледуваното својство добиваме дека бараниот број е 721.

9. Цифрата на единиците на еден број е 2. Ако на бројот му се избрише цифрата на единиците, се добива број кој е за 40529 помал од почетниот број. Определи го почетниот број.

Решение. Нека по брипењето на цифрата на единиците се добива бројот x . Тогаш бараниот број е $10x+2$, па затоа

$$x+40529=10x+2,$$

од каде добиваме $x=4503$. Според тоа, бараниот број е

$$10x+2=45030+2=45032.$$

10. Броителот на дропката $\frac{23}{42}$ е зголемен за некој непознат број, а именителот е намален за истиот број, па по скратувањето е добиена дропката $\frac{7}{6}$. Определи го непознатиот број.

Решение. Нека x е бројот кој се додава на броителот и се одзема од именителот. Имаме, $\frac{23+x}{42-x} = \frac{7}{6}$, па затоа $6(23+x) = 7(42-x)$, т.е. $138+6x=294-7x$. Значи, $13x=294-138$, од каде добиваме $x=12$.

11. Дадена е дропката $\frac{1988}{1987}$. Кој број треба да се одземе од броителот и да се додаде на именителот за да по скратувањето се добие дропката $\frac{2}{3}$.

Решение. Нека x е бараниот број. Тогаш

$$\frac{1988-x}{1987+x} = \frac{2}{3},$$

$$3(1988-x) = 2(1987+x),$$

$$5964 - 3x = 3974 + 2x,$$

$$5x = 1990,$$

$$x = 398.$$

12. Рационалниот број $-\frac{4}{7}$ е добиен со скратување на рационален број чиј збир на броителот и именителот е еднаков на 885. Определи го почетниот рационален број.

Решение. Пред скратувањето рационалниот број $-\frac{4}{7}$ имал вид $-\frac{4k}{7k}$, каде k е природен број. Бидејќи збирот на броителот и именителот е позитивен број добиваме $-4k + 7k = 885$, па затоа $3k = 885$, т.е. $k = 295$. Според тоа, почетниот рационален број е $-\frac{4 \cdot 295}{7 \cdot 295} = -\frac{1180}{2085}$.

13. Разликата на два броја е 63. Ако поголемиот од овие два броја се зголеми 12 пати, а помалиот остане непроменет, тогаш новата разлика е 1999. Определи ги почетните броеви.

Решение. Нека x е поголемиот, а y е помалиот број. Од условот на задачата следува $x - y = 63$ и $12x - y = 1999$. Последователно имаме

$$12x - y = 1999$$

$$11x + x - y = 1999$$

$$11x + 63 = 1999$$

$$x = 176$$

па затоа $y = x - 63 = 176 - 63 = 113$.

14. Определи ги броевите a, b, c за кои се знае дека нивниот збир е поголем од a за $\frac{5}{2}$, од b за $\frac{59}{6}$ и од c за $\frac{5}{3}$.

Решение. Од условот на задачата следува дека $b + c = \frac{5}{2}$, $c + a = \frac{59}{6}$ и $a + c = \frac{5}{3}$. Ако ги собереме последните равенства добиваме

$$b + c + c + a + a + b = \frac{5}{2} + \frac{59}{6} + \frac{5}{3}$$

$$2(a + b + c) = 14$$

$$a + b + c = 7.$$

Според тоа,

$$a = 7 - \frac{5}{2} = \frac{9}{2}, \quad b = 7 - \frac{59}{6} = -\frac{17}{6} \quad \text{и} \quad c = 7 - \frac{5}{3} = \frac{16}{3}.$$

15. Кога на позитивен децимален број децималната запирка ќе се помести за едно место во лево се добива број кој е за 123,48 помал од почетниот број. Определи го почетниот број.

Решение. Кога децималната запирка на даден број ќе се помести за едно место во лево, тогаш бројот се намалува десет пати. Според тоа, ако дадениот број е еднаков на $10x$, со поместување на децималната запирка се добива бројот x . Бидејќи броевите се разликуваат за 123,48 добиваме $10x - x = 123,48$, т.е. $9x = 123,48$, па затоа $x = 13,72$. Конечно, почетниот број е 137,2.

16. Со кој број треба да се помножи збирот на броевите $2\frac{1}{2}$ и $1\frac{3}{4}$, за да се добие разликата која се добива кога од поголемиот број ќе се одземе помалиот број?

Решение. Нека бараниот број е x . Последователно добиваме

$$(2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4})x = 2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$$

$$(\frac{5}{2} + \frac{7}{4})x = \frac{5}{2} - \frac{7}{4}$$

$$\frac{17}{4}x = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{17}.$$

17. Ако на некој број му го додадеме бројот 2, па добиениот збир го помножиме со -3 , од добиениот производ одземеме -5 , а потоа од добиената разлика го одземеме почетниот број, новата разлика ја помножиме со -2 и на крајот од добиениот производ одземеме 9, ќе го добиеме бројот -13 . Определи го почетниот број.

Решение. Нека бараниот број го означиме со x . Од условот на задачата ја добиваме равенката

$$[(x+2) \cdot (-3) - (-5) - x] \cdot (-2) - 9 = -13.$$

Според тоа,

$$[-3x - 6 + 5 - x] \cdot (-2) = -13 + 9$$

$$-4x - 1 = 2$$

$$x = -0,75.$$

Значи, почетниот број е $-0,75$.

Забелешка. Задачата може да се реши одејќи одназад-напред.

18. Броителот на една дробка е зголемен за 40%. Колку проценти треба да го намалиме именителот за да добиеме два пати поголема дробка од почетната дробка?

Решение. Нека дробката има облик $\frac{x}{y}$. Од условот на задачата имаме

дека $\frac{1,4x}{ky} = 2\frac{x}{y}$, од каде добиваме дека $k=0,7$. Тоа значи дека именителот на дробката треба да се намали за 30%.

19. Илија замислил еден број. Потоа Милан го удвоил неговиот број. Потоа Ангел го утростручил бројот на Милан, а потоа Иван го учетворостручил бројот на Ангел. Збирот на сите добиени броеви е еднаков на точниот квадрат на бројот кој го замисли Илија. Кој број го замисли Илија?

Решение. Нека замислениот број е x . Милан го добил бројот $2x$, Ангел го добил бројот $6x$ и Иван го добил бројот $24x$. Бидејќи збирот на добиените броеви е еднаков на точниот квадрат на бројот кој го замисли Илија точна е равенката $x+2x+6x+24x=x^2$, од каде добиваме $x^2=33x$, односно $x=33$.

20. Дарко замислил еден број, потоа му додал $\frac{1}{2}$, па добиениот број го помножил со $\frac{2}{3}$ и така добиениот број го зголемил за $\frac{3}{4}$, после што добил $\frac{253}{12}$. Кој број го замислил Дарко?

Решение. Непознатиот број да го означиме со x . Тогаш имаме

$$(x + \frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{253}{12}$$

$$(x + \frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{3} = \frac{253}{12} - \frac{3}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = (\frac{253}{12} - \frac{3}{4}) \cdot \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{253-9}{12} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 30.$$

Забелешка. Задачата може да се реши одејќи одназад-напред.

III.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

21. Иван бил во луна парк. Четириесет денари дал за две топки сладолед, а половина од останатите пари ги потрошил за возење со автомобилчиња. Потоа за 20 денари купил чоколадна банана, а

половина од остатокот на парите дал за возење со рингишпилот. Потоа купил топка сладолед за 20 денари и половина од остатокот на парите ги дал за влез во тунелот на стравот. Откако излегол од тунелот на стравот купил колач за 20 денари и половина од остатокот на парите ги дал за возење со вовчето. На крајот му останале само 30 денари. Колку пари имал Иван кога дошол во луна паркот?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. Пред возењето со вовчето Иван имал $2 \cdot 30 = 60$ денари. Пред купувањето на колачот имал $60 + 20 = 80$ денари. Пред тунелот на стравот тој имал $2 \cdot 80 = 160$ денари. Пред второто купување сладолед Иван имал $160 + 20 = 180$ денари. Пред возењето на рингишпилот имал $2 \cdot 180 = 360$ денари. Пред купувањето на чоколадната банана имал $360 + 20 = 380$ денари. Пред возењето со автомобилчињата Иван имал $2 \cdot 380 = 760$. Пред првото купување сладолед имал $760 + 40 = 800$ денари. Значи, на почетокот Иван имал 800 денари.

22. Иван на екскурзија понел извесна сума пари. За влезница во музеј потрошил $\frac{3}{7}$ од целокупната сума, за сок потрошил $\frac{3}{5}$ од остатокот, а потоа за купување сувенир потрошил $\frac{3}{8}$ од парите кои му останале после купувањето на влезницата за музеј и сокот. Колку пари имал Иван на почетокот, ако му останале 80 денари?

Решение. Сумата од 80 денари е еднаква на $\frac{5}{8}$ од парите кои му останале после купувањето на влезницата за музеј и сокот. Значи, оваа сума е еднаква на $80 : \frac{5}{8} = 80 \cdot \frac{8}{5} = 128$ денари. Понатаму, 128 денари е $\frac{2}{5}$ од сумата која му останала после купување на влезницата за музеј, па затоа оваа сума е еднаква на $128 : \frac{2}{5} = 128 \cdot \frac{5}{2} = 320$ денари. Овие 320 денари се еднакви на $\frac{4}{7}$ од сумата која Иван ја имал на почетокот, што значи дека на почетокот Иван имал $320 : \frac{4}{7} = 320 \cdot \frac{7}{4} = 560$ денари.

23. Три сестри Јана, Даниела и Ана сакале да купат исти шешири. Но, на Јана и недостасувале пари за третина од цената на шеширот, на Даниела четвртина, а на Ана шестина. Кога шеширот поефтинилен за 940 денари сестрите ги обединиле своите заштеди и купиле три ше-

шири, при што не им останал ниту еден денар. Колку чинел еден шешир пред поефтинувањето?

Решение. Нека x е цената на еден шешир пред снижувањето. Јана има $\frac{2}{3}x$, Даниела има $\frac{3}{4}x$ и Ана има $\frac{4}{5}x$ денари. По снижувањето трите шешири чинат $3(x-940)$ денари, па затоа

$$\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x = 3(x-940)$$

$$\frac{40x+45x+48x}{60} = 3(x-940)$$

$$133x = 180x - 180 \cdot 940$$

$$47x = 180 \cdot 940$$

$$x = 180 \cdot 20 = 3600.$$

Значи, цената на еден шешир пред намалувањето е 3600 денари.

24. Филип, Александар и Марио поделиле 2229 денари. Колку добил секој од нив ако делот на Марио е шест пати поголем од една петтина на делот на Филип, а две петтини од делот на Филип се за 20 денари повеќе од сумата пари која ја добил Александар?

Решение. Со x да ја означиме петтината од сумата која ја има Филип. Тогаш Филип добил $5x$, Марио добил $6x$, а Александар добил $2x-20$ денари. Според тоа,

$$4x + 6x + 2x - 20 = 2229$$

$$13x - 20 = 2229$$

$$13x = 2249$$

$$x = 173.$$

Значи, Филип добил 865 денари, Марио добил 1038 денари и Александар добил 326 денари.

25. Тројца другари треба да поделат 7777 денари. Колку ќе добие секој од нив, ако две петтини од сумата на Јово се еднакви на сумата на Милан, а седум деветтини од сумата на Милан се еднакви на сумата на Симон?

Решение. Нека Јово добил $45x$ денари. Тогаш Милан добил $\frac{2}{5} \cdot 45x = 18x$ денари, а Симон добил $\frac{7}{9} \cdot 18x = 14x$ денари. Значи,

$$45x + 18x + 14x = 7777$$

$$77x = 7777$$

$$x = 7777 : 77 = 101.$$

Според тоа, Јован добил $45 \cdot 101 = 4545$ денари, Милан добил $18 \cdot 101 = 1818$ денари и Симон добил $14 \cdot 101 = 1414$ денари.

26. Богдан влегол во книжарница со намера да купи збирка по математика и планирал да потроши $\frac{5}{6}$ од парите кои ги понел. При купувањето дознал дека збирката поефтинила за 40%. Богдан ја купил збирката, купил една гума за 50 денари и му останале 700 денари. Колку пари имал Богдан пред да влезе во книжарата?

Решение. Нека Богдан имал x денари. Според условот на задачата збирката чинела $\frac{5}{6}x$ денари, па откако поефтинила 40% таа чинела $\frac{5}{6}x \cdot \frac{60}{100}$ денари. Затоа, $\frac{5}{6}x \cdot \frac{60}{100} + 50 + 700 = x$, односно $\frac{1}{2}x + 750 = x$, па затоа $x = 1500$ денари.

27. Цената на една книга е намалена за 20%, по што книгата се продавала за 1988 денари. Определи ја цената на книгата пред намалувањето.

Решение. Нека цената на книгата била x денари. По намалувањето од 20% нејзината цена е $80\%x = \frac{4}{5}x$ денари. Значи, $\frac{4}{5}x = 1988$, т.е. $x = 1988 \cdot \frac{5}{4} = 2495$ денари.

28. Марко се договорил со Мирко да бере лешници 6 часа, за што требало да му плати 800 денари и да ги задржи заштитните ракавици кои ќе ги користи при берењето. Меѓутоа Мирко работел 5 часа и Марко му исплатил 650 денари, со тоа што Мирко ги задржал ракавиците. Колку пари чинат ракавиците?

Решение. Нека x е цената на заштитните ракавици. Тогаш за предвидените 6 часа Мирко треба да добие $800 + x$ денари, што значи дека за еден час треба да добие $\frac{800+x}{6}$ денари. Но, Мирко работел 5 часа и затоа требало да добие $5 \cdot \frac{800+x}{6}$ денари. Тој добил $650 + x$ денари, што значи $5 \cdot \frac{800+x}{6} = 650 + x$, од каде добиваме $x = 100$ денари. Значи, заштитните ракавици чинеле 100 денари.

29. Цената на влезницата за ракометен натпревар е 2000 денари. Кога цената на влезницата се намалила, бројот на посетителите се зголемил за 50%, а приходот се зголемил за 20%. Определи ја новата цена на влезницата.

Решение. Нека x е бројот на посетителите на натпреварот. Вкупниот приход претходно бил $2000x$. Сега приходот е поголем за 20%, т.е. е еднаков на $2000x \cdot 1,2 = 2400x$. Но, сега бројот на посетителите е поголем за 50%, т.е. имаме $1,5x$ посетители, па затоа новата цена на влезницата е еднаква на $2400x : 1,5x = 24000 : 15 = 1600$ денари.

30. Ема со третина од парите кои ги имала купила книга, со четвртина купила тетратка и со шестина купила молив, по што и останале 75 денари. Колку пари имала Ема на почетокот и по колку пари платила за секоја од купените работи?

Решение. Нека Ема имала x денари. Тогаш таа за купување на книгата, тетратката и моливот потрошила $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$ и $\frac{x}{6}$ денари соодветно. Бидејќи по купувањето и останале 75 денари ја добиваме равенката $x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - \frac{x}{6} = 75$, од каде добиваме $x = 300$ денари. Според тоа, книгата чинела $\frac{300}{3} = 100$ денари, тетратката чинела $\frac{300}{4} = 75$ денари и моливот чинел $\frac{300}{6} = 50$ денари.

31. Јанко и Саво имале еднакви суми пари. Јанко купил компири по цена 15 денари за килограм, а Саво по цена 10 денари за килограм. По која цена треба заедно да ги продадат компирите за да без заработувачка ги вратат вложените пари?

Решение. Нека Јанко и Саво имале по x денари. Јанко купил $\frac{x}{15} \text{ kg}$ компири, а Саво купил $\frac{x}{10} \text{ kg}$ компири. Двајцата заедно купиле $\frac{x}{15} + \frac{x}{10} = \frac{x}{6} \text{ kg}$ компири и треба да ги продаваат по цена со која ќе добијат $x + x = 2x$ денари. Значи, цената за еден килограм треба да биде $\frac{2x}{\frac{x}{6}} = 12$ денари.

32. Горјан и Јована заедно имале 460 денари и решиле со учество по половина да купат топка. Горјан дал $\frac{2}{3}$ од своите пари, а Јована дала $\frac{3}{7}$ од своите пари. Колку пари чини топката и колку пари имал секој од нив?

Решение. Нека Горјан имал x денари. Тогаш Јована имала $460 - x$ денари. Горјан за топката дал $\frac{2}{3}x$ денари, а Јована дала $\frac{3}{7}(460 - x)$

денари, па затоа $\frac{2}{3}x = \frac{3}{7}(460 - x)$, од каде добиваме $x = 180$ денари. Според тоа, Горјан имал 180 денари, а Јована имала 280 денари. Топката чинела $2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 180 = 240$ денари.

33. Марко работи како градинар за годишна плата од 160000 денари и едно одело. По 10 месеци тој ја напуштил работата и сопственикот на имотот му платил 130000 денари и одело. Колку чини оделото на Марко?

Решение. Нека оделото чини x денари. За 12 месеци Марко требало да добие $160000 + x$ денари, што значи дека за 10 месеци требало да добие $\frac{10}{12}(160000 + x)$ денар. Тој добил 130000 денари и одело, што значи дека

$$\begin{aligned}\frac{10}{12}(160000 + x) &= 130000 + x \\ 5(160000 + x) &= 6(130000 + x) \\ x &= 800000 - 780000 = 20000.\end{aligned}$$

Значи, оделото на Марко чинело 20000 денари.

34. Кога четвртина од една сума пари се собере со третина од друга сума пари, која е за 20 денари поголема од првата, се добива сума која е за 280 денари поголема од половината на трета сума пари, која е за 50 денари помала од првата сума. Определи ги трите суми пари.

Решение. Нека првата сума е x , втората y и третата z денари. Од условите на задачата добиваме

$$y = 20 + x, \quad x = 50 + z \quad \text{и} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 280 + \frac{z}{2}.$$

Одовде добиваме $x = 2980, y = 3000, z = 2930$ денари.

35. Милан, Лилјана и Ивана заедно имале 2540 денари. Кога Милан потрошил $\frac{1}{3}$ од своите пари, Лилјана потрошила $\frac{1}{4}$ од своите пари и Ивана потрошила $\frac{1}{5}$ од своите пари, на сите тројца им останала иста сума пари. Колку пари имал секој од нив?

Решение. Нека Милан, Лилјана и Ивана имале x, y и z денари, соодветно. Според условот на задачата $\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z$, па затоа $x = \frac{6}{5}z$ и $y = \frac{16}{15}z$. Според тоа,

$$x + y + z = 2450$$

$$\frac{6}{5}z + \frac{16}{15}z + z = 2450$$

$$\frac{49}{15}z = 2450$$

$$z = 750.$$

Значи, Ивана имала 750 денари, Милан имал $\frac{6}{5} \cdot 750 = 900$ денари и Лилјана имала $\frac{16}{15} \cdot 750 = 800$ денари.

36. Две третини од некоја стока се продадени со загуба од 20%, а четвртина од првобитното количество стока е продадено со добивка од 50%. Со колку проценти добивка или загуба треба да се продаде преостанатото количество стока за да се оствари планираната цена?

Решение. Нека планираната цена е x . Тогаш од продажбата на $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$ од стоката е остварен ефект

$$\frac{2}{3} \cdot 0,8x + \frac{1}{4} \cdot 1,5x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2}x = \frac{109}{120}x.$$

Според тоа, од продажбата на $\frac{1}{12}$ од стоката треба да се оствари ефект $\frac{11}{120}x$, па затоа нејзината цена треба да биде $\frac{11}{120}x : \frac{1}{12} = \frac{11}{10}x = 1,1x$, што значи дека цената на преостанатиот дел на стоката треба да се зголеми за 10%.

37. Цената на златото на берзата секое претпладне се покачува за 10%, а секое попладне се намалува за 10%. Дали по 50 дена работа на берзата цената на златото ќе биде поголема, помала или еднаква на половината од почетната цена?

Решение. Нека почетната цена на златото е x . По еден работен ден на берзата цената на златото ќе биде $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$ од почетната цена на златото во тој ден, т.е. ќе се намали за 1% од почетната цена за тој ден. Затоа цената x_k на златото по $k, 0 \leq k \leq 49$ дена работа на берзата ќе биде

$$x_0 = x, x_{k+1} = x_k - 1\%x_k > x_k - 1\%x.$$

Според тоа,

$$x_{50} > x_{49} - 1\%x > x_{48} - 2\%x > x_{47} - 3\%x > \dots > x_0 - 50\%x = 50\%x.$$

38. Двајца рибари отишле на риболов. Едниот уловил 3 риби, а другиот 5 риби. Кога почнале да ги печат, наишол некој патник и седнал со нив

да руча при што ги изеле сите риби, но така што тројцата добиле еднакви порции. По ручекот патникот на рибарите за својот оброк им дал 400 денари. Како меѓу себе рибарите правилно ќе ги поделат парите?

Решение. Ручекот се состоел од $5+3=8$ риби и секој изел по $\frac{8}{3}$ риби.

Според тоа, патникот од првиот рибар добил $5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}$ риби, а од вториот рибар добил $3-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$ риба. Затоа парите треба да се поделат во однос $\frac{7}{3}:\frac{1}{3}=7:1$. Значи, првиот рибар треба да добие $400\cdot\frac{7}{8}=350$ денари, а вториот рибар треба да добие $400\cdot\frac{1}{8}=50$ денари.

39. Половина керамида чини колку половина цигла и уште 10 денари, а три цигли чинат колку две керамиди и уште 10 денари. Колку чини една керамида, а колку една цигла?

Решение. Нека x е цената на керамидата, а y цената на циглата. Тогаш

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{2} + 10, \\ 10 + 2x = 3y. \end{cases}$$

Од првата равенка следува $x=y+20$, па ако замениме во втората равенка добиваме $10+2y+50=3y$, т.е. $y=50$ денари. Значи, една цигла чини 50 денари, а една керамида чини $50+20=70$ денари.

40. Четири другари заеднички купиле компјутер. Првиот платил 50% од вредноста на компјутерот, вториот дал третина од сумата која ја дале останатите тројца, третиот уплатил 25% од сумата која ја дале останатите тројца и четвртиот дал 1000 денари. Определи ја цената на компјутерот.

Решение. Нека првиот платил x денари, вториот y денари и третиот платил z денари. Компјутерот чини $x+y+z+1000$ денари. Според условот на задачата имаме

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x+y+z+1000) \\ y = \frac{1}{3}(x+z+1000) \\ z = \frac{1}{4}(x+y+1000) \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x = y+z+1000 \\ 3y = x+z+1000 \\ 4z = x+y+1000 \end{cases}$$

Ако ги собереме првата и втората равенка и првата и третата равенка добиваме $y = z + 1000$ и $3z = 2y + 2000$. Ако од претпоследната равенка замениме во последната добиваме $3z = 2z + 4000$, т.е. $z = 4000$. Значи, $y = 5000$ и $x = 10000$, па компјутерот чинел 20000 денари.

41. Четворица другари заеднички купиле топка. Првиот ја платил половината од вредноста на топката, вториот дал третина од парите кои ги дале останатите тројца, а третиот дал четвртина од сумата која ја дале останатите тројца. Четвртиот другар дал 50 денари. Колку чинела топката?

Решение. Нека c е цената на топката и со x, y, z, t да ги означиме сумите кои поединечно ги дале првиот, вториот, третиот и четвртиот другар, соодветно.

Имаме $x + y + z + t = c$. Понатаму, $x = \frac{c}{2}$ и $y = \frac{x+z+t}{3}$, па затоа

$y = \frac{x+y+z+t}{3} - \frac{y}{3} = \frac{c}{3} - \frac{y}{3}$, од каде добиваме $\frac{4y}{3} = \frac{c}{3}$, т.е. $y = \frac{c}{4}$. Сега,

$z = \frac{x+y+t}{4}$ и затоа $z = \frac{x+y+z+t}{4} - \frac{z}{4} = \frac{c}{4} - \frac{z}{4}$, од каде добиваме $\frac{5z}{4} = \frac{c}{4}$, т.е.

$z = \frac{c}{5}$. Од досега изнесеното следува

$$50 = t = c - x - y - z = c - \frac{c}{2} - \frac{c}{4} - \frac{c}{5}, \text{ т.е. } \frac{c}{20} = 50,$$

што значи дека топката чинела $c = 20 \cdot 50 = 1000$ денари.

42. Таткото има пет сина, кои се на различна возраст. Тој има определена сума пари која ја поделил на своите синови. На најмладиот син му дал најмалку пари, а на секој следен по возраст син му дал по 4500 евра повеќе отколку на претходниот син. Најстариот син добил 13 пати повеќе пари отколку најмладиот син. Колку пари добил синот кој е трет по возраст?

Решение. Нека најмладиот син добил x евра. Тогаш одејќи по старост останатите синови добиле $x + 4500$, $x + 9000$, $x + 13500$ и $x + 18000$ евра. Бидејќи најстариот син добил 13 пати повеќе пари од најмладиот син точна е равенката $13x = x + 18000$, од каде добиваме $x = 1500$. Според тоа, најмладиот син добил 1500 евра, а средниот син добил $1500 + 9000 = 10500$ евра.

43. Елена го пратила Горјан да купи поштенски марки од 1, 2, 3, 5 и 10 денари. Горјан требало да купи по четири марки од два вида, а по три од останатите три вида, но заборавил колку марки од кој вид. Добил

само монети од 10 денари и тоа точно колку што требало да ги плати сите марки. Колку марки од кој вид требало да купи Горјан?

Решение. Ако Горјан купи од сите марки по 3, тогаш му требаат $3 \cdot (1+2+3+5+10) = 63$ денари. До содржател од 10 денари недостакуваат 7, 17, 27, ... денари. Најголем износ кој може да се плати за две марки од различен вид е $10+5=15$ денари, па единствена можност да се добие содржател на 10 е бројот 7. Овој износ се постигнува ако Горјан купи уште по една марка од 2 и 5 денари.

Конечно, Горјан требало да купи по четири марки од 2 и 5 денари и по три марки од 1, 3 и 10 денари.

III.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

44. Пет ученици за пет минути јадат пет хамбургири. За кое време петнаесет ученици кои јадат со истиот апетит ќе изедат петнаесет хамбургери?

Решение. За пет минути секој ученик јаде $5:5=1$ хамбургер. Тоа значи дека 15 ученици ќе изедат 15 хамбургери за 5 минути.

45. Автомобил патот меѓу местата A и B го поминува за 6 часа, а автобус за 10 часа. Ако автомобилот и автобусот тргнат истовремено, еден од местото A , а друг од местото B , по колку време ќе се сретнат.

Решение. Автомобилот за 1 час поминува $\frac{1}{6}$ од патот, а автобусот $\frac{1}{10}$ од патот меѓу A и B . Автомобилот и автобусот за 1 час заедно поминуваат $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}$ од патот. До средбата автомобилот и автобусот ќе го поминат целиот пат, па за тоа им се потребни $1 : \frac{4}{15} = \frac{15}{4}$ часа, односно 3 часа и 45 минути.

46. Илија од дома до училиште пешачи 30 минути, а неговиот помал брат Марко пешачи 40 минути. По колку минути Илија ќе го стигне Марко, ако Марко тргнал 5 минути пред Илија?

Решение. Ако s е растојанието од дома до училиштето, тогаш брзината на Илија е $\frac{s}{30}$, а на Марко е $\frac{s}{40}$. Ако по x минути Илија го стигнува Марко, тогаш $\frac{s}{30}x = \frac{s}{40}(x+5)$, од каде добиваме $x=15$ минути.

47. Определи го помалиот агол меѓу стрелките на часовникот во 3 часот и 40 минути.

Решение. Аголот меѓу два последователни броја на часовникот е еднаков на $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Во 3 часот аголот меѓу малата и големата стрелка на часовникот е еднаков на $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$. За 40 минути, т.е. за $\frac{2}{3}$ од часот малата стрелка ќе се помести за $\frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$, а големата стрелка ќе се помести за $40 \cdot (360^\circ : 60) = 240^\circ$, при што ќе ја помине малата стрелка. Според тоа, во 3 часот и 40 минути аголот меѓу стрелките на часовникот ќе биде $240^\circ - (90^\circ + 20^\circ) = 130^\circ$.

48. Определи го аголот што го зафаќаат минутната и часовната стрелка на часовникот во 5 часот и 12 минути.

Решение. Големата (минутната) стрелка на часовникот за 1 час поминува 360° , па затоа за 1 минута поминува $360^\circ : 60 = 6^\circ$. Малата (часовната) стрелка за 1 час поминува $360^\circ : 12 = 30^\circ$, па затоа за 1 минута поминува $30^\circ : 60 = 0,5^\circ$. Во 5 часот стрелките на часовникот зафаќаат агол од $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$. За 12 минути големата стрелка ќе помине $12 \cdot 6^\circ = 72^\circ$, а малата стрелка ќе помине $12 \cdot 0,5^\circ = 6^\circ$. Според тоа, во 5 часот и 12 минути аголот меѓу стрелките на часовникот ќе биде $150^\circ - 72^\circ + 6^\circ = 84^\circ$.

49. Во еден момент големата и малата стрелка на часовникот зафаќаат агол од 27° . Определи го аголот меѓу стрелките на часовникот после точно 6 часа.

Решение. Минутната стрелка на часовникот за 1 час прави цел круг, па затоа за 6 часови ќе направи 6 кругови, т.е. ќе се врати на истото место. Часовната стрелка за 1 час поминува $\frac{1}{12}$ од кругот, т.е. поминува 30° , па затоа за 6 часови ќе премине $6 \cdot 30^\circ = 180^\circ$.

Бидејќи на почетокот аголот меѓу стрелките на часовникот бил 27° , после 6 часови ќе биде $27^\circ + 180^\circ = 207^\circ$ или $180^\circ - 27^\circ = 153^\circ$.

50. Кога меѓу 5 и 6 часот стрелките на часовникот по втор пат ќе зафаќаат агол од 90° ?

Решение. Во 5 часот аголот меѓу стрелките на часовникот е поголем од 90° и тој агол постојано се намалува се додека двете стрелки не се поклопат, т.е. до моментот кога аголот меѓу нив е 0° . Тоа се случува пред 5:30 часот. После тој момент аголот меѓу нив постојано се зголемува и во 6 часот тој ќе биде еднаков на 180° . Тоа значи дека стрелките на часовникот ќе зафаќаат агол од 90° прв пат пред 5:30 часот, а втор пат после 5:30 часот.

Нека претпоставиме дека часовникот покажува точно 5 часот. Нека x е бројот на минутните делови за кои од почетната положба се поместила малата стрелка до моментот кога стрелките зафаќаат агол од 90° . За време за кое малата стрелка се поместила за x минутни делови, големата стрелка се поместува за 25 минутни делови за да дојде до положба 5, потоа x минутни делови како и малата стрелка и 15 минутни делови, бидејќи аголот од 90° содржи 15 минутни делови. Притоа големата стрелка за исто време поминува 12 пати поголем пат од малата стрелка. Затоа важи равенката $12x = 25 + x + 15$. Нејзното решение е $x = 3\frac{7}{11}$. Според тоа, стрелките по втор пат ќе зафатат агол од 90° после $12 \cdot 3\frac{7}{11} = 43\frac{7}{11} \text{ min}$ после 5 часот.

51. Ана и Билјана во ист ден тргнале на работа. Ана работи три дена последователно, потоа одмара еден ден и на ист начин продолжува понатаму (3 дена работи, па 1 ден одмара). Билјана работи седум дена последователно, потоа одмара 3 дена и на ист начин продолжува понатаму (7 дена одмара, па 3 дена одмара). Колку заеднички денови одмор ќе имаат Ана и Билјана во првите 1000 дена од тргнувањето на работа?

Решение. Ана има циклуси на работа и одмор во вкупно траење од 4 дена, а Билјана во вкупно траење од 10 дена. Значи, по првите 20 дена, нивните циклуси на работа и одмор се повторуваат на ист начин. Во првите 20 дена од тргнувањето на работа, Ана ќе одмара четвртиот, осмиот, дванаесеттиот, шеснаесеттиот и дваесеттиот ден, броејќи од почеток, а Билјана ќе одмара осмиот, деветтиот, десеттиот, осумнаесеттиот, деветнаесеттиот и дваесеттиот ден, броејќи од почеток. Тоа значи дека во првите 20 дена тие ќе имаат 2 заеднички дена одмор. Во првите 1000 дена работа има 50 вакви циклуси од 20 дена, што значи дека вкупно ќе имаат $50 \cdot 2 = 100$ заеднички дена одмор.

52. Софија е постара од своите тројца браќа 1, 2 и 5 години. Ако следната година таа ги собере годините на своите браќа, тогаш добиениот збир ќе биде за 20 поголем од годините кои Софија ќе ги има тогаш. Колку години има Софија денес?

Решение. Нека моментално Софија има x години. Тогаш нејзините браќа имаат $x-1$, $x-2$ и $x-5$ години. Следната година Софија ќе има $x+1$ година, а нејзините браќа ќе имаат x , $x-1$ и $x-4$ години. Според тоа, $x+x-1+x-4=x+1+20$, од каде добиваме $x=13$. Значи, Софија денес има 13 години.

53. Ѓорѓи е двапати постар од Митко. Цифрата на единиците на годините на Митко е еднаква на збирот на цифрите на годините на Ѓорѓи, а цифрата на десетките на годините на Митко е еднаква на разликата на цифрите на годините на Ѓорѓи. Колку години има Митко?

Решение. Нека Ѓорѓи има $\overline{ab}$ години. Од условот на задачата следува дека Митко има $\overline{(a-b)(a+b)}$ или $\overline{(b-a)(a+b)}$ години. Равенката

$$\overline{ab} = 2\overline{(a-b)(a+b)}$$

не дава решение, а од равенката

$$\overline{ab} = 2\overline{(b-a)(a+b)}$$

последователно добиваме

$$10a+b=2(10(b-a)+a+b)$$

$$28a=21b$$

$$4a=3b.$$

Ако земеме предвид дека a и b се цифри и дека и $a+b$ е цифра, добиваме дека единствено решение е $a=3$, $b=4$. Според тоа, Ѓорѓи има 34 години, а Митко има 17 години.

54. За три часа возење автомобил поминал 180 km . Првиот час поминал 0,375 од целиот пат, а вториот час поминал 0,9 од патот кој го поминал првиот час. Колку километри поминал автомобилот во третиот час од возењето?

Решение. Првиот час автомобилот поминал

$$180 \cdot 0,375 = 67,5\text{ km}.$$

Вториот час поминал

$$67,5 \cdot 0,9 = 60,75\text{ km}.$$

Конечно, третиот час поминал $180 - 67,5 - 60,75 = 51,75\text{ km}$.

III.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

55. Ако топката од некоја висина слободно падне на земјата, таа секој пат после удирањето од земјата отскокнува до $\frac{5}{9}$ од висината од која паднала. Топката ја пуштаме да падне од висна од 108 cm . Определи ја висината која топката ќе ја постигне откако четири пати ќе отскокне од земјата.

Решение. Бидејќи $\frac{5}{9} \cdot 108 = 60\text{ cm}$, по првиот удар топката ќе отсконе на висина 60 cm . По вториот удар топката ќе отскокне на висина $60 \cdot \frac{5}{9} = \frac{100}{3}\text{ cm}$. По третиот удар топката ќе отскокне на висина $\frac{100}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{500}{27}\text{ cm}$ и по четвртиот удар таа ќе отскокне на висина $\frac{500}{27} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2500}{243}\text{ cm}$.

56. Гумено топче кое слободно паѓа секој пат отскокнува од земјата до висина која е за $\frac{1}{4}$ помала од висината од кое паднало. Определи од која висина е пуштено топчето ако тоа по третото отскокнување ја достигнало висината од 432 mm . До која висина топчето ќе отскокне по петтото отскокнување?

Решение. Ако топчето по отскокнувањето се наоѓа на височина x , тогаш за височината y од која почнало да паѓа важи $y - \frac{1}{4}y = x$, односно $y = \frac{4}{3}x$. Според тоа, висината од која топчето е пуштено и по три отскокнувања се наоѓа на висина 432 mm е еднаква на

$$432 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = 1024\text{ mm}.$$

По третото отскокнување топчето е на висина 432 mm , по четвртото на висина $432 \cdot \frac{3}{4} = 324\text{ mm}$ и по петтото на висина $324 \cdot \frac{3}{4} = 243\text{ mm}$.

57. Кога Никола поминал $\frac{1}{4}$ од патот и уште 5 km , му останало да помине уште $\frac{1}{3}$ од патот и уште 10 km . Колку километри е долг патот кој Никола требало да го помине?

Решение. Нека x е должината на патот кој требало да го помине Никола. Од условот на задачаат следува равенката $\frac{x}{4} + 5 + \frac{x}{3} + 10 = x$,

чие решение е $x = 36 \text{ km}$. Според тоа, патот кој требало да го помине Никола е долг 36 km .

58. Три парчиња жица имаат вкупна должина 34 m . Ако од првото отсечеме четвртина од неговата должина, од второто отсечеме половина од неговата должина и од третото отсечеме шестина од неговата должина, преостанатите парчиња жица ќе имаат иста должина. Определи ја должната на секое парче жица пред сечењето.

Решение. Нека x е должината на првото, y на второто и z на третото парче жица. Од условот на задачата следува

$$\begin{cases} x + y + z = 34 \\ \frac{3}{4}x = \frac{1}{2}y = \frac{5}{6}z. \end{cases}$$

Имаме $y = \frac{3}{2}x$ и $z = \frac{9}{10}x$, па ако замениме во првата равенка добиваме

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{10}x &= 34 \\ 10x + 15x + 9x &= 340 \\ x &= 10 \text{ m}. \end{aligned}$$

Конечно, $y = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15 \text{ m}$ и $z = \frac{9}{10} \cdot 10 = 9 \text{ m}$.

59. Висината на скалите кои водат од приземјето до првиот кат во училиштето на Кирил е меѓу 3 и 4 метри. Кирил прво ги искачил половината од скалилата, потоа искачил $\frac{1}{3}$ од преостанатите скалила и на крајот искачил $\frac{1}{8}$ од преостанатите скалила. Висината на едно скалило е $0,16 \text{ m}$. Упте колку скалила треба да искачи Кирил за да се качи на првиот кат?

Решение. Нека скалата има x скалила. Кирил прво искачил $\frac{1}{2}x$ скалила, по што останале $\frac{1}{2}x$ скалила. Потоа искачил $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}x$ скалила, по што останале $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x = \frac{1}{3}x$ скалила, што значи дека на крајот тој искачил $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{1}{24}x$ скалила. Од претходното следува дека Кирил вкупно искачил $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{24}x = \frac{17}{24}x$ скалила. Според тоа, $x = 24k$, каде k е природен број, па затоа скалите се високи $24k \cdot 0,16 = 3,84k$ метри. Но, скалите се високи меѓу 3 и 4 метри, па затоа $3 < 3,84k < 4$,

од што следува $k=1$. Значи, скалите имаат $x=24$ скалила и бидејќи Кирил искачил $\frac{17}{24} \cdot 24=17$ скалила, нему му останале да искачи уште $24-17=7$ скалила.

60. Михајло пеш тргнал од местото A до местото B . Откако поминал 1 km и половина од остатокот на патот, му останала уште третина од целиот пат и уште 1 km . Определи го растојанието од местото A до местото B .

Решение. Со x да ја означиме должината на патот. Михајло прво поминал 1 km и една половина од остатокот на патот, т.е. поминал $1+\frac{1}{2}(x-1)$ од патот. Му останале една третина од патот и уште 1 km , т.е. му останале $\frac{1}{3}x+1$ од патот. Затоа

$$x=1+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{3}x+1$$

$$6x=6+3x-3+2x+6$$

$$x=9\text{ km}.$$

Значи, должината на патот од местото A до местото B е 9 km .

61. Марко патувал со велосипед од Прилеп за Крушево. Кога поминал $\frac{1}{4}$ од патот и уште 5 km , му останале $\frac{1}{3}$ од патот и уште 10 km . Колку е долг патот од Прилеп до Крушево?

Решение. Нека должината на патот од Прилеп до Крушево е x . Марко поминал $\frac{1}{4}x+5\text{ km}$ од патот, а му останале $\frac{1}{3}x+10\text{ km}$ од патот, па затоа $\frac{1}{4}x+5+\frac{1}{3}x+10=x$, од каде наоѓаме $x=36\text{ km}$.

62. Мирко патувал 4 дена. Првиот ден поминал $\frac{3}{11}$ од вкупната должина на патот, вториот ден $\frac{7}{20}$ од должината на остатокот на патот, третиот ден $\frac{5}{13}$ од должината на остатокот од патот по вториот ден, а четвртиот ден ги поминал последните 320 km од патот. Колку километри патувал Мирко?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи Мирко третиот ден поминал $\frac{5}{13}$ од остатокот од патот, добиваме дека $\frac{8}{13}$ од остатокот од патот се 320 km ,

односно по вториот ден му останале $320 : \frac{8}{13} = 320 \cdot \frac{13}{8} = 520 \text{ km}$. Вториот ден поминал $\frac{7}{20}$ од остатокот од патот по првиот ден, па затоа $\frac{13}{20}$ од остатокот од патот се 520 km , односно по првиот ден му останале $520 : \frac{13}{20} = 520 \cdot \frac{20}{13} = 800 \text{ km}$. Овие 800 km се еднакви на остатокот од патот по првиот ден, т.е. на $\frac{8}{11}$ од патот. Значи, целиот пат е еднаков на $800 : \frac{8}{11} = 800 \cdot \frac{11}{8} = 1100 \text{ km}$.

Втор начин. Со x да ја означиме должината на патот изразена во километри. Првиот ден Мирко помил $\frac{3}{11}x$ километри и му останале $x - \frac{3}{11}x = \frac{8}{11}x$ километри. Вториот ден поминал $\frac{7}{20} \cdot \frac{8}{11}x$ километри и му останале $\frac{8}{11}x - \frac{7}{20} \cdot \frac{8}{11}x = \frac{13}{20} \cdot \frac{8}{11}x$ километри. Третиот ден поминал $\frac{5}{13} \cdot \frac{13}{20} \cdot \frac{8}{11}x$ километри и му останале $\frac{13}{20} \cdot \frac{8}{11}x - \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{20} \cdot \frac{8}{11}x = \frac{8}{13} \cdot \frac{13}{20} \cdot \frac{8}{11}x$ километри. Значи, $\frac{8}{13} \cdot \frac{13}{20} \cdot \frac{8}{11}x = 320$, т.е. целиот пат е еднаков на $x = 1100 \text{ km}$.

63. Од местото A тргнал автобус за местото B со брзина од 48 km/h , После половина час возење на автобусот, моторциклист кој се движел исто така од местото A кон местото B со брзина од 60 km/h го стигнал автобусот и одма продолжил кон местото B . После пристигнувањето во местото B моторциклистот се задржал во местото B 12 min и продолжил да вози назад кон местото A , па така со автобусот се сретнал на 12 km од местото B . Определи го растојанието меѓу A и B .

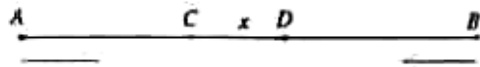
Решение. Нека C е местото на кое моторциклистот го стигнал автобусот. Тогаш $\overline{AC} = 24 \text{ km}$. Нека D е местото на кое автобусот и моторциклистот се сретнале после враќањето на моторциклистот од местото B . Тогаш $\overline{BD} = 12 \text{ km}$. Нека $\overline{CD} = x \text{ km}$. Патот од C до D автобусот го поминал за $\frac{x}{48}$ часови. Патот од C до и од B до D , заедно со 12 min задржување моторциклистот го поминал за $\frac{x+24}{60} + \frac{1}{5}$ часови. Затоа $\frac{x+24}{60} + \frac{1}{5} = \frac{x}{48}$, од каде наоѓаме $x = 144 \text{ km}$. Конечно растојанието од местото A до местото B е еднакво на

$$48 \cdot \frac{1}{2} + 144 + 12 = 180 \text{ km}.$$

64. Горјан и Стојан се наоѓаат на права улица на определено растојание еден од друг. Тие истовремено со велосипеди тргнале еден кон друг, при што во секоја секунда Горјан поминува пат од 6 m , а Стојан поминува пат од 8 m . По 30 секунди од почетокот на возењето Горјан и Никола биле меѓусебно оддалечени како и по 40 секунди од почетокот на возењето. Колку метри Горјан и Стојан биле меѓусебно оддалечени на почетокот на возењето?

Решение. Нека претпоставиме дека пред почетокот на возењето Горјан се наоѓал во точката A , а Стојан во точката B . Од почетокот на возењето Горјан и Стојан се приближувале еден кон друг, а откако се разминале тие се оддалечувале еден од друг. Тоа значи дека тие возеле 30 секунди, се разминале и возеле уште 10 секунди до моментот кога биле на исто растојание x како и по 30 секунди возење.

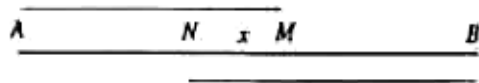
Нека C е точката во која се наоѓал Горјан, а D е точката во која се наоѓал Стојан по



30 секунди возење (види цртеж). Тогаш $\overline{CD} = x$, што значи дека на почетокот на возењето тие се наоѓале на растојание

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB} = 30 \cdot 6 + x + 30 \cdot 8 = 420 + x.$$

Нека N е точката во која се наоѓал Стојан, а M е точката во која се наоѓал Горјан по 40 секунди возење



(види цртеж). Тогаш $\overline{MN} = x$, што значи дека

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AM} + (\overline{BM} - \overline{MN}) = 40 \cdot 6 + (40 \cdot 8 - x) = 560 - x.$$

Значи, $420 + x = 560 - x$, па затоа $2x = 140$, т.е. $x = 70 \text{ m}$. Конечно, на почетокот Горјан и Стојан биле еден од друг на $420 + 70 = 490 \text{ m}$.

65. Ако од висината на Милан се одземе една десеттина и се додаде на висината на Маријана, тогаш Маријана би била повисока за една деветтина од својата висина, а 17 cm повисока од Милан. Колку е висок Милан, а колку е висока Маријана?

Решение. Нека Милан е висок $x \text{ cm}$, а Маријана е висока $y \text{ cm}$. Од

условот на задачата следува $\frac{x}{10} = \frac{y}{9}$ и $\frac{9x}{10} = \frac{10y}{9} - 17$. Ако замениме од

првата равенка во втората добиваме $9 \cdot \frac{y}{9} = \frac{10y}{9} - 1$, т.е. $y = 153 \text{ cm}$.

Значи, $x = 10 \cdot \frac{153}{9} = 170 \text{ cm}$.

66. Верверица за 20 минути истрчува од своето гнездо до стебло на орев и донесува еден орев. Без орев трча со брзина 5 km/h , а со орев трча со брзина 3 km/h . Определи го растојанието од ореовото стебло до леглото на верверицата.

Решение. Нека верверицата без орев трча t часови, а со орев трча $\frac{1}{3} - t$ часови. Бидејќи во двата случаја поминува ист пат, добиваме дека $5t = 3(\frac{1}{3} - t)$, т.е. $t = \frac{1}{8} h$. Според тоа, растојанието од ореовото дрво до гнездото на верверицата е

$$s = 5 \text{ km/h} \cdot \frac{1}{8} h = \frac{5}{8} \text{ km} = \frac{5000}{8} \text{ m} = 625 \text{ m}.$$

67. Од едно шише сок на растворање од 750 ml може да се наполнат 16 чаши од 250 ml . Колку шишиња и колку милилитри сок на растворање се потребни да се добијат 12l растворен сок?

Решение. 16 чаши од 250 ml содржат $4000 \text{ ml} = 4 \text{ l}$ растворен сок. Треба да добиеме 12l растворен сок, т.е. треба да добиеме $12:4=3$ пати поголемо количество растворен сок. Значи ќе ни требаат 3 шишиња сок за растворање, во кои има вкупно $3 \cdot 750 = 2250 \text{ ml}$ сок.

68. Триесет литри сок се запакувани во 39 шишиња од по $\frac{4}{5} \text{ l}$ и од по $\frac{3}{4} \text{ l}$. Колку шишиња има од по $\frac{4}{5} \text{ l}$, а колку од по $\frac{3}{4} \text{ l}$?

Решение. Ако сите 39 шишиња се од по $\frac{4}{5} \text{ l}$, тогаш ќе запакуваме $39 \cdot \frac{4}{5} \text{ l} = 31\frac{1}{5} \text{ l}$ сок, односно $1\frac{1}{5} \text{ l} = \frac{6}{5} \text{ l}$ сок повеќе. Со замена на едно поголемо шише со помало количеството сок ќе се намали за $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20} \text{ l}$. Според тоа, треба да замениме $\frac{6}{5} : \frac{1}{20} = \frac{6}{5} \cdot 20 = 24$ шишиња. Конечно, имаме 15 шишиња од по $\frac{4}{5} \text{ l}$ и 24 шишиња од по $\frac{3}{4} \text{ l}$.

69. Во два сада има $4\frac{1}{6}$ и $3\frac{1}{2}$ литри вода соодветно. Колку вода треба да се претури од првиот во вториот сад, така што после претурањето во двата сада да има исто количество вода? Образложи го својот одговор!

Решение. Во првиот сад има $\frac{25}{6}$ литри, додека во вториот сад има $\frac{7}{2}$ литри. Од условот на задачата имаме, $\frac{25}{6} - x = \frac{7}{2} + x$. Последната равенка можеме да ја запишеме како $2x = \frac{25}{6} - \frac{7}{2}$, од каде добиваме $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Значи, од првиот сад треба да претуриме $\frac{1}{3}$ литри во вториот сад за да имаме исто количество вода во двата сада.

70. Ако од едно полно буре прелееме во друго празно буре $\frac{1}{6}$ од течноста, а потоа ако сакаме да прелееме уште $\frac{2}{3}$ од преостанатата течност, тогаш во второто буре нема да има место за 48 литри течност. Првото буре собира двапати повеќе течност од второто. Колку литри собира секое буре?

Решение. Кога од првото буре ќе се прелее $\frac{1}{6}$ од течноста во бурето остануваат $\frac{5}{6}$ од течноста. Ако одлееме уште $\frac{2}{3}$ од преостанатата течност, тогаш одлеваме уште $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{18}$, што значи вкупно $\frac{1}{6} + \frac{10}{18} = \frac{13}{18}$ од течноста. Но, второто буре собира двапати помалку од првото, па затоа во него можеме да одлееме само $\frac{9}{18}$ од течноста, т.е. во второто буре нема место за $\frac{4}{18}$ од течноста. Тоа значи дека $\frac{4}{18}$ од течноста се еднакви на 48 литри, т.е. првото буре собира $48 : \frac{4}{18} = 216\text{ l}$. Конечно, второто буре собира $216 : 2 = 108\text{ l}$.

71. Колку литри чиста дистилирана вода треба да се измеша со 120 литри десетпроцентен раствор на алкохол за да се добие четирипроцентен раствор на алкохол?

Решение. Во 120 литри десетпроцентен раствор на алкохол имаме 12 литри алкохол и 108 литри вода. Нека се дотурени x литри вода. Тогаш имаме 12 литри алкохол и $120 + x$ литри раствор, па затоа

$$12 : (120 + x) = 0,4$$

$$12 \cdot 25 = 120 + x$$

$$x = 300 - 120 = 180\text{ l}.$$

72. Во два сада има вода. Кога од првиот сад се прелеат во вториот $4,75\text{ l}$, тогаш во вториот сад ќе има $6,5\text{ l}$ вода повеќе отколку во првиот сад.

Колку вода имало пред прелевањето во првиот, а колку во вториот ако во двата сада вкупно има 50 l вода?

Решение. Ако во првиот сад имало x литри, тогаш во вториот сад имало $50 - x$ литри вода. Од условот на задачата следува равенката

$$x - 4,75 + 6,5 = 50 - x + 4,75,$$

чие решение е $x = 26,5 l$. Според тоа, во првиот сад имало 26,5 l, а во вториот сад имало

$$50 - 26,5 = 23,5 l \text{ вода.}$$

73. Во садот A се измешани 9 l оцет и 6 l вода, а во садот B се измешани 12 l оцет и 6 l вода. Потоа од двата сада одлеваме по 7 l течност и 7 l од садот A ги тураме во садот B , 7 l од садот ги тураме во садот A . Пресметај колку литри оцет и колку литри вода ќе има во садот A , а колку во садот B .

Решение. Во садот A има $\frac{9}{15}$ оцет и $\frac{6}{15}$ вода. Кога од садот A ќе одлееме 7 l раствор, сме одлеале $7 \cdot \frac{9}{15} = \frac{63}{15} l$ оцет и $7 \cdot \frac{6}{15} = \frac{42}{15} l$ вода.

Слично, во садот B има $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ оцет и $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ вода. Кога од садот B сме одлеале 7 l раствор сме одлеале $7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3} l$ оцет и $7 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3} l$ вода.

По одлевањето на 7 l од садот A и долевањето на 7 l од садот B во садот A ќе има $9 - \frac{63}{15} + \frac{14}{3} = \frac{142}{15} l$ оцет и $6 - \frac{42}{15} + \frac{7}{3} = \frac{83}{15} l$ вода.

По одлевањето на 7 l од садот B и долевањето на 7 l од садот A во садот B ќе има $12 - \frac{14}{3} + \frac{63}{15} = \frac{173}{15} l$ оцет и $6 - \frac{7}{3} + \frac{42}{15} = \frac{97}{15} l$ вода.

74. Во садот A се измешани 8 литри вода и 7 литри вински оцет. Во садот B се измешани 11 литри вода и 9 литри вински оцет. Од двета сада се одлеани по 7 литри течност, а потоа оние 7 литри од садот A се турени во садот B , а оние 7 литри од садот B се турени во садот A . Колку литри вински оцет по прелевањето има во садот A , а колку во садот B ?

Решение. Од условот на задачата следува:

Сад А	Сад Б
Во еден литар има $\frac{8}{15} l$ вода и $\frac{7}{15} l$ оцет.	Во еден литар има $\frac{11}{20} l$ вода и $\frac{9}{20} l$ оцет.

Во одлеаните 7 литри има $7 \cdot \frac{7}{15} = \frac{49}{15} l$ оцет.	Во одлеаните 7 литри има $7 \cdot \frac{9}{20} = \frac{63}{20} l$ оцет.
Во остатокот, т.е. во 8 литри има $8 \cdot \frac{7}{15} = \frac{56}{15} l$ оцет.	Во остатокот, т.е. во 13 литри има $13 \cdot \frac{9}{20} = \frac{117}{20} l$ оцет.
По прелевањето има $\frac{56}{15} + \frac{63}{20} = \frac{413}{60} = 6\frac{53}{60} l$ оцет.	По прелевањето има $\frac{117}{20} + \frac{49}{15} = \frac{547}{60} = 9\frac{7}{60} l$ оцет.

75. Во три цистерни имало вкупно 1560 литри млеко. Ако од првата се одлее $\frac{3}{7}$, од втората $\frac{1}{4}$ и од третата $\frac{1}{5}$ од млекото, тогаш во сите три цистерни ќе остане исто количество млеко. Колку млеко има во секоја цистерна?

Решение. Нека во првата, втората, третата и четвртата цистерна има x, y и z количество млеко и нека t е количеството млеко во секоја од цистерните по одлевањето на $\frac{3}{7}$ од првата, $\frac{1}{4}$ од втората и $\frac{1}{5}$ од третата цистерна. Тогаш $\frac{4}{7}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z = t$, па затоа $x = \frac{7}{4}t, y = \frac{4}{3}t$ и $z = \frac{5}{4}t$. Според тоа, $\frac{7}{4}t + \frac{4}{3}t + \frac{5}{4}t = 1560$, од каде следува $t = 360$ литри. Значи, во првата цистерна има $\frac{7}{4} \cdot 360 = 630 l$, во втората $\frac{4}{3} \cdot 360 = 480 l$ и во третата има $\frac{5}{4} \cdot 360 = 450 l$ млеко.

76. Три цистерни се полни со млеко. Ако од првата цистерна се одлее $\frac{1}{4}$ од млекото, од втората $\frac{1}{5}$ од млекото и од третата $\frac{1}{6}$ од млекото, тогаш во сите цистерни ќе остане еднакво количество млеко. Колку млеко има во сите три цистерни, ако во трите цистерни има вкупно 1135 литри млеко.

Решение. Нека x, y и z се количествата млеко во првата, втората и третата цистерна. По одлевањето на млекото во првата цистерна останало $\frac{3}{4}x$ млеко, во втората останало $\frac{4}{5}y$ и во третата останало $\frac{5}{6}z$ млеко. Имаме, $\frac{3}{4}x = \frac{4}{5}y = \frac{5}{6}z = t$, па затоа $x = \frac{4}{3}t, y = \frac{5}{4}t, z = \frac{6}{5}t$. Но, $x + y + z = 1135$, па затоа $\frac{4}{3}t + \frac{5}{4}t + \frac{6}{5}t = 1135$, од каде добиваме $\frac{227}{60}t = 1135$, т.е. $t = 300 l$.

Конечно, во првата цистерна имало $\frac{4}{3} \cdot 300 = 400\text{ l}$, во втората цистерна имало $\frac{5}{4} \cdot 300 = 375\text{ l}$ и во третата цистерна имало $\frac{6}{5} \cdot 300 = 360\text{ l}$ млеко.

77. Во 1000 kg свежи јагоди има 99% вода. Во текот на транспортот испарило извесно количество вода, така што тежината на јагодите сега е 500 kg . Колкав процент вода сега содржат јагодите?

Решение. Во 1000 kg свежи јагоди има 990 kg вода и 10 kg сува материја. По транспортот имаме 500 kg јагоди во кои има 10 kg сува материја и 490 kg вода. Според тоа, сега во јагодите има $\frac{490}{500} \cdot 100 = 98\%$ вода.

78. Дедо Рампо од својата овошна градина набрал $5\frac{3}{4}\text{ kg}$ боровинки, $4\frac{1}{2}\text{ kg}$ преши, $2\frac{19}{20}\text{ kg}$ малини и $1\frac{4}{5}\text{ kg}$ рибизли. Одлучил овошјето да го стави во фрижидер во кутии кои собираат по 750 g . Овошје од различни видов и може да става во иста кутија. Определи колку најмалку кутии му се потребни на дедо Рампо.

Решение. Вкупното собрано количество овошје е

$$5\frac{3}{4} + 4\frac{1}{2} + 2\frac{19}{20} + 1\frac{4}{5} = \frac{23}{4} + \frac{9}{2} + \frac{59}{20} + \frac{9}{5} = \frac{115+90+59+36}{20} = \frac{300}{20} = 15\text{ kg}.$$

Понатаму, $750\text{ g} = 0,75\text{ kg}$. Според тоа, дедо Рампо ќе искористи $15:0,75 = 20$ кутии.

79. Вкупната маса на сад наполнет со вода е еднаква на 2000 g . Ако од садот одлееме 20% од водата, тогаш масата ќе се намали на 88% од почетната маса. Определи ја масата на празниот сад и масата на водата.

Решение. Одлеаната вода има маса $100 - 88 = 12\%$ од вкупната маса, т.е. $\frac{12}{100} \cdot 2000 = 240\text{ g}$. Бидејќи од садот се одлеани 20% од водата, масата на водата е еднаква на $240 \cdot \frac{100}{20} = 1200\text{ g}$. Масата на садот е еднаква на $2000 - 1200 = 800\text{ g}$.

80. Во една пекара отвориле 4 вреќи со брашно и од првата вреќа зеле $\frac{1}{3}$ од брашното, од втората вреќа зеле $\frac{1}{4}$ од брашното, од третата зеле $\frac{2}{5}$

од брашното и од четвртата зеле $\frac{1}{6}$ од брашното, по што во секоја вреќа останало еднакво количество брашно. Колку брашно имало во секоја вреќа, ако вкупно биле земени 51 kg брашно?

Решение. Нека на почетокот во првата, втората, третата и четвртата вреќа количеството брашно е x, y, z и t , соодветно. Откако од првата вреќа е земена $\frac{1}{3}$ од брашното, од втората $\frac{1}{4}$, од третата $\frac{2}{5}$ и од четвртата $\frac{1}{6}$, во вреќите останале еднакви количества брашно, па затоа $\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{3}{5}z = \frac{5}{6}t = k$, т.е.

$$x = \frac{3}{2}k, y = \frac{4}{3}k, z = \frac{5}{3}k, t = \frac{6}{5}k. \quad (1)$$

Но, од вреќите вкупно биле земени 51 kg брашно, па затоа

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{2}{5}z + \frac{1}{6}t = 51,$$

и ако замениме од (1) добиваме

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}k + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}k + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3}k + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{5}k = 51,$$

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k + \frac{2}{3}k + \frac{1}{5}k = 51,$$

$$\frac{17k}{10} = 51,$$

$$k = 30\text{ kg}.$$

Конечно, на почетокот во вреќите имало

$$x = 45\text{ kg}, y = 40\text{ kg}, z = 50\text{ kg}, t = 36\text{ kg}.$$

81. Во една продавница имало 98 kg круши и јаболка. Продадени се $\frac{4}{9}$ од крушите и $\frac{3}{5}$ од јаболката, со што е продадено половината од целото количество јаболка и круши. Колку килограми биле јаболка, а колку круши?

Решение. Нека имаме $x\text{ kg}$ круши и $y\text{ kg}$ јаболка. Тогаш

$$\begin{cases} x + y = 98 \\ \frac{4}{9}x + \frac{3}{5}y = 49. \end{cases}$$

Втората равенка е еквивалентна на равенката $20x + 27y = 2205$, па ако од првата равенка замениме $y = 98 - x$ ја добиваме равенката $20x + 27(98 - x) = 2205$, од каде наоѓаме $x = 63$, па затоа $y = 35$. Според тоа, во продавницата имало 63 kg круши и 35 kg јаболка.

82. Гуска, патка и кокошка заедно имат маса 12 kg . Гуската има два пати поголема маса од патката и кокошката заедно, а патката е три пати потешка од кокошката. Определи ја масата на патката.

Решение. Нека масите на гуската, патката и кокошката се x, y и z , соодветно. Тогаш $x + y + z = 12$, $x = 2(y + z)$ и $y = 3z$. Според тоа, $x = 2(3z + z) = 8z$, па затоа $8z + 3z + z = 12$, т.е. $z = 1\text{ kg}$. Сега, $y = 3\text{ kg}$ и $x = 8\text{ kg}$.

83. Во продавница за овошје има пет лубеници. Првата и втората лубеница заедно се тешки 12 kg , втората и третата заедно се тешки $13,5\text{ kg}$, третата и четвртата заедно се тешки $11,5\text{ kg}$, четвртата и петтата заедно се тешки 8 kg , додека првата, третата и петтата заедно се тешки 16 kg . Колку тежи секоја од петте лубеници.

Решение. Со a, b, c, d, e да ги означиме тежините на првата, втората, третата, четвртата и петтата лубеница, соодветно. Од условот на задачата следува

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ b + c = 13,5 \\ c + d = 11,5 \\ d + e = 8 \\ a + c + e = 16. \end{cases}$$

Од првата и втората равенка добиваме $a = 12 - b$ и $c = 13,5 - b$. Сега од третата равенка следува

$$d = 11,5 - c = 11,5 - (13,5 - b) = b - 2.$$

Понатаму, од четвртата равенка имаме

$$e = 8 - d = 8 - (b - 2) = 10 - b,$$

па ако замениме во петтата равенка добиваме

$$12 - b + 13,5 - b + 10 - b = 16$$

$$b = 6,5\text{ kg}$$

Значи,

$$a = 12 - 6,5 = 5,5\text{ kg}, \quad c = 13,5 - 6,5 = 7\text{ kg},$$

$$d = 6,5 - 2 = 4,5\text{ kg} \text{ и } e = 10 - 6,5 = 3,5\text{ kg}.$$

84. Стојан донел на пазар 258 kg јаболка од кои дел продал. Ако продадел 15 kg повеќе ќе му останела само шестина од вкупното коли-

чество јаболка. Три осмини од продадените јаболка и уште 5 kg јаболка продал по цена 35 денари за килограм. За остатокот од јаболката добил $\frac{15}{7}$ повеќе пари отколку за јаболката кои ги продал по 35 денари за килограм. По која цена го продал Стојан остатокот од јаболката?

Решение. Една шестина од вкупното количество јаболка е еднаква на $\frac{1}{6} \cdot 258 = 43\text{ kg}$. Значи, ако продадел 15 kg повеќе ќе му останеле 43 kg јаболка. Со други зборови Стојан продал $258 - (15 + 43) = 200\text{ kg}$ јаболка. По цена од 35 денари за килограм продал $\frac{3}{8} \cdot 200 + 5 = 80\text{ kg}$ јаболка. За овој дел тој добил $80 \cdot 35 = 2800$ денари. За останатите $200 - 80 = 120\text{ kg}$ Стојан добил $\frac{15}{7} \cdot 2800 = 6000$, што значи дека овие 120 kg ги продал за $6000 : 120 = 50$ денари за килограм.

85. Во еден магацин има шајки запакувани во сандаци од 16, 17 и 40 kg . Како магационерот, без да распакува ниту еден сандак, на купувачот му испорачал точно 100 kg шајки?

Решение. Јасно, магационерот не може да земе 2 пакети од по 40 kg , бидејќи тогаш не може со цели пакети да испорача $100 - 2 \cdot 40 = 20\text{ kg}$. Исто така, не може да земе 1 пакет од 40 kg , бидејќи тогаш со цели пакети не може да надополни $100 - 40 = 60\text{ kg}$ (Провери!). Значи, магационерот мора да користи пакети од 16 kg и 17 kg . Ако земе 6 пакети од 16 kg , тогаш ќе му недостасуваат $100 - 6 \cdot 16 = 4\text{ kg}$. При замена на пакет од 16 kg со пакет од 17 kg надополнува 1 kg , па затоа треба да замени 4 пакети од 16 kg со 4 пакети од 17 kg . Конечно, треба да испорача 2 пакети од 16 kg и 4 пакети од 17 kg , со што ќе испорача $2 \cdot 16 + 4 \cdot 17 = 100\text{ kg}$ шајки.

86. Бранко, Ванчо и Данчо отишле на риболов. Тежината на рибите, кои што ги уловил Бранко била 11 пати поголема од тежината на рибите уловени од Ванчо. Бранко двете најлесни свои риби му ги дал на Данчо и тежината на рибите кои му останале била 8 пати поголема од тежината на рибите уловени од Ванчо. Колку риби уловил Бранко?

Решение. Нека Ванчо уловил $2x\text{ kg}$ риба. Тогаш Бранко уловил $22x\text{ kg}$. Откако му дал 2 риби на Данчо, на Бранко му останале $16x\text{ kg}$. Двете

риби кои што му ги дал на Данко, тежат $22x - 16x = 6x \text{ kg}$. Секоја од останатите риби тежи барем $3x \text{ kg}$, бидејќи ако некоја тежи помалку од $3x \text{ kg}$, тогаш двете најлесни риби вкупно ќе тежат помалку од $6x \text{ kg}$. Бидејќи $3x \cdot 5 = 15x < 16x$, заклучуваме дека на Бранко му останале најмногу 5 риби, што значи дека тој уловил најмногу $2 + 5 = 7$ риби.

Задачата има 5 решенија.

Бранко уловил вкупно 7 риби, на пример 2 риби по 150 g и 5 риби по 160 g.

Бранко уловил вкупно 6 риби: 2 риби по 150 g, една риба со тежина 320 g и 3 риби по 160 g.

Бранко уловил вкупно 5 риби: 2 риби по 150 g, една риба со тежина 480 g и 2 риби по 160 g.

Бранко уловил вкупно 4 риби: 2 риби по 150 g, една риба со тежина 640 g и 1 риба со тежина 160 g.

Бранко уловил вкупно 3 риби: 2 риби по 150 g и една риба со тежина 800 g.

Тежината на рибите уловени од Бранко е 1 kg и 100 g, а тежината на уловените риби од Ванчо е 100 g.

87. Со една косилка за 2 часа може да се искоси $2\frac{1}{2} \text{ ha}$ ливада, а со друга, помала косилка може да 1 час и 30 минути да се искоси $1\frac{1}{4} \text{ ha}$. Определи ја плоштината на ливадата која за 3 часа и 36 минути може да се искоси ако се коси истовремено со двете косилки.

Решение. Со првата косилица за 1 час може да се искоси

$$2\frac{1}{2} : 2 = \frac{5}{2} : 2 = \frac{5}{4} \text{ ha}.$$

Со втората косилица за 1 час може да се искоси

$$1\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2} = \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \text{ ha}.$$

Со двете косилицы за 1 час може да се искоси

$$\frac{5}{4} + \frac{5}{6} = \frac{15+10}{12} = \frac{25}{12} \text{ ha}.$$

Понатаму, 3 часа и 36 минути се еднакви на $3\frac{36}{60} = 3\frac{3}{5} = \frac{18}{5}$ часови, па за 3 часа и 36 минути со двете косилицы може да се искоси

$$\frac{25}{12} \cdot \frac{18}{5} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} \text{ ha}.$$

III.5. ЗАДАЧИ СО РАБОТА

88. Милан може една работа да ја заврши за 12 дена, Павел истата работа ја завршува за 15 дена, а Мирко оваа работа ја завршува за 20 дена. Колку дена треба тројцата да работат заедно за да ја завршат оваа работа?

Решение. Кога сите тројца работат заедно за еден ден Милан, Павел и Мирко за еден ден завршуваат $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{5+4+3}{60} = \frac{1}{5}$ од работата. Според тоа, тројцата заедно целата работа можат да ја завршат за 5 дена.

89. Еден трактор може да изора некоја нива за 9 часа, а друг трактор истата нива може да ја изора за 12 часа. Прво првиот трактор сам ора на нивата 3 часа, по заради дефект престанал да ора. Преостанатиот дел на нивата ја изорал вториот трактор. За колку часа целата нива била изорана?

Решение. Првиот трактор за 1 час изорува $\frac{1}{9}$ од нивата, што значи за 3 часа изорал $3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ од нивата. Останало вториот трактор да изора $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ од нивата. Тој за 1 час изорува $\frac{1}{12}$ од нивата, па за да изора $\frac{2}{3}$ од нивата му се потребни $\frac{2}{3} : \frac{1}{12} = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ часа. Конечно, целата нива била изорана за $3 + 8 = 11$ часа.

90. Трактористот Матеј може да изора една парцела за 10 дена. Ако му се приклучи трактористот Павел и му помогне во работата два дена, тогаш парцелата ќе биде изорана за 6 дена. Колку дена му се потребни на Павел сам да ја изора парцелата?

Решение. *Прв начин.* Матеј за 1 ден ора $\frac{1}{10}$ од парцелата. Кога Павел му помогнал 2 дена парцелата била изорана за $10 - 6 = 4$ дена порано. Тоа значи дека Павел за 2 дена изорал $\frac{4}{10}$ од парцелата. Според тоа, за 1 ден Павел ора $\frac{4}{10} : 2 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ од парцелата. Значи, Павел парцелата ќе ја изора за 5 дена.

Втор начин. Матеј за 1 ден ора $\frac{1}{10}$ од парцелата. Ако Павел ја ора парцелата за x дена, тогаш тој за 1 ден ора $\frac{1}{x}$ од парцелата. Кога

Матеј ора 6 дена, а Павел ора 2 дена парцелата е изорана, па затоа $\frac{6}{10} + \frac{2}{x} = 1$. Според тоа, $\frac{2}{x} = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$, од каде добиваме $x = 5$.

91. Еден работник сработува една работа за 30 минути, друг за 60 минути, а трет работник истата работа ја сработува за 180 минути. За колку минути ќе биде сработена работата ако тројцата работници работат заедно?

Решение. Првиот работник за 1 минута сработува $\frac{1}{30}$ од работата, вториот $\frac{1}{60}$ од работата и третиот $\frac{1}{180}$ од работата. Значи, за 1 минута тројцата заедно сработуваат $\frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{180} = \frac{6+3+1}{180} = \frac{10}{180} = \frac{1}{18}$ од работата. Според тоа, целата работа тројцата работници заедно ќе ја сработат за 18 минути.

92. Еден дактилограф може да отчука определен број страници за 5 часа и 20 минути, а на друг дактилограф истиот текст му се потребни 4 часа и 40 минути. Работејќи на ист текст вториот дактилограф отчукал 3 страници повеќе од првиот. Колку страници имал дадениот тест?

Решение. За ист број страници на првиот дактилограф му се потребни 320 минути, а на вториот 280 минути. Брзините на чукање се однесуваат како $\frac{1}{320} : \frac{1}{280} = 7:8$. Последното значи дека на секои 15 страници првиот дактилограф отчукува 7 страници, а вториот отчукува 8 страници, т.е. една страница повеќе. Според тоа, ако вториот дактилограф отчукал 3 страници повеќе, тој отчукал $3 \cdot 8 = 24$ страници, а првиот дактилограф отчукал $3 \cdot 7 = 21$ страница. Значи, целиот текст има $24 + 21 = 45$ страници.

93. Базен се полни од две цевки, а се празни од една цевка. Првата цевка го полни базенот за 6 часа, втората го полни базенот за 10 часа, а третата празни полн базен за 5 часа. За колку часа ќе се наполни базенот ако истовремено се отворени сите три цевки?

Решение. Првата цевка за 1 час полни $\frac{1}{6}$ од базенот, втората полни $\frac{1}{10}$ од базенот, а третата празни $\frac{1}{5}$ од базенот. Според тоа, за 1 час ќе се наполни $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{5} = \frac{5+3-6}{30} = \frac{1}{15}$ од базенот. Конечно, базенот ќе се наполни за 15 часа.

94. Расеана домаќинка ја отворила славината од чешмата над кадата и заборавила кадата да ја затвори. Познато е дека кадата се полни за 20 минути, а се празни за 30 минути. По 36 минути домаќинката се сетила дека пуштила вода да се полни кадата. Дали во кадата ќе има вода и колку?

Решение. За една минута се полни $\frac{1}{20}$ од кадата, а се празни $\frac{1}{30}$ од кадата. Според тоа, ако кадата не е затворена за една минута кадата се полни за $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$ од нејзиниот волумен. Значи, за 36 минути во кадата ќе биде полна $36 \cdot \frac{1}{60} = \frac{3}{5}$ од нејзиниот волумен.

95. Марко ја оставил целосно отворена славината за вода над кадата и заборавил да го стави чепот. Познато е дека кога славината е целосно отворена кадата се полни за 20 минути, а полна када се празни за 30 минути. После 48 минути Марко се сетил дека го заборавил чепот. Колку вода тогаш имало во кадата? Дали водата во кадата прелеала?

Решение. Ако одводниот чеп е затворен, тогаш после 1 минута ќе се наполни $\frac{1}{20}$ од кадата. Според тоа, за 48 минути ќе се наполни $48 \cdot \frac{1}{20} = \frac{12}{5}$ од кадата. Бидејќи одводниот чеп не е затворен во 1 минута истекува $\frac{1}{30}$ од волуменот на кадата, па затоа за 48 минути ќе истече $48 \cdot \frac{1}{30} = \frac{8}{5}$ од волуменот на кадата. Бидејќи $\frac{12}{5} - \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$, заклучуваме дека после 48 минути од пуштањето на водата ќе биде наполнето $\frac{4}{5}$ од волуменот на кадата, т.е. водата во кадата не се прелеала.

III.6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

96. Кокошка и пол за ден и пол неси јајце и пол. Колку јајца ќе снесат 60 кокошки за 36 дена?

Решение. Бидејќи $60:1,5=40$ и $36:1,5=24$ добиваме дека 60 кокошки за 36 дена ќе снесат $40 \cdot 24=960$ пати повеќе јајца, т.е. ќе снесат $960 \cdot 1,5=1440$ јајца.

97. Мачка и пол за три и пол дена уловува четири и пол глувци. Колку глувци ќе уловат пет и пол мачки за 21 ден?

Решение. Ако мачка и пол за три и пол дена уловува четири и пол глувци, тогаш половина мачка за истото време уловува $4,5:3=1,5$ глувци. Според тоа, половина мачка за $6 \cdot 3,5=21$ ден уловува $6 \cdot 1,5=9$ глувци. Конечно, бидејќи $5,5=11 \cdot 0,5$ добиваме дека пет и пол мачки за 21 ден ќе уловат $11 \cdot 9=99$ глувци.

98. На автобуска постојка стигнал автобус со 72 патника. Од автобусот се симнале $\frac{5}{12}$ од патниците и се качиле 6 патници. На следната постојка повторно се симнале $\frac{5}{12}$ од патниците, а се качиле 8 нови патници. И на третата постојка се симнале $\frac{5}{12}$ од патниците, а се качиле 10 патници. Колку патници имало во автобусот по третата постојка?

Решение. На првата постојка се симнале $\frac{5}{12} \cdot 72=30$ патници, а се качиле 6 патници, па затоа во автобусот биле 48 патници. На втората постојка се симнале $\frac{5}{12} \cdot 48=20$ патници, а се качиле 8 патници, па затоа во автобусот биле 36 патници. На трета постојка се симнале $\frac{5}{12} \cdot 36=15$ патници, а се качиле 10 патници, па затоа по третата постојка во автобусот имало 31 патник

99. Учениците од седмо одделение на некое училиште одат на зимовање. Се пријавиле $\frac{2}{9}$ ученици повеќе отколку што било планирано. Пред поаѓањето заради болест се откажале $\frac{3}{11}$ од пријавените ученици, па на зимовање отишле 5 ученици помалку отколку што било планирано. Колку ученици отишле на зимовање?

Решение. За одење на зимовање се пријавиле $1+\frac{2}{9}=\frac{11}{9}$ од планираниот број. Од нив се откажале $\frac{3}{11}$, што значи дека се откажале $\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{9}=\frac{1}{3}$ од планираниот број. Според тоа, на зимовање отишле $\frac{11}{9}-\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$ од планираниот број, т.е. отишле $1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$ помалку отколку што било планирано. Значи, $\frac{1}{9}$ од планираниот број се 5 ученици, што значи дека било планирано на зимовање да одат $9 \cdot 5=45$ ученици. Конечно, на зимовање отишле $45-5=40$ ученици.

100. Во одделението на Илина учениците седат во клупи по двајца. Во одделението има повеќе девојчиња од момчиња, па затоа четири петтини од вкупниот број ученици седат во мешани парови (момче и девојче), а три пара се само од девојчиња. Колку момчиња и колку девојчиња учат во одделението на Илина?

Решение. Во мешовити парови седи $\frac{4}{5}$ од одделението, што значи дека во женски парови седи $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ од одделението. Таа $\frac{1}{5}$ ја сочинуваат 3 пара, т.е. 6 ученички. Значи, во одделението има $6 \cdot 5 = 30$ ученици. Од овие 30 ученици во мешовити парови седат 24 ученици, што значи дека во одделението има 12 момчиња и 18 девојчиња.

101. Од оделението на Михаил на училишниот натпревар по математика учествувале $\frac{1}{3}$ од учениците. Од нив бројот учениците кои се квалификувале за општинскиот натпревар е еднаков на $\frac{1}{9}$ од бројот на учениците во одделението, а 6 ученици не се квалификувало за општинскиот натпревар. Колку ученици има во одделението на Михаил? Колку соученици на Михаил учествувале на училишниот натпревар, а колку се квалификувале за општинскиот натпревар?

Решение. Нека во одделението на Михаил има x ученици. Бидејќи $\frac{1}{3}x$ ученици учествувале на училишниот натпревар, од кои $\frac{1}{9}x$ се квалификувале на општинскиот и 6 не се квалификуваме добиваме $\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x = 6$, т.е. $\frac{2}{9}x = 6$. Значи, во одделението на Михаил учат $x = 9 \cdot 6 : 2 = 27$ ученици, а на училишниот натпревар учествувале $27 : 3 = 9$ ученици.

102. Во едно одделение заради болест бројот на отсутните ученици бил еднаков на една шестина од бројот на присутните. Кога се разболел уште еден од присутните ученици, тогаш бројот на отсутните ученици бил една петтина од бројот на присутните. Колку ученици има во тоа одделение?

Решение. Ако бројот на пристуните ученици бил $6x$, тогаш бројот на отсутните ученици бил x . Кога еден ученик се разболел, бројот на отсутните ученици бил $x+1$, а бројот на присутните ученици бил $6x-1$. Затоа $6x-1=5(x+1)$, од што следува $x=6$. Значи, во одделението има $6 \cdot 6 + 6 = 42$ ученици.

103. Во едно училиште има 240 момчиња и девојчиња. $\frac{3}{5}$ од бројот на девојчињата е еднаков на $\frac{3}{7}$ од бројот на момчињата. Определи колку момчиња и колку девојчиња учат во ова училиште.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $\frac{3}{5}$ од бројот девојчињата е еднакво на $\frac{3}{7}$ од бројот на момчињата, добиваме дека $\frac{1}{5}$ од бројот на девојчињата е еднаква на $\frac{1}{7}$ од бројот на момчињата. Значи, броевите на девојчињата и момчињата се однесуваат како 5:7. Според тоа, во училиштето има $\frac{5}{12} \cdot 240 = 100$ девојчиња и $\frac{7}{12} \cdot 240 = 140$ момчиња.

Втор начин. Нека во училиштето има x девојчиња. Тогаш бројот на момчињата е еднаков на $240 - x$, па затоа $\frac{3}{5}x = \frac{3}{7}(240 - x)$, од каде добиваме

$$7x = 1200 - 5x, \text{ т.е. } x = 100.$$

Значи, во училиштето има 100 девојчиња и 140 момчиња.

104. Во училиштето за надарени ученици се запишале $\frac{1}{7}$ ученици повеќе од планираниот број, а до крајот на годината училиштето го напуштиле $\frac{1}{24}$ од запишаните ученици, така што на крајот имало 10 ученици повеќе од планираниот број. Колку ученици било планирано да се запишат?

Решение. Нека биле планирани x ученици. Значи, се запишале $x + \frac{1}{7}x = \frac{8}{7}x$ ученици. Училиштето го напуштиле $\frac{1}{24}$ од запишаните ученици, што значи дека го напуштиле $\frac{1}{24} \cdot \frac{8}{7}x = \frac{1}{21}x$ ученици, а останале $\frac{8}{7}x - \frac{1}{21}x = \frac{23}{21}x$. Според тоа, $\frac{23}{21}x - x = 10$, од каде добиваме $x = 105$. Значи, било планирано да се запишат 105 ученици.

105. Во едно училиште 30% од учениците се помали од 10 години, $\frac{1}{20}$ имаат точно 10 години, $\frac{3}{10}$ се постари од 10 но помали од 12 години, а останатите 70 ученици имаат 12 и повеќе години. Колку ученици имаат точно 10 години?

Решение. Нека x е вкупниот број на ученици. Од условот на задачата следува дека

$$30\% \cdot x + \frac{1}{20}x + \frac{3}{10}x + 70 = x.$$

Решението на последната равенка е $x=200$. Значи точно десет години имаат $\frac{200}{20}=10$ ученици.

106. Јана имала неколку бомбони. Половината бомбони ги дала на својот брат, а шестина од преостанатите бомбони ги изела. По пат изгубила 2 или 3 бомбони, а на својот пријател Петар му дала 6 бомбони. На крајот и останале 21 бомбона. Колку бомбони имала Јана на почетокот?

Решение. Нека x е бројот на бомбоните кои ги имала Јана. На братот му дала $\frac{x}{2}$ бомбони, па и останале $\frac{x}{2}$ бомбони. Потоа, таа изела $\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{12}$ од бомбоните, па и останаче $\frac{x}{2} - \frac{x}{12} = \frac{5x}{12}$ бомбони. Бидејќи изгубила 2 или 3 бомбони, а на Петар му дала 6 бомбони, можни се два случаја $\frac{5x}{12} - 8 = 21$ или $\frac{5x}{12} - 9 = 21$. Од $\frac{5x}{12} - 8 = 21$ следува $x = \frac{29 \cdot 12}{5} \notin \mathbb{N}$, а од $\frac{5x}{12} - 9 = 21$ следува $x = \frac{30 \cdot 12}{5} = 72$. Конечно, Јана имала 72 бомбони.

107. Јован, Иван и Марко биле на гости кај нивната баба Јованка. Бабата извадила кутија бомбони и ѝ рекла дека секој внук може да земе од кутијата колку сака бомбони. Прво Јован зел $\frac{1}{3}$ од бомбоните, но се премислил и вратил 4 бомбони во кутијата. По него Иван од кутијата зел $\frac{1}{4}$ од преостанатите бомбони, но и тој 3 бомбони вратил назад. На крајот Марко зел $\frac{1}{2}$ од преостанатите бомбони, но и тој вратил 2 бомбони во кутијата, по што во кутијата останале 17 бомбони. Колку бомбони имало на почетокот во кутијата?

Решение. *Прв начин.* Пред Марко да врати 2 бомбони во кутијата имало $17 - 2 = 15$ бомбони. Значи, пред тој да земе $\frac{1}{2}$ од бомбоните кои во тој момент биле во кутијата во кутијата имало $2 \cdot 15 = 30$ бомбони. Пред Иван да врати 3 бомбони во кутијата имало $30 - 3 = 27$ бомбони. Но, Иван зел $\frac{1}{4}$ од бомбоните, па во кутијата останале $\frac{3}{4}$ од бомбоните, што значи пред Иван да земе бомбони во кутијата имало $27 : \frac{3}{4} = 27 \cdot \frac{4}{3} = 36$ бомбони.

Пред Јован да врати 4 бомбони во кутијата имало $36 - 4 = 32$ бомбони. Но, Јован зел $\frac{1}{3}$ од бомбоните, па во кутијата останале $\frac{2}{3}$ од бомбоните, што значи пред Јован да земе бомбони во кутијата имало $32 : \frac{2}{3} = 32 \cdot \frac{3}{2} = 48$ бомбони. Значи, на почетокот во кутијата имало 48 бомбони.

Втор начин. Нека во кутијата имало x бомбони. По постапката на Јован во кутијата имало $x - \frac{1}{3}x + 4 = \frac{2}{3}x + 4$ бомбони. По постапката на Иван во кутијата имало $\frac{2}{3}x + 4 - \frac{1}{4}(\frac{2}{3}x + 4) + 3 = \frac{1}{2}x + 6$. По постапката на Марко во кутијата имало $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x + 6) + 2 = \frac{1}{4}x + 5$ бомбони. Значи, $\frac{1}{4}x + 5 = 17$ бомбони, од каде следува $x = 48$. Значи, на почетокот во кутијата имало 48 бомбони.

108. Двајца пријатели Михајло и Ивко имале еднаков број сликчиња кои меѓусебно се ги поклонувале. Прво Ивко му дал 20 сликчиња на Михајло. Потоа Михајло му дал на Ивко две третини од сликчињата кои ги имал во моментот, по што имал четири пати помалку сликчиња од Ивко. Колку сликчиња имал секој од нив на почетокот?

Решение. Нека на почетокот Ивко и Михајло имале по x сликчиња. Откако Ивко му дал на Михајло 20 сликчиња, Михајло имал $x + 20$, а Ивко имал $x - 20$ сликчиња. Потоа Михајло му дал на Ивко $\frac{2}{3}$ од сликчињата кои ги имал во моментот, па му останале $\frac{1}{3}(x + 20)$ сликчиња. Тогаш Ивко имал $x - 20 + \frac{2}{3}(x + 20) = \frac{5}{3}x - \frac{20}{3}$ сликчиња. Бидејќи сега Михајло има четири пати помалку сликчиња од Ивко добиваме $4 \cdot \frac{1}{3}(x + 20) = \frac{5}{3}x - \frac{20}{3}$, односно $x = 100$. Според тоа, на почетокот Ивко и Михајло имале по 100 сликчиња.

109. Петтина од едно јато слетала на едно дрво, а третина на друго дрво. Трикратната разлика на птиците меѓу овие два дела на јатото слетала на трето стебло, додека во воздухот останала само една птица. Колку птици имало во јатото?

Решение. Нека бројот на птиците во јатото е x . Тогаш

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}) + 1 = x$$

$$\frac{3x+5x}{15} + 3 \cdot \frac{5x-3x}{15} + 1 = x$$

$$\frac{8x+6x}{15} + 1 = x$$

$$14x + 15 = 15x$$

$$x = 15.$$

Според тоа, во јатото имало 15 птици.

110. Марија има огрлица од разнобојни мониста и тоа: $\frac{1}{3}$ од монистата се бели, $\frac{1}{4}$ се црвени, $\frac{1}{5}$ се жолти, $\frac{1}{6}$ се сини и 6 мониста се портокалови. Колку мониста има во огрлицата на Марија?

Решение. Нека x е бројот на монистата во огрлицата на Марија. Тогаш

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + 6 = x$$

$$\frac{20x+15x+12x+10x}{60} + 6 = x$$

$$57x + 360 = 60x$$

$$3x = 360$$

$$x = 120.$$

Значи, огрлицата на Марија има 120 мониста.

111. Павел читал книга. Откако прочитал половина од книгата и уште 20 страници, му останало да прочита уште третина од книгата. Колку страници има книгата која ја читал Павел?

Решение. Нека книгата има x страници. Според условот на задачата половината од страниците и уште 20 страници се еднакви на две третини од бројот на страниците. Значи, $\frac{x}{2} + 20 = \frac{2x}{3}$, од каде добиваме $x = 120$. Значи, книгата која ја читал Павел имала 120 страници.

112. Ана прочитала една книга за 31 ден при што секој ден читала еднаков број страници. Марија истата книга ја прочитала за ист број денови како Ана, но таа приот ден прочитала $\frac{1}{4}$ од бројот на страниците кои дневно ги читала Ана, а секој следен ден читала по една страница повеќе од претходниот. Колку страници има книгата која ја читале Ана и Марија?

Решение. Со x да го означиме бројот на страните кои Ана ги прочитала првиот ден. Ана книгата ја прочитала за 31 ден, па затоа книгата

има $31x$ страници. Од друга страна Марија првиот ден прочитала $\frac{1}{4}x$ страници, вториот ден прочитала $\frac{1}{4}x+1$ страница, третиот ден прочитала $\frac{1}{4}x+2$ страници, ..., триесет и првиот ден прочитала $\frac{1}{4}x+30$ страници. Затоа

$$31x = \frac{1}{4}x + (\frac{1}{4}x + 1) + (\frac{1}{4}x + 2) + \dots + (\frac{1}{4}x + 30)$$

$$31x = \frac{31}{4}x + (1 + 2 + 3 + \dots + 30)$$

$$31x = \frac{31}{4}x + 465$$

$$x = 20.$$

Според тоа, книгата имала $31x = 31 \cdot 20 = 620$ страници.

113. Ангелина првиот ден прочитала $\frac{1}{7}$ од една книга, вториот ден прочитала $0,3$ од остатокот, а третиот ден прочитала $\frac{1}{2}$ од новиот остаток, по што и останале непрочитани 42 страници од книгата. Колку страници имала книгата која ја читала Ангелина? Колку страници Ангелина читала секој од првите три дена?

Решение. Нека книгата има x страници. Првиот ден Ангелина прочитала $\frac{1}{7}x$ страници и преостанале $\frac{6}{7}x$ страници. Вториот ден таа прочитала $0,3 \cdot \frac{6}{7}x = \frac{9}{35}x$ страници и преостанале $0,7 \cdot \frac{6}{7}x = \frac{3}{5}x$. Третиот ден Ангелина прочитала $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{3}{10}x$ страници и исто толку страници и преостанале непрочитани. Значи, $\frac{3}{10}x = 42$, т.е. $x = 140$. Значи, книгата имала 140 страници, Ангелина првиот ден прочитала $\frac{1}{7} \cdot 140 = 20$ страници, вториот ден прочитала $\frac{9}{35} \cdot 140 = 36$ страници и третиот ден прочитала 42 страници.

114. Учениците Раде, Јане и Матеј решиле 100 задачи така што секој од нив решил по 60 задачи. Сите решени задачи се распоредени во две групи: *тешки* се оние задачи кои ги решил само еден ученик и *лесни* се оние задачи кои ги решиле сите тројца. Колку лесни и колку тешки задачи биле решени?

Решение. Нека има x лесни задачи. Тогаш секој од учениците решил $60 - x$ тешки задачи. Според тоа, $3(60 - x) + x = 100$, од каде наоѓа-

ме $180 - 3x + x = 100$, т.е. $x = 40$. Значи, решени се 40 лесни и 60 тешки задачи.

115. Во едно пакување има 240 семиња. Сања ги посадила сите. 60% од нив изртеле, 75% од оние што изртеле се развиле во растенија. $\frac{1}{3}$ од растенијата имаат жолти цветови, а преостанатите имаат црвени цветови. Колку растенија имаат црвени цветови?

Решение. Според условот на задачата изртиле $\frac{60}{100} \cdot 240 = 144$ семиња.

Понатаму, од изртените семиња во растенија се развиле $\frac{75}{100} \cdot 144 = 108$.

Значи, бројот на растенијате кои имаат жолти е $\frac{1}{3} \cdot 108 = 36$. Според тоа, има $108 - 36 = 72$ растенија со црвени цветови.

116. Од полн сад со чист алкохол се одлева $\frac{1}{4}$ од алкохолот и се долеа вода. Потоа од садот се одлева $\frac{1}{3}$ од течноста и се долеа вода. Што има повеќе во садот вода или алкохол?

Решение. Ако од садот се одлее $\frac{1}{4}$ од алкохолот и се долее вода, тогаш во садот ќе има $\frac{1}{4}$ вода и $\frac{3}{4}$ алкохол. Ако од садот се одлее $\frac{1}{3}$ од течноста, тогаш сме одлеале $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ вода, па во садот останале $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ вода. Со долевањето на $\frac{1}{3}$ вода, во садот ќе има $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ вода. Според тоа, на крајот во садот имаме еднакви количества вода и алкохол.

117. Во ковница за пари имало 400 исти златни прачки. Од секоја прачка се изработуваат 10 златници и останува злато толку што од остатокот од 20 прачки може да се излие една нова прачка. Определи го вкупниот број златници кои што се изработени од дадените прачки злато.

Решение. Од 400 прачки може да се направат $400 \cdot 10 = 4000$ златници и останува злато за $400 : 20 = 20$ прачки. Од овие 20 прачки може да се направат $20 \cdot 10 = 200$ златници и останува злато за $20 : 20 = 1$ нова прачка од која може да се направат 10 нови златници. Сега останува злато за $\frac{1}{20}$ прачка. Бидејќи од $\frac{19}{20}$ од прачка се добиваат 10 златници, еден златник се добива од $\frac{19}{20} : 10 = \frac{19}{200}$ прачка, па како $\frac{19}{200} > \frac{1}{20}$

заклучуваме дека од преостанатото злато не може да се направи нов златник. Според тоа, од дадените прачки може да се направат $4000 + 200 + 10 = 4210$ златници.

118. Славица однела на пазар корпа полна со јајца. Првиот купувач купил половина од јајцата и уште две јајца. Вториот купувач купил половина од преостанатите јајца и уште две јајца. Третиот купувач купил половина од јајцата кои останале по вториот купувач и уште две јајца. Кога четвртиот купувач зел половина од преостанатите јајца и уште две јајца, во корпата не останало ниту едно јајце. Колку јајца продала Славица?

Решение. Нека Славица имала x јајца. По првиот купувач и останале $\frac{x}{2} - 2$ јајца. По вториот купувач и останале $\frac{1}{2}(\frac{x}{2} - 2) - 2 = \frac{x}{4} - 3$ јајца. По третиот купувач и останале $\frac{1}{2}(\frac{x}{4} - 3) - 2 = \frac{x}{8} - \frac{7}{2}$ јајца. По четвртиот купувач и останале $\frac{1}{2}(\frac{x}{8} - \frac{7}{2}) - 2 = \frac{x}{16} - \frac{15}{4}$ јајца. Но, по четвртиот купувач на Славица не и останале јајца, па затоа $\frac{x}{16} - \frac{15}{4} = 0$, односно $x = 60$ јајца.

Забелешка. Задачата може да се реши одејќи одназад-напред. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

119. Неколку браќа поделиле определена сума златници. Првиот брат зел 100 златници и една шестина од остатокот. Вториот брат потоа зел 200 златници и една шестина од новиот остаток. Третиот брат потоа зел 300 златници и една шестина од новиот остаток итн. Последниот брат ги зел сите златници кои ги оставиле неговите браќа. Се покажало дека сите браќа зеле ист број златници. Колку браќа учествувале во поделбата?

Решение. Ако има x златници, тогаш првиот брат зел $100 + \frac{1}{6}(x - 100)$ златници, а вториот брат зел $200 + \frac{1}{6}(x - 100 - \frac{1}{6}(x - 100) - 200)$ златници. Секој од браќата еднаков број златници, па затоа

$$100 + \frac{1}{6}(x - 100) = 200 + \frac{1}{6}(x - 100 - \frac{1}{6}(x - 100) - 200),$$

од каде добиваме $x = 2500$. Според тоа, првиот брат зел $100 + \frac{2400}{6} = 500$ и како секој од браќата зел еднаков број златници, во поделбата учествувале $2500 : 500 = 5$ браќа.

120. Ана и Симон подготвувале за печат една книга и меѓу себе поделиле за чукање 416 страници текст. Кога Ана отчукала $\frac{2}{3}$ од својот дел, а Симон отчукал $\frac{4}{7}$ од својот дел, на двајцата им останале еднаков број неотчукани страници. Колку страници требало да отчука Ана, а колку Симон?

Решение. Нека x е бројот на страниците на делот на Ана, а y е бројот на страниците на делот на Симон. Имаме $x + y = 416$. Според условот на задната $\frac{1}{3}x = \frac{3}{7}y$, па затоа $x = \frac{9}{7}y$. Според тоа, $\frac{9}{7}y + y = 416$, од каде добиваме $y = \frac{416 \cdot 7}{16} = 182$, па затоа $x = \frac{9}{7} \cdot 182 = 234$.

121. Зграда има три ката. На вториот и третиот кат вкупно живеат 20 станари, а на првиот и вториот кат вкупно живеат 22 станари. Колку станари живеат на секој спрат ако бројот на станарите на вториот кат е еднаков на вкупниот број станари на првиот и третиот кат?

Решение. Нека на првиот, вториот и третиот кат живеат x, y и z станари, соодветно. Од условот на задачата следува $y + z = 20, x + y = 22$ и $y = x + z$. Ако ги собереме трите равенки добиваме

$$3y + x + z = 42 + x + z, \text{ т.е. } y = 14.$$

Значи, $z = 20 - y = 20 - 14 = 6$ и $x = 22 - y = 22 - 14 = 8$. Конечно, на првиот кат живеат 8 луѓе, на вториот живеат 14 луѓе и на третиот живеат 6 луѓе.

122. Во три села вкупно има 12000 жители. Колку жители има во секое село, ако $\frac{2}{3}$ од првото, $\frac{1}{2}$ од второто и $\frac{2}{5}$ од третото село имаат еднаков број жители?

Решение. Нека првото, второто и третото село имаат x, y и z жители, соодветно. Според условот на задачата имаме

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}y = \frac{2}{5}z = a,$$

па затоа $x = \frac{3}{2}a, y = 2a, z = \frac{5}{2}a$. Според тоа, $\frac{3}{2}a + 2a + \frac{5}{2}a = 12000$, т.е. $a = 2000$. Значи, $x = 3000, y = 4000, z = 5000$.

123. Во три корпи вкупно има 300 јаболка. Ако од првата корпа земеме $\frac{1}{3}$, од втората $\frac{3}{5}$ и од третата $\frac{3}{4}$ од јаболката, тогаш сме зеле 160 јаболка.

Ако земевме само $\frac{2}{5}$ од првата и $\frac{5}{8}$ од третата корпа, колку јаболка ќе имавме?

Решение. Нека x, y, z е бројот на јаболката во првата, втората и третата корпа, соодветно. Тогаш $x + y + z = 300$ и $\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}y + \frac{3}{4}z = 160$. Ако второто равенство го помножиме со 3 и од него го одземеме првото равенство добиваме $\frac{4}{5}y + \frac{5}{4}z = 180$. Ако последното равенство го поделиме со 2, наоѓаме $\frac{2}{5}y + \frac{5}{8}z = 90$. Конечно, ако земевме $\frac{2}{5}$ од првата и $\frac{5}{8}$ од третата корпа, ќе имаме 90 јаболка.

124. Во една кутија има n топчиња. Секое топче е обоено или во сина или во црвена боја. Ако извадиме три црвени топчиња, тогаш една четвртина од преостанатите топчиња се црвени, а ако извадиме седум сини топчиња, тогаш една третина од преостанатите топчиња се црвени. Колку топчиња има во кутијата?

Решение. Нека во кутијата има x црвени топчиња. Од условот на задачата следува:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(n-3) = x-3 \\ \frac{1}{3}(n-7) = x. \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка добиваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(n-7) - \frac{1}{4}(n-3) &= 3 \\ 4(n-7) - 3(n-3) &= 36 \\ n &= 55. \end{aligned}$$

Според тоа, во кутијата има 55 топчиња, од кои $x = \frac{1}{3}(55-7) = 16$ се црвени и $n - x = 55 - 16 = 39$ се сини.

125. Во 14 кутии се распределени 25 топчиња така што секоја кутија содржи по 1, 2 или 3 топчиња. Бројот на кутиите кои содржат точно 1 топче е поголем од 6. Вкупниот број топчиња кои се наоѓаат во кутии кои содржат повеќе од 1 топче е поголем од 17.

Колку кутии содржат точно 1 топче, колку точно 2 топчиња и колку точно 3 топчиња?

Решение. Со x, y и z да го означиме бројот на кутиите кои содржат по 1, 2 и 3 топчиња, соодветно. Од условот на задачата следува $x > 6$.

Ако $x=8$, тогаш во кутиите кои содржат по 2 или 3 топиња ќе има $25-8=17$, што противречи на фактот дека во овие кутии има повеќе од 17 топчиња. Значи, $x=7$. Според тоа, $y+z=17-7=7$ и $2y+3z=25-7=18$. Значи, $y=7-z$, па ако замениме во втората равенка добиваме $2(7-z)+3z=18$, т.е. $z=4$. Според тоа, $y=7-4=3$. Конечно, имаме 7 кутии со по 1 топче, 3 кутии со по 2 топчиња и 4 кутии со по 3 топчиња.

126. На ракометен турнир учествувале 10 тимови и секој тим со секој од останатите тимови играл по еден натпревар. На крајот на турнирот е констатирано дека бројот на натпреварите кои завршиле со победа на еден од тимовите е 2,75 пати поголем од бројот на натпреварите кои завршиле нерешено. Колку натпревари завршиле со нерешен резултат?

Решение. Имаме 10 тимови и бидејќи секој тим одиграл по еден натпревар со секој од останатите тимови на натпреварот е одиграле $10 \cdot 9 : 2 = 45$ натпревари. Ако со x го означиме бројот на натпреварите кои завршиле нерешено, тогаш со победа на еден од тимовите завршиле $2,75x$ натпревари. Затоа $x + 2,75x = 45$, т.е. $3,75x = 45$, од каде наоѓаме $x = 12$. Значи, 12 натпревари завршиле нерешено.

IV МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. МНОЖЕСТВА

1. Множеството B е формирано од целобројните решенија на неравенката $|x-4| \leq 3$. Определи ја разликата $B \setminus A$ каде

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ и } 5 < x < 10\}.$$

Решение. Од $|x-4| \leq 3$ следува $-3 \leq x-4 \leq 3$, т.е. $1 \leq x \leq 7$, па затоа $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Понатаму, $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ и } 5 < x < 10\} = \{6, 7, 8, 9\}$, па затоа $B \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. Определи ги пресекот и унијата на множествата цели броеви кои се решенија на неравенките

$$-8\frac{1}{4} < 3x < 5\frac{2}{5} \text{ и } -8\frac{1}{4} < -3x < 5\frac{2}{5}.$$

Решение. Имаме:

$$-8\frac{1}{4} < 3x < 5\frac{2}{5} \Leftrightarrow -\frac{33}{4} < 3x < \frac{27}{5} \Leftrightarrow -\frac{11}{4} < x < \frac{9}{5},$$

па затоа $A = \{-2, -1, 0, 1\}$. Слично,

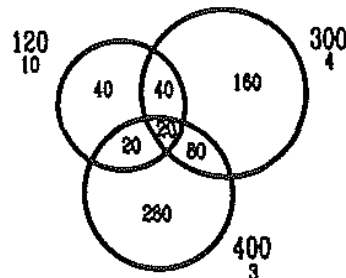
$$-8\frac{1}{4} < -3x < 5\frac{2}{5} \Leftrightarrow -\frac{33}{4} < -3x < \frac{27}{5} \Leftrightarrow \frac{11}{4} > x > -\frac{9}{5},$$

па затоа $B = \{-1, 0, 1, 2\}$. Значи,

$$A \cap B = \{-1, 0, 1\} \text{ и } A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

3. Горјан запишал 1200 последователни природни броеви. Потоа, прво ги избришал сите броеви кои завршуваат со нула, па ги избришал сите броеви кои се деливи со 4 и на крајот ги избришал сите броеви кои се деливи со 3. Колку броеви останале?

Решение. Имаме $\text{NZS}(3, 4, 10) = 60$, $\text{NZS}(3, 4) = 12$, $\text{NZS}(3, 10) = 30$ и $\text{NZS}(10, 4) = 20$. Затоа меѓу запишаните броеви има $1200 : 60 = 20$ деливи со 3, 4 и 10, $1200 : 12 = 100$ деливи со 3 и 4, $1200 : 30 = 40$ деливи со 3 и со 10, $1200 : 20 = 60$ деливи со 4 и со 10, $1200 : 3 = 400$ деливи со 3, $1200 : 10 = 120$ деливи со 10 и $1200 : 4 = 300$ деливи со 4. Така го добиваме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Според тоа,



избришани се $20+20+40+80+40+160+280=640$ броеви, а останале $1200-640=560$ броеви.

4. Во едно основно училиште 94 ученици учат во седмо одделение. Некои ученици се вклучени секциите по англиски и германски јазик и во спортските клубови. Во секцијата по англиски јазик има 40 ученици, во секцијата по германски јазик има 27 ученици, а со спортски активности се занимаваат 60 ученици. Од учениците вклучени во спортските активности 24 ученици одат и на англиски јазик. Десет ученици кои одат на англиски јазик одат и на германски јазик. Дванаесет ученици кои одат на германски јазик се занимаваат и со спортски активности. Во сите три воннаставни активности се вклучени 4 ученици. Колку ученици се занимаваат само со една активност, а колку не се занимаваат со ниту една активност?

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на Венов дијаграм. Сите три активности ги посетуваат 4 ученици, па го добиваме дијаграмот на цртежот десно. Од условот на задачата следува

$$x+4=10, \text{ т.е. } x=6,$$

$$y+4=24, \text{ т.е. } y=20,$$

$$z+4=12, \text{ т.е. } z=8.$$

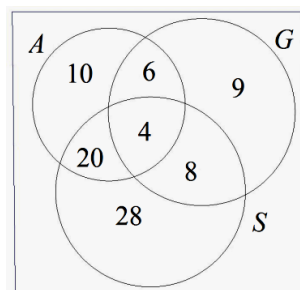
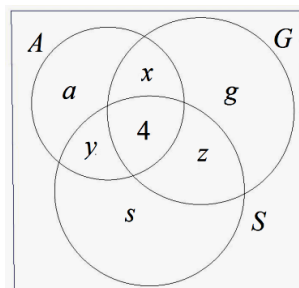
Понатаму, повторно од условот на задачата имаме

$$a+4+6+20=40, \text{ т.е. } a=10,$$

$$g+4+6+8=27, \text{ т.е. } g=9,$$

$$s+4+20+8=60, \text{ т.е. } s=28.$$

Така го добивме дијаграмот прикажан на цртежот десно. Значи, само со една активност се занимаваат $10+9+28=47$ ученици. Со ниту една активност не се занимаваат $94-(10+6+9+4+20+8+28)=94-85=9$ ученици.



5. $\frac{2}{3}$ од учениците во едно училиште сакаат фудбал, а $\frac{3}{4}$ од учениците во истото училиште сакаат тенис. Колкав дел од учениците ги сакаат и двата спорта?

Решение. Нека бројот на учениците во училиштето е x . Со A да го означиме множеството ученици кои сакаат тенис, а со B множеството ученици кои сакаат фудбал. Тогаш $|A| = \frac{3}{4}x$, $|B| = \frac{2}{3}x$ и $|A \cup B| = x$.

Множеството ученици кои ги сакаат и двата спорта е $A \cap B$ и важи

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}x - x = \frac{9x + 8x - 12x}{12} = \frac{5}{12}x.$$

Според тоа, $\frac{5}{12}$ од учениците на ова училиште ги сакаат и двата спорта.

6. Дали може множеството природни броеви да се подели на три непразни заемно дисјунктни подмножества така што ако x припаѓа на првото подмножество и y припаѓа на второто подмножество, тогаш $x + y + xy$ да припаѓа на третото подмножество.

Решение. Нека A е множеството во кое е бројот 1. Со x да го означиме најмалиот природен број кој не е во A . Нека $x \in B$ и да претпоставиме дека $x > 3$. Тогаш $3 \in A$. Третото множество го означиме со C . Од $1 \in A$ и $x \in B$ следува $1 + x + x \cdot 1 = 2x + 1 \in C$. Понааму, од $1 \in A$ и $2x + 1 \in C$ следува $1 + 2x + 1 + (2x + 1) \cdot 1 = 4x + 3 \in B$. Од $3 \in A$ и $x \in B$ следува $3 + x + 3x = 4x + 3 \in C$. Според тоа, добивме дека бројот $4x + 3$ е и во B и во C , што не е можно. Значи, $x \leq 3$. Можни се два случаја: $x = 2$ или $x = 3$.

Прв случај. $x = 2$, т.е. $2 \in B$. Од $1 \in A, 2 \in B$ следува дека $1 + 2 + 1 \cdot 2 = 5 \in C$. Од $1 \in A, 5 \in C$ следува дека $11 \in B$. Ако претпоставиме дека $3 \notin B$, тогаш ќе добиеме дека бројот $2 + 3 + 2 \cdot 3 = 11$ е или во A или во C (во зависност од тоа дали $3 \in C$ или $3 \in A$), што противречи на $11 \in B$. Значи, $3 \in B$ и тогаш $1 + 3 + 1 \cdot 3 = 7 \in C$, па од $1 \in A, 7 \in C$ следува $1 + 7 + 1 \cdot 7 = 15 \in C$. Сека од $1 \in A, 15 \in B$ следува $1 + 15 + 1 \cdot 15 = 31 \in C$, а од $3 \in B, 7 \in C$ следува $3 + 7 + 3 \cdot 7 = 31 \in A$, што е противречност.

Втор случај. $x = 3$, што значи $2 \in A, 3 \in B$. Од $1 \in A, 3 \in B$ следува $7 \in C$, а од $2 \in A, 3 \in B$ следува $11 \in C$. Сега од $1 \in A, 7 \in C$ добиваме $15 \in B$. Но, тогаш од $1 \in A, 15 \in B$ следува $31 \in C$, а од $3 \in B, 7 \in C$ следува $31 \in A$, што е противречност.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бараната поделба на множеството природни броеви не е можна.

IV.2. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

7. Во едно одделение кое има 25 ученици најмалку 17 ученици говорат француски јазик, најмалку 17 ученици говорат англиски јазик и најмалку 17 ученици говорат германски јазик. Докажи дека најмалку еден ученик ги говори сите три јазици.

Решение. Ако секој ученик говори најмногу по два јазици, тогаш треба да важи $17+17+17 \leq 2 \cdot 25$, што не е точно. Затоа најмалку еден ученик ги говори сите три јазици.

8. Група од 65 момчиња треба да поделат 2019 џамлии. Докажи дека при секоја можна поделба секогаш ќе има две момчиња кои добиваат еднаков број џамлии.

Решение. Нека претпоставиме дека секое момче добило различен број џамлии. Тогаш најмалиот можен збир на џамлии е еднаков на $0+1+2+3+\dots+64=65 \cdot 32=2080$, што противречи на фактот дека се поделени 2019 џамлии. Конечно, од добиената противречност следува дека постојат две момчиња кои добиле еднаков број џамлии.

9. Во една кутија има 2017 црвени, 2018 сини и 2019 бели топчиња. Определи го најмалиот број топчиња кои треба да се земат од кутијата (без гледање и без враќање) за да меѓу извлечените топчиња сигурно има три топчиња:

а) од иста боја

б) со различни бои.

Решение. а) За да сме сигурни дека имаме три топчиња од иста боја треба да извлечеме $3 \cdot 2 + 1 = 7$ топчиња.

б) За да сме сигурни дека имаме барем по едно топче од секоја боја треба да извлечеме $2019 + 2018 + 1 = 4038$ топчиња.

10. Во три корпи се наоѓаат 6, 7 и 11 јаболки. Од една во друга корпа може да се префрлаат онолку јаболка колку што има во втората корпа. Со три префрлања треба да се изедначи бројот на јаболката во секоја корпа. Како тоа може да се направи?

Решение. Радоследот на префрлање на јаболката е даден во следнава табела.

	Почеток	Прво преф.	Второ преф.	Трето преф.
Прва корпа	6	6	$6+6=12$	$12-4=8$
Втора корпа	7	$7+7=14$	$14-6=8$	8
Трета корпа	11	$11-7=4$	4	$4+4=8$

11. Тодор, Бојан, Горјан и Мартин во своите градови биле најуспешни на натпреварите по математика. Тие живеат во Прилеп, Ресен, Скопје и Кавадарци и освен со математика секој од нив се занимава со точно еден од следниве четири спорта: пливање, скијање, фудбал и кошарка. Со кој спорт се занимава секој од нив и во кој град живее ако е познато дека:

- 1) Горјан тренира кошарка,
- 2) Бојан не живее ниту во Ресен, ниту во Кавадарци,
- 3) Тој што живее во Ресен се занимава со фудбал,
- 4) Тој што живее во Прилеп не знае ниту да скија, ниту да плива,
- 5) Тодор и Бојан не се занимаваат со пливање?

Решение. Ќе пополниме таблица со податоците кои се дадени во задачата. При пополнувањето ако некој живее во даден град или се занимава со даден спорт тогаш во полето ставаме знак +, а во спротивно ставаме зна –. Така ја добиваме следнава табела.

	При	Рес	Скоп	Кава	пли.	ски.	фуд.	кош.
Тодор					–			–
Бојан		–		–	–			–
Горјан					–	–	–	+
Мартин								–
пливање	–	–						
скијање	–	–						
фудбал	–	+	–	–				
кошарка		–						

Во делот од колоната на градот Прилеп во кој се дадени спортовите имаме три минуси, па затоа во последното поле треба да има знак +. Според тоа прилепчанецот се занимава со кошарка, а од првиот услов имаме дека Горјан тренира кошарка, што значи дека Горјан живее во Прилеп. Во колоната во која се дадени врската на лицето и пливањето имаме три минуси, па затоа четвртиот знак е +, т.е. Мартин се занимава со пливање. Оттука заклучуваме дека Мартин не е од Ресен, бидејќи ресенчанецот се занимава со фудбал. Подолу е дадена пополнета табела согласно со овие заклучувања.

	При.	Рес.	Скоп.	Кав.	пли.	ски.	фуд.	кош.
Тодор	–				–			–
Бојан	–	–		–	–			–
Горјан	+	–	–	–	–	–	–	+
Мартин	–	–			+	–	–	–
пливање	–	–						
скијање	–	–						
фудбал	–	+	–	–				
кошарка	+	–						

Сега е очигледно дека скопјанецот е Бојан, кавадарчанецот е Мартин и ресенчанецот е Тодор. Значи, Тодор се занимава со фудбал, а Бојан се занимава со Скијање. Кога овие податоци ќе ги внесеме и ќе до-полниме во останатите полиња ја добиваме долната табела.

	При.	Рес.	Скоп.	Кав.	пли.	ски.	фуд.	кош.
Тодор	—	+	—	—	—	—	+	—
Бојан	—	—	+	—	—	+	—	—
Горјан	+	—	—	—	—	—	—	+
Мартин	—	—	—	+	+	—	—	—
пливање	—	—	—	+				
скијање	—	—	+	—				
фудбал	—	+	—	—				
кошарка	+	—	—	—				

12. На левиот брег на една река има чамец, неколку рибари и 20 деца, а на десниот брег има само рибари без чамец. Во чамецот може да се превезат или еден рибар и едно дете или четири деца и не смее да се возат ниту помалку, ниту повеќе луѓе. Дали може децата да се префрлат на десниот брег?

Решение. Да забележиме дека ако при првото префрлање од левиот на десниот брег одат 1 рибар и 1 дете, тогаш при обратното возење единствено може да се префрлат 1 рибар и 1 дете, што значи дека ситуацијата е како почетната. Затоа единствен чекор кој при првото префрлање има смисол е да се префрлат 4 деца. Сега да забележиме дека за да се избегне повторување на претходната ситуација следниот чекор мора да е спротивен на тукушто направениот чекор. Тоа значи дека секој чекор на префрлање, кој не води до претходно видена ситуација, е еднозначно определен. Така ја имаме следнава табела.

Лев брег (рибари и деца)	Десен брег (рибари и деца)
$a, 20$	$b, 0$
$a, 16$	$b, 4$
$a + 1, 17$	$b - 1, 3$
$a + 1, 13$	$b - 1, 7$
$a + 2, 14$	$b - 2, 6$
$a + 2, 10$	$b - 2, 10$
$a + 3, 11$	$b - 3, 9$
...	...

Забележуваме дека во секој момент бројот на децата на десниот брег на реката е или делив со 3, или при делење со 3 дава остаток 1. Но,

бројот 20 при делење со 3 дава остаток 2, па затоа бројот на децата на десниот брег на реката никогаш не може да биде еднаков на 20.

13. На една роденденска прослава се собрале девет деца. Дали е можно секое дете претходно да се познавало со точно три деца?

Решение. Ако го собереме бројот на познаниците на првото дете, со бројот на познаниците на второто дете, ..., со бројот на познаниците на деветтото дете се добива парен број, бидејќи секое познанство е броено двапати (за секој од парот познаници броиме по еднаш). Ако секое дете имало точно по три познаници, тогаш овој број би бил $9 \cdot 3 = 27$, што противречи на фактот дека треба да биде парен број. Од добиената противречност следува дека не е можно секое дете претходно да се познавало со точно три деца.

14. Во група од $2n$, $n \geq 2$ луѓе секој човек познава најмалку n од останатите членови на групата. Познанството е симетрично, т.е. ако A го познава B , тогаш и B го познава A . Докажи дека од оваа група може да се одделат 4 луѓе и да седнат на тркалезна маса така што секој од нив да седи меѓу своите познаници.

Решение. Со A и B да означиме два члена од групата кои не се познаваа (ако такви двајца не постојат, тогаш било кои четири членови на групата ги задоволуваат условите на задачата). Секој од овие двајца познава уште n луѓе меѓу преостанатите $2n - 2$ членови на групата. Значи, A и B меѓу $2n - 2$ членови на групата имаат $n + n = 2n$ познаници, што значи дека имаат најмалку два заеднички познаници: да ги означиме со C и D . Сега, доволно е на масата A и B да седат еден наспроти друг, а C и D да седат еден наспроти друг.

15. Од три момчиња и три девојчиња секое момче познава точно две девојчиња и секое девојче познава точно две момчиња. Докажи дека девојчињата и момчињата може да се распоредат во парови така што во секој пар се наоѓаат познаници.

Решение. Девојчињата да ги означиме со D_1, D_2, D_3 , а момчињата со M_1, M_2, M_3 . Според условот на задачата не може да се случи две девојчиња да познаваат две момчиња и истите тие момчиња да ги познаваат истите две девојчиња. Навистина, во спротивно третото момче ќе го познава само едно девојче. Нека претпоставиме дека девојчето D_1 ги познава момчињата M_1 и M_2 . Да го формираме првиот пар познаници (D_1, M_1) . Бидејќи девојчето D_2 познава две

момчиња, тогаш таа сигурно познава едно од момчињата M_2 и M_3 . Нека тоа е момчето M_2 и да го формираме парот (D_2, M_2) . Ако девојчето D_3 и момчето M_3 се познаваат, тогаш можеме да ги сметаме за третиот пар. Ако не се познаваат, тоа значи дека девојчето D_3 ги познава момчињата M_1 и M_2 , а момчето M_3 ги познава девојчињата D_1 и D_2 . Тогаш го распаруваме парот (D_2, M_2) и ги разгледуваме паровите (D_2, M_3) и (D_3, M_2) . Конечно, паровите (D_1, M_1) , (D_2, M_3) и (D_3, M_2) ги задоволуваат условите на задачата.

16. Како само со помош на садови од 3 и 7 литри од чешма можеме да донесеме точно 5 литри вода? (Водата од садовите може да се претура и истура.)

Решение. Нека A е сад од 7 литри и B е сад од 3 литри. Мерењето на 5 литри може да се направи со следните чекори.

A	7	4	4	1	1	0	7	5
B	0	3	0	3	0	1	1	3

17. Даден е квадрат $ABCD$ и неколку на него складни квадрати. Во темињата на секој од дадените квадрати се запишува по еден од броевите 1, 2, 3, 4, така што за секој квадрат секое теме е означено со различен број. Потоа сите квадрати се поставуваат еден врз друг така што темињата им се поклопуваат. Нека S_A, S_B, S_C, S_D се збирите на броевите на вертикалите над темињата A, B, C, D . Дали може сите збирове да се еднакви на 2019?

Решение. Ако сите добиени збирове се еднакви на 2019, тогаш збирот на сите броеви треба да биде еднаков на $4 \cdot 2019 = 8076$. Меѓутоа, збирот на броевите запишани на секој од n -те квадрати е еднаков на $1+2+3+4=10$, што значи дека збирот на сите броеви треба да биде делив со 10. Последното противречи на фактот дека бројот 8096 не е делив со 10, што значи дека не е можно сите збирове да се еднакви на 2019.

18. На општинскиот натпревар по математика учествувале 18 ученици од едно училиште. За да се квалификува на регионалниот натпревар ученикот треба да реши 3 од зададените 5 задачи. Ако овие ученици решиле вкупно 45 задачи, докажи дека најмалку 3 ученици се квалификувале за регионалниот натпревар.

Решение. Нека претпоставиме дека 16 ученици решиле најмногу по 2 задачи. Тогаш вкупниот број решени задачи е помал или еднаков на $16 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 42$, што противречи на фатот дека се решени 45 задачи. Од добиената противречност следува дека најмалку 3 ученици решиле 3 или повеќе задачи, т.е. се квалификувале за регионалниот натпревар.

19. Професорот има 24 моливи во 4 бои, по 6 моливи од секоја боја. Моливите ги разделува на 6 ученици, така што секој ученик добил по 4 моливи. Определи го минималниот број ученици, кои може да бидат избрани така што тие да имаат моливи од сите бои независно од распределбата на моливите.

Решение. Бидејќи од секоја боја има по 6 моливи, а секој ученик добива по 4, заклучуваме дека некој ученик добил моливи во барем две различни бои. Овој ученик, заедно со двајца од останатите ученици кои имаат моливи во останатите две бои се тројца ученици кои имаат моливи во сите бои. Значи, одговорот е тројца ученици.

Дади пример како моливите може да бидат распределени, но така што да нема два ученика кои имаат моливи од сите бои.

IV.3. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

20. Градовите A, B, C, D, E, F се поврзани секој со секој со автобуска или железничка линија (но не и со двата вида линии). Докажи дека при било каков распоред на линиите секогаш постојат три града кои меѓусебно се поврзани со линии од ист вид.

Решение. Од секој град излегуваат 5 линии, па од принципот на Дирихле следува дека барем 3 се од ист вид. Нека претпоставиме дека за градот A тоа се три железнички линии AB, AC и AD . Ако барем една од линиите BC, CD и BD е железничка, тогаш доказот е завршен. Ако пак сите три линии се автобуски, тогаш тоа се бараните линии од ист вид кои меѓусебно поврзуваат три града.

21. На регионалниот натпревар по математика од петто до деветто одделение учествувале 2019 ученици. Секој натпреварувач е роден 2007, 2006, 2005 или 2004 година.
- а) Докажи дека постојат два ученика кои се родени во иста година, ист месец во таа година и ист ден во тој месец.

б) Докажи дека постојат најмалку 6 ученици кои се родени во ист месец и ист ден во тој месец.

Решение. а) Од наведените години сите имаат по 365 дена, освен 2004 година која има 366 дена. Значи, во разгледуваниот период има $4 \cdot 365 + 366 = 1826$ дена. Имаме 2019 ученици, кои се родени во 1826 дена, па од принципот на Дирихле следува дека најмалку два ученика се родени во еден од овие 1826 дена, т.е. во ист ден, месец и година.

б) Во една година постои најмногу 366 датуми на раѓања. Затоа, според денот и месецот на раѓање учениците можеме да направиме 366 групи. Бидејќи $2019 = 5 \cdot 366 + 189$ од принципот на Дирихле следува дека постои најмалку една група во која има најмалку 6 ученици.

22. Во еден регион на натпреварот по математика во IV, V, VI, VII, VIII и IX одделение учествувале 2200 ученици кои се родени 2003, 2004, 2005, 2006, 2007 и 2008 година. Докажи дека постојат најмалку два ученика кои се родени во ист ден и во иста година. Докажи дека најмалку 7 ученици слават роденден во ист ден.

Решение. Во годините од 2003 до 2008 има две престапни, па затоа вкупниот број денови во овие години е

$$4 \cdot 365 + 2 \cdot 366 = 2192.$$

Бидејќи на натпреварот учествувале 2200 натпреварувачи од принципот на Дирихле следува дека барем два натпреварувачи се родени во ист ден.

Сите натпреварувачи по датумот на раѓање ги поделиме на 366 класи. Бидејќи $2200 = 6 \cdot 366 + 4$, од обопштениот принцип на Дирихле следува дека една класа содржи најмалку 7 натпреварувачи, што значи дека најмалку 7 натпреварувачи слават роденден во ист ден.

23. Во полињата на 3×3 квадрат се распоредени броевите 1, 2 и 3. Дали постои распоред таков што збирите во сите редови, сите колони и на сите дијагонали се различни?

Решение. Имаме 3 реда, 3 колони и 2 дијагонали, што значи имаме вкупно 8 зборови. Збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е поголем или еднаков на $1+1+1=3$, а е помал или еднаков на $3+3+3=9$, што значи дека се можни најмногу 7 различни зборови. Бидејќи $8 > 7$ од принципот на Дирихле следува дека постојат два еднакви збира на броевите запишани во ред, колона или на дијагонала, што значи дека бараниот распоред не е можен.

24. Во едно деветгодишно училиште во секое одделение има по 4 паралелки, а вкупниот број ученици е 1232. Докажи дека постои паралелка во која има 35 ученици.

Решение. Во училиштето вкупно има $4 \cdot 9 = 36$ паралелки. Бидејќи $1232 = 36 \cdot 34 + 8$, од обопштениот принцип на Дирихле следува дека постои паралелка која има најмалку 35 ученици.

25. Човекот има најмногу 32 заби. Докажи дека во училиште во кое има 2019 ученици секогаш може да се формира група од најмалку 62 ученика, при што сите членови на групата имаат еднаков број заби.

Решение. Сите ученици да ги поделиме во 33 групи (ученици кои имаат 0 заби, 1 заб, 2 заба, ..., 32 заба). Бидејќи $2019 = 33 \cdot 61 + 6$ од обопштениот принцип на Дирихле следува дека постои група од најмалку 62 ученика кои имаат еднаков број заби.

26. Во една училиште учат 1111 ученици. Докажи дека во ова училиште постојат најмалку два ученика кои имаат идентични иницијали и има најмалку четири ученици кои слават роденден во ист ден.

Решение. Ако 31 почетна буква на имињата се комбинира со 31 почетна буква на презимињата добиваме дека вкупниот број на можни иницијали е еднаков на $31 \cdot 31 = 961$. Сега, бидејќи $1111 > 961$ од принципот на Дирихле следува дека најмалку два ученика имаат идентични иницијали. Понатаму, една година може да има најмногу 366 дена и $1111 = 366 \cdot 3 + 13$, па од обопштениот принцип на Дирихле следува најмалку четири ученици кои слават роденден во ист ден.

27. Дали од 100 произволни цели броеви секогаш може да се изберат 15 броеви такви што разликата на секои два броја од избраните 15 броеви е делива со бројот 7?

Решение. Постојат 7 различни остатоци при делење со 7. Бидејќи $100 = 7 \cdot 14 + 2$ од обопштениот принцип на Дирихле следува дека меѓу произволни 100 броеви постојат 15 броеви кои при делење со 7 даваат ист остаток. Разликата на секои два од овие 15 броеви е делива со 7, што значи дека одговорот на поставеното прашање е потврден.

28. Тепих со димензија $4m \times 4m$ го нагризале молци и направиле 15 дупки со занемарливи големини. Дали може од тепихот да се исече парче со димензии $1m \times 1m$ на кое нема да има дупки?

Решение. Квадратот ќе го поделиме на $4 \cdot 4 = 16$ квадрати со димензии $1m \times 1m$. Имаме 16 полиња, а 15 дупки, па од принципот на

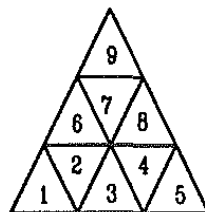
Дирихле следува дека постои поле во кое нема ниту една дупка и тоа е бараното парче.

29. Во рамностран триаголник со должина на страна 1 cm произволно се избрани пет точки. Докажи дека постојат најмалку две точки кои се на растојание помало или еднакво на $0,5\text{ cm}$.

Решение. Средните линии на триаголникот го делат триаголникот на четири рамностранни триаголници со должина на страна $0,5\text{ cm}$. Имаме 5 точки, а 4 триаголници, па од принципот на Дирихле следува дека постои триаголник во кој се наоѓаат две точки. Јасно, растојанието меѓу овие две точки е помало или еднакво на $0,5\text{ cm}$.

30. Во рамностран триаголник ABC со страна $a=3\text{ cm}$ на случаен начин се распоредени 10 точки. Докажи дека меѓу овие 10 точки постојат две точки такви растојанието меѓу нив е помало или еднакво на 1 cm .

Решение. Рамностранот триаголник ABC го делиме на 9 рамностранни триаголници со должина на страна 1 cm (цртеж десно). Од принципот на Дирихле следува дека најмалку еден од овие 9 триаголници содржи 2 од дадените 10 точки. Јасно, растојанието меѓу овие две точки е помало или еднакво на 1 cm .



31. На државниот натпревар по спортско стрелаштво учествувале 290 ученици. Докажи дека меѓу учесниците на натпреварот може да се изберат 18 ученици кои живеат во исто населено место или живеат во 18 различни населени места.

Решение. Можни се три случаја, натпреварувачите живеат во 18 или повеќе различни населени места или натпреварувачите живеат во 17 различни населени места или натпреварувачите живеат во 16 и помалку населени места.

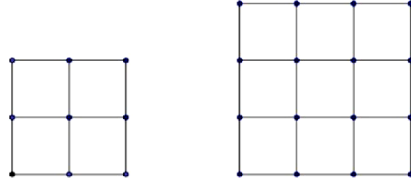
Во првиот случај од некои 18 различни населени места избираме по еден ученик и со тоа е направен бараниот избор.

Во вториот случај не е можно да се направи избор на ученици кои живеат во 18 различни населени места. Но, во овој случај бидејќи $290=17\cdot 17+1$ од обопштениот принцип на Дирихле следува дека постои населено место во кое живеат 18 и повеќе ученици. Од ова населено место избираме 18 ученици и со тоа е направен бараниот избор.

Во третиот случај доволно е да го додадеме потребниот број фиктивни населени места со што ќе добиеме 17 населени и да постапиме како во вториот случај.

IV.4. ПРЕБРОЈУВАЊА

32. Ако квадратот поделиме на 4 еднакви делови, ќе добиеме 9 точки (цртеж десно). Ако квадратот поделиме на 9 еднакви делови ќе добиеме 16 точки. Колку точки ќе добиеме ако квадратот го поделиме на 3600 еднакви квадрати?



Решение. Кога големиот квадрат го делиме на 4 мали квадрати, тогаш квадратите се во 2 реда и 2 колони, па бројот на точките е $(2+1) \cdot (2+1) = 9$. Кога големиот квадрат го делиме на 9 мали квадрати, тогаш квадратите се во 3 реда и 3 колони, па бројот на точките е $(3+1) \cdot (3+1) = 16$. Ако големиот квадрат го поделиме на 3600 квадрати, тогаш бидејќи $60 \cdot 60 = 3600$ малите квадрати се наоѓаат во 60 реда и 60 колони, па затоа бројот на точките е $(60+1) \cdot (60+1) = 3721$.

33. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на двоцифрениот број кој се добива ако од трицифрениот број се избрише цифрата на единиците.

Решение. Со $\overline{abc}$ да ги означиме трицифрените броеви кои треба да ги преброиме. Од условот на задачата следува $a + b + c = \overline{ab}$, односно $a + b + c = 10a + b$, т.е. $c = 9a$. Од равенството $c = 9a$ и фактот дека a и c се цифри, а цифрата a е различна од 0, следува дека $a = 1$ и $c = 9$. Според тоа, бараните броеви се 109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189 и 199, т.е. имаме 10 броеви со саканото својство.

34. Определи ги сите трицифрени природни броеви кои се запишани со различни цифри, деливи се со 6 и чиј збир на цифри е делив со 6. Колку такви броеви постојат?

Решение. Еден број е делив со 6 ако е делив со 2 и со 3. Понатаму, бидејќи кај бараните броеви збирот на цифрите е делив со 6, тој е делив со 3, па од критериумот за деливост со 3 следува дека тие се

деливи со 3. За да броевите се деливи со 2 цифрата на единиците треба да им биде 0, 2, 4, 6 или 8. Збирот на цифрите на трицифрен број може да биде најмногу 27, па како тој треба да биде делив со 6, заклучуваме дека збирот на цифрите на бараните броеви може да биде 6, 12, 18 или 24.

Ако збирот на цифрите е 6, тогаш цифрите може да бидат од множествата $\{0,1,5\}$, $\{0,2,4\}$, $\{1,2,3\}$ и бараните броеви се: 150, 510, 204, 240, 402, 420, 312 и 132.

Ако збирот на цифрите е 12, тогаш цифрите можат да бидат од множествата: $\{0,3,9\}$, $\{1,2,9\}$, $\{0,4,8\}$, $\{1,3,8\}$, $\{0,5,7\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,3,7\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,4,6\}$, $\{3,4,5\}$ и бараните броеви се: 390, 930, 192, 912, 408, 480, 804, 840, 138, 318, 570, 750, 174, 714, 372, 732, 156, 516, 246, 264, 426, 462, 624, 642, 354, 534.

Ако збирот на цифрите е 18, тогаш цифрите може да бидат од множествата: $\{1,8,9\}$, $\{2,7,9\}$, $\{3,6,9\}$, $\{4,5,9\}$, $\{3,7,8\}$, $\{4,6,8\}$, $\{5,6,7\}$ и бараните броеви се: 198, 918, 792, 972, 396, 936, 594, 954, 378, 738, 468, 486, 648, 684, 846, 864, 576, 756.

Ако збирот на цифрите е 24, тогаш цифрите може да бидат од множеството: $\{7,8,9\}$ и бараните броеви се: 798, 978.

Конечно, има 54 броеви се наведените својста.

35. Определи го збирот на сите четирицифрени броеви запишани со помош на цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, кај кои цифрите не се повторуваат.

Решение. Во броевите кои треба да ги собереме секоја цифра се појавува на секое декадно место по $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ пати (зошто?). Затоа збирот на цифрите на секое декадно место е еднаков на

$$336 \cdot (9+8+7+6+5+4+3+2+1) = 336 \cdot 45 = 15120.$$

Според тоа, збирот на сите броеви со наведеното својство е еднаков на

$$\begin{aligned} &15120 \cdot 1000 + 15120 \cdot 100 + 15120 \cdot 10 + 15120 \cdot 1 = \\ &= 15120000 + 1512000 + 151200 + 15120 = 16798320. \end{aligned}$$

36. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј производ на цифри е еднаков на нула.

Решение. Производот на цифрите на некој трицифрен број е еднаков на нула ако и само ако цифрата на единиците или цифрата на десетките му е еднаква на нула. Кај трицифрен број цифрата на стотките

можеме да ја избереме на 9 начини (секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). За секоја избрана цифра на стотките цифрата на десетките можеме да ја избереме на 10 начини (секоја од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и исто така за секои избрани цифри на стотките и десетките цифрата на единиците можеме да ја избереме на 10 начини. Според тоа, имаме вкупно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ трицифрени броеви. Ќе определиме колку има трицифрени броеви кај кои ниту една цифра не е 0. Цифрата на стотките можеме да ја избереме на 9 начини (секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). За секоја избрана цифра на стотките цифрата на десетките можеме да ја избереме на 9 начини (секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и исто така за секои избрани цифри на стотките и десетките цифрата на единиците можеме да ја избереме на 9 начини. Според тоа, имаме вкупно $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ трицифрени броеви кај кои ниту една цифра не е 0. Конечно, бројот на трицифрените броеви кај кои барем една цифра е 0 е еднаков на $900 - 729 = 171$.

37. Определи го бројот на природните броеви кои се поголеми од 100 и се помали од 10000 такви што во декадниот запис точно три цифри им се еднакви.

Решение. Ако точно три цифри се еднакви 1, тогаш ги имаме броевите

$$111, \underbrace{1112, 1121, 1211, 2111, \dots}_{4 \text{ броја}}, \underbrace{1119, 1191, 1911, 9111, \dots}_{4 \text{ броја}}, \underbrace{1110, 1101, 1011, \dots}_{3 \text{ броја}},$$

што значи дека имаме вкупно $1 + 4 \cdot 8 + 3 = 36$. Аналогно имаме 36 броја ако точно три цифри се еднакви на 2, 36 броја ако точно три цифри се еднакви на 3, ..., 36 броја ако точно три цифри се еднакви на 9. Но, ако точно три цифри се еднакви на 0 ги имаме броевите 1000, 2000, ..., 9000, т.е. имаме 9 броја. Конечно, бараниот број броеви е еднаков на $9 \cdot 36 + 9 = 333$.

38. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 3000 и чиј производ на цифрите е еднаков на 210.

Решение. Имаме $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, па затоа природните броеви кои се помали од 3000 и чиј производ на цифри е еднаков на 210 се: 567, 576, 657, 675, 756, 765, 1567, 1576, 1657, 1675, 1756, 1765, 2357, 2375, 2537, 2573, 2735 и 2753. Според тоа, има 18 природни броеви кои се помали од 3000 и чиј производ на цифри е 210.

39. Определи го бројот на природните броеви кои се деливи со 4, се запишани со парни цифри и се помали од 1000.

Решение. Всушност треба да го определиме бројот на подредените тројки (x, y, z) составени од парни цифри, во кои не се сите три цифри еднакви на нула и бројот составен од последните две цифри е делив со 4. За цифрата x имаме 5 можности, за цифрата y имаме 5 можности и за секој избор на цифрата y имаме 3 можности за избор на цифрата z (тоа се цифрите 0, 4 и 8). При ова пребројување се јавува и тројката $(0, 0, 0)$, па затоа бараниот број броеви е еднаков на $5 \cdot 5 \cdot 3 - 1 = 74$.

40. Определи го бројот на тројките последователни месеци од јуни 2014 година до септември 2018 година, кај кои аритметичката средина на бројот на деновите во секоја тојка е природен број.

Решение. За да биде аритметичката средина природен број потребно е бројот на деновите во последователните месеци да биде:

- а) 31, 31, 28; б) 31, 28, 31 или в) 29, 31, 30.

Во разгледуваниот период само 2016 година е престапна. Првиот случај се однесува на месеците од декември до февруари во 2014–2015, 2016–2017 и 2017–2018. Вториот случај се однесува на месеците од јануари до март во 2015, 2017 и 2018. Третиот случај е исполнет само за месеците од февруари до април во 2016 година. Значи, бројот на бараните тројки месеци е еднаков на 7.

IV.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

41. Определи ги сите трицифрени броеви помали од 550 такви што цифрата на стотките е еднаква на производот на другите две цифри.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот број. Бидејќи $\overline{abc} < 550$, следува дека $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ако $a = 1$, тогаш $b \cdot c = 1$, од каде се добива дека $b = 1$ и $c = 1$ т.е. бараниот број е 111.

Ако $a = 2 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$, тогаш се добиваат броевите 212 и 221.

Ако $a = 3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1$, тогаш бараните броеви се 313 и 331.

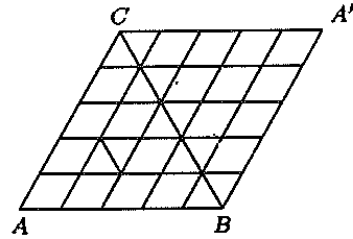
Ако $a = 4 = 1 \cdot 4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$, тогаш бараните броеви се 414, 422 и 441.

Ако $a = 5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1$, тогаш бараните броеви се 515 и 551. Бидејќи трицифрените броеви треба да се помали од 550, бројот 551 не е решение.

Конечно, бараните броеви се: 111, 212, 221, 313, 331, 414, 441, 422 и 515.

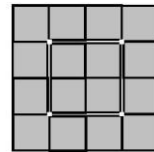
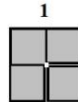
42. Рамностран триаголник со должина на страна 2019 dm треба целосно да се покрие со плочки во облик на рамностран триаголник со должина на страна 1 dm така што плочките не смее да се преклопуваат. Колку плочки се потребни за такво покривање?

Решение. Да го дополниме дадениот рамностран триаголник ABC со должина на страна 2019 dm до ромб $ABA'C$ (цртеж десно). Добиениот ромб содржи точно $2019 \cdot 2019$ ромбови со должина на страна 1 dm . Секој мал ромб се покрива со 2 плочки



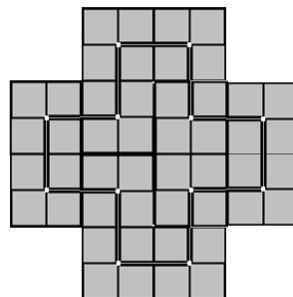
во облик на рамностран триаголник со должина на страна 1 dm , па значи целиот ромб се покрива со $2 \cdot 2019 \cdot 2019$ вакви плочки. Конечно рамностранниот триаголник ABC е половина од ромбот $ABA'C$, па затоа тој се покрива со $2 \cdot 2019 \cdot 2019 : 2 = 4076361$ плочка.

43. Располагаме со доволно фигури од видот 1 (белите линии се точно на средината). Со четири такви фигури е составен прикажаниот квадрат, во кој белите линии формираат затворена линија со периметар 8. Определи го најмалиот број фигури од видот 1 кој е потребен за да се формира затворена линија со поголем периметар.



Решение. Без разлика колку фигури од видот 1 ќе употребиме првите две фигури мора да ги поставиме како кај левите две фигури на квадратот. Понатаму следните две фигури мора да ги поставиме така да линијата ќе остане отворена, а тоа е можно само ако ги поставиме така што десните две фигури на квадратот ги заменат местата. Сега линијата ја продолжуваме или на двата краја десно или на двата краја лево. Ако ја продолжуваме лево, тогаш со следните фигури мора да ја продолжиме нагоре и надолу, а потоа ни се потребни уште две фигури за да ја завртиме повторно лево. Досега искористивме 8 фигури, па за да ја затвориме линијата ни се потребни уште најмалку 8 фигури (Зошто?). Значи, во случајов најмалиот број фигури е еднаков на 16.

Нека линијата на двата краја ја продолжи-
ме десно, при што искористивме 6 фигури
од видот 1. Тогаш со уште шест фигури кои
поставуваме така што фигурата која ја
конструираме ќе биде симетрична форми-
раме затворена линија со поголем периме-
тар, при што е употребен најмал број фи-
гури од видот 1 (види цртеж).



Значи, бараниот најмал број е 12.

44. На кружница се запишани 2019 броеви и тоа 1010 единици и 1009 нули. Во секоја секунда се извршува една од следниве операции: меѓу секои два соседни броја се запишува 1, ако тие соседни броја се еднакви, и 0, ако тие соседни броја се различни, при што старите броеви се бришат. Дали може во еден момент сите запишани броеви на кружницата да се еднакви?

Решение. Нека претпоставиме дека тоа е можно и да го разгледаме моментот во кој сите броеви стануваат еднакви. Ако сите се единици, тоа значи дека броевите биле еднакви и една секунда порано. Ако сите се нули, тоа значи во претходната секунда требало секоја нула да стои меѓу две единици и секоја единица да стои меѓу две нули, т.е. бројот на броевите треба да е парен. Последното не е можно, бидејќи со наведените операции не се менува бројот на запишаните броеви, а на почетокот имаме 2019 запишани броеви.

45. На кружница, во произволен редослед се запишани броевите 50, 100, 150, ..., 1500. Докажи, дека меѓу запишаните броеви постојат три последователни броја чиј збир е поголем или еднаков на 2350.

Решение. Збирите од секои три последователно запишани броја да ги означиме со $S_1, S_2, \dots, S_{30}$. Во збирот $S_1 + S_2 + \dots + S_{30}$ секој од броевите 50, 100, 150, ..., 1500 се јавува точно трипати, па затоа

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \dots + S_{30} &= 3 \cdot (50 + 100 + \dots + 1500) \\ &= 150 \cdot (1 + 2 + \dots + 30) \\ &= 150 \cdot \frac{30 \cdot 31}{2} = 69750. \end{aligned}$$

Ако секој од броевите $S_1, S_2, \dots, S_{30}$ е помал помал од 2350, тогаш секој ќе биде помал или еднаков од 2300 (два собирци се разликуваат за 50 и секој собирок е делив со 50), па затоа ќе важи

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{30} \leq 30 \cdot 2300 = 69000 < 69750,$$

што е противречност. Од добиената противречност следува дека постои k , $1 \leq k \leq 30$, таков што $S_k \geq 2350$.

46. Околу кружна маса се наредени 11 столчиња, а на почетокот седат 10 деца чии столчиња во насока на движењето на стрелките на часовникот се означени со броевите од 1 до 10. Треба да им се приклучи уште Павел. Откако сите ќе седнат околу масата децата играат игра на испаѓање: почнуваат во насока на движењето на стрелките на часовникот да бројат од детето кое седи на столчето означено со бројот 1 и испаѓа тринаесеттото дете. Останатите продолжуваат со играта таму каде што застанало броењето, тринаесеттиот пак испаѓа итн, додека не остане само едно дете. На кое место, односно меѓу кои две деца од десетте кои веќе седеле на масата, треба да седне Павел, за да победи во играта?

Решение. Кога Павел ќе седне, на масата ќе има 11 деца. Столчињата околу масата ги нумерираме одново во насока на движење на стрелките на часовникот така што столчето кое пред тоа беше означено со бројот 1 повторно го означуваме со бројот 1. Почнуваме да броиме како што е опишано во играта и го прецртуваме секој тринаесетти број. Последователно ќе ги прецртуваме 2, 5, 9, 4, 1, 3, 8, 10, 11, 6, а на крајот ќе остане бројот 7, што значи дека Павел треба да седне меѓу децата кои седат на столчињата кои првично се означени со броевите 6 и 7.

47. Со даден природен број може да се реализира некоја од следниве две операции:

1) Бројот да се подели со 2 ако бројот е парен.

2) По последната цифра на бројот да му се допише цифрата 6.

Почетниот број е 1. Дали со помош на конечен број операции од видот 1) и 2), реализирани во некој редослед може да се добие бројот:

а) 1994, б) 1995, в) 2000.

Решение. а) Бројот 1994 може да се добие на следниов начин:

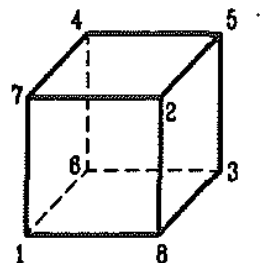
$1 \rightarrow 16 \rightarrow 166 \rightarrow 83 \rightarrow 836 \rightarrow 418 \rightarrow 209 \rightarrow 2096 \rightarrow 1048 \rightarrow 524 \rightarrow 262 \rightarrow$
 $131 \rightarrow 1316 \rightarrow 658 \rightarrow 329 \rightarrow 3296 \rightarrow 1248 \rightarrow 824 \rightarrow 412 \rightarrow 206 \rightarrow 103 \rightarrow$
 $1036 \rightarrow 518 \rightarrow 259 \rightarrow 2596 \rightarrow 1298 \rightarrow 649 \rightarrow 6496 \rightarrow 3248 \rightarrow 1624 \rightarrow$
 $812 \rightarrow 406 \rightarrow 203 \rightarrow 2036 \rightarrow 1018 \rightarrow 509 \rightarrow 5096 \rightarrow 2548 \rightarrow 1274 \rightarrow$
 $637 \rightarrow 6376 \rightarrow 3188 \rightarrow 1594 \rightarrow 797 \rightarrow 7976 \rightarrow 3988 \rightarrow 1994.$

б) , в) Не е можно. Навистина, почнувајќи од бројот 1 со примена на двете операции не може да се добие број кој завршува на цифрата 0 или 5.

48. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 распореди ги во темињата на коцка така што збирот на броевите запишани на сите страни на коцката ќе биде еднаков.

Решение. Секој од дадените броеви припаѓа на три страни, па затоа збирот на броевите на сите шест страни е еднаков на $3(1+2+\dots+8)=108$.

Понатаму, бидејќи зборовите на броевите запишани на сите шест страни се еднакви добиваме дека збирот на броевите запишан на една страна е еднаков на $108:6=18$. Бидејќи секои две соседни страни имаат заеднички раб, заклучуваме дека збирот на броевите запишани на спротивните рабови е еднаков. Користејќи ги воочените својства може да се направат неколку распореди на броевите. Еден распоред е прикажан на цртежот десно.



49. Броевите од 1 до 1000 последователно се запишани на кружница. Почнувајќи од бројот 1 го прецртуваме секој петнаесетти број, при што при повторното обиколување на кружницата веќе прецртаните броеви повторно ги броиме. Колку броеви ќе останат непрецртани.

Решение. Од условот на задачата следува дека се прецртуваат броевите k такви што за некој n бројот $1000n+k$ е од облик $15x+1$, односно броевите такви што за некој n бројот $1000n+k-1$ е делив со 15. Затоа бројот k мора да завршува на цифрата 1 или 6. Од друга страна, еден од броевите $k-1$, $1000+k-1$, $2000+k-1$ е делив со 3, па затоа ако k завршува на цифрата 1 или 6, тогаш еден од броевите $k-1$, $1000+k-1$, $2000+k-1$ е делив со 15. Тоа значи дека број кој завршува на цифрата 1 или 6 ќе биде прецртан во првата, втората или третата обиколка. Според тоа, ќе бидат прецртани сите броеви кои завршуваат на цифрата 1 или 6, но нема да биде прецртан ниту еден друг број. Значи, ќе бидат прецртани 200, а непрецртани ќе останат 1000 броеви.

50. Даден е 2013-аголник $A_1A_2\dots A_{2013}$. Неговите темиња се означени со броеви, така што збирот на броевите со кои се означени било кои 9 последователни темиња е константен и е еднаков на 300. Ако е познато дека темето A_{13} е означено со бројот 13, а темето A_{20} со бројот 20, да се определи со кој број е означено темето A_{2013} .

Решение. Нека е a_i бројот со кој е означено темето A_i , $i=1,2,\dots,2015$.

Од условот на задачата следува дека

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 = a_2 + a_3 + \dots + a_9 + a_{10},$$

па затоа $a_1 = a_{10}$. Слично се добива дека $a_2 = a_{11}$, $a_3 = a_{12}, \dots$. Според тоа,

$$a_1 = a_{10} = a_{19} = \dots = a_{2008} = a_4 = a_{13} = \dots = a_{2011}$$

$$= a_7 = a_{16} = \dots = a_{2005} = a_1$$

$$a_2 = a_{11} = a_{20} = \dots = a_{2009} = a_5 = a_{14} = \dots = a_{2012}$$

$$= a_8 = a_{17} = \dots = a_{2006} = a_2$$

$$a_3 = a_{12} = a_{21} = \dots = a_{2010} = a_6 = a_{15} = \dots = a_{2013}$$

$$= a_9 = a_{18} = \dots = a_{2007} = a_3.$$

Според тоа, секои три последователни броеви се еднакви, па затоа нивниот збир е еднаков на $300:3=100$. Но, $a_1 = a_{13} = 13$, $a_2 = a_{20} = 20$, па затоа $a_3 = 67$. Конечно, $a_{2013} = a_3 = 67$.

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

1. На бројната права земени се точки A и B со координати $A(-2)$ и $B(15)$. Определи ги координатите на точката M на оваа права ако $\overline{AM}:\overline{MB}=3:14$.

Решение. Со оглед на положбата на точката M во однос на точките A и B ги имаме следниве случаи.

- 1) Точката M е меѓу точките A и B . Имаме $\overline{AM}=3k$ и $\overline{MB}=14k$, па како $\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AB}$, добиваме $3k+14k=15-(-2)$, односно $k=1$. Последното значи дека $\overline{AM}=3$, па затоа координатата на точката M е 1, т.е. $M(1)$.
- 2) Нека M е лево од точката A . Од $\overline{AM}+\overline{AB}=\overline{MB}$, добиваме $3k+17=14k$, т.е. $k=\frac{17}{11}$. Затоа $\overline{AM}=3\cdot\frac{17}{11}=\frac{51}{11}$. Сега можеме да ја определиме координатата на M . Имено, апсолутната вредност на координатата на точката M е еднаква на збирот на апсолутните вредности $|\frac{51}{11}|+|-2|=\frac{73}{11}=6\frac{7}{11}$. Бидејќи точката M е лево од точката A заклучуваме дека координатата на M е негативна, т.е. $M(6\frac{7}{11})$.
- 3) Случајот кога M е десно од точката B не е возможен. Имено, од размерот $\overline{AM}:\overline{MB}=3:14$ следува $\overline{AM}=\frac{3}{14}\overline{MB}$, па како $\frac{3}{14}<1$ добиваме дека $\overline{AM}<\overline{MB}$, што не е можно.

2. Точките $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{20}$ се распоредени на една права во дадениот редослед, при што важи

$$\overline{A_0A_1}=\overline{A_1A_2}=3cm, \overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}=5cm \text{ итн.,}$$

т.е.

$$\overline{A_{2i}A_{2i+1}}=\overline{A_{2i+1}A_{2i+2}}=2i+3cm, \text{ за } i=0,1,2,\dots,9.$$

Определи ја должината на отсечката A_4A_{19} .

Решение. Имаме

$$\overline{A_4A_{19}}=\overline{A_4A_6}+\overline{A_6A_8}+\overline{A_8A_{10}}+\overline{A_{10}A_{12}}+\dots+\overline{A_{16}A_{18}}+\overline{A_{18}A_{19}}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(2 \cdot 2 + 3) + 2(2 \cdot 3 + 3) + 2(2 \cdot 4 + 3) + \dots + 2(2 \cdot 8 + 3) + (2 \cdot 9 + 3) \\
&= 14 + 18 + 22 + 26 + 30 + 34 + 38 + 21 \\
&= 203 \text{ cm.}
\end{aligned}$$

3. Во областа на аголот $\angle AOB$ се повлечени симетралата OC и полуправа OD така што $\angle AOD$ е еднаков на $\frac{1}{5}$ од аголот $\angle AOB$. Пресметај го аголот $\angle AOB$, ако $\angle COD = 30^\circ$.

Решение. Од условот на задачата, $\angle AOD = \frac{1}{5} \angle AOB$, $\angle AOC = \angle BOC$, $\angle COD = 30^\circ$ и $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$. Понатаму, $\angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB$ и $\angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB$. Според тоа, $\frac{1}{2} \angle AOB - \frac{1}{5} \angle AOB = \angle COD$, односно $(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) \angle AOB = \angle COD$, од каде следува $\frac{3}{10} \angle AOB = 30^\circ$, што значи дека $\angle AOB = 100^\circ$.

4. Нека C и D се точки во внатрешноста на $\angle AOB = 105^\circ$ такви што важи $5\angle COD = 4\angle AOC$ и $3\angle COD = 2\angle DOB$. Определи го $\angle COD$.

Решение. Полуправите OC и OD се наоѓаат во внатрешноста на $\angle AOB$, па затоа можни се два случаја:

- а) полуправата OC лежи во внатрешноста на $\angle AOD$,
 б) полуправата OD лежи во внатрешноста на $\angle AOC$.

а) Нека OC лежи во внатрешноста на $\angle AOD$ (цртеж десно). Ставаме $\angle AOC = x$, $\angle COD = y$ и $\angle DOB = z$. Тогаш

$$5y = 4x, 3y = 2z \text{ и } x + y + z = 105^\circ.$$

Ако последната равенка ја помножиме со 4, добиваме $4x + 4y + 4z = 420^\circ$, па со замена од пр-

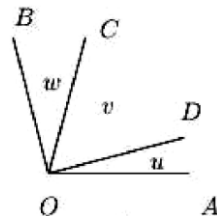
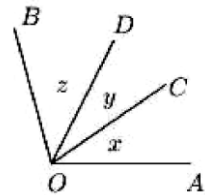
вите две равенки аоѓаме $5y + 4y + 6y = 420^\circ$, т.е. $y = 28^\circ$. Според тоа,

$\angle COD = y = 28^\circ$. Притоа важи $\angle AOC = x = 35^\circ$ и $\angle DOB = z = 42^\circ$.

б) Нека OD лежи во внатрешноста на $\angle AOC$ (цртеж десно). Ставаме $\angle AOD = u$, $\angle DOC = v$ и $\angle COB = w$. Тогаш

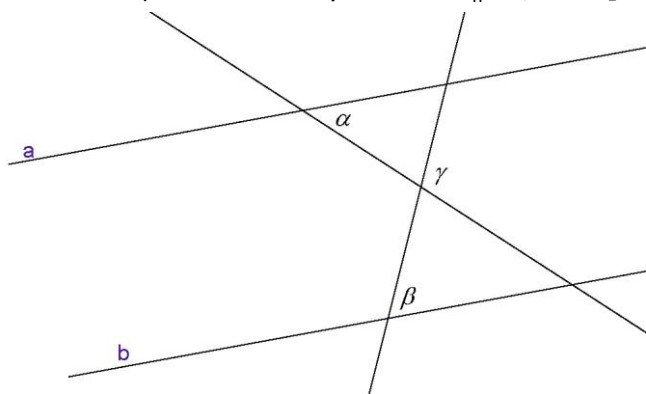
$$5v = 4(u + v), 3v = 2(u + v) \text{ и } u + v + w = 105^\circ.$$

Оттука следува $v = 4u$ и $v = 2w$, па затоа $w = 2u$ и

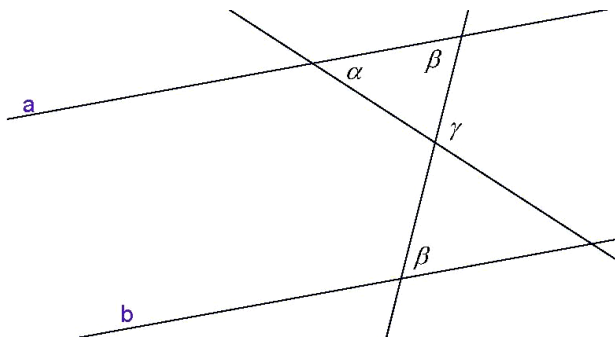


добиваме $u + 4u + 2u = 105^\circ$, т.е. $u = 15^\circ$. Значи, $v = 4u = 60^\circ$ и $w = 2u = 30^\circ$, т.е. $\angle COD = 60^\circ$.

5. Пресметај го аголот γ ако $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 65^\circ$ и $a \parallel b$ (види цртеж).



Решение. Во триаголникот чија една страна припаѓа на правата a вториот агол чиј еден крак припаѓа на правата a е еднаков на аголот β (остри агли со паралелни краци). Сега, бидејќи γ е надворешен агол за овој триаголник добиваме $\gamma = \alpha + \beta = 45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$.



6. Разликата на два агли со паралелни краци е еднаква на половината од помалиот од двата агли. Определи ги овие агли.

Решение. Нека α и β се дадените агли со паралелни краци и нека α е помалиот од нив. Бидејќи аглите α и β не се еднакви, заклучуваме дека α и β се суплементни, т.е. важи $\beta = 180^\circ - \alpha$. Според условот на задачата важи $\beta - \alpha = \frac{\alpha}{2}$, па затоа $180^\circ - \alpha - \alpha = \frac{\alpha}{2}$, од каде добиваме $\frac{5\alpha}{2} = 180^\circ$, т.е. $\alpha = 72^\circ$. Конечно,

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ.$$

7. Аголот α е помал од својот суплементен агол β за толку степени за колку што е поголем од аголот γ со кој заедно формира половина од рамен агол. Определи ги аглите α, β и γ .

Решение. Од условот на задачата следува $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\alpha + \gamma = 90^\circ$, $\alpha = \gamma + x$, $\beta = \alpha + x$. Значи, $\beta = \gamma + 2x$, па со замена во $\alpha + \beta = 180^\circ$ и $\alpha + \gamma = 90^\circ$ добиваме $2\gamma + 3x = 180^\circ$ и $2\gamma + x = 90^\circ$, од каде наоѓаме

$$2\gamma + 3x - (2\gamma + x) = 180^\circ - 90^\circ,$$

односно $x = 45^\circ$. Сега од

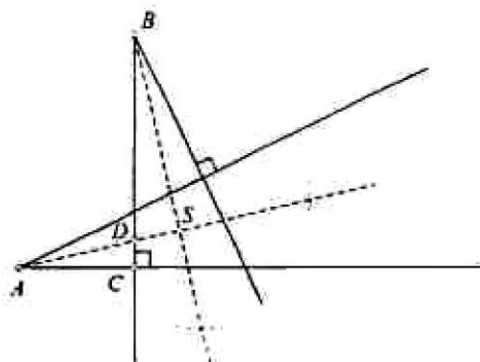
$$2\gamma + x = 90^\circ$$

следува $2\gamma = 45^\circ$, т.е. $\gamma = 22^\circ 30'$, па затоа

$$\alpha = \gamma + x = 22^\circ 30' + 45^\circ = 67^\circ 30' \text{ и } \beta = \alpha + x = 67^\circ 30' + 45^\circ = 112^\circ 30'.$$

8. Нацртај два остри агли со заемно нормални краци при што темето на секој од аглите е надвор од другиот агол. Определи го аголот меѓу симетралите на овие агли.

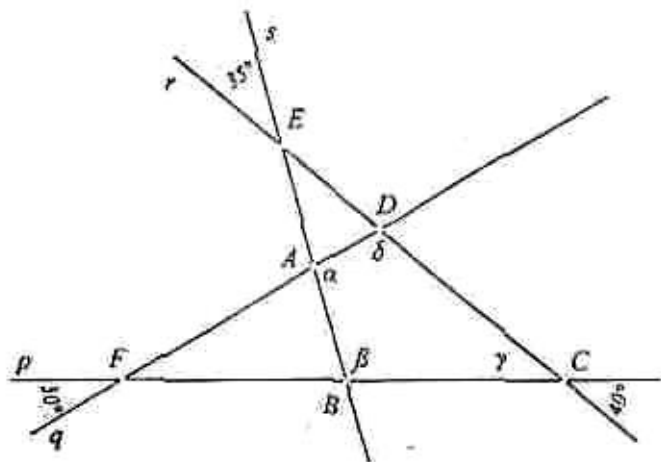
Решение. Да ги воведеме ознаките како на цртежот десно. Дадените агли се остри и се со заемно нормални краци, па затоа тие се еднакви, што значи дека и половините на тие агли се еднакви. Според тоа, $\angle CAS = \angle CBS$, односно $\angle CAD = \angle DBS$. Освен тоа,



$\angle ADC = \angle BDS$, како накрсни агли. Аголот при темето C на $\triangle ACD$ е еднаков на 90° , па затоа важи $\angle CAD + \angle ADC = 90^\circ$. Ега од последните три равенства следува $\angle DBS + \angle BDS = 90^\circ$, па затоа аголот меѓу симетралите е еднаков на

$$180^\circ - (\angle DBS + \angle BDS) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

9. Правите p, q и r се сечат во точките A, B, C, D, E и F (види цртеж). Некои агли се познати. Определи ги аглите α, β, γ и δ .



Решение. Имаме, $\gamma = 40^\circ$ (накрсни агли во точката C) и $\angle DFC = 30^\circ$ (накрсни агли во точката F). Од триаголникот CDF следува

$$\delta = 180^\circ - \angle DFC - \gamma = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ.$$

Понатаму, $\angle BEC = 35^\circ$ (накрсни агли во точката E). Од триаголникот BCE следува

$$\beta = 180^\circ - \angle BEC - \gamma = 180^\circ - 35^\circ - 40^\circ = 105^\circ.$$

Понатаму, аглите δ и $\angle ADE$ се суплементни, па затоа

$$\angle ADE = 180^\circ - \delta = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

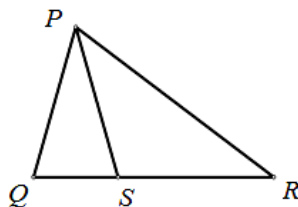
Конечно, аголот α е надворешен агол за $\triangle ADE$, па затоа

$$\alpha = \angle ADE + \angle AED = 35^\circ + 70^\circ = 105^\circ.$$

Според тоа, $\alpha = \beta = 105^\circ$, $\gamma = 40^\circ$, $\delta = 110^\circ$.

IV.2. ТРИАГОЛНИК

10. За триаголникот QPR (цртеж десно) важи: $\overline{PQ} = \overline{PS} = \overline{RS}$ и $\angle QPS = 12^\circ$. Определи го $\angle QPR$.



Решение. Триагониците QPS и PSR имаат по две страни со еднакви должини, што значи дека се рамнокраки. Во триаголникот QPS аглите при основата QS се еднакви, па затоа имаат по

$$(180^\circ - 12^\circ) : 2 = 84^\circ.$$

Понатаму, $\angle QSP$ е надворешен агол за триаголникот PSR кој има основа PR . Оттука следува дека

$$\angle SPR = \angle SRP = 84^\circ : 2 = 42^\circ.$$

Конечно,

$$\angle QPR = \angle QPS + \angle SPR = 12^\circ + 42^\circ = 54^\circ.$$

11. Определи ги внатрешните агли на триаголникот ABC ако е познато дека аголот α е еднаков на $\frac{2}{5}$ од аголот β , односно е еднаков на $\frac{1}{4}$ од аголот γ .

Решение. Од условот на задачата следува дека $\alpha = \frac{2}{5}\beta$ и $\alpha = \frac{1}{4}\gamma$.

Значи, $\beta = \frac{5}{2}\alpha$ и $\gamma = 4\alpha$. Заменуваме во $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ и добиваме $\alpha + \frac{5}{2}\alpha + 4\alpha = 180^\circ$. Од последната равека наоѓаме $\alpha = 24^\circ$, па затоа $\beta = \frac{5}{2} \cdot 24^\circ = 60^\circ$ и $\gamma = 4 \cdot 24^\circ = 96^\circ$.

12. Едниот агол на даден триаголник е за 50% помал од вториот агол, а третиот агол е еднаков на 50% од збирот на другите два агли. Определи ги аглите на триаголникот.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \text{ и } \gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2} + \beta\right) = \frac{3\beta}{4}.$$

Сега, ако замениме во $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ добиваме $\frac{\beta}{2} + \beta + \frac{3\beta}{4} = 180^\circ$, т.е.

$\frac{9\beta}{4} = 180^\circ$, од каде наоѓаме $\beta = 80^\circ$. Понатаму, $\alpha = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$ и $\gamma = \frac{3 \cdot 80^\circ}{4} = 60^\circ$.

13. Разликата меѓу најголемиот и најмалиот агол на еден рамнокрак триаголник е еднаква на 12° . Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Нека α е аголот при основата, а β аголот при врвот на рамнокракиот триаголник. Имаме, $2\alpha + \beta = 180^\circ$. Можни се два случаја:

- 1) Ако $\alpha - \beta = 12^\circ$, тогаш $3\beta + 24^\circ = 180^\circ$, па затоа $\beta = 52^\circ$ и $\alpha = 64^\circ$.
- 2) Ако $\beta - \alpha = 12^\circ$, тогаш $3\alpha + 12^\circ = 180^\circ$, па затоа $\alpha = 56^\circ$ и $\beta = 68^\circ$.

14. Во рамнокрак триаголник симетралата на надворешниот агол при врвот и симетралата на внатрешниот агол при основата се сечат под агол од 28° . Определи ги аглите на овој триаголник.

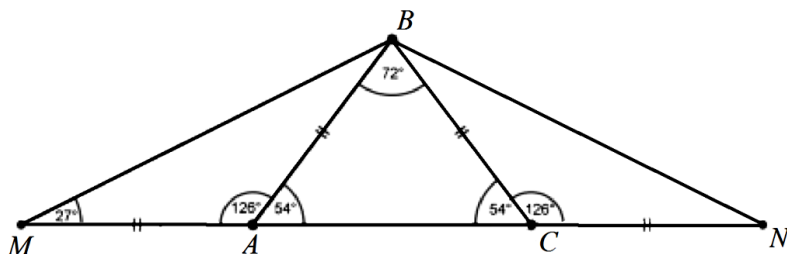
Решение. Во рамнокрак триаголник симетралата на надворешниот агол при врвот е паралелна со основата на триаголникот (Докажи!). Затоа аголот меѓу симетралата на надворешниот агол при врвот и симетралата на внатрешниот агол при основата е еднаков на половина од внатрешниот агол при основата на триаголникот. Значи, аголот при основата е еднаков на $2 \cdot 28^\circ = 56^\circ$, а аголот при врвот е еднаков на $180^\circ - 2 \cdot 56^\circ = 68^\circ$.

15. Даден е остроаголен триаголник $\triangle ABC$. Симетралата на аголот $\angle BAC$, симетралата на страната AC и висината повлечена од темето C се сечат во една точка. Определи го аголот $\angle BAC$.

Решение. Нека $\angle BAC = \alpha$. Бидејќи точката S припаѓа на симетралата на страната AC , добиваме дека $\overline{AS} = \overline{CS}$, што значи дека $\triangle ASC$ е рамнокрак. Тоа значи дека $\angle SCA = \angle CAS$. Триаголникот $\triangle AEC$ е правоаголен, па оттука $\angle ECA + \angle CAE = 90^\circ$, од каде следува $\frac{\alpha}{2} + \alpha = 90^\circ$, односно $\alpha = 60^\circ$.

16. Во рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AB} = \overline{BC}$) аголот при врвот изнесува 72° . Основата AC е продолжена на двете страни до точки M и N такви што $\overline{MA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CN}$. Одреди ги внатрешните агли на $\triangle MNB$.

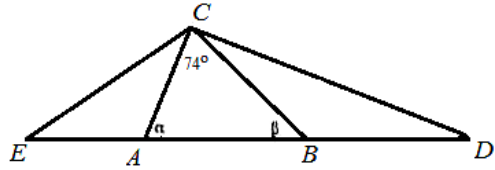
Решение. Триаголникот ABC е рамнокрак па затоа $\angle A = \angle C = 54^\circ$ (види цртеж). Според тоа, $\angle MAB = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$ и $\angle NCB = 126^\circ$. Значи, внатрешните агли на $\triangle MNB$ се



$$\angle M = \angle N = 27^\circ \text{ и } \angle MBN = 72^\circ + 54^\circ = 126^\circ.$$

17. Даден е $\triangle ABC$. На продолжението на страната AB преку темето C земена е точка E таква што $\overline{AE} = \overline{AC}$, а на продолжението на страната AB преку темето B земена е точка D таква што $\overline{BD} = \overline{BC}$. Определи го $\angle ECD$, ако $\angle ACB = 74^\circ$.

Решение. Од $\overline{AE} = \overline{AC}$ следува дека $\triangle ACE$ е рамнокрак и важи $\angle CEA = \angle ECA$. Збирот на овие два агли е еднаков на надворешниот агол на $\triangle ACE$ при темето



A , т.е. $\angle CEA + \angle ECA = \alpha$, па затоа $\angle CEA = \angle ECA = \frac{1}{2}\alpha$. Аналогно се докажува дека $\angle CDB = \angle BCD = \frac{1}{2}\beta$. Според тоа,

$$\begin{aligned}\angle ECD &= \angle DCB + 74^\circ + \angle ACE = 74^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \\ &= 74^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - 74^\circ) = 127^\circ.\end{aligned}$$

18. Даден е триаголник ABC со внатрешни агли α, β, γ и надворешен агол β_1 при темето B . Докажи, дека симетралите на аглите α и β_1 зафаќаат агол $\frac{\gamma}{2}$.

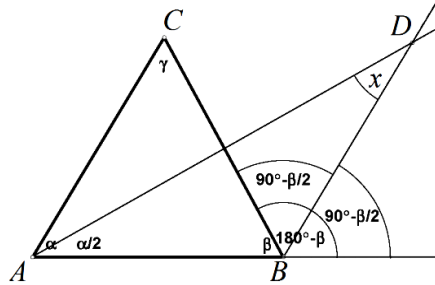
Решение. Имаме

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ и}$$

$$\beta_1 = 180^\circ - \beta.$$

Симетралата на аголот β_1 го дели овој агол на два еднакви агли со големина

$$\frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$



Ако со D ја означиме пресечната точка на симетралите на аглите α и β_1 (види цртеж), а со x го означиме аголот кои тие го зафаќаат, тогаш од $\triangle ABD$ добиваме $x = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \frac{\beta}{2}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$, што и требаше да се докаже.

19. Надворешниот и нему соседниот агол на еден триаголник се разликуваат за 25° . Преостанатите два агли на триаголникот се разликуваат за 25° . Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Нека надворешниот агол на триаголникот, на пример β_1 е поголем, т.е. важи $\beta_1 = \beta + 25^\circ$. Имаме

$$\beta_1 + \beta = 180^\circ$$

$$\beta + \beta + 25^\circ = 180^\circ$$

$$2\beta = 155^\circ$$

$$\beta = 77^\circ 30'.$$

Понатаму,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + 77^\circ 30' + \alpha + 25^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 180^\circ - 102^\circ 30'$$

$$2\alpha = 77^\circ 30'$$

$$\alpha = 38^\circ 45'$$

$$\gamma = \alpha + 25^\circ = 63^\circ 45'.$$

Нека надворешниот агол на триаголникот, на пример β_1 е помал, т.е. важи $\beta_1 = \beta - 25^\circ$. Имаме

$$\beta_1 + \beta = 180^\circ$$

$$\beta + \beta - 25^\circ = 180^\circ$$

$$2\beta = 205^\circ$$

$$\beta = 102^\circ 30'.$$

Понатаму,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

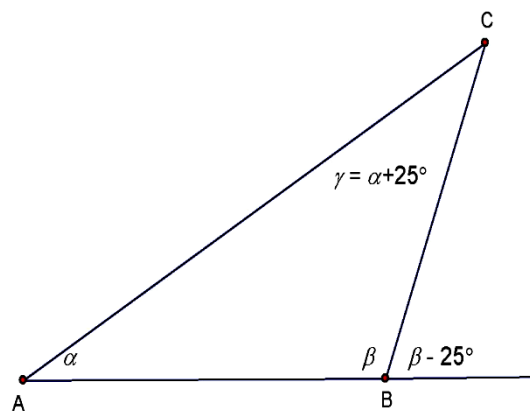
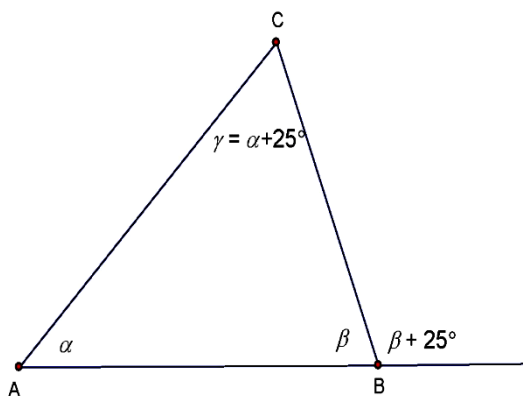
$$\alpha + 102^\circ 30' + \alpha + 25^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 180^\circ - 127^\circ 30'$$

$$2\alpha = 52^\circ 30'$$

$$\alpha = 26^\circ 15'$$

$$\gamma = \alpha + 25^\circ = 51^\circ 15'.$$



20. Нека S е центарот на впишаната кружница во правоаголниот триаголник ABC со прав агол во темето A . Определи ги аглиите на триаголникот ако разликата на аглиите $\angle ASB$ и $\angle ASC$ е 30° .

Решение. Имаме

$$\angle ASB = 180^\circ - (\angle SAB + \angle SBA) \text{ и } \angle ASC = 180^\circ - (\angle SAC + \angle SCA),$$

$$\angle SAB = \angle SAC, \angle SBA = \frac{\beta}{2} \text{ и } \angle SCA = \frac{\gamma}{2},$$

па затоа $30^\circ = \angle ASB - \angle ASC = \frac{\gamma - \beta}{2}$. Но, $\beta + \gamma = 90^\circ$, па од последните две равенки добиваме $\beta = 15^\circ, \gamma = 75^\circ$.

21. Во $\triangle ABD$ на страната AB се наоѓа точка C таква што $\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CD}$ и $\angle BCD = z^\circ$. Определи го $\angle ADB$.

Решение. Триаголникот ACD е рамнокрак и важи $\angle ADC = \angle CAD = x^\circ$. Аголот $\angle BCD$ е надворешен агол за триаголникот ACD кој е наспроти внатрешните агли $\angle CAD$ и $\angle ADC$, па затоа важи $z^\circ = x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$. Триаголникот BCD е рамнокрак па затоа $\angle DBC = \angle CDB = y^\circ$. Понатаму,

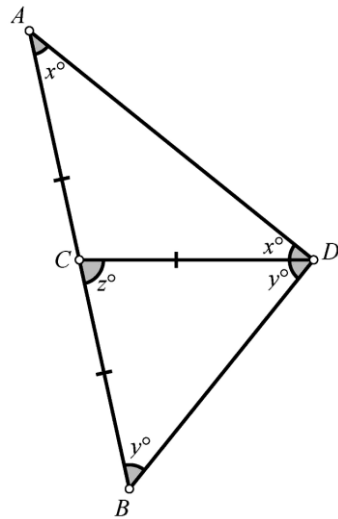
$$z^\circ + y^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$2x^\circ + 2y^\circ = 180^\circ$$

$$x^\circ + y^\circ = 90^\circ.$$

Според тоа,

$$\angle ADB = \angle ADC + \angle CDB = x^\circ + y^\circ = 90^\circ.$$

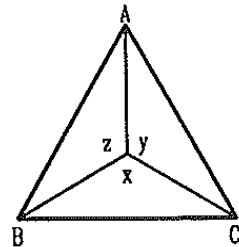


22. Ако симетралите на внатрешните агли на триаголникот формираат еднакви агли, тогаш триаголникот е рамностран. Докажи!

Решение. Нека α, β, γ се внатрешните агли на триаголникот ABC и x, y, z се аглиите кои ги формираат нивните симетрали. Тогаш

$$x = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}, y = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}, z = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

и како $x = y = z$ добиваме



$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}, \text{ т.е. } \alpha = \beta = \gamma,$$

што значи дека триаголникот ABC е рамностран.

23. Внатрешните агли на триаголникот се α, β, γ . Симетралите на аглите α и β се сечат под агол 115° , а симетралите на аглите β и γ се сечат под агол 125° . Определи ги аглите α, β и γ .

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ, \text{ т.е. } \alpha + \beta = 130^\circ$$

и како $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ добиваме $\gamma = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. Понатаму,

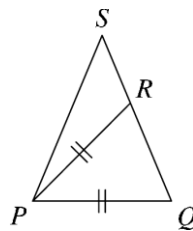
$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ, \text{ т.е. } \beta + \gamma = 110^\circ,$$

па затоа $\beta = 110^\circ - \gamma = 110^\circ - 50^\circ = 60^\circ$ и конечно $\alpha = 130^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.

24. На цртежот десно важи $\overline{SP} = \overline{SQ}$, $\overline{PQ} = \overline{PR}$ и $\angle SPR = 36^\circ$. Пресметај го аголот PQR .

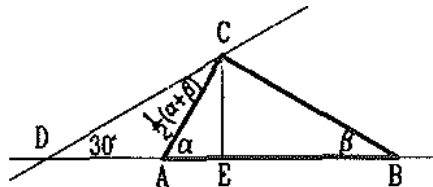
Решение. Според условот на задачата триаголниците PQS и QRP се рамнокраки, па затоа аглите при основите им се еднакви. Според тоа, ако означиме $\alpha = \angle PQR = \angle QRP$, $\beta = \angle QPR$, имаме:

$$\alpha + 36^\circ = \beta \text{ и } 2\alpha + \beta = 180^\circ, \text{ од каде добиваме } \beta = 36^\circ, \alpha = 72^\circ$$



25. Во остроаголен триаголник ABC ($\overline{BC} > \overline{AC}$) дадена е висината CE . Симетралата на надворешниот агол на триаголникот во темето C ја сече правата AB во точката D така што $\overline{CD} = 2\overline{CE}$. Докажи дека $\alpha - \beta = 60^\circ$.

Решение. Од $\overline{CD} = 2\overline{CE}$ и бидејќи триаголникот CDE е правоаголен следува дека тој е половина од рамностран триаголник, па затоа $\angle CDE = 30^\circ$ (цртеж десно). Понатаму, од условот следува $\angle DCA = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ и како $\angle BAC = \alpha$ е надворешен за триаголникот CDA добиваме $\alpha = 30^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, па затоа $\alpha - \beta = 60^\circ$.



26. Ако O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ докажи дека $\angle BOC = 2\angle BAC$.

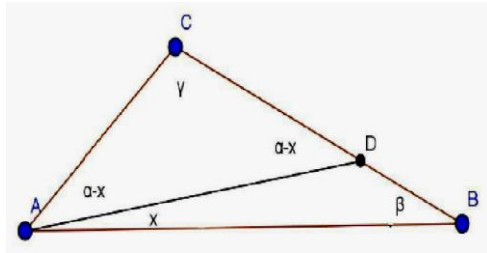
Решение. Ако аглие $\angle OAB$, $\angle OBC$, $\angle OCA$ ги означиме со α, β, γ , соодветно, тогаш $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ$ (направи цртеж). Според тоа,

$$\angle BOC = 180^\circ - 2\beta = 2(\alpha + \gamma) = 2\angle BAC.$$

27. Во $\triangle ABC$ важи $\alpha - \beta = 30^\circ$. На страната BC е дадена точка D така што $\overline{AC} = \overline{CD}$. Определи го $\angle BAD$.

Решение. Нека $\angle BAD = x$.

Од $\overline{AC} = \overline{CD}$ следува дека $\triangle ADC$ е рамнокрак, т.е. $\angle DAC = \angle ADC = \alpha - x$. Според тоа $2(\alpha - x) + \gamma = 180^\circ$, т.е. $\gamma = 180^\circ - 2(\alpha - x)$. Пона-



таму, важи $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, па затоа $\alpha + \beta + 180^\circ - 2(\alpha - x) = 180^\circ$, од каде добиваме $\beta - \alpha + 2x = 0$, односно $x = \frac{\alpha - \beta}{2} = 15^\circ$. Според тоа, $\angle BAD = 15^\circ$.

28. На продолжението преку точката C на кракот AC на рамнокракиот триаголник ABC земена е точка C таква што $\overline{CD} = \overline{AC}$. Докажи дека триаголникот ABD е правоаголен.

Решение. Од $\overline{BC} = \overline{AC} = \overline{CD}$ следува дека и триаголникот BCD е рамнокрак, па затоа аглие на основата BD му се еднакви (види цртеж). Според тоа, $\angle CAB = \angle ABC$ и $\angle CBD = \angle BDC$. Сега за триаголникот ABD имаме

$$\angle DAB + \angle ABD + \angle BDA = 180^\circ,$$

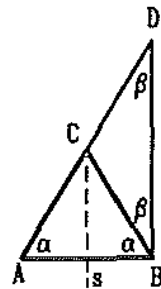
па затоа

$$\angle CAB + \angle ABD + \angle BDA = 180^\circ$$

$$\angle ABC + \angle CBD + \angle ABD = 180^\circ$$

$$2\angle ABD = 180^\circ$$

$$\angle ABD = 90^\circ,$$



што значи дека триаголникот ABD е правоаголен со прав агол во темето B .

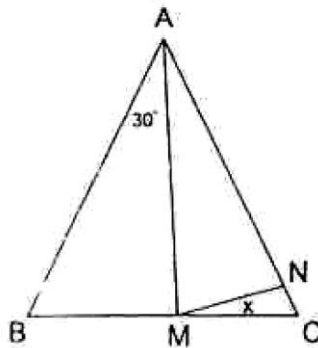
29. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со основа BC таков што $\angle BAC > 30^\circ$. На основата BC земена е точка M таква што $\angle BAM = 30^\circ$, а на кракот AC точка N таква што $\overline{AM} = \overline{AN}$. Определи го $\angle CMN$.

Решение. Да означиме $\angle CMN = x$.

Триаголникот ABC е рамнокрак, па затоа $\angle ABC = \angle ACB = \beta$. Од условот на задачата имаме $\overline{AM} = \overline{AN}$, т.е. триаголникот AMN е рамнокрак, па затоа $\angle AMN = \angle ANM = \gamma$.

Бидејќи γ е надворешен агол за триаголникот MCN добиваме дека важи $\gamma = x + \beta$. Понатаму, бидејќи

$\angle AMC$ е надворешен агол за триаголникот BMA добиваме дека $\angle AMC = \beta + 30^\circ$. Значи, $\gamma + x = \beta + 30^\circ$, односно $x + \beta + x = \beta + 30^\circ$, од каде добиваме $x = 15^\circ$.

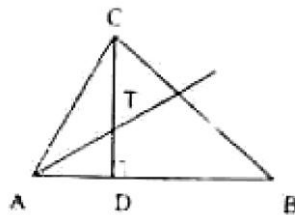


30. Даден е $\triangle ABC$ во кој висината повлечена кон страната AB минува низ пресечната точка на симетралата на $\angle BAC$ и симетралата на страната AC . Определи го $\angle BAC$.

Решение. Со D да го означиме подножјето на висината повлечена од темето C на страната AB , а со α да го означиме $\angle BAC$. Нека T е пресекот на симетралата на $\angle BAC$ и симетралата на страната AC . Од условот на задачата

следува дека $\overline{AT} = \overline{CT}$, т.е. $\triangle ATC$ е рамнокрак, па затоа $\angle ACT = \angle CAT$. Правата AT е симетрала на $\angle BAC$, па затоа $\angle ACT = \angle CAT = \frac{\alpha}{2}$. Понатаму, $\triangle ADC$ е правоаголен, што значи $\angle ACD + \angle CAD = 90^\circ$.

Но, $\angle ACD = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CAD = \alpha$, па затоа $\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$, т.е. $\alpha = 60^\circ$.



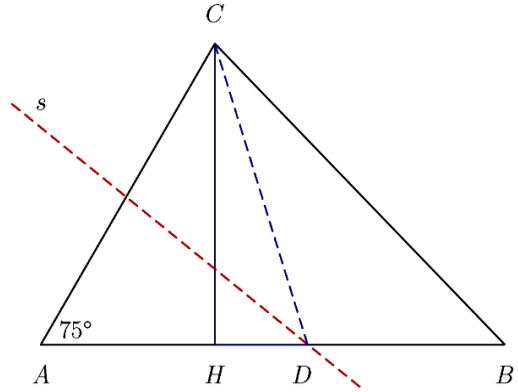
31. Во $\triangle ABC$ должината на висината CH , $H \in AB$ е еднаква на половина од должината на страната AB и важи $\angle BAC = 75^\circ$. Определи го аголот $\angle ABC$.

Решение. Нека s е симетралата на страната AC и нека s ја сече AB во точката D . Тогаш $\overline{AD} = \overline{CD}$, па затоа

$$\angle ACD = 75^\circ.$$

$$\angle ADC = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ.$$

Значи, триаголникот CHD е правоаголен со $\angle CDH = 30^\circ$ и $\angle HCD = 60^\circ$. Бидејќи нас-



проти аголот од 30° лежи страната CH таа е половина од хипотенузата, т.е. $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{CH}$. Од условот на задачата имаме $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CH}$, па затоа $\overline{CD} = \overline{AB}$. Оттука следува дека точките B и D се совпаѓаат, па затоа $\angle ABC = \angle ADC = 30^\circ$.

32. Даден е триаголник ABC . Нека E и D се произволни точки на страните AC и BC , соодветно. Симетралите на $\angle CAD$ и $\angle CBE$ се сечат во точката F . Докажи дека $\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$.

Решение. Согласно условите на задачата x, u, z, w ги означиме аглите како на цртежот десно. Тогаш:

$$\angle AFB = 180^\circ - (x + w + u + z)$$

$$\angle AEB = 180^\circ - (2x + w + z)$$

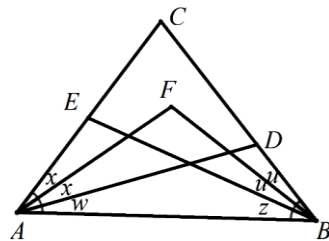
$$\angle ADB = 180^\circ - (2u + z + w)$$

Затоа:

$$\angle AEB + \angle ADB = 360^\circ - (2x + 2u + 2z + 2w)$$

$$2\angle AFB = 360^\circ - (2x + 2w + 2u + 2z)$$

од каде што следува тврдењето на задачата.



33. Даден е триаголник ABC . Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол при темето C зафаќаат со правата AB еднакви агли.

Определи ги аглите $\angle ACB$ и $\angle ABC$ ако $\angle CAB = 20^\circ$.

Решение. Нека D и E се пресечните точки на симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето C со правата AB , соодветно. Тие зафаќаат прав агол. Според условот на задачата $\triangle DCE$ е рамнокрак правоаголен триаголник, т.е. $\angle CDB = \angle CEB = 45^\circ$. Понатаму, $\angle CDB$ е надворешен агол за $\triangle ADC$, па затоа $\angle CAD + \angle ACD = \angle CDB$, т.е. $20^\circ + \angle ACD = 45^\circ$, од каде добиваме $\angle ACD = 25^\circ$.

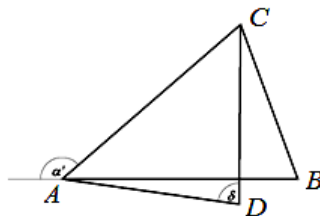
Сега, CD е симетрала на $\angle ACB$, па затоа

$$\angle ACB = 2\angle ACD = 2 \cdot 25^\circ = 50^\circ.$$

Конечно,

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle CAB - \angle ACB = 180^\circ - 20^\circ - 50^\circ = 110^\circ.$$

34. Триаголниците ABC и ADC имаат заедничка страна AC (види цртеж). При тоа точни се следниве равенства $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AD} = \overline{DC}$ и $\alpha' + \delta = 200^\circ$, каде α' е надворешниот агол при темето A во $\triangle ABC$, δ е аголот при темето D во $\triangle ADC$. Определи го $\angle BCD$.



Решение. Триаголникот ABC е рамнокрак, па затоа аглите при основата BC се еднакви. Бидејќи α' е надворешниот агол на $\triangle ABC$ важи $\angle ABC = \angle ACB = \frac{\alpha'}{2}$. Триаголникот ADC е рамнокрак, па затоа аглите при основата AC се еднакви и важи

$$\angle DAC = \angle ACD = \frac{180^\circ - \delta}{2} = 90^\circ - \frac{\delta}{2}.$$

Бидејќи $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD$, важи $\frac{\alpha'}{2} = 90^\circ - \frac{\delta}{2} + \angle BCD$, па затоа

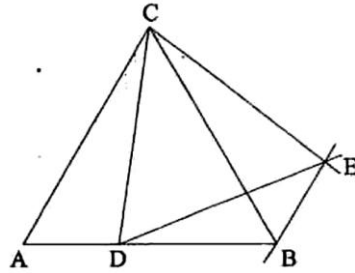
$$\angle BCD = \frac{\alpha'}{2} + \frac{\delta}{2} - 90^\circ = 100^\circ - 90^\circ = 10^\circ.$$

35. Даден е рамностран триаголник ABC и произволна точка D на страната AB . Нека точката E е таква што триаголникот CDE е рамностран при што точките B и E се од иста страна на правата CD . Определи го $\angle ABE$.

Решение. Триаголникот $\triangle ABC$ е рамностран, па затоа $\overline{AC} = \overline{BC}$. Исто така, $\triangle CDE$ е рамностран, па затоа $\overline{DC} = \overline{EC}$. Понатаму, имаме

$$\begin{aligned}\angle ACD &= 60^\circ - \angle BCD \\ &= \angle ECD - \angle BCD = \angle BCE.\end{aligned}$$

Сега, од признакот SAC следува дека триаголниците ADC и BEC се складни. Затоа важи $\angle EBC = \angle DAC = 60^\circ$. Конечно,

$$\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = 120^\circ.$$


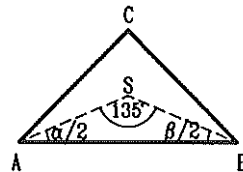
36. Во $\triangle ABC$ точката D припаѓа на страната AB . Ако $\overline{AC} = \overline{CD}$ и $\angle A - \angle B = 37^\circ$ определи го $\angle BCD$.

Решение. Бидејќи $\angle CDA$ е надворешен за триаголникот BCD (направи цртеж), добиваме $\angle CDA = \angle B + \angle BCD$. Понатаму, од $\overline{AC} = \overline{CD}$ следува дека триаголникот ADC е рамнокрак и како $\angle A - \angle B = 37^\circ$ добиваме $\angle CDA = \angle B + \angle BCD = \angle B + 37^\circ$. Според тоа,

$$\angle B + 37^\circ = \angle CDA = \angle B + \angle BCD, \text{ т.е. } \angle BCD = 37^\circ.$$

37. Симетралите на два внатрешни агли на триаголникот ABC се сечат под агол од 135° . Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.

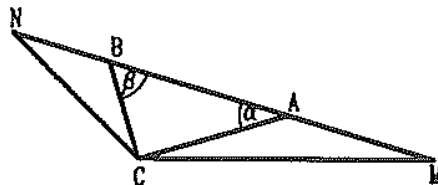
Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека симетралите на аглите во темињата A и B се сечат под агол од 135° (цртеж десно). Значи, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.



Според тоа, $\alpha + \beta = 90^\circ$, па затоа $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ е правоаголен.

38. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C . Хипотенузата AB ја продолжиме преку темето A за отсечка $\overline{AM} = \overline{AC}$ и преку темето B за отсечка $\overline{BN} = \overline{BC}$. Определи го $\angle MCN$.

Решение. Според условот на задачата триаголниците ACM и BCN се рамнокраки (цртеж десно). Аголот $\angle CAB = \alpha$ и $\angle CBA = \beta$ се надворешни агли за триаголниците CMA и



NCB , соодветно, па затоа $\angle ACN = \angle AMC = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle BNC = \angle BCN = \frac{\beta}{2}$.

Според тоа,

$$\begin{aligned}\angle MCN &= \angle MCA + \angle ACB + \angle BCN = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \frac{\beta}{2} \\ &= 90^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ.\end{aligned}$$

39. На хипотенузата AB на правоаголникот $\triangle ABC$ земени се точки M и N такви што $\overline{AM} = \overline{AC}$ и $\overline{BN} = \overline{BC}$. Определи го $\angle MCN$.

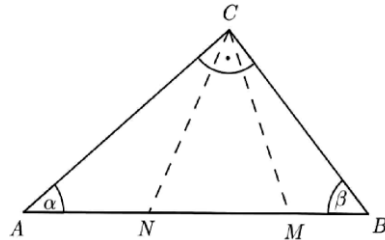
Решение. Од $\overline{AM} = \overline{AC}$ и $\overline{BN} = \overline{BC}$ следува дека триаголниците ACM и BCN се рамнокрак, т.е.

$$\angle AMC = \angle ACM = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) \text{ и}$$

$$\angle BNC = \angle BCN = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta).$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\angle MCN &= 180^\circ - \angle MNC - \angle NMC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) - \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.\end{aligned}$$



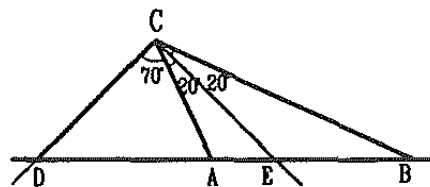
40. Во триаголникот ABC аголот при темето C е еднаков на 40° . Симетралите на надворешниот и внатрешниот агол во темето C се сечат со правата AB во точките D и E при што $\triangle CDE$ е рамнокрак. Определи ги аглиите на триаголникот ABC .

Решение. Ако искористиме дека симетралите на надворешниот и внатрешниот агол се заемно нормални, добиваме $CE \perp CD$.

Понатаму, според условот на задачата важи $\overline{CD} = \overline{CE}$ (види цртеж), па затоа $\triangle CDE$ е рамнокрак правоаголен. Според

тоа, $\angle CDA = \angle CEA = 45^\circ$. Според тоа,

$$\angle A = (90^\circ - 20^\circ) + 45^\circ = 115^\circ \text{ и } \angle B = 180^\circ - 115^\circ - 40^\circ = 25^\circ.$$



41. Надворешниот агол при основата на рамнокрак триаголник се однесува спрема надворешниот агол при врвот на триаголникот како 29:32. Определи ги внатрешните агли на овој триаголник.

Решение. Нека AB е основата, α_1 е надворешниот агол при основата и γ_1 е надворешниот агол при врвот. Имаме,

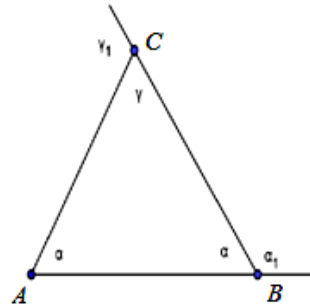
$$\alpha_1 : \gamma_1 = 29 : 32, \text{ т.е. } \alpha_1 = 29k, \gamma_1 = 32k.$$

Понатаму, $2\alpha_1 + \gamma_1 = 360^\circ$, па затоа

$$2 \cdot 29k + 32k = 360^\circ, \text{ т.е. } k = 4.$$

Според тоа, $\alpha_1 = 116^\circ$, $\gamma_1 = 128^\circ$, па затоа

$$\alpha = 64^\circ, \gamma = 53^\circ.$$



42. Права p минува низ темето на правиот агол на правоаголен триаголник и е симетрала на аголот меѓу висината и тежишната линија повлечени кон хипотенузата на триаголникот. Определи ги аглите кои правата p ги зафаќа со катетите на триаголникот.

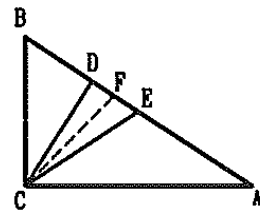
Решение. Нека $\angle C = 90^\circ$, $\angle A \geq \angle B$, D е подножјето на висината од темето C и M е средината на хипотенузата AB (направи цртеж). Тогаш триаголникот BCM е рамнокрак, па затоа

$$\angle BCM = \angle CBM = 90^\circ - \angle A = \angle ACD.$$

Сега, бидејќи p е симетрала на аголот меѓу тежишната линија и висината повлечени кон хипотенузата, добиваме дека p е симетрала на $\angle C$. Значи, p со катетите зафаќа агли еднакви на 45° .

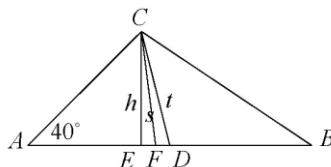
43. Во правоаголен триаголник аголот кој го зафаќаат висината и тежишната линија повлечени кон хипотенузата е еднаков на 24° . Определи го аголот меѓу тежишната линија повлечена кон хипотенузата и симетралата на правиот агол.

Решение. Нека CD е висината повлечена кон хипотенузата, CE е тежишната линија повлечена кон хипотенузата и CF е симетралата на правиот агол. Бидејќи $\angle DCE = 24^\circ$ добиваме дека $\angle CED = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$. Од $\overline{CE} = \overline{AE}$ следува дека триаголникот CAE е рамнокрак, па затоа $\angle ECA = \angle EAC = \frac{1}{2} \angle CED = 33^\circ$. Според тоа, $\angle ACD = 90^\circ - 33^\circ = 57^\circ$, па затоа $\angle DFC = \angle DCA - \angle FCA = 57^\circ - 45^\circ = 12^\circ$.



44. Даден е правоаголен триаголник, со агол во темето A еднаков на 40° . Докажи дека симетралата на правиот агол го преполовува аголот кој го формираат висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол.

Решение. Нека $\angle CAB = 40^\circ$ и висината, симетралата на правиот агол и тежишната линија ја сечат хипотенузата во точките E, F, D соодветно. Бидејќи $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ следува дека $\triangle DCA$ е



рамнокрак, па затоа $\angle DCA = 40^\circ$. Триаголникот BCE е правоаголен, па затоа $\angle BCE = 40^\circ$. Бидејќи

$$\angle BCF = \angle ACF = 45^\circ \Rightarrow \angle ECF = \angle BCE - \angle BCF = 45^\circ - 40^\circ = 5^\circ,$$

$$\angle DCF = \angle ACD - \angle ACF = 45^\circ - 40^\circ = 5^\circ,$$

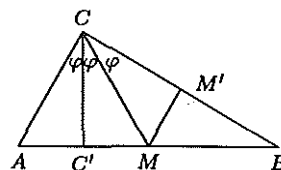
од каде следува дека CF е симетрала на $\angle ECD$.

45. Еден остар агол на правоаголниот триаголник е еднаков на 36° . Определи го аголот меѓу висината и тежишната линија кои соодветствуваат на хипотенузата.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C , $\angle CAB = 36^\circ$, M е средина на отсечката AB и C' е подножјето на висината повлечена од темето C на страната AB (направи цртеж). Тогаш $\overline{MA} = \overline{MC}$, па затоа триаголникот ACM е рамнокрак, што значи $\angle ACM = 36^\circ$. Понатаму, $\angle ACC' = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$, па затоа бариониот агол е $\angle MCC' = 54^\circ - 36^\circ = 18^\circ$.

46. Висината CC' и тежишната линија CM на триаголникот ABC го делат $\angle ACB$ на три еднакви дела. Определи ги аглите на триаголникот.

Решение. Нека M' е подножјето на нормалата повлечена од точката M кон страната BC (цртеж десно). Од условот на задачата следува дека правоаголните триаголници ACC' , CMC' и CMM' се складни (ACA), па

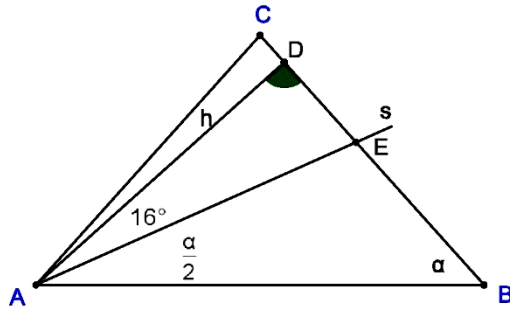


затоа $\overline{AC'} = \overline{C'M} = \overline{MM'}$. Бидејќи $\overline{AM} = \overline{MB} = 2\overline{MM'}$ и триаголникот $MM'B$ е правоаголен, добиваме дека $\angle MBM' = 30^\circ$ и $\angle BMM' = 60^\circ$.

Од докажаната складност следува $\angle CMM' = \angle CMC'$ и како нивниот збир е 120° , добиваме дека секој од нив е еднаков на 60° . Сега, повторно од складноста на триаголниците добиваме $\angle CMC' = \angle CAC' = 60^\circ$, па затоа $\angle ACB = 90^\circ$.

47. Во остроаголен рамнокрак триаголник основата е подолга од кракот. Симетралата на аголот при основата и висината повлечена од темето на тој агол кон спротивниот крак зафаќаат агол од 16° . Определи ги внатрешните агли на овој триаголник.

Решение. Нека триаголникот е ABC , основата му е AB , D е подножјето на висината повлечена од темето A , а E е пресечната точка на симетралата s на аголот во темето A и кракот BC (цртеж десно). Имаме



$\angle EAD = 16^\circ$. Триаголникот BDA е правоаголен, па важи

$$90^\circ = \angle ABD + \angle ABD = \alpha + \left(\frac{\alpha}{2} + 16^\circ\right), \text{ т.е. } \alpha = \left(\frac{148}{3}\right)^\circ = 49^\circ 20'.$$

Понатаму, од $2\alpha + \beta = 180^\circ$ следува $\beta = 180^\circ - 2\alpha = 81^\circ 20'$.

48. Во рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, симетралите на аглите при основата се сечат по агол од 110° . Определи го аголот меѓу симетралата на аголот и висината повлечени од темето B .

Решение. Нека BD и CE се симетралите при основата на $\triangle ABC$, O е нивниот пресек и BF е висината повлечена од темето B кон кракот AC . Имаме, $\angle BOC = 110^\circ$, па затоа

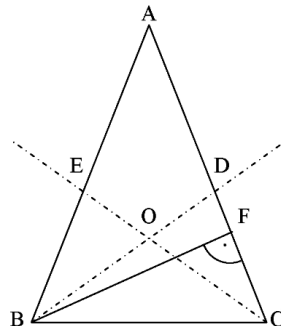
$$\angle CBO = \angle BCO = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ.$$

Според тоа, $\angle BCF = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$, па од правоаголниот $\triangle BCF$ следува

$$\angle CBF = 90^\circ - \angle BCF = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ.$$

Конечно, бараниот агол е

$$\angle FBO = \angle CBO - \angle CBF = 35^\circ - 20^\circ = 15^\circ.$$



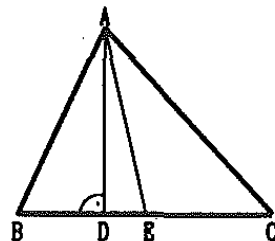
49. Даден е триаголник ABC таков што аглие $\angle B$ и $\angle C$ се остри и $\angle B > \angle C$. Докажи дека аголот меѓу висината и симетралата на аголот во темето A е еднаков на $\frac{\angle B - \angle C}{2}$.

Решение. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A , а E е пресечната точка на симетралата на аголот во темето A и страната BC (цртеж десно). Тогаш

$$\angle BAE = \frac{1}{2} \angle A, \quad \angle BAD = 90^\circ - \angle B,$$

па затоа

$$\angle DAE = \frac{1}{2} \angle A - (90^\circ - \angle B) = \angle B - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = \angle B - \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{\angle B - \angle C}{2}.$$



50. На продолжението на страната AB на триаголникот ABC преку темето B земена е точка M таква што $\overline{BM} = \overline{BC}$. Докажи дека правата MC е паралелна на симетралата на $\angle B$.

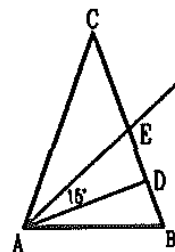
Решение. Од $\overline{BM} = \overline{BC}$ следува дека триаголникот MBC е рамнокрак, па затоа $\angle BMC = \angle BCM$ (направи цртеж). Понатаму, $\angle ABC$ е надворешен агол за триаголникот MBC , па затоа $\angle ABC = 2\angle BMC$. Според тоа симетралата s_B на $\angle ABC$ и правата MC со правата AB формираат еднакви агли, од што следува дека $s_B \parallel MC$.

51. Во рамнокрак триаголник ABC , $\overline{AC} = \overline{BC}$ симетралата на $\angle BAC$ и висината AD се сечат под агол од 15° . Определи ги аглие на триаголникот

Решение. Нека E е пресекот на симетралата на $\angle BAC$ со кракот BC и нека $\angle ABC = \angle BAC = 2x$. Тогаш $\angle BAE = x$. Од $\angle DAE = 15^\circ$ и $\angle ADE = 90^\circ$ следува $\angle AEB = 75^\circ$. Значи,

$$\begin{aligned} 3x &= x + 2x = \angle ABE + \angle BAE \\ &= 180^\circ - \angle AEB = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ, \end{aligned}$$

па затоа $x = 35^\circ$. Конечно, $\angle ABC = \angle BAC = 70^\circ$ и $\angle ACB = 40^\circ$.



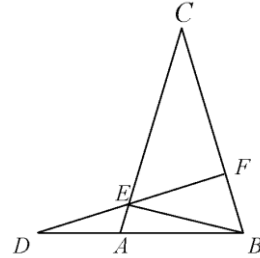
52. Во рамнокрак $\triangle ABC$ со основа AB и остар агол $\angle ACB$, висината од темето B го сече кракот AC во точката E . Нека D е точка на пра-

вата AB таква што $\triangle BED$ е рамнокрак со основа DB . Определи го аголот меѓу правите DE и BC .

Решение. Нека $\angle CAB = \alpha$. Тогаш, според условот на задачата $\angle ABE = 90^\circ - \alpha$ и $\angle EDB = 90^\circ - \alpha$. Нека F е пресекот на правите DE и BC . Тогаш

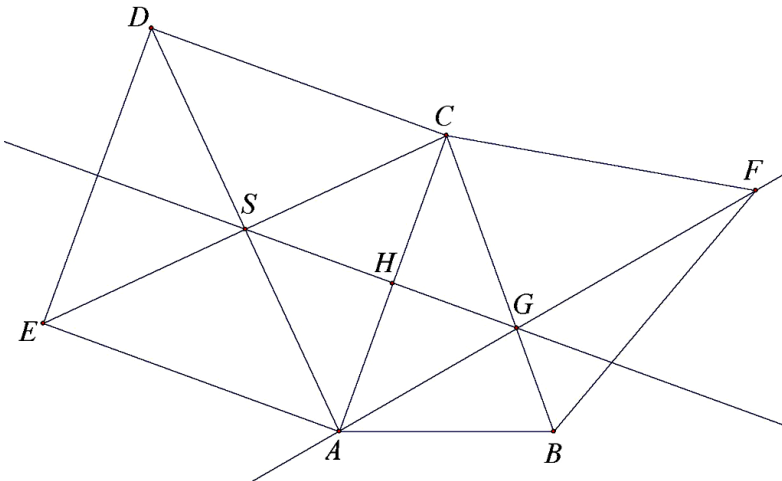
$$\begin{aligned}\angle DFB &= 180^\circ - \angle FDB - \angle DBF \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ\end{aligned}$$

т.е. правите DE и BC зафаќаат агол од 90° .



53. Даден е рамнокрак триаголник ABC . Над кракот AC од надворешната страна е нацртан квадрат $ACDE$, а над кракот BC од надворешната страна е нацртан рамностран триаголник BFC . Дијагоналите AD и EC на квадратот се сечат во точката S , а правата AF го сече кракот BC во точката G . Правата SG го сече кракот AC во точката H . Ако $\angle DAF = 85^\circ$, определи го аголот $\angle AHS$.

Решение. Според условот на задачата $\angle SAC = \angle DAF = 85^\circ$. Дијагоналите на квадратот се половат, се со еднаква должина и се заемно нормални, па затоа важи $\overline{SA} = \overline{SC}$ и $\angle SAC = \angle SCA = 45^\circ$. Понатаму, $\angle CAG = \angle SAC - \angle DAF = 85^\circ - 45^\circ = 40^\circ$. Од $\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CF}$ следува дека $\triangle AFC$ е рамнокрак со основа AF , па затоа $\angle CAF = \angle AFC = 40^\circ$



Значи,

$$\angle AFC = 180^\circ - 2 \cdot \angle CAF = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

Триаголникот BFC е рамностран, па затоа

$$\angle GCF = \angle BCF = 60^\circ \text{ и } \angle ACG = \angle ACF - \angle GCF = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ.$$

Според тоа, во $\triangle AGC$ важи $\angle CAG = \angle ACG = 40^\circ$, па затоа $\overline{GA} = \overline{GC}$. Дијагоналите на квадратот се преполовуваат и имаат еднакви должини, т.е. важи $\overline{SA} = \overline{SC}$. Докажавме дека $\overline{GA} = \overline{GC}$. За точките S и G важи дека се еднакво оддалечени од крајните точки на отсечката AC , па затоа тие припаѓаат на симетралата на отсечката AC . Бидејќи симетралата на отсечка е нормална на отсечката следува дека $SG \perp AC$, односно $\angle AHS = 90^\circ$.

54. Во внатрешноста на рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$), со агол при врвот $\angle ACB = 80^\circ$, земена е точка O таква што $\angle ABO = 30^\circ$ и $\angle BAO = 10^\circ$. Определи го $\angle ACO$

Решение. Нека CD е висината на триаголникот ABC и нека M е пресечната точка на висината CD и правата BO .

Тогаш $\angle MAB = \angle MBA = 30^\circ$. Понатаму,

$$\angle CAB = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ,$$

па затоа

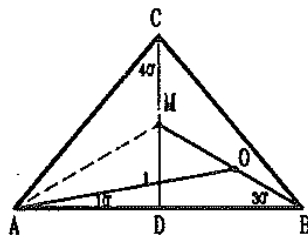
$$\angle CAM = \angle CAB - \angle MAB = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ.$$

Висината CD го преполовува $\angle ACB = 80^\circ$, па затоа $\angle ACM = 40^\circ$. За триаголникот ABO аголот $\angle AOM$ е надворешен, па затоа е еднаков на збирот

$$\angle OAB + \angle OBA = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ.$$

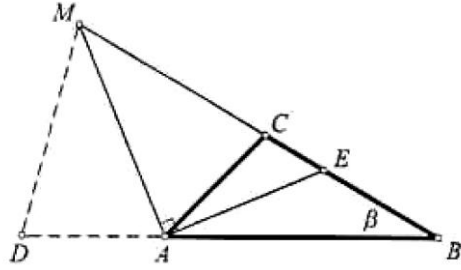
Триаголниците ACM и AOM имаат заедничка страна AM , $\angle AOM = \angle ACM$, $\angle CAM = \angle OAM$ па затоа се складни. Од добиената складност следува $\overline{AC} = \overline{AO}$, т.е. $\triangle ACO$ е рамнокрак. Конечно,

$$\angle ACO = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ.$$



55. Даден е остроаголен триаголник ABC таков што $\angle CAB = 45^\circ$. Низ темето A е повлечена нормала на симетралата на $\angle CAB$ и таа симетрала ја сече правата BC во точката M . Ако важи $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BM}$, определи ги преостанатите два агли на триаголникот ABC .

Решение. Ја продолжуваме страната AB на $\triangle ABC$ до точка D таква што $\overline{AD} = \overline{AC}$. Од претпоставката следува $\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BM}$ што значи дека $\triangle MBD$ е рамнокрак со краци BD и BM . Затоа $\angle MDB = \angle BMD$. Нека E е



пресекот на симетралата на аголот при темето A на $\triangle ABC$ и страната BC . Тогаш

$$\angle CAE = \frac{1}{2} \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ, \quad \angle MAE = 90^\circ,$$

$$\angle MAC = \angle MAE - \angle CAE = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ \text{ и}$$

$$\angle DAM = 180^\circ - \angle MAC - \angle CAB = 180^\circ - 67,5^\circ - 45^\circ = 67,5^\circ = \angle MAC.$$

Сега, бидејќи $\overline{AD} = \overline{AC}$, $\angle DAM = \angle MAC$ и AM е заедничка страна од признакот SAS следува дека $\triangle MDA \cong \triangle MCA$. Затоа

$$\angle MDB = \angle ACM = \angle CAB + \angle ABC = 45^\circ + \beta.$$

Понатаму, од $\triangle MDB$ имаме $\angle BMD + \angle MDB + \angle DBM = 180^\circ$, односно $45^\circ + \beta + 45^\circ + \beta + \beta = 180^\circ$, па затоа $\beta = 30^\circ$. Конечно,

$$\angle BCA = 180^\circ - \angle CAB - \angle ABC = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ.$$

Значи, аглите на триаголникот ABC се:

$$\angle CAB = 45^\circ, \quad \angle ABC = 30^\circ, \quad \angle BCA = 105^\circ$$

56. Даден е рамнокрак правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C . Над катетата BC е конструиран рамностран $\triangle BCD$. Определи го $\angle ADB$.

Решение. Од условот на задачата следува дека се можни два случаја.

- 1) Во првиот случај (левиот пртеж) важи

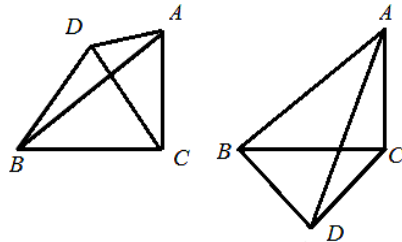
$$\angle ACD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Од $\overline{AC} = \overline{DC}$ следува дека $\triangle ADC$ е рамнокрак, па затоа

$$\angle CAD = \angle CDA = 75^\circ \text{ и како}$$

$$\angle CDB = 60^\circ, \text{ добиваме}$$

$$\angle ADB = \angle CDA + \angle CDB = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ.$$



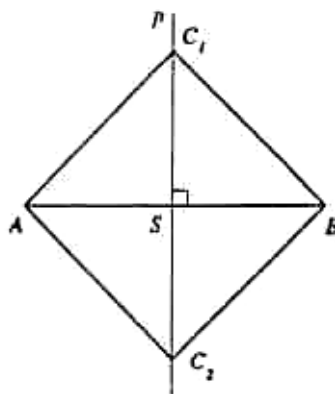
2) Во вториот случај (цртеж десно) важи $\angle ACD = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Од $\overline{AC} = \overline{DC}$ следува дека $\triangle ADC$ е рамнокрак, па затоа $\angle CAD = \angle CDA = 15^\circ$ и како $\angle CDB = 60^\circ$, добиваме

$$\angle ADB = \angle CDB - \angle CDA = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$

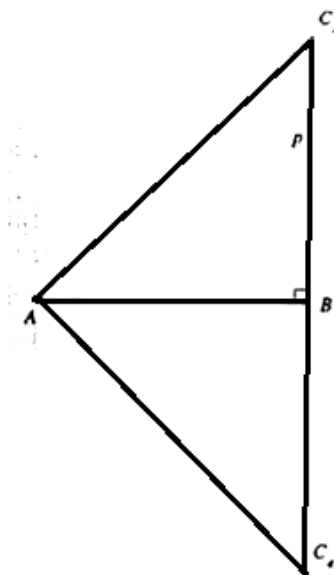
57. Во рамнината Σ се дадени две точки A и B , $A \neq B$. Определи го бројот на точките C кои лежат во Σ и се такви што точките A , B и C се темиња на рамнокрак правоаголен триаголник.

Решение. Отсечката AB може да биде хипотенуза или една од катетите на рамнокракиот правоаголен триаголник.

- 1) Нека правата p е симетрала, а точката S средина на отсечката AB . На правата p можеме да избереме точно две точки C_1 и C_2 симетрични една на друга во однос на правата AB така што $\overline{C_1S} = \overline{C_2S} = \overline{AS} = \overline{BS}$. Триаголниците ASC_1 и ASC_2 се рамнокраки, па затоа $\angle C_1AS = \angle C_1BS = 45^\circ$, т.е. $\angle AC_1B = 90^\circ$, што значи дека триаголникот ABC_1 е рамнокрак правоаголен триаголник. Слично и триаголникот ABC_2 е рамнокрак правоаголен триаголник. Значи, C_1 и C_2 се две од бараните точки.



- 2) Во точката B повлекуваме нормална права p на отсечката AB . На правата p определуваме точки C_3 и C_4 такви што $\overline{C_1B} = \overline{C_2B} = \overline{AB}$ (цртеж десно). Јасно, триаголниците ABC_3 и ABC_4 се рамнокраки пра-



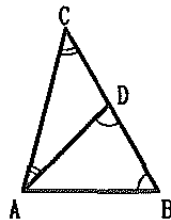
воаголни триаголници, што значи дека C_3 и C_4 се две од бараните точки.

- 3) Ако правата p од 2) ја конструираме во точката A , тогаш на потполно аналоген начин добиваме точки C_5 и C_6 кои го задовуваат условот на задачата (направи цртеж).

Конечно, точките C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и C_6 се бараните точки кои го задовуваат условот на задачата.

58. Во триаголникот ABC аголот при темето A е еднаков на 75° . Определи ги останатите агли на триаголникот ако е познато дека на страната BC се наоѓа точка D таква што триаголниците ABD и ACD се рамнокраки.

Решение. *Прв случај.* BD е основа на рамнокракиот триаголник ABD и тогаш AC мора да биде основа на рамнокракиот триаголник ACD (види цртеж десно). Нека $\angle ABC = x$. Тогаш $\angle ACD = 105^\circ - x$ и како $\angle ADB$ е надворешен за $\triangle ACD$ добиваме $\angle ACD = \frac{x}{2}$. Значи $105^\circ - x = \frac{x}{2}$, односно $x = 70^\circ$.



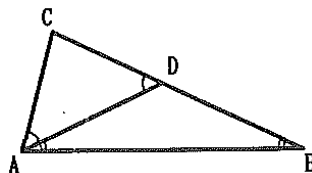
Конечно, во овој случај аглите на триаголникот се $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 70^\circ$ и $\angle C = 35^\circ$.

Втор случај. AD е основа на рамнокракиот триаголник ABD и тогаш AC мора да биде основа на рамнокракиот триаголник ACD (направи цртеж). Нека $\angle ADB = \angle DAB = x$. Тогаш $\angle ACD = \angle CAD = 75^\circ - x$ и како $\angle ADB$ е надворешен за $\triangle ACD$ добиваме $\angle ACD = \frac{x}{2}$. Според тоа, $75^\circ - x = \frac{x}{2}$, односно $x = 50^\circ$. Конечно, во овој случај аглите на

триаголникот се $\angle A = 75^\circ$, $\angle C = 25^\circ$ и $\angle B = 80^\circ$.

Трет случај. AB е основа на рамнокракиот триаголник ABD и тогаш основата на рамнокракиот триаголник ACD може да биде или страната AD или страната CD (зошто?).

I потслучај. Нека основата на рамнокракиот триаголник ACD е страната AD (цртеж десно). Нека $\angle ABD = \angle DAB = x$. Тогаш $\angle ACD = 105^\circ - x$ и како $\angle ADC$ е



надворешен за $\triangle ABD$ добиваме $\angle ADC = 2x$, па затоа

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle ADC - \angle DAC = 180^\circ - 4x.$$

Според тоа, $105^\circ - x = 180^\circ - 4x$, па затоа $x = 25^\circ$. Конечно, аглиите на триаголникот се $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 25^\circ$ и $\angle C = 80^\circ$.

II потслучај. Нека основата на рамнокракиот триаголник ACD е страната CD (направи цртеж). Нека $\angle ABD = \angle DAB = x$. Тогаш $\angle ACD = 105^\circ - x$ и како $\angle ADC$ е надворешен за $\triangle ABD$ добиваме $\angle ADC = \angle ACD = 2x$. Според тоа, $105^\circ - x = 2x$, т.е. $x = 35^\circ$. Конечно, аглиите на триаголникот се $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 35^\circ$ и $\angle C = 70^\circ$.

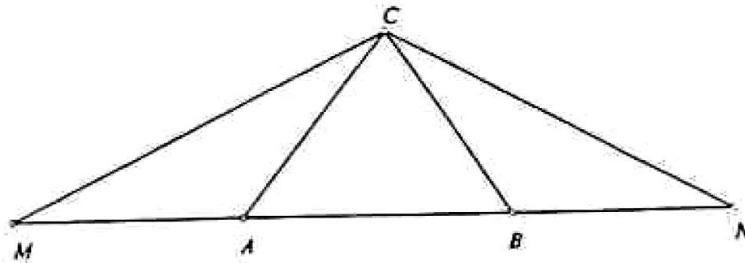
59. Определи го периметарот на триаголникот кај кој должините на двете страни се еднакви на 11 cm и 77 cm , а должината на третата страна е содржател на најмалата страна.

Решение. Нека $a=11$, $b=77$ и $c=11n$. Од неравенството на триаголник следува $11+77>11n$, па затоа $n<8$. Понатаму, повторно од неравенството на триаголник следува $77-11<11n$, па затоа $n>6$. Конечно, од $6<n<8$ добиваме $n=7$, па затоа должината на третата страна е $11n=77$. Конечно, периметарот на триаголникот е $11+77+77=165\text{ cm}$.

60. Даден е триаголник ABC . На продолжението на страната AB преку темето A избрана е точка M таква што $\overline{AM} = \overline{AC}$, а на продолжението на страната AB преку темето B избрана е точка N таква што $\overline{BN} = \overline{BC}$. Притоа важи $\angle CMN = 27^\circ$ и $\angle CNM = 32^\circ$. Определи ги внатрешните агли на триаголникот ABC . Определи го периметарот на триаголникот ABC , ако $\overline{MN} = 47\text{ cm}$.

Решение. Од $\overline{AM} = \overline{AC}$ следува дека $\triangle ACM$ е рамнокрак, па затоа

$$\angle CMN = \angle CMA = \angle MCA = 27^\circ.$$



Понатаму, $\angle BAC$ е надворешен агол за $\triangle ACM$, па затоа

$$\angle BAC = \angle AMC + \angle ACM = 27^\circ + 27^\circ = 54^\circ.$$

Од $\overline{BN} = \overline{BC}$ следува дека $\triangle BCN$ е рамнокрак, па затоа

$$\angle CNM = \angle CNB = \angle NCB = 32^\circ.$$

Понатаму, $\angle ABC$ е надворешен агол за $\triangle BCN$, па затоа

$$\angle ABC = \angle BNC + \angle BCN = 32^\circ + 32^\circ = 64^\circ.$$

Според тоа,

$$\angle ACB = 180^\circ - 54^\circ - 64^\circ = 62^\circ.$$

Од тоа што $\triangle ACM$ и $\triangle BCN$ се рамнокраки триаголници следува:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AB} + \overline{BN} + \overline{MA} = \overline{MN} = 47 \text{ cm}.$$

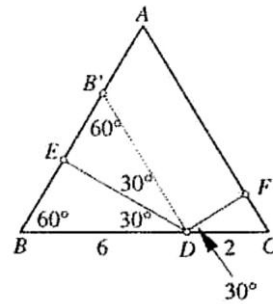
61. Даден е рамностран триаголник ABC со должина на страна 8 cm и точка D на страната BC таква што $\overline{DC} = 2 \text{ cm}$. Од точката D се повлечени нормали DE и DF на страните AB и AC (E припаѓа на страната AB , а F припаѓа на страната AC). Определи ги должините на отсечките BE и CF .

Решение. Имаме,

$$\angle BDE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Нека B' е симетричната точка на точката B во однос на точката E . Тогаш триаголникот $B'BD$ е рамностран и затоа важи

$$\begin{aligned} \overline{BE} &= \frac{1}{2} \overline{BB'} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} (\overline{BC} - \overline{CD}) \\ &= \frac{1}{2} (8 - 2) = 3 \text{ cm}. \end{aligned}$$



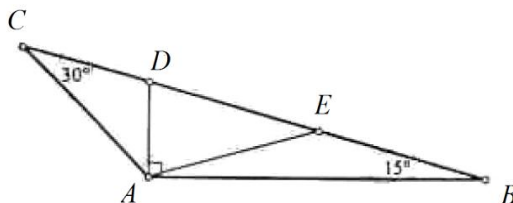
На потполно аналоген начин се докажува дека $\overline{CF} = \frac{1}{2} \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ cm}$

62. Даден е триаголник ABC со агли $\angle ABC = 15^\circ$ и $\angle ACB = 30^\circ$. На страната BC е избрана точка D таква што правата AD е нормална на правата AB . Докажи дека $\overline{BD} = 2\overline{AC}$.

Решение. На страната земаме точка E таква што

$$\angle EAB = \angle ABE = 15^\circ.$$

Триаголникот ABE е рамнокрак, па затоа



$\overline{AE} = \overline{BE}$. Понатаму,

$$\angle AEC = \angle ABE + \angle BAE = 30^\circ,$$

што значи дека триаголникот AEC е рамнокрак. Затоа $\overline{AE} = \overline{AC}$. Ако земеме предвид дека $\angle DAB = 90^\circ$, добиваме

$$\angle DAE = \angle DAB - \angle BAE = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ,$$

а исто така и

$$\angle ADE = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ,$$

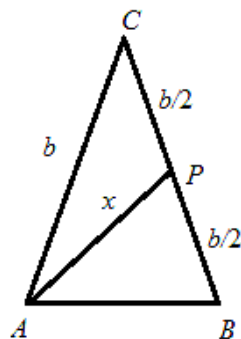
што значи дека и триаголникот ADE е рамнокрак. Според тоа, $\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{BE} = \overline{DE}$, па затоа $\overline{BD} = \overline{BE} + \overline{DE} = 2\overline{AC}$, што и требаше да се докаже.

63. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB} = c$ и $\overline{AC} = b$. Нека A_1 е средината на страната BC , а P е подножјето на нормалата повлечена од темето B на симетралата на $\angle BAC$. Определи ја должината на отсечката A_1P како функција од b и c .

Решение. Правата BP ја сече полуправата AC во точка B' таква што $\overline{AB'} = \overline{AB} = c$, бидејќи AP е истовремено и висина и симетрала на $\angle A$ во триаголникот ABB' . Ако $b > c$, тогаш точката B' е на отсечката AC и $\overline{B'C} = \overline{AC} - \overline{AB'} = b - c$ (направи цртеж). Точката P е подножје на висината повлечена кон основата на рамнокракиот триаголник ABB' , па затоа е средина на отсечката BB' . Затоа A_1P е средна линија на триаголникот $BB'C$, па важи $\overline{A_1P} = \frac{b-c}{2}$. Ако $b = c$, тогаш $A_1 \equiv P$, па е $\overline{A_1P} = 0$. Ако е $c > b$, тогаш на потполно ист начин следува дека $\overline{A_1P} = \frac{c-b}{2}$.

64. Должината на основата на рамнокрак триаголник е 8 cm . Отсечката која поврзува крајна точка на основата со средината на спротивната страна го дели триаголникот на два триаголника така што периметарот на едниот од овие два триаголника е за 2 cm поголем од периметарот на другиот триаголник. Определи ја должината на кракот на рамнокракиот триаголник.

Решение. Нека ABC е рамнокрак триаголник



таков што $\overline{AB} = 8\text{ cm}$. Со b да ја означиме должината на кракот, а со P средната на кракот BC . Нека $\overline{AP} = x$. Можни се два случаја:

1) Нека $\triangle ACP$ има поголем периметар. Тогаш важи

$$x + b + \frac{b}{2} = x + 8 + \frac{b}{2} + 2,$$

па затоа $b = 10\text{ cm}$.

2) Нека $\triangle ABP$ има поголем периметар. Тогаш важи

$$x + b + \frac{b}{2} + 2 = x + 8 + \frac{b}{2},$$

па затоа $b = 6\text{ cm}$.

65. Во $\triangle ABC$ точно е равенството $2 \cdot \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$. Симетралите на $\angle BAC$ и на $\angle ABC$ се сечат во точката S . Правата која минува низ точката S и е паралелна на страната AB ги сече страните AC и BC во точките D и E , соодветно. Определи го периметарот на $\triangle ABC$, ако периметарот на $\triangle CDE$ е еднаков на 40 cm .

Решение. Прво да забележиме дека $\angle DAS = \angle SAB$ (симетрала на агол) и $\angle DSA = \angle SAB$ (агли на трансферзала).

Затоа $\angle DAS = \angle DSA$, т.е. триаголникот ASD е рамнокрак, па затоа важи $\overline{DA} = \overline{DS}$.

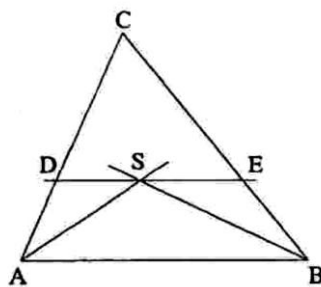
На потполно ист начин се докажува дека $\angle ESB = \angle SBE$, т.е. триаголникот SBE е рамнокрак, па затоа важи $\overline{ES} = \overline{EB}$.

Од $\overline{DA} = \overline{DS}$ и $\overline{ES} = \overline{EB}$ следува $\overline{DE} = \overline{AD} + \overline{EB}$, па затоа за периметарот на триаголникот CDE важи

$$40\text{ cm} = L_{CDE} = \overline{AC} + \overline{BC}.$$

Но, должините на страните на страните на $\triangle ABC$ го задоволуваат равенството $2 \cdot \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$, па затоа $\overline{AB} = 20\text{ cm}$. Конечно,

$$L_{ABC} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 60\text{ cm}.$$

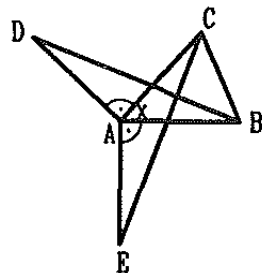


66. Даден е триаголник ABC . Од темето A е конструирана отсечка AD нормална на AC така што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и отсечка AE нормална на AB така што $\overline{AE} = \overline{AB}$. Притоа точките D и B се на различни страни од правата AC , а точките C и E се на различни страни од правата AB . Докажи дека $\overline{BD} = \overline{CE}$.

Решение. За триаголниците ABD и ACE важи $\overline{AE} = \overline{AB}$, $\overline{AD} = \overline{AC}$ и

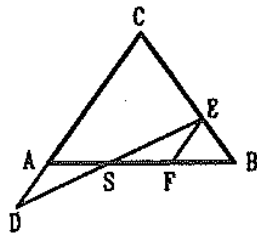
$$\angle BAD = 90^\circ + x = \angle CAE,$$

па затоа од признакот САС следува дека тие се складни (цртеж десно). Сега од складноста следува дека $\overline{BD} = \overline{CE}$.



67. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB . На страната BC избрана е точка E , а на продолжението на отсечката CA преку темето A избрана е точка D така што $\overline{AD} = \overline{BE}$. Докажи дека страната AB ја преполовува отсечката DE .

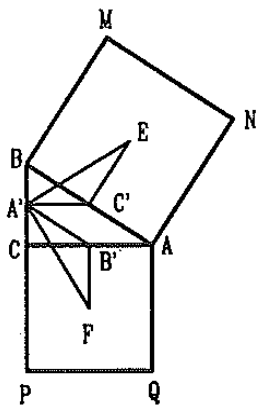
Решение. Нека отсечките AB и DE се сечат во точката S и нека правата p која минува низ точката E и е паралелна на страната AC ја сече страната AB во точката F . Тогаш $\angle EBF = \angle EFB$, па затоа триаголникот FBE е рамнокрак, т.е. $\overline{BE} = \overline{EF}$. Според тоа, $\overline{AD} = \overline{FE}$. Понатаму, $\angle DAS = \angle SFE$ и $\angle ADS = \angle SEF$ (Зошто?), па од признакот АСА следува дека триаголниците DSA и ESF се складни. Од складноста на овие триаголници следува $\overline{DS} = \overline{SE}$, што значи страната AB ја преполовува отсечката DE .



68. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C . Во надворешноста на квадратот се конструирани квадрати $ABMN$ и $ACPQ$. Докажи дека центрите на овие квадрати се еднакво оддалечени од средината A' на катетата BC .

Решение. Нека A', B', C' се средините на страните BC, CA, AB , соодветно на триаголникот ABC , нека E и F се центрите на квадратите $ABMN$ и $ACPQ$, соодветно и $\angle CAB = x$ (цртеж десно). Тогаш $A'C'$ е средна линија во триаголникот ABC , па затоа $\overline{A'C'} = \frac{1}{2} \overline{AC}$, а $\overline{B'F} = \frac{1}{2} \overline{AC}$, па затоа $\overline{A'C'} = \overline{B'F}$. Слично $\overline{A'B'} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \overline{C'E}$. Освен тоа

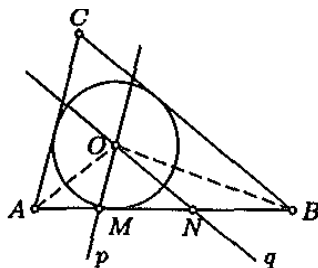
$$\angle A'B'F = 90^\circ + x = \angle A'C'E.$$



Значи, $\triangle A'B'F$ и $\triangle A'C'E$ се складни, па затоа $\overline{A'E} = \overline{A'F}$.

69. Во разностран триаголник ABC е впишана кружница k , чиј центар е точката O . Низ точката O се повлечени прави p и q така што $p \parallel AC$ и $q \parallel BC$. Ако правата p ја сече страната AB во точката M , а правата q ја сече страната AB во точката N , тогаш периметарот на триаголникот OMN е еднаков на должината на страната AB . Докажи!

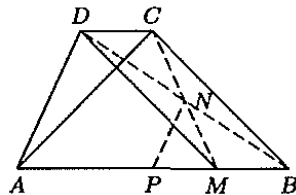
Решение. Правата AO е симетрала на $\angle BAC$, па затоа $\angle MAO = \angle CAO$, а од $p \parallel AC$ следува дека $\angle CAO = \angle AOM$, како агли со паралелни краци (цртеж десно). Значи, $\angle MAO = \angle MOA$, т.е. $\triangle AMO$ е рамнокрак и важи $\overline{AM} = \overline{OM}$. На потполно ист начин се докажува



дека $\triangle BNO$ е рамнокрак и дека важи $\overline{BN} = \overline{ON}$. Според тоа, периметарот на $\triangle OMN$ е еднаков на $\overline{OM} + \overline{MN} + \overline{NO} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NB} = \overline{AB}$, што и требаше да се докаже.

70. Дадени се рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) и произволна точка M на основата AB на триаголникот ABC . Потоа е конструиран паралелограм $MBCD$. Докажи дека $\angle DAB = \angle AMC$. Ако пресекот на отсечките MC и BD е точката N , а P е средина на страната AB , тогаш $\overline{MN} = \overline{PN}$. Докажи!

Решение. За триаголниците ACD и MBC важи $\overline{CD} = \overline{MB}$, $\angle DCA = \angle CAB$ (агли со паралелни краци), $\angle CAB = \angle ABC$ како агли при основата на рамнокрак триаголник и $\overline{AC} = \overline{BC}$ како краци на рамнокрак



триаголник, па од признакот АСА следува дека овие триаголници се складни. Од сличноста следува дека $\angle CDA = \angle CMB$. Бидејќи

$$\angle DAM = 180^\circ - \angle CDA \text{ и } \angle AMC = 180^\circ - \angle BMC,$$

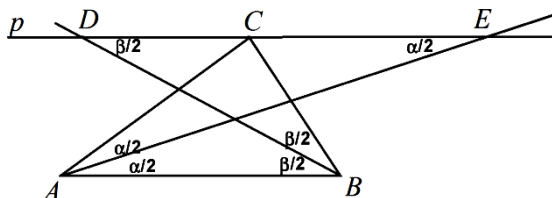
добиваме дека $\angle AMC = \angle DAB$.

Понатаму, бидејќи $MBCD$ е паралелограм и точката N е пресек на дијагоналите, заклучуваме дека $\overline{DN} = \overline{BN}$, а по услов $\overline{AP} = \overline{PB}$, заклу-

чуваме дека NP е средна линија на триаголникот ABD , па затоа $PN \parallel AD$ и оттука $\angle DAB = \angle NPM$. Од првиот дел од решението следува $\angle DAB = \angle PMN$, па затоа $\angle NPM = \angle NPM$. Според тоа, триаголникот MNP е рамнокрак, па затоа $\overline{MN} = \overline{PN}$.

71. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Низ темето C е повлечена права p паралелна на страната AB . Симетралата на $\angle ABC$ ја сече правата p во точката D , а симетралата на $\angle BAC$ ја сече правата p во точката E . Докажи, дека $\overline{DE} = \overline{AC} + \overline{BC}$.

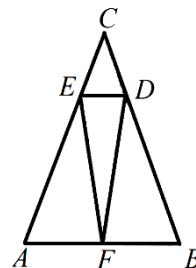
Решение. Бидејќи правата p е паралелна со правата AB , добиваме дека симетралите на аглиите α и β се трансферзали на овие



паралелни прави, па затоа $\angle CEA = \frac{\alpha}{2}$. Тоа значи, дека $\triangle AEC$ е рамнокрак со основа AE , па затоа $\overline{AC} = \overline{CE}$. Слично заклучуваме дека $\overline{BC} = \overline{CD}$. Според тоа, $\overline{DE} = \overline{CD} + \overline{CE} = \overline{AC} + \overline{BC}$.

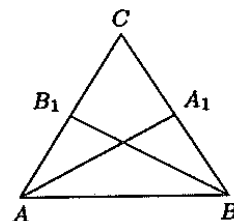
72. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. На краците AC и BC на $\triangle ABC$ земени се точки E и D , соодветно, такви што $\overline{CE} = \overline{CD}$, а точката F е средина на основата AB . Докажи, дека $\triangle EDF$ е рамнокрак.

Решение. Бидејќи $\overline{EA} = \overline{CA} - \overline{CE} = \overline{CB} - \overline{CD} = \overline{DB}$, $\angle EAF = \angle DBF$ (агли при основата на рамнокракиот $\triangle ABC$) и $\overline{AF} = \overline{FB} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ (точката F е средина на страната AB), од признакот САС следува дека $\triangle AEF \cong \triangle BDF$. Од складноста на овие триаголници следува дека $\overline{EF} = \overline{DF}$, што значи дека $\triangle EDF$ е рамнокрак.



73. Даден е рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$). Докажи дека тежишните линии кои соодветствуваат на краците на триаголникот се меѓусебно еднакви.

Решение. Нека AA_1 и BB_1 се тежишните линии кои соодветствуваат на краците на рамнокракиот триаголник ABC (цртеж десно). За триа-



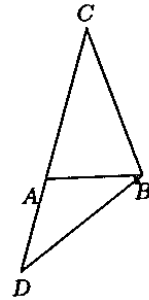
голниците $\angle ABA_1$ и $\angle ABB_1$ важи AB е заедничка страна, $\overline{BA_1} = \overline{AB_1} = \frac{\overline{BC}}{2}$ и $\angle A = \angle B$, па затоа тие се складни. Конечно, од складноста на овие триаголници следува $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$.

74. Аголот β на рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) е еднаков на 72° . На продолжението на кракот AC , по точката A , избрана е точка D таква што $\overline{AD} = \overline{AB}$. Докажи дека триаголникот BCD е рамнокрак.

Решение. Јасно, $\angle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$ (цртеж десно). Од $\overline{AD} = \overline{AB}$ следува дека триаголникот DBA е рамнокрак и $\angle BAC = 72^\circ$ е надворешен агол за овој триаголник. Затоа

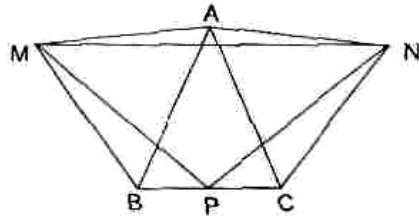
$$\angle ADB = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ = \angle ACD,$$

што значи дека триаголникот BCD е рамнокрак.



75. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со основа BC . На краците AB и AC од надворешната страна на $\triangle ABC$ се конструирани рамнострани триаголници BAM и ACN . Ако точката P е средина на основата BC , тогаш триаголникот MPN е рамнокрак. Докажи!

Решение. Бидејќи P е средина на основата BC важи $\overline{BP} = \overline{CP}$. Бидејќи рамностраниите триаголници се конструирани над краците на рамнокракиот триаголник тие имаат еднакви должини на страни, т.е. $\overline{BM} = \overline{CN}$. Понатаму,



$$\angle PBM = \angle PBA + 60^\circ = \angle BCA + 60^\circ = \angle PCN,$$

па од признакот САС следува дека триаголниците BPM и CPN се складни. Од докажаната складност следува $\overline{MP} = \overline{NP}$, што значи дека триаголникот MPN е рамнокрак

76. Даден е триаголник ABC . Нека точките P и Q припаѓаат на страните AC и BC , соодветно и се такви што периметарот на триаголникот ABP е еднаков на периметарот на триаголникот ABQ , а периметарот

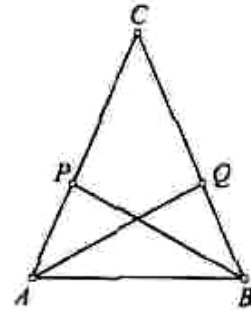
на триаголникот AQC е еднаков на периметарот на триаголникот BSP . Докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\begin{aligned} L_{ABQ} + L_{AQC} &= \overline{AB} + \overline{BQ} + \overline{AQ} + \overline{AQ} + \overline{QC} + \overline{AC} \\ &= \overline{AB} + (\overline{BQ} + \overline{QC}) + \overline{AC} + 2\overline{AQ} \\ &= L_{ABC} + 2\overline{AQ} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L_{ABP} + L_{PBC} &= \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{AP} + \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{PC} \\ &= \overline{AB} + (\overline{AP} + \overline{PC}) + \overline{BC} + 2\overline{BP} \\ &= L_{ABC} + 2\overline{BP}. \end{aligned}$$



Бидејќи $L_{ABP} + L_{PBC} = L_{ABQ} + L_{AQC}$, од горните равенства добиваме $\overline{AQ} = \overline{BP}$, па затоа

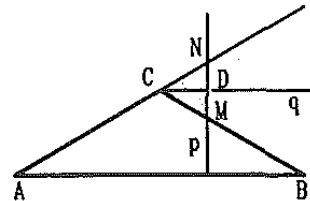
$$\overline{AP} = L_{ABP} - \overline{AB} - \overline{BP} = L_{ABQ} - \overline{AB} - \overline{AQ} = \overline{BQ}.$$

Според тоа, триаголниците ABP и ABQ имаат заедничка страна AB и два пара страни со еднаква должина $\overline{AQ} = \overline{BP}$ и $\overline{AP} = \overline{BQ}$, па од признакот ССС следува дека тие се складни. Последното значи дека $\angle CAB = \angle PAB = \angle QBA = \angle CBA$, т.е триаголникот ABC е рамнокрак.

77. Дадени се рамнокрак триаголник ABC и права p која е нормална на основата AB . Правата p го сече кракот BC во точката M и продолжението на кракот AC во точката N . Докажи дека триаголникот MCN е рамнокрак.

Решение. Низ точката C повлекуваме права q паралелна со правата AB . Нека $p \cap q = M$ (цртеж десно). Бидејќи

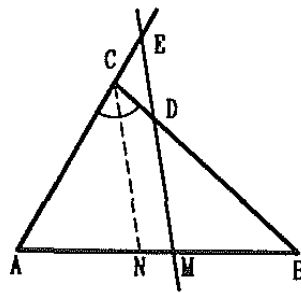
$$\begin{aligned} \angle CDM &= \angle CDN = 90^\circ, \\ \angle NCD &= \angle CAB = \angle ABC = \angle MCD, \end{aligned}$$



како агли со паралелни краци и како агли при основата на рамнокрак триаголник и CD е заедничка страна за триаголниците CMD и CND од признакот АСА следува дека овие триаголници се складни. Од складноста следува $\overline{CN} = \overline{CM}$, што значи дека триаголникот MCN е рамнокрак.

78. Во триаголникот ABC точката M е средина на страната AB . Правата p која минува низ точката M и е паралелна на симетралата на $\angle ACB$ ги сече правите BC и AC во точките D и E , соодветно. Докажи дека триаголникот CDE е рамнокрак.

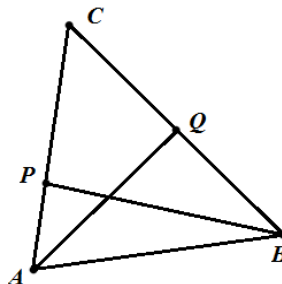
Решение. Нека CN е симетралата на $\angle ACB$ (цртеж десно). Од $CN \parallel DE$ следува дека $\angle ACN = \angle CED$, како агли со паралелни краци. Понатаму, $\angle CDE = \angle MDB$ како накрсни агли, а $\angle MDB = \angle NCB$ како согласни агли. Од $\angle ACN = \angle NCB$ и горните равенства следува $\angle CDE = \angle MBD = \angle NCB = \angle ACN = \angle CED$, што значи дека триаголникот CDE е рамнокрак.



79. Даден е $\triangle ABC$. Точките P и Q лежат на страните AC и BC , соодветно и се такви што периметарот на $\triangle ABP$ е еднаков со периметарот на $\triangle ABQ$, а периметарот на $\triangle AQC$ е еднаков со периметарот на $\triangle PBC$. Докажи, дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} L_{\triangle ABQ} + L_{\triangle AQC} &= \\ &= \overline{AB} + \overline{BQ} + \overline{AQ} + \overline{AQ} + \overline{QC} + \overline{AC} \\ &= \overline{AB} + (\overline{BQ} + \overline{QC}) + 2\overline{AQ} + \overline{AC} \\ &= \overline{AB} + \overline{BC} + 2\overline{AQ} + \overline{AC} \\ &= L_{\triangle ABC} + 2\overline{AQ} \end{aligned}$$



и

$$\begin{aligned} L_{\triangle ABP} + L_{\triangle PBC} &= \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{BC} + \overline{PC} \\ &= \overline{AB} + (\overline{AP} + \overline{PC}) + 2\overline{BP} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC} + 2\overline{BP} + \overline{BC} \\ &= L_{\triangle ABC} + 2\overline{BP} \end{aligned}$$

Сега, од $L_{\triangle ABP} = L_{\triangle ABQ}$ и $L_{\triangle AQC} = L_{\triangle PBC}$ и претходните равенства следува дека $\overline{AQ} = \overline{BP}$. Понатаму, од

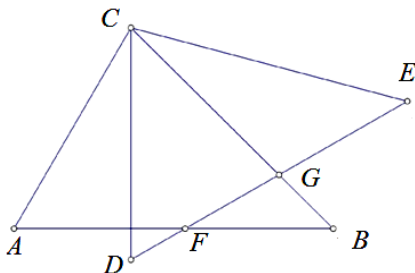
$$\overline{AP} = L_{\triangle ABP} - \overline{BP} - \overline{AB} = L_{\triangle ABQ} - \overline{AQ} - \overline{AB} = \overline{BQ}$$

следува дека триаголниците ABP и ABQ имаат една заедничка страна и $\overline{AQ} = \overline{BP}$, $\overline{AP} = \overline{BQ}$, па затоа тие се складни. Според тоа,

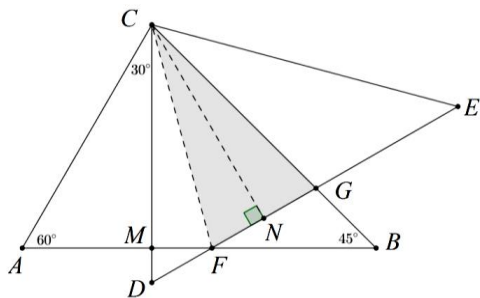
$$\angle CAB = \angle PAB = \angle QBA = \angle CBA,$$

т.е. $\triangle ABC$ е рамнокрак со краци AC и BC .

80. За триаголникот ABC важи $\angle CAB = 60^\circ$ и $\angle ABC = 45^\circ$. Понатаму, триаголниците ABC и CDE се складни и важи $\angle DCA = 30^\circ$ (цртеж десно). Докажи дека триаголникот CFG е рамнокрак.



Решение. Нака M е пресекот на AB и DC и N е подножјето на нормалата повлечена од темето C кон страната DE . Од $\angle CAB = 60^\circ$ и $\angle DCA = 30^\circ$ следува дека $\angle AMD = 90^\circ$. Од складноста на триаголниците ABC и CDE следува $\angle NCM = 30^\circ$. Понатаму,



$$\angle GCN = \angle GCM - \angle NCM = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ,$$

па затоа важи

$$\angle FGC = 90^\circ - \angle GCN = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

Значи,

$$\angle CGE = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ = \angle BGF.$$

Според тоа,

$$\angle GFB = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ,$$

од каде добиваме $\angle MFN = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

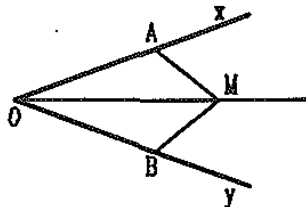
Сега, триаголниците AMC и DNC сескладни (ACA), па затоа $\overline{MC} = \overline{NC}$. Понатаму триаголниците MFC и FNC се правоаголни, $\overline{MC} = \overline{NC}$ и имаат заедничка хипотенуза, па затоа тие се складни. Затоа

$$\angle CFG = 150^\circ : 2 = 75^\circ.$$

Конечно, од $\angle CFG = 75^\circ = \angle FGC$ следува дека триаголникот CFG е рамнокрак.

81. На краците на остриот агол $\angle xOy$ дадени се точки A и B така што $\overline{OA} = \overline{OB}$. Ако M е произволна точка на симетралата на аголот $\angle xOy$, тогаш $\overline{MA} = \overline{MB}$. Докажи!

Решение. За триаголниците OAM и OBM важи $\overline{OA} = \overline{OB}$, OM е заедничка страна и $\angle AOM = \angle BOM$ (OM е симетрала на аголот $\angle xOy$), па затоа тие се складни. Од добиената складност следува $\overline{MA} = \overline{MB}$.



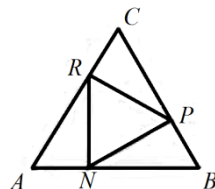
82. На страните AB, BC, CA на рамностраниот триаголник ABC земени се точки N, P, R , соодветно такви што $\overline{AN} = \overline{BP} = \overline{CR}$. Докажи, дека триаголникот PNR е рамностран.

Решение. Триаголникот ABC е рамностран, па затоа од $\overline{AN} = \overline{BP} = \overline{CR}$ следува $\overline{NB} = \overline{PC} = \overline{RA}$. Покрај тоа во рамностран триаголник ABC важи

$$\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = 60^\circ,$$

па од признакот САС следува дека

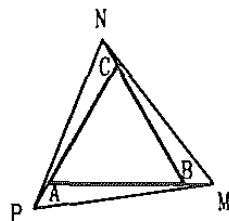
$$\triangle ANR \cong \triangle BPN \cong \triangle CRP.$$



Сега од добиената складност следува дека $\overline{RN} = \overline{NP} = \overline{PR}$, т.е. $\triangle PNR$ е рамностран.

83. Даден е рамностран триаголник ABC . Секоја од страните AB, BC, CA е продолжена преку темињата B, C, A , соодветно за отсечка d така што $\overline{BM} = \overline{CN} = \overline{AP} = d$. Докажи дека триаголникот MNP е рамностран.

Решение. За триаголниците BNM , CNP и APM важи $\angle A = \angle B = \angle C$, $\overline{BM} = \overline{CN} = \overline{AP} = d$ и $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = a + d$, па од признакот САС следува дека се складни. Од складноста следува $\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PM}$, што значи дека триаголникот MNP е рамностран.



84. Дадена е отсечката AD на која се избрани точки B и C такви што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Над отсечките AC и CD од иста страна на правата AD се конструирани рамнострани триаголници ACF и CDE . Докажи дека триаголникот BEF е рамностран.

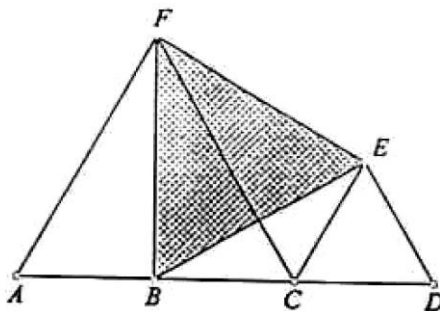
Решение. Имаме

$$\overline{AC} = \overline{AF} = \overline{FC} = \overline{BD}$$

и

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{CE}.$$

Значи, точките B и F се еднакво оддалечени од точките A и C , па затоа BF е симетрала на отсечката AC . Според тоа, $BF \perp AC$, однос-



но $\angle CDF = \angle ABF = 90^\circ$. Оттука следува дека $\triangle ABF$ е правоаголен со агли $\angle FAB = 60^\circ$ и $\angle AFB = 30^\circ$. Понатаму, од

$$\overline{BD} = \overline{AF}, \overline{AB} = \overline{DE} \text{ и } \angle FAB = \angle BDE = 60^\circ,$$

според признакот САС следува дека триаголниците ABF и DEB се складни. Затоа $\overline{BF} = \overline{BE}$, т.е. триаголникот EFB е рамнокрак. Од докажаната складност следува $\angle AFB = \angle DBE = 30^\circ$, па затоа

$$\angle FBE = 180^\circ - 90^\circ - \angle EBD = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Значи, $\triangle BEF$ е рамнокрак со агол од 60° меѓу краците, од што следува дека тој е рамностран триаголник.

V.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

85. На страната AB на квадратот $ABCD$ конструиран е рамностран триаголник ABE при што точката E лежи во внатрешноста на квадратот. Пресметај го аголот DEC .

Решение. Имаме $\angle EBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, направи цртеж. Страните на триаголникот и квадратот се еднакви па затоа триаголникот EBC е рамнокрак ($\overline{EB} = \overline{BC}$). Аглите на основата се по $\frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$. Понатаму, $\triangle EBC \cong \triangle EAD$, па затоа $\angle DEA = 75^\circ$. Конечно,

$$\angle DEC = 360^\circ - 60^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ.$$

86. Над страната AB на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран $\triangle ABE$ таков што точката E е во внатрешноста на квадратот. Определи го $\angle DEC$.

Решение. Имаме $\overline{BE} = \overline{BC}$, па затоа $\triangle CEB$ е рамнокрак. Понатаму,

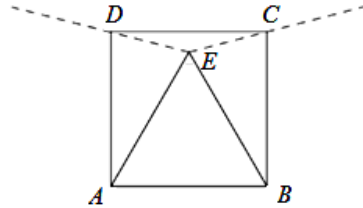
$$\angle EBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

па затоа

$$\angle BEC = \angle ECB = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

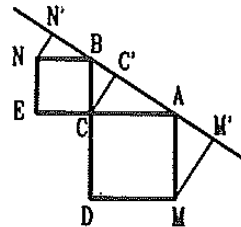
Аналогно се докажува дека $\angle AED = \angle ADE = 75^\circ$. Конечно,

$$\angle DEC = 360^\circ - (60^\circ + 75^\circ + 75^\circ) = 150^\circ.$$



87. Над катетите AC и BC во надворешноста на правоаголен триаголник ABC конструирани се квадрати $ACDM$ и $BCEN$. Нека M' и N' се подножјата на нормалите повлечени од точките M и N на правата AB , соодветно. Докажи дека $\overline{MM'} + \overline{NN'} = \overline{AB}$.

Решение. Нека CC' е висината која соодветствува на хипотенузата (цртеж десно). Тогаш триаголниците AMM' и ACC' се правоаголни со еднакви хипотенузи и $\angle CAC' = \angle AMM'$ (агли со нормални краци), па затоа се складни. Затоа важи $\overline{MM'} = \overline{AC'}$. На потполно ист начин се докажува дека триаголниците BNN' и BCC' се складни, од каде следува дека $\overline{NN'} = \overline{BC'}$. Значи, $\overline{MM'} + \overline{NN'} = \overline{AC'} + \overline{C'B} = \overline{AB}$.



88. На страните AB, BC, CD, DA на квадратот BCD земено се точки M, N, P, Q , соодветно, така што $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е квадрат.

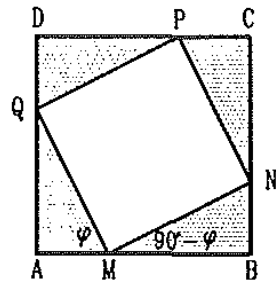
Решение. За правоаголните триаголници AMQ, BMN, CNP и DPQ важи $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$ и $\overline{QA} = \overline{MB} = \overline{NC} = \overline{PD}$, па затоа тие се складни (цртеж десно). Од складноста на овие триаголници следува

$$\overline{QP} = \overline{MQ} = \overline{NM} = \overline{PN},$$

$$\angle AMQ = \angle BMN = \angle NPC = \angle PQD = \varphi \text{ и}$$

$$\angle AQM = \angle BMN = \angle CNP = \angle DPQ = 90^\circ - \varphi.$$

Конечно, од

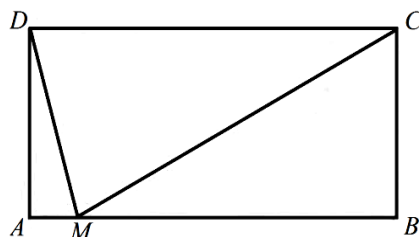


$$\angle QMN = 180^\circ - (\angle AMQ + \angle BMN) = 180^\circ - (90^\circ - \varphi + \varphi) = 90^\circ,$$

заклучуваме дека четириаголникот $MNPQ$ е квадрат.

89. Даден е правоаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. На страната AB избрана е точка M таква што $\angle AMD = \angle CMD$. Определи го аголот $\angle CMD$.

Решение. Имаме $\angle AMD = \angle CDM$, како агли на трансферзала, а бидејќи $\angle AMD = \angle CMD$ следува $\angle CMD = \angle CDM$. Значи, триаголникот CDM е рамнокрак, па затоа $\overline{CM} = \overline{CD}$. Бидејќи $\overline{AB} = \overline{CD}$ добиваме дека $\overline{CD} = 2\overline{BC}$, а тоа значи



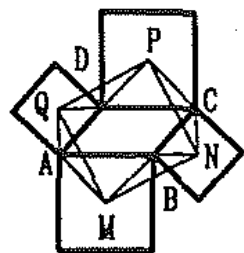
дека правоаголникот CBM е половина од рамностран триаголник, од што заклучуваме дека $\angle CMB = 30^\circ$. Сега, од

$$\angle AMD + \angle CMD + \angle CMB = 180^\circ,$$

добиваме $2\angle CMD + 30^\circ = 180^\circ$, т.е. $\angle CMD = 75^\circ$.

90. Над страните на паралелограмот $ABCD$ од надворешната страна се конструираат квадрати. Докажи дека центрите на овие квадрати се темиња на квадрат.

Решение. Нека M, N, P, Q се средините на квадратите конструирани над страните AB, BC, CD, DA соодветно (цртеж десно). Ќе докажеме дека триаголниците AMQ, BMN, CNP и DPQ се складни. Имаме: $\overline{AQ} = \overline{BN} = \overline{CN} = \overline{DQ}$ како полови дијагонали на складни квадрати, слично



$$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CP} = \overline{DP} \text{ и}$$

$$\angle QAM = \angle MBN = \angle NCP = \angle PDQ = 90^\circ + \alpha,$$

каде α е остриот агол на паралелограмот, па затоа спомената складност следува од признакот САС. Од докажаната складност имаме $\overline{QM} = \overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ}$ и $\angle AMQ = \angle NMB$. Бидејќи $\angle AMB = 90^\circ$, добиваме $\angle QMN = \angle QMB + \angle BMN = \angle QMB + \angle QMA = \angle AMB = 90^\circ$, што значи дека четириаголникот $MNPQ$ е квадрат.

91. Даден е правоаголник $ABCD$. Симетралата на дијагоналата AC ја сече страната AB во точката E , а страната CD во точката F така што триаголникот EBC е рамнокрак. Определи го аголот $\angle DFE$.

Решение. Триаголникот EBC е рамнокрак правоаголен, па затоа

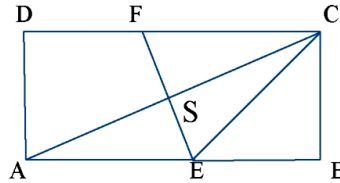
$$\angle ECB = \angle BEC = 45^\circ.$$

Бидејќи $ABCD$ е правоаголник, добиваме $\angle FCE = 90^\circ - \angle ECB = 45^\circ$. Точката E припаѓа на симетралата EF на дијагоналата AC , па затоа $\overline{EA} = \overline{EC}$, што значи дека триаголникот AEC е рамнокрак. Затоа $\angle ACE = \angle EAC$. Понатаму важи $\angle EAC = \angle FCA$ како остри агли со паралелни краци. Значи,

$$\angle ACE = \angle FCA = \frac{45^\circ}{2} = 22^\circ 30'.$$

Бидејќи $\angle DFE$ е надворешен агол за триаголникот CFS важи

$$\angle DFE = \angle CFS + \angle FCA = 90^\circ + 22^\circ 30' = 112^\circ 30'.$$



92. Даден е квадрат $ABCD$ и во неговата внатрешност е избрана точка P така што триаголникот BCP е рамностран. Правата AP ја сече страната CD во точката E . Определи го аголот $\angle CPE$.

Решение. Од $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BP}$ следува дека триаголникот ABP е рамнокрак. Според тоа, $\angle PAB = \angle APB$. Понатаму, од

$$\angle PBC = 60^\circ \text{ и } \angle ABC = 90^\circ$$

следува

$$\angle ABP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Оттука следува

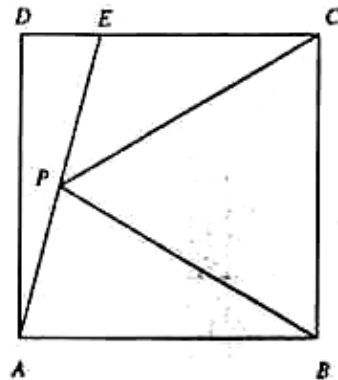
$$\begin{aligned} 2\angle APB &= \angle APB + \angle BAP \\ &= 180^\circ - \angle ABP \\ &= 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ, \end{aligned}$$

т.е. $\angle APB = 75^\circ$. Конечно, од равенството

$$\angle CPE + \angle CPB + \angle APB = 180^\circ,$$

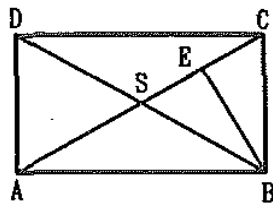
добиваме

$$\angle CPE = 180^\circ - (\angle CPB + \angle APB) = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ.$$



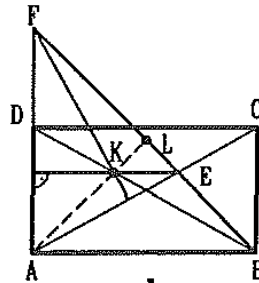
93. Даден е правоаголник $ABCD$ ($\overline{AB} > \overline{BC}$). Нормалата од темето B повлечена кон дијагоналата AC ја сече дијагоналата AC во точката E така што отсечката AE е трипати подолга од отсечката CE . Определи го аголот под кој се сечат дијагоналите на правоаголникот.

Решение. Нека $\overline{CE} = x$. Тогаш $\overline{AE} = 3x$, па затоа $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE} = 3x + x = 4x$ (цртеж десно). Понатаму, $\overline{AS} = \overline{CS} = \overline{BS} = 2x$, па затоа $\overline{SE} = \overline{CS} - \overline{CE} = 2x - x = x$. Според тоа, триаголникот BES е правоаголен со хипотенуза $\overline{BS} = 2x$ и катета $\overline{SE} = x$, што значи дека тој е половина од рамностран триаголник со страна BS . Оттука следува дека $\angle BSC = 60^\circ$.



94. Во правоаголник $ABCD$ симетралата на аголот во темето B ги сече правите AC и AD во точките E и F , соодветно. Низ точката E е повлечена права паралелна со AB која ја сече дијагоналата BD во точката K . Докажи дека правата FK е нормална на дијагоналата AC .

Решение. Според условот на задачата имаме $KE \parallel AB \perp AF$. Нека $AK \cap BF = L$. Триаголниците AKB и AEB имаат заедничка страна AB , $\overline{AE} = \overline{BK}$ и $\angle BAE = \angle ABK$, па затоа тие се складни. Според тоа, $\angle BAK = \angle ABE = 45^\circ$, па затоа $\angle ALB = 180^\circ - \angle ABE - \angle BAK = 90^\circ$. Бидејќи $KE \perp AF$ и $AK \perp EF$, заклучуваме дека AK и EK се висини во $\triangle AEF$, а K е негов ортоцентар. Според тоа, FK е третата висина во $\triangle AEF$, па затоа FK е нормална на AE , односно на AC .



95. Во правоаголникот $ABCD$ важи $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. На страната AB е земена точка P таква што $\angle APD = \angle DPC$. Определи го овој агол.

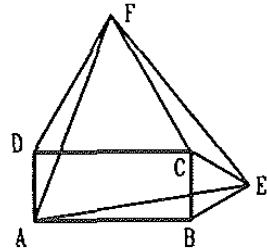
Решение. Од $\angle DPC = \angle APD = \angle PDC$ следува дека триаголникот DPC е рамнокрак, па затоа $\overline{CP} = \overline{DP} = 2\overline{BC}$ (направи цртеж). Значи, правоаголниот триаголник PBC е половина од рамностран триаголник, па затоа $\angle BPC = 30^\circ$. Конечно,

$$\angle APD = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ.$$

96. Во надворешноста на правоаголникот $ABCD$ се конструирани рамнострани триаголници BCE и CFD . Докажи дека триаголникот AEF е рамностран.

Решение. За триаголниците ABE , CEF и ADF важи $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{CF} = \overline{DF}$, $\overline{BC} = \overline{BE} = \overline{CE} = \overline{DA}$

и $\angle ABE = \angle ECF = \angle ADF = 90^\circ + 60^\circ$, па затоа тие се складни (цртеж десно). Од докажана складност следува $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FA}$, што и требаше да се докаже.



97. Даден е правоаголник со страни a и b . Страната a ја зголемуваме за $\frac{1}{4}$ од нејзината должина, а страната b ја намалуваме $\frac{1}{3}$ од нејзината должина. Дали плоштината на правоаголникот ќе се зголеми или ќе се намали?

Решение. Новите страни на правоаголникот се $a + \frac{1}{4}a = \frac{5}{4}a$ и $b - \frac{1}{3}b = \frac{2}{3}b$. Бидејќи $\frac{5}{4}a \cdot \frac{2}{3}b = \frac{5}{6}ab < ab$ заклучуваме дека плоштината на правоаголникот ќе се намали за $ab - \frac{5}{6}ab = \frac{1}{6}ab$, т.е. за $\frac{1}{6}$.

98. Во правоаголникот $ABCD$ важи $\overline{AD} = 12\text{ cm}$. На правата AC преку темето C земена е точка E таква што периметарот на четириаголникот $ABED$ е еднаков на 123 cm , а периметарот на триаголникот BEC е еднаков на 64 cm . Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Ги воведуваме ознаките

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a, \quad \overline{AD} = \overline{BC} = b, \quad \overline{BE} = c$$

и $\overline{CE} = d$. Тогаш важи

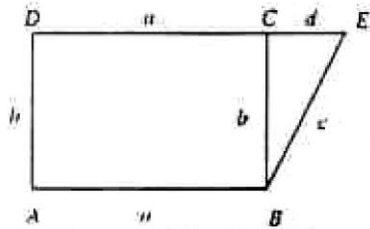
$$a + c + (d + a) + b = 123 \text{ и}$$

$$b + c + d = 64,$$

па затоа

$$2a = a + c + (a + d) + b - (b + c + d) = 123 - 64 = 59$$

т.е. $a = 29,5\text{ cm}$. Според тоа, $P_{ABCD} = ab = 29,5 \cdot 12 = 354\text{ cm}^2$.



99. Правоаголна нива чија ширина е двапати помала од должината, нацртана е на два плана, на едниот во размер 1:7500, а на другиот во раз-

мер 1:2500. Збирот на периметрите на правоаголниците на двата плана е 144 mm . Пресметај ги реалните должина и ширина на нивата.

Решение. Ако на планот со размер 1:7500 должината на помалата страна е x , тогаш должината на поголемата страна на нивата е $2x$, а периметарот е $6x$. На планот со размер 1:2500, помалата страна има должина $3x$, а поголемата страна има должина $6x$. На тој план периметарот на нивата е $18x$.

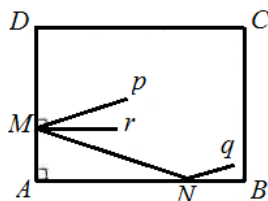
Збирот на периметрите на двата плана е $6x + 18x = 24x$. Од условот на задачата имаме $24x = 144$, од каде добиваме $x = 6\text{ mm}$.

Сега, вистинската должина на страните на нивата се

$$a = 7500 \cdot 6 = 45000\text{ mm} = 45\text{ m} \text{ и } b = 2 \cdot 45\text{ m} = 90\text{ m}.$$

100. Површината на билијарската маса има облик на правоаголник чии темиња се A, B, C, D . Билијарската топка се движела така што прво ја удрила страната AD , се одбила од неа во страната AB , па повторно се одбила. Што може да се каже за смерот на движење на топката после одбивањето од страната AB во споредба со движењето на топката пред таа да удри во страната AD ?

Решение. Нека p е полуправата по која топката се движела пред да удри во страната AD , M е точката од страната AD во која удрила топката, r е нормалата на AD во точката M , точката N е местото на ударот на топката во страната AB и q е полуправата по која топката се движела после одбивањето од страната AB (види цртеж).



Бидејќи упадниот агол е еднаков на одбивниот агол имаме

$$\angle pMD = \angle AMN \text{ и } \angle AMN = \angle BNq.$$

Понатаму,

$$\angle pMr = 90^\circ - \angle pMD = 90^\circ - \angle AMN = \angle rMN$$

и бидејќи $r \parallel AN$ добиваме $\angle rMN = \angle ANM$. Според тоа,

$$\angle pMr = \angle AMN = \angle qNB.$$

Значи, аглиите $\angle pMr$ и $\angle qNB$ се еднакви и важи $r \parallel BN$, па затоа се паралелни и другите два крака p и q . Конечно, од претходно изнесеното следува дека после двете одбивања билијарската топка се движи паралелно со почетниот смер на движење.

101. Секогаш кога ќе исполни желба на сопственикот должината на правоаголниот волшебен килим се намалува за $\frac{1}{2}$ од постојната должина, а ширината се намалува за $\frac{1}{3}$ од постојната ширина. По три исполнети желби килимот имал плоштина $18 dm^2$. Почетната ширина на килимот била $1,8 m$. Определи ја почетната должина на килимот. Определи ја почетната плоштина на килимот.

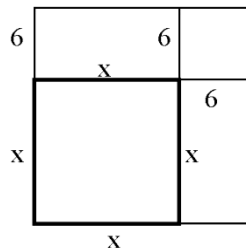
Решение. Нека x е почетната ширина на килимот. Почетната должина на килимот е $1,8 m = 18 dm$. По исполнувањето на првата желба должината на килимот е $\frac{1}{2}x$, а ширината е $18 - \frac{1}{3} \cdot 18 = 12 dm$. По исполнувањето на втората желба должината на килимот е $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x$, а ширината е $12 - \frac{1}{3} \cdot 12 = 8 dm$. По исполнувањето на третата желба должината на килимот е $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}x$, а ширината е $8 - \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} dm$. Сега за плоштината на килимот добиваме $\frac{1}{8}x \cdot \frac{16}{3} = 18$, од каде наоѓаме $x = 27 dm = 2,7 m$.

Конечно, почетната плоштина на килимот е

$$P = 2,7 \cdot 1,8 = 4,86 m^2.$$

102. Ако страната на квадратот се зголеми за $6 cm$, тогаш неговата плоштина се зголемува за $120 cm^2$. Определи ја должината на страната на почетниот квадрат.

Решение. Нека x е должината на страната на дадениот квадрат. Со зголемувањето на должината на страната за $6 cm$ плоштината на дадениот квадрат се зголемува за плоштината на квадрат со должина на страна $6 cm$ и две плоштини на правоаголници со должини на страни x и $6 cm$. Оттука следува равенката $120 = 2 \cdot 6x + 6 \cdot 6$, чие решение е $x = 7 cm$.



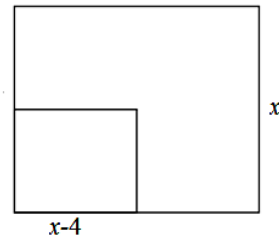
103. Определи ги сите правоаголници чии должини на страни се природни броеви, а чиј мерен број на плоштината е еднаков на мерниот број на периметарот на правоаголникот.

Решение. Нека a и b се должините настраните на правоаголникот. Од условот на задачата следува $ab=2(a+b)$, од каде добиваме $2b=a(b-2)$, односно $a=\frac{2b}{b-2}=\frac{2b-4+4}{b-2}=\frac{2(b-2)+4}{b-2}=2+\frac{4}{b-2}$. Сега, бидејќи a и b се природни броеви добиваме $b-2|4$, од каде наоѓаме $b-2 \in \{1, 2, 4\}$, т.е. $b \in \{3, 4, 6\}$. За $b=3$ добиваме $a=2-4=-2$, што не е можно. За $b=4$, добиваме $a=2+2=4$. За $b=6$ добиваме $a=2+1=3$. Според тоа, постојат два правоаголници со саканите својства и нивните страни се 4 и 4, односно 3 и 6.

104. Ако должината на страната на еден квадрат се намали за 4 cm , тогаш неговата плоштина се намалува за 80 cm^2 . Определи ја должината на страната на овој квадрат?

Решение. Плоштината на квадратот пред намалување на страната е $P=x^2$, а по намалувањето на страната е $P_1=(x-4)^2$. Тоа значи дека $P-P_1=x^2-(x-4)^2$, па затоа

$$\begin{aligned}x^2-(x-4)^2 &= 80, \\x^2-(x^2-8x+16) &= 80, \\x^2-x^2+8x-16 &= 80, \\x &= 12\text{ cm}.\end{aligned}$$



Според тоа, должината на страната на квадратот е еднаква на 12 cm .

105. Плоштината на еден правоаголник е 2016 cm^2 . Должината на едната страна е парен број сантиметри, а на другата страна е непарен број сантиметри. Определи го периметарот на овој правоаголник.

Решение. Имаме $P=ab=2016\text{ cm}^2$. Од $2016=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ следува дека бројот 2016 како производ на два броја може да се запише на еден од следниве начини:

$$\begin{aligned}2016 &= 1 \cdot 2016 = 2 \cdot 1008 = 3 \cdot 672 = 4 \cdot 504 = 7 \cdot 288 \\&= 8 \cdot 252 = 9 \cdot 224 = 16 \cdot 126 = 21 \cdot 96 = 32 \cdot 63.\end{aligned}$$

Бидејќи должината на едната страна треба да е парен број, а на другата треба да е непарен број, задачата има шест решенија и тоа:

- 1) $a=1\text{ cm}, b=2016\text{ cm}$ и тогаш $L=2(a+b)=4034\text{ cm}$,
- 2) $a=3\text{ cm}, b=672\text{ cm}$ и тогаш $L=2(a+b)=1350\text{ cm}$,

3) $a=7\text{ cm}, b=288\text{ cm}$ и тогаш $L=2(a+b)=590\text{ cm}$,

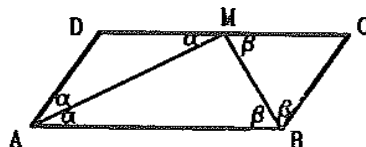
4) $a=9\text{ cm}, b=224\text{ cm}$ и тогаш $L=2(a+b)=466\text{ cm}$,

5) $a=21\text{ cm}, b=96\text{ cm}$ и тогаш $L=2(a+b)=234\text{ cm}$,

6) $a=63\text{ cm}, b=32\text{ cm}$ и тогаш $L=2(a+b)=190\text{ cm}$,

106. Даден е ромбоид $ABCD$ таков што страната AB е двапати подолга од страната BC . Ако M е средина на страната CD , определи го $\angle AMB$.

Решение. Нека $\angle BAM = \alpha$. Тогаш $\angle AMD = \alpha$, како агол со паралелни краци (цртеж десно). Слично, ако $\angle ABM = \beta$, тогаш $\angle BMC = \beta$. Бидејќи



$\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{CD}$, добиваме дека $\overline{AD} = \overline{DM} = \overline{MC} = \overline{BC}$, па затоа триаголниците ADM и MBC се рамнокраки. Според тоа, $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, па затоа $\alpha + \beta = 90^\circ$. Конечно, $\angle AMB = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$.

107. Даден е паралелограм $ABCD$ ($\overline{AB} > \overline{BC}$). Над страните AB и BC , надвот од паралелограмот, се конструирани квадрати $ABMN$ и $BCPQ$. Докажи дека $\overline{BD} = \overline{MQ}$.

Решение. За триаголниците ABD и BMQ важи

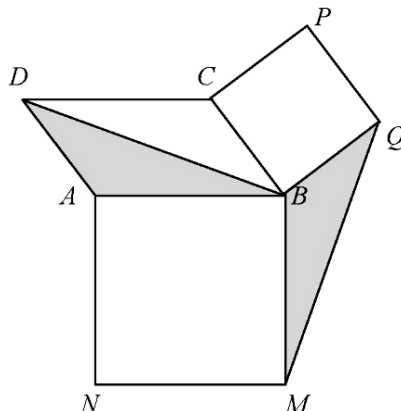
$$\overline{AB} = \overline{BM}, \overline{BQ} = \overline{BC} = \overline{AD} \text{ и}$$

$$\angle MBQ = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle ABC$$

$$= 180^\circ - \angle ABC = \angle BAD$$

па затоа тие се складни. Сега од докажаната складност следува

$\overline{BD} = \overline{MQ}$, што и требаше да се докаже.



108. Даден е паралелограм $ABCD$. Над страните AB и AD , надвор од паралелограмот $ABCD$, се конструирани рамнострани триаголници ABF и DAE . Докажи, дека триаголникот ECF е рамностран.

Решение. Ќе покажеме дека

$$\triangle AFE \cong \triangle BFC \cong \triangle DCE,$$

од каде следува дека $\overline{FE} = \overline{FC} = \overline{CE}$.

Од $\overline{AB} = \overline{DC}$ (спротивни страни во паралелограм), и $\overline{AB} = \overline{AF} = \overline{BF}$ (страни на рамностран триаголник) добиваме $\overline{DC} = \overline{AF} = \overline{BF}$. Аналогно, $\overline{AE} = \overline{DE} = \overline{BC}$.

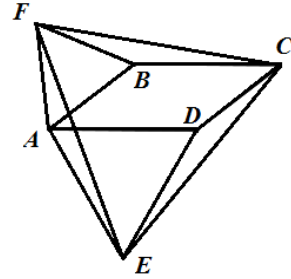
Но, $\angle ADC \cong \angle ABC$ како спротивни агли во паралелограм, па затоа

$$\begin{aligned}\angle EDC &= 360^\circ - \angle ADE - \angle ADC \\ &= 360^\circ - \angle ABF - \angle ABC = \angle FBC.\end{aligned}$$

Понатаму, $\angle BAD = 180^\circ - \angle ADC$, како соседни агли во паралелограм,.

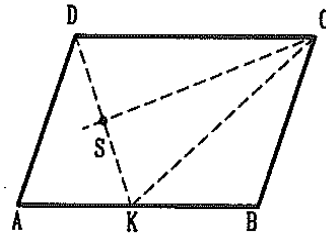
$$\begin{aligned}\angle FAE &= \angle FAB + \angle BAD + \angle DAE = 120^\circ + \angle BAD \\ &= 120^\circ + 180^\circ - \angle ADC = 300^\circ - \angle ADC = \angle EDC.\end{aligned}$$

Тогаш според признакот за складност на триаголници $\triangle SAC$, важи $\triangle AFE \cong \triangle BFC \cong \triangle DCE$, со што доказот е завршен.



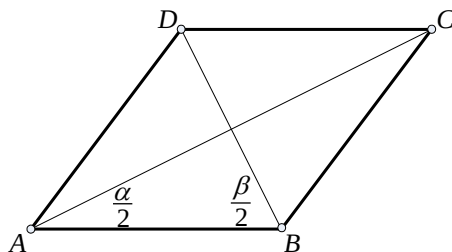
109. Во паралелограм $ABCD$ на страната AB е земена точка K таква што $\angle AKD = \angle DKC$. Ако S е средината на отсечката KD , докажи дека правата CS е нормална на правата DK .

Решение. Од $\angle AKD = \angle DKC$ и $\angle AKD = \angle KDC$ (агли со паралелни краци), следува дека $\angle KDC = \angle DKC$, што значи дека триаголникот CDK е рамнокрак. Ако S е средината на отсечката KD , тогаш CS е симетрала на основата KD на триаголникот KDC , па затоа правата CS е нормална на правата KD .



110. Аглите кои дијагоналите на еден ромб ги зафаќаат со една негова страна се однесуваат како 3:7. Пресметај ги агли на овој ромб.

Решение. Нека аглите при основата AB во ромбот $ABCD$ се α и β , α при темето A и β при темето B (види цртеж). Тогаш $\alpha + \beta = 180^\circ$. Дијагоналите AC и BD ги поделат аглите α и β , па според условот на задачата $\frac{\alpha}{2} : \frac{\beta}{2} = 3:7$, од каде добиваме



$\alpha = \frac{3}{7}\beta$. Сега ако замениме во равенството $\alpha + \beta = 180^\circ$, добиваме

$$\frac{3}{7}\beta + \beta = 180^\circ$$

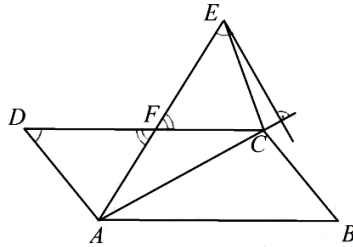
$$\frac{10}{7}\beta = 180^\circ$$

$$\beta = 7 \cdot 18^\circ = 126^\circ.$$

Значи, $\beta = 126^\circ$ и $\alpha = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$.

111. Даден е паралелограм $ABCD$ со тап агол при темето A . Нека точката E е осно симетрична сличка на темето B во однос на правата AC , а точката F е пресекот на правите CD и AE . Докажи, дека триаголниците AFD и CFE се складни.

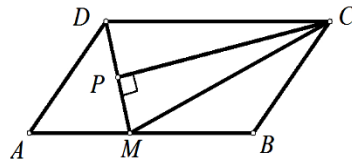
Решение. Триаголникот AEC е осно симетрична слика на триаголникот ABC во однос на оската на симетрија AC . Бидејќи при осна симетрија се запазуваат растојанието и аглите добиваме дека $\overline{EC} = \overline{BC}$ и $\angle AEC = \angle ABC$. Пона-



таму четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, па затоа $\overline{AD} = \overline{BC}$ и $\angle ADC = \angle ABC$, т.е. $\overline{EC} = \overline{AD}$ и $\angle ADF = \angle ADC = \angle AEC = \angle FEC$. Конечно бидејќи $\angle DFA = \angle AFC$ како накрсни агли, важи $\angle DAF = \angle FCE$, па затоа од признакот АСА следува дека триаголниците AFD и CFE се складни.

112. Даден е паралелограм $ABCD$ и точка M на страната AB таква што $\angle AMD = \angle CMD$. Докажи, дека ако точката P е средина на отсечката MD , тогаш $CP \perp DM$.

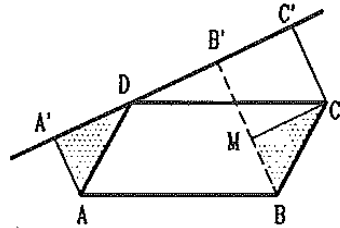
Решение. Од условот на задачата имаме $\angle AMD = \angle CMD$. Понатаму, $\angle AMD = \angle CDM$ како агли на трансферзала, па затоа $\angle CDM = \angle CMD$, што значи дека $\triangle CDM$ е рамнокрак и притоа важи $\overline{CM} = \overline{CD}$. Но, точката



P е средина на отсечката MD , па затоа CP е симетрала на основата MD , од што следува дека $CP \perp DM$.

113. Дадени се паралелограм $ABCD$ и права p која со паралелограмот има само една заедничка точка и тоа е темето D . Нека се A', B' и C' подножјата на нормалите повлечени од точките A, B и C на правата p , соодветно. Докажи дека $\overline{AA'} + \overline{CC'} = \overline{BB'}$.

Решение. Нека $CM \perp BB'$. Тогаш четириаголникот $CMC'B$ е правоаголник, па затоа $\overline{CC'} = \overline{MB'}$. Понатаму, $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\angle AA'D = \angle BMC = 90^\circ$ и $\angle BCN = \angle ADA'$ како агли со паралелни краци, па од признакот АСА следува дека триаголниците $AA'D$ и BMC се складни. Според тоа, $\overline{AA'} = \overline{BM}$. Конечно, $\overline{AA'} + \overline{CC'} = \overline{BM} + \overline{MB'} = \overline{BB'}$, што и требаше да се докаже.



114. Даден е паралелограм чии страни се со должини 12 cm и 8 cm . Подолгата страна AB е продолжена преку точката B за 5 cm и е добиена точката E . Правите EC и AD се сечат во точката F . Пресметај ја должината на отсечката DF .

Решение. Според Талесовата теорема за пропорционални отсечки важи

$$\overline{DF} : \overline{AF} = \overline{DC} : \overline{AE},$$

па затоа

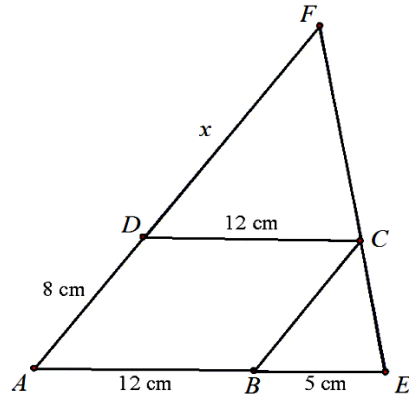
$$x : (x + 8) = 12 : 17,$$

односно

$$17x = 12x + 96,$$

од каде добиваме $x = 19,2$. Спо-

ред тоа, $\overline{DF} = 19,2\text{ cm}$.



115. Даден е паралелограм $ABCD$ со тап агол во темето B . Страните AB и BC на паралелограмот се продолжени преку темето B и на продолженијата се земени точки E и F така што отсечките BE и BF се основи на рамнокраки триаголници BCE и ABF . Докажи дека триаголникот DEF е рамнокрак.

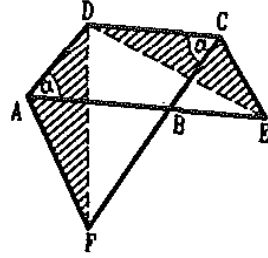
Решение. Нека остриот агол на паралелограмот е α (цртеж десно). Тогаш $\angle CBE = \angle CEB = \alpha$ и $\angle ABF = \angle AFB = \alpha$, па затоа

$$\angle BCE = \angle FAB = 180^\circ - 2\alpha.$$

Според тоа,

$$\angle DAF = \angle DCE = \alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha.$$

Сега, од признакот SAC следува дека триаголниците ADF и CED се складни, па затоа $\overline{DF} = \overline{DE}$, што значи дека триаголникот DEF е рамнокрак.

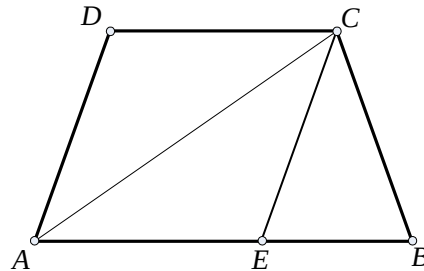


116. Во рамнокрак трапез должината на кракот е еднаква на должината на помалата основа. Докажи дека дијагоналите на трапезот се симетрала на аглиите на трапезот при поголемата основа.

Решение. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез во кој

$$\overline{AB} = a \text{ и } \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = b < a.$$

Нека E е точка од AB , така што $CE \parallel DA$. Тогаш $AECD$ е ромб (паралелограм со исти страни). Дијагоналата на ромбот го полови аголот на ромбот во темето од



кое е повлечена, т.е. го полови аголот $\angle EAD$. Но, $\angle EAD = \angle BAD$ па според тоа AC го полови аголот при поголемата основа. Аналогно се разгледува и аголот $\angle ABC$.

117. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ ја сечат средната линија EF на трапезот во точките M и N така што $\overline{MN} = \overline{EM} + \overline{NF}$. Должината на помалата основа на трапезот е еднаква на 10 cm . Определи ја должината на поголемата основа на трапезот.

Решение. Имаме $\overline{EM} = \frac{1}{2} \overline{DC}$,

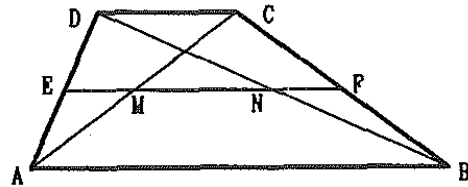
како средна линија на триаголникот ACD и $\overline{NF} = \frac{1}{2} \overline{DC}$

како средна линија на триаголникот BCD . Според тоа,

$$\overline{MN} = \overline{EM} + \overline{NF} = \frac{1}{2} \overline{DC} + \frac{1}{2} \overline{DC} = \overline{DC}. \text{ Оттука следува дека}$$

$$\overline{EF} = \overline{MN} + \overline{EM} + \overline{NF} = \overline{DC} + \overline{DC} = 2\overline{DC}.$$

Од друга страна $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$, па затоа $2\overline{DC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$, од каде следува $\overline{AB} = 3\overline{DC} = 3 \cdot 10 = 30\text{ cm}$.



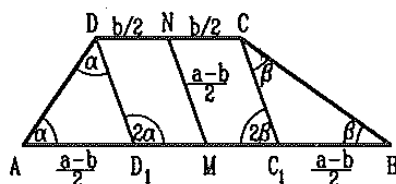
118. Даден е разнокрак трапез $ABCD$. Нека M и N се средините на основите AB и CD на трапезот и нека отсечката MN е еднаква на полуразликата на основите на трапезот. Определи го збирот на аглите на поголемата основа на трапезот.

Решение. Конструираме паралелограми $MNCC_1$ и $MNDD_1$. Тогаш

$$\overline{MN} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1} = \frac{a-b}{2} \text{ (цртеж десно).}$$

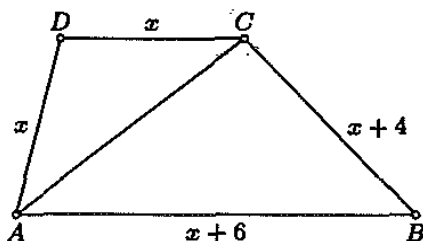
Понатаму, $\overline{AD_1} = \overline{BC_1} = \frac{a-b}{2}$, па затоа

триаголниците ADD_1 и BCC_1 се рамнокраки, што значи $\angle C_1D_1D = 2\alpha$ и $\angle D_1C_1C = 2\beta$. Но, $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, па затоа $\alpha + \beta = 90^\circ$.



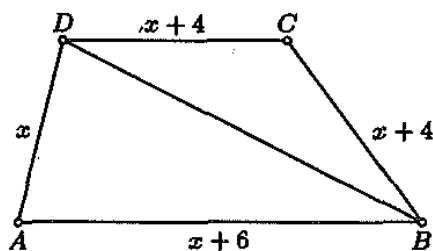
119. Во трапез едниот крак е поголем од другиот за 4 cm , а поголемиот крак е за 2 cm помал од поголемата основа. Збирот на помалата основа и краците е еднаков на 40 cm , а една од дијагоналите го полови аголот при основата. Определи ги страните на овој трапез.

Решение. Нека должината на помалиот крак на трапезот е $\overline{AD} = x$. Тогаш $\overline{BC} = x + 4$ и $\overline{AB} = x + 6$. Ако дијагоналата го полови $\angle DAB$ (цртеж десно), тогаш триаголникот ACD е рамнокрак, т.е. $\overline{CD} = \overline{AD} = x$.



Според тоа, $x + x + x + 4 = 40$, односно $x = 12\text{ cm}$. Значи, должините на основите на трапезот се $\overline{AB} = 12 + 6 = 18\text{ cm}$ и $\overline{CD} = 12\text{ cm}$, а должините на неговите краци се $\overline{AD} = 12\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 12 + 4 = 16\text{ cm}$.

Ако дијагоналата го полови $\angle ABC$ (цртеж десно), тогаш триаголникот BCD е рамнокрак, т.е. $\overline{BC} = \overline{CD} = x + 4$. Тогаш $x + x + 4 + x + 4 = 40$, т.е. $x = \frac{32}{3}\text{ cm}$. Нека E е точка на страната AB таква што



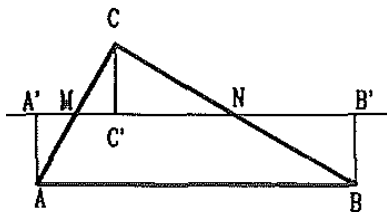
$\overline{CE} \parallel \overline{AD}$. Тогаш $\overline{CE} = \frac{32}{3}\text{ cm}$, $\overline{CB} = \frac{44}{3}\text{ cm}$ и $\overline{EB} = \frac{6}{3}\text{ cm}$, што не е мож-

но заради неравенството на триаголник. Ако дијагоналата го подели $\angle BCD$ или $\angle ADC$, тогаш $\triangle ABC$ или $\triangle ABD$ треба да е рамнокрак, па во овие случаи важи $\overline{AB} = \overline{BC}$, односно $\overline{AB} = \overline{AD}$, што е спротивно на условот на задачата $\overline{AB} = x + 6 > \overline{BC} = x + 4 > \overline{AD} = x$.

Конечно, задачата има единствено решение $\overline{AB} = 18\text{ cm}$, $\overline{CD} = 12\text{ cm}$, а $\overline{AD} = 12\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 16\text{ cm}$.

120. Подели триаголник ABC на три дела така што од нив да може да се состави правоаголник.

Решение. Ако бараната поделба е можна, тогаш бидејќи правоаголникот има два пара паралелни страни мора да повлечеме отсечка која е паралелна на една од страните на триаголникот. Така добиваме трапез, па за да добиеме правоаголник ни требаат уште два правоаголни триаголници со иста висина како и трапезот. Значи паралелната отсечка всушност треба да е средната линија на триаголникот. Двата правоаголни триаголници ги добиваме ако на триаголникот кој се наоѓа над средната линија повлечеме висина (цртеж десно).



Тогаш триаголниците $AA'M$ и $CC'M$ се складни и триаголниците $CC'N$ и $BB'N$ се складни (Зошто?) и бараната поделба е добиена.

Забелешка. Поделбата може да се направи и ако од средините M и N на страните AC и BC повлечиме нормали кон страната AB , со што ќе добиеме петаголник и два триаголника од кои може да се состави правоаголник (направи цртеж).

121. Од долго парче жица се обликуваат триаголници на следниов начин: Се мери еден дел од 10 cm и два дела од по 8 cm и од нив се составува рамнокрак триаголник, без притоа жицата да се сечи. Потоа обликувањето на рамнокраките триаголници од остатокот од жицата продолжува така што сите должини на страните на секој следен триаголник се за 2 cm пократки од должините на соодветните страни на претходниот триаголник (притоа триаголниците имаат едно заедничко теме). Постапката продолжува без сечење на жицата додека тоа е можно.

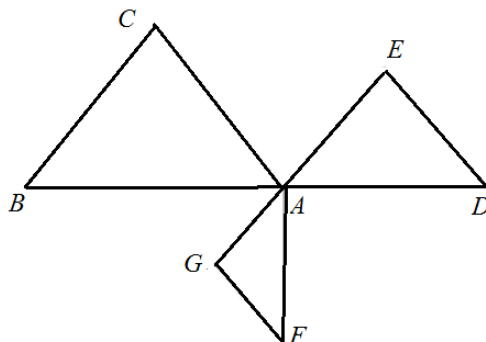
а) Определи го најголемио број триаголници кои може да се состават со опишаната постапка.

б) Кога на опишаниот начин ќе се формираат сите можни триаголници се сече жицата. Определи го збирот на периметрите на добиените триаголници.

в) Од добиеното парче жица се формира правоаголник таков што должините на соседните страни се разликуваат за 12 cm . Пресметај ја плоштината на добиениот правоаголник.

Решение. а) Сите триаголници кои се составуваат на опишаниот начин имаат крак кој е за 2 cm пократок од основата. Ако должината на основата ја означиме со x , а должината на кракот со y , тогаш мора да важи $2y > x$. Според тоа, можни се следниве триаголници:

x	y	$2y > x$
10 cm	8 cm	Да
8 cm	6 cm	Да
6 cm	4 cm	Да
4 cm	2 cm	Не

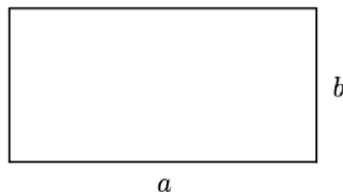


Значи, на опишаниот начин

може да се формираа најмногу три триаголници (цртеж десно).

б) Добиената фигура (вртеж десно) се состои од една страна со должина 10 cm , три страни со должина 8 cm , три страни со должина 6 cm и една страна со должина 4 cm . Според тоа, збирот на периметрите на сите триаголници е $O = 10 + 3 \cdot (8 + 6) + 4 = 60\text{ cm}$.

в) Нека страните на правоаголникот се a и b , $b = a + 12$. Имаме $a + b = 30$, па затоа $2b + 12 = 30$, т.е. $b = 9\text{ cm}$. Значи, $a = 9 + 12 = 21\text{ cm}$ и бараната плоштина е $P = 21 \cdot 9 = 189\text{ cm}^2$.



V.4. ГЕОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

122. Збирот на растојанијата меѓу три точки е 12 cm. Тие растојанија се изразуваат со три последователни природни броеви. Дали тие точки лежат на иста права? Одговорот да се образложи!

Решение. Бидејќи растојанијата се последователни броеви имаме $a + a + 1 + a + 2 = 12$, од каде $3a = 9$, па $a = 3\text{cm}$. Значи растојанијата меѓу точките се 3, 4 и 5cm. Бидејќи важи $3 + 4 > 5$, $4 + 5 > 3$, $3 + 5 > 4$, точките се темиња на триаголник, што значи дека не лежат на иста права.

123. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} = 6,5\text{dm}$ и $\overline{BC} = 0,8\text{dm}$. Определи ја должината на страната AC ако е познато дека таа изразена во дециметри е природен број.

Решение. Во триаголник должината на секоја страна е помала од збирот на должините на останатите две страни, а е поголема од апсолутната вредност на разликата на должините на останатите две страни. Според тоа,

$$\begin{aligned} |\overline{AB} - \overline{BC}| &< \overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC} \\ |6,5\text{dm} - 0,8\text{dm}| &< \overline{AC} < 6,5\text{dm} + 0,8\text{dm} \\ 5,7\text{dm} &< \overline{AC} < 7,3\text{dm}. \end{aligned}$$

Но, должината на AC изразена во дециметри е природен број, па затоа $\overline{AC} = 6\text{dm}$ или $\overline{AC} = 7\text{dm}$.

124. Должините на страните на рамнокрак триаголник се изразени со природни броеви (во сантиметри). Производот на должините на сите страни на триаголникот е еднаков на 2016. Определи го периметарот на овој триаголник.

Решение. Да го запишеме бројот 2018 како производ на прости множители. Имаме, $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Бидејќи рамнокрак триаголник има најмалку две страни со еднаква должина, со комбинирање на множителите на бројот 2016 ги добиваме следниве можности:

b	1	2	3	4	6	12
b	1	2	3	4	6	12
a	2016	504	224	126	46	14

Но, во секој триаголник збирот на должините на било кои две страни е поголем од должината на третата страна, а овој услов го задоволува

само последната комбинација. Значи, должините на страните на триаголникот се 12 cm , 12 cm и 14 cm , па неговиот периметар е еднаков на $12+12+14=38\text{ cm}$.

125. Определи ги сите триаголници чии должини на страни изразени во сантиметри се цели броеви и кои имаат периметар 13 cm .

Решение. Нека $L=13\text{ cm}$ и $a \leq b \leq c$. Ако $a=1\text{ cm}$, тогаш од неравенството на триаголник следува дека $b=c=6\text{ cm}$. Ако $a=2\text{ cm}$, повторно од неравенството на триаголник следува дека $b=5\text{ cm}$, $c=6\text{ cm}$. Ако $a=3\text{ cm}$, од неравенството на триаголник следува $b=4\text{ cm}$, $c=6\text{ cm}$ или $b=c=5\text{ cm}$. Ако $a=4\text{ cm}$, тогаш $b=4\text{ cm}$, $c=5\text{ cm}$. Според тоа, задачата има пет решенија:

$$(1, 6, 6); (2, 5, 6); (3, 4, 6); (3, 5, 5); (4, 4, 5)$$

со точност до пермутација на добиените тројки.

126. Должините на две страни на еден триаголник, изразени во сантиметри, се решенија на равенките:

$$0,3 - \frac{2}{a} = 0 \text{ и}$$

$$2\frac{2}{3} : [b - \frac{3}{5}(\frac{2,5-7,3,5}{80,125} - 1,5)] = \frac{2}{3}.$$

Колкава може да биде должината на третата страна, ако таа изразена во сантиметри е природен број?

Решение. Од првата равенка добиваме

$$a = \frac{2}{0,3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}\text{ cm}.$$

Од втората равенка последователно добиваме

$$2\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = b - \frac{3}{5}(\frac{2,5-7,3,5}{80,125} - 1,5)$$

$$b = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{5}(0,5 - 1,5)$$

$$b = 4 - \frac{3}{5} = 3\frac{2}{5}\text{ cm}.$$

Според тоа, од неравенството на триаголник следува

$$|a - b| < c < a + b, \text{ т.е. } |6\frac{2}{3} - 3\frac{2}{5}| < c < 6\frac{2}{3} + 3\frac{2}{5}.$$

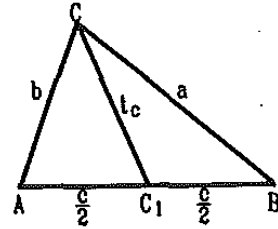
Значи, $\frac{49}{15} < c < \frac{151}{15}$, и како c е цел број добиваме $c \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

127. Докажи дека во произволен триаголник должината на секоја тежишна линија е помала од полупериметарот на триаголникот.

Решение. Ако го искористиме неравенството на триаголник, од триаголниците ACC_1 и BCC_1 следува $t_c < b + \frac{c}{2}$ и $t_c < a + \frac{c}{2}$. Ги собираме добиените неравенства и наоѓаме

$$2t_c < a + b + 2 \cdot \frac{c}{2}$$

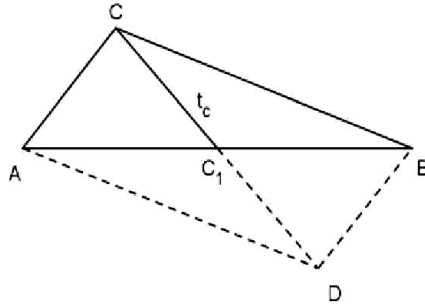
$$t_c < \frac{a+b+c}{2},$$



т.е. тврдењето важи за тежишната линија t_c . Доказот за другите две тежишни линии е идентичен.

128. Нека a, b и c се должините на страните и t_c е должината на тежишната линија повлечена од темето C во $\triangle ABC$. Докажи дека важи $\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}$

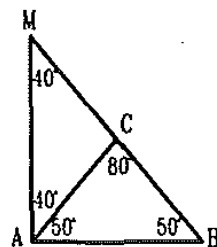
Решение. Нека C_1 е средина на страната AB на $\triangle ABC$. Отсечката CC_1 ја продолжуваме преку точката C_1 така што $\overline{CC_1} = \overline{C_1D}$. Сега четириаголникот $ADBC$ е паралелограм. Понатаму, од $\triangle CDB$ следува $\overline{CD} < \overline{BD} + \overline{CB}$, па затоа $2t_c < a + b$, односно $t_c < \frac{a+b}{2}$, со што е докажано десното неравенство. Од друга страна, од триаголниците AC_1C и C_1BC следува $b - \frac{c}{2} < t_c$ и $a - \frac{c}{2} < t_c$. Ако ги собереме последните две неравенства добиваме $a + b - c < 2t_c$, односно $\frac{a+b-c}{2} < t_c$, со што е докажано левото неравенство.



Забелешка. Претходната задача следува и од десното неравенство во оваа задача.

129. Даден е рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) со агол при основата $\alpha = 50^\circ$. На продолжението на кракот BC преку темето C дадена е точка M таква што $\overline{BC} = \overline{CM}$. Докажи дека $AM \perp AB$ и $\overline{AM} > \overline{AB}$.

Решение. Бидејќи $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CM}$, триаголникот ACM е рамнокрак и како $\angle ACM = 100^\circ$ добиваме $\angle CAM = 40^\circ$, па затоа $\angle BAM = 90^\circ$ (цртеж десно). Бидејќи во триаголникот ABM наспроти страната AB агол од 40° , а наспроти страната AM агол од 50° заклучуваме дека $\overline{AM} > \overline{AB}$.



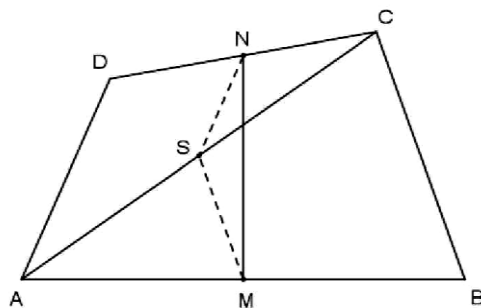
130. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Нека точката M е средина на страната AB , а точката N е средина на страната CD .

а) Докажи дека $\overline{AD} + \overline{BC} \geq 2\overline{MN}$.

б) Каков е четириаголникот $ABCD$ ако под а) важи знак за равенство?

Решение. а) Нека S е средината на дијагоналата AC . Тогаш MS е средна линија на $\triangle ABC$, а NS е средна линија на $\triangle ADC$. Затоа важи $\overline{BC} = 2\overline{MS}$ и $\overline{AD} = 2\overline{NS}$, па оттука добиваме

$$\begin{aligned}\overline{AD} + \overline{BC} &= 2\overline{MS} + 2\overline{NS} \\ &= 2(\overline{MS} + \overline{NS}) \\ &\geq 2\overline{MN}.\end{aligned}$$



б) Ако важи неравенството $\overline{AD} + \overline{BC} = 2\overline{MN}$, тоа значи дека точките M, S и N се колинеарни, т.е важи $AD \parallel MN \parallel BC$, а тоа е случај кога MN е средна линија на трапез.

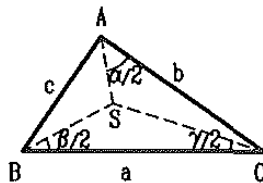
131. Нека S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и нека за страните важи $a > b > c$. Докажи дека $\overline{SA} < \overline{SB} < \overline{SC}$.

Решение. Нека $a > b > c$. Тогаш бидејќи во триаголник спроти поголема страна лежи поголем агол и обратно, добиваме дека $\alpha > \beta > \gamma$ (цртеж десно). Значи,

$$\frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2} > \frac{\gamma}{2}.$$

За триаголникот ABS важи $\frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2}$,

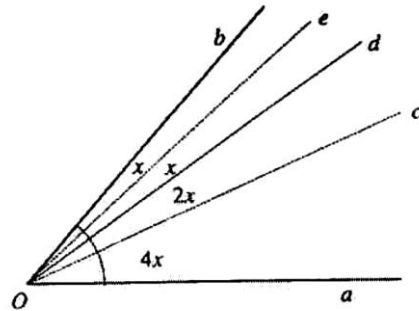
па затоа $\overline{SB} > \overline{SA}$. Понатаму, за триаголникот BSC важи $\frac{\beta}{2} > \frac{\gamma}{2}$, па затоа $\overline{SC} > \overline{SB}$. Конечно, $\overline{SC} > \overline{SB} > \overline{SA}$, што и требаше да се докаже.



V.5. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

132. Даден е $\angle aOb$. Со геометриска конструкција подели го $\angle aOb$ на три дела така што вториот дел е три пати поголем од првиот, а третиот дел е четири пати поголем од првиот дел.

Решение. Ако првиот дел е x , тогаш вториот дел е $3x$, а третиот дел е $4x$. Бидејќи $4x = x + 3x$, заклучуваме дека третиот дел е еднаков на половина од дадениот агол. Затоа ја конструираме симетралата c на $\angle aOb$ и тогаш $\angle aOc$ е еднаков на третот дел од дадениот агол. Понатаму, прво ја конструираме симетралата d на $\angle cOb$, а потоа ја конструираме симетралата e на $\angle dOb$, со што ги добиваме аглиите $\angle eOb = x$ и $\angle cOe = 3x$, со што е добиена бараната поделба на $\angle aOb$ (види цртеж).



133. а) На полуправата OX нанеси отсечка со должина a .

б) Конструирај отсечка чија должина е еднаква на збирот на должините на две дадени отсечки.

в) Конструирај отсечка чија должина е еднаква на разликата на должините на две дадени отсечки.

Решение. а) Ја цртаме полуправата OX и потоа $k(O, a)$, $k \cap OX = A$. Јасно, отсечката OA лежи на полуправата OX и има должина a (направи цртеж).

б) Нека се дадени две отсечки со должини a и b . Цртаме полуправа OX и на неа нанесуваме отсечка OA таква, што $\overline{OA} = a$. Потоа, на полуправата AX нанесуваме отсечка AB таква, што $\overline{AB} = b$. Јасно, должината на отсечката OB е $a + b$ (направи цртеж).

в) Нека се дадени две отсечки со должини a и b , $a > b$. Цртаме полуправа OX и на неа нанесуваме отсечка OA таква, што $\overline{OA} = a$. Потоа, на полуправата AO нанесуваме отсечка AB таква, што $\overline{AB} = b$. Јасно, должината на отсечката OB е $a - b$ (направи цртеж).

134. Дадена е отсечката AB . Конструирај ја нејзината симетрала.

Решение. Конструираме кружници $k(A, \overline{AB})$ и $k_1(B, \overline{AB})$ и нека $k \cap k_1 = \{C, D\}$. Правата CD е бараната симетрала на отсечката AB (направи цртеж).

135. Даден е $\angle XOY$. Конструирај ја неговата симетрала.

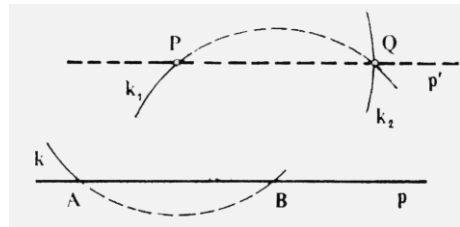
Решение. Земаме отсечка со произволна должина a . На полуправите OX и OY нанесуваме отсечки $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ такви, што $\overline{OA} = \overline{OB} = a$. Понатаму, конструираме кружници $k(A, \overline{AB})$ и $k_1(B, \overline{AB})$ и нека $k \cap k_1 = \{C, D\}$. Правата CD е бараната симетрала на $\angle XOY$ (направи цртеж).

136. Даден е $\angle XOY$ и точка A . Конструирај $\angle BAC$ таков што $\angle XOY = \angle BAC$.

Решение. Повлекуваме произволна полуправа AB и конструираме кружници $k(O, r)$ и $k_1(A, r)$. Нека $k \cap OX = M$, $k \cap OY = N$ и $k_1 \cap AB = P$. Понатаму, конструираме кружници $k_2(P, \overline{MN})$ и нека $k_1 \cap k_2 = \{C, C_1\}$. Јасно, аглиите BAC и BAC_1 ги задоволуваат условите на задачата.

137. Дадени се права p и точка P , $P \notin p$. Конструирај права која минува низ точката P и е паралелна на правата p .

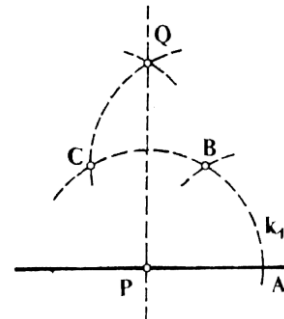
Решение. Конструираме кружница $k(P, r)$, каде r е доволно големо, и $k \cap p = \{A, B\}$. Конструираме кружници $k_1(B, \overline{BP})$, $k_2(P, \overline{AB})$ и наоѓаме $Q = k_1 \cap k_2$. Конечно, правата PQ минува низ точката P и е паралелна на правата p .



138. Дадени се права p и точка P . Конструирај права која минува низ точката P и е нормална на правата p .

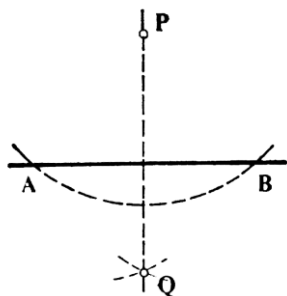
Решение. Ќе разгледаме два случаи: $P \in p$ и $P \notin p$.

а) Нека $P \in p$. Конструираме кружница



$k_1(P, r)$ и наоѓаме $k_1 \cap p = A$ (цртеж десно). Потоа конструираме кружница $k_2(A, r)$ и наоѓаме $k_1 \cap k_2 = B$, па конструираме кружница $k_3(B, r)$ и наоѓаме $k_2 \cap k_3 = C$. На крајот, конструираме кружница $k_4(C, r)$ и ја добиваме точката $Q = k_3 \cap k_4$.

Конечно, правата PQ е бараната права која минува низ точката P и е нормална на правата p .

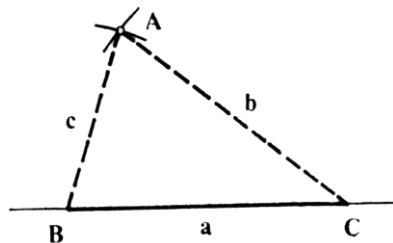


б) Нека $p \neq P$. Конструираме кружница $k(P, r)$ и наоѓаме $k \cap p = \{A, B\}$ (цртеж лево). Сега ги конструираме кружниците $k_1(A, r)$ и $k_2(B, r)$ и нека $Q = k_1 \cap k_2$.

Конечно, правата PQ е бараната права која минува низ точката P и е нормална на правата p .

139. Конструирај триаголник ако се дадени должините на неговите страни a, b и c

Решение. На произволна права конструираме отсечка $\overline{BC} = a$ (цртеж десно). Потоа конструираме кружници $k_1(B, c)$ и $k_2(C, b)$. Ако овие кружници имаат заедничка точка A која што не лежи на правата BC , тогаш триаголникот ABC ги исполнува условите на задачата и е единствено нејзино решение (признак ССС). Ако, пак, кружниците не се сечат, тогаш задачата нема решение.



Лесно се гледа дека кружниците k_1 и k_2 се сечат ако и само ако $|b - c| < a < b + c$.

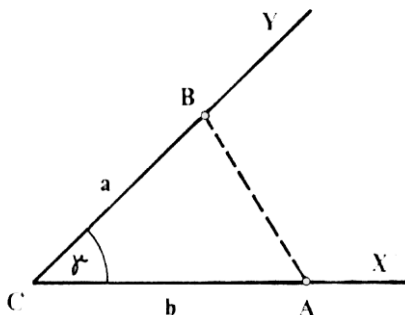
(Испиши ги одделно сите фази за решавање на задачата: анализа, конструкција, доказ и дискусија.)

140. Конструирај триаголник ако се дадени должините на неговите страни a и b и аголот γ што го зафаќаат.

Решение. Прво конструираме $\angle XCY = \gamma$ (цртеж десно). Потоа, на краците CX и CY на $\angle XCY$ конструираме отсечки CA и CB со должини $\overline{CA} = b$ и $\overline{CB} = a$. Триаголникот ABC има две страни со

должини a и b и агол γ што го зафаќаат, па значи тој е решение на задачата.

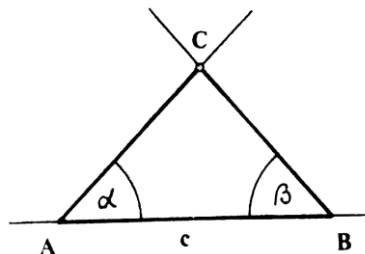
Бидејќи конструкциите на аголот γ и отсечките на неговите краци, чии должини се a и b се единствени, заклучуваме дека овој триаголник е единствено решение на задачата. Според тоа, секој друг триаголник кој што ќе ги исполнува условите на задачата, ќе биде складен со триаголникот ABC (признак САС).



(Испиши ги одделно сите фази за решавање на задачата: анализа, конструкција, доказ и дискусија.)

141. Конструирај триаголник ако е дадена должината на една негова страна c и аглите α и β што лежат на таа страна.

Решение. Прво ќе ја нацртаме отсечката AB , $\overline{AB} = c$, а потоа во точката A ќе го нанесеме аголот α така што полуправата AB е еден негов крак, а во точката B ќе го нанесеме аголот β така што полуправата BA е еден негов крак. Во пресек на другите краци на аглите ја наоѓаме точката C ,



Овој триаголник ги исполнува условите на задачата и бидејќи конструкцијата на отсечка со должина c и на аглите α и β се единствени, ако $\alpha + \beta < 180^\circ$, заклучуваме дека решението е единствено (АСА).

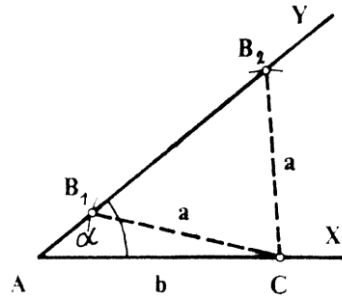
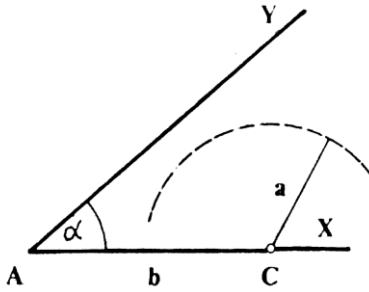
(Испиши ги одделно сите фази за решавање на задачата: анализа, конструкција, доказ и дискусија.)

142. Конструирај триаголник ако се дадени должините на неговите страни a и b и аголот α спроти страната a .

Решение. Прво конструираме $\angle XAY = \alpha$ и на кракот AX конструираме отсечка AC , $\overline{AC} = b$. Сега конструираме кружница $k(C, a)$.

Можни се два случаи.

а) Ако $a > b$, тогаш полуправата AU и кружницата $k(C, a)$ имаат една пресечна точка B и во овој случај триаголникот ABC ги исполнува условите на задачата, што значи тој е нејзино решение (направи цртеж).



б) Ако $a < b$, тогаш полуправата AU и кружницата $k(C, a)$ можат да немаат заеднички точки и во тој случај задачата нема решение (цртеж лево), или да имаат две заеднички точки и B_1 и B_2 (цртеж

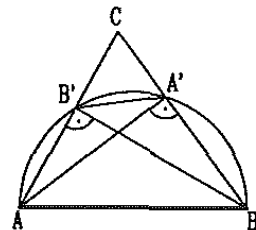
горе). Јасно, триаголниците AB_1C и AB_2C ги задоволуваат условите на задачата и тие се нејзини решенија.

(Испиши ги одделно сите фази за решавање на задачата: анализа, конструкција, доказ и дискусија.)

143. Во триаголникот ABC , A' и B' се подножјата на висините повлечени од темињата A и B соодветно. Конструирај го триаголникот ABC ако се дадени отсечките: $\overline{AB} = 5\text{ cm}$, $\overline{A'B} = 3\text{ cm}$ и $\overline{A'B'} = 2\text{ cm}$.

Решение. *Анализа.* Точките A, B, A', B' припаѓаат на кружницата над отсечката AB како дијаметар, бидејќи аглиите $\angle AA'B$ и $\angle BB'A$ се прави.

Конструкција. Ја конструираме отсечката AB и над неа како над дијаметар конструираме кружница. На кружницата конструираме точка A' таква што $\overline{BA'} = 3\text{ cm}$, а потоа точка B' таква што $\overline{A'B'} = 2\text{ cm}$. Пресекот на правите AB' и BA' го определува темето C (види цртеж).

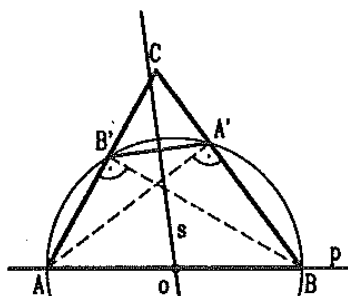


Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има две решенија. Можно е точката B' да е од другата страна на правата AB во однос на точката A' . Нацртај го соодветниот цртеж при кој триаголникот ABC е тапоаголен.

144. Во рамнината се дадени права p и точки A' и B' кои се наоѓаат на иста страна од правата p . Конструирај триаголник ABC чии темиња A и B се наоѓаат на правата p и отсечките AA' и BB' се висини на триаголникот ABC .

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена. Бидејќи $\angle AA'B = \angle BB'A = 90^\circ$, заклучуваме дека точките A' и B' се наоѓаат на кружницата со центар во средината O на отсечката AB (цртеж десно). Понатаму, бидејќи $A'B'$ е тетива на оваа кружница, центарот O на кружницата лежи и на симетралата на отсечката $A'B'$.



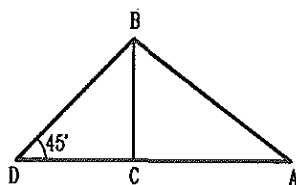
Конструкција. Ја конструираме симетралата s на отсечката $A'B'$ и ја наоѓаме точката $O = s \cap p$. Потоа конструираме кружница $k(O, \overline{OA'})$ и наоѓаме $k \cap p = \{A, B\}$. Ги повлекуваме правите AB' и BA'' и во пресекот на истите го наоѓаме темето C на триаголникот ABC .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата нема решение ако $A'B' \perp p$, а во спротивно има единствено решение

145. Конструирај правоаголен триаголник ако се дадени хипотенузата $c = 5\text{ cm}$ и збирот на катетите $d = 7\text{ cm}$.

Решение. *Анализа.* Нека ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) е правоаголен триаголник. Ако катетата AC ја продолжиме преку темето C до точка D таква што $\overline{CD} = \overline{CB}$, тогаш добиваме триаголник ABD (види цртеж). Триаголникот BDC е рамнокрак правоаголен, па затоа $\angle BDC = 45^\circ$ и како $\overline{AB} = c = 5\text{ cm}$ и $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = d = 7\text{ cm}$, триаголникот ABD може да се конструира. Сега темето C се наоѓа во пресекот страната AD и на симетралата на страната BD .



Триаголникот BDC е рамнокрак правоаголен, па затоа $\angle BDC = 45^\circ$ и како $\overline{AB} = c = 5\text{ cm}$ и $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = d = 7\text{ cm}$, триаголникот ABD може да се конструира. Сега темето C се наоѓа во пресекот страната AD и на симетралата на страната BD .

Конструкција. Цртаме отсечка $\overline{AD} = 7\text{ cm}$ и агол $\angle ADx = 45^\circ$. Цртаме кружница $k(A, r)$, $r = 5\text{ cm}$ и во пресекот на полуправата Dx и кружницата k го наоѓаме темето B . Конструираме симетрала s на

Дискусија. Задачата има единствено решение.

-

(Испиши ги одделно сите фази за решавање на задачата: анализа, конструкција, доказ и дискусија.)

-

$$k_2 \cap B_1 B_2 = A.$$

Јасно, ако може да се конструира BB_1B_2 , т.е. ако $t_b > h_b$, тогаш $\triangle ABC$ ги задоволува условите на задачата и како сите конструкции се единствени задачата има единствено решение.

(Испиши ги одделно сите фази за решавање на задачата: анализа, конструкција, доказ и дискусија.)

148. Конструирај триаголник ABC ако $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\angle CAB = 45^\circ$ и $\angle ABC = 60^\circ$, а потоа конструирај права p која ги сече отсечката AB во точка D и отсечката BC во точка E такви што $\overline{DB} = \overline{DE} = \overline{CE}$.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена. Од равенството $\overline{DB} = \overline{DE}$ следува дека триаголникот DBE е рамнокрак. Затоа

$$\angle BDE = \angle DBE = \angle ABC = 60^\circ,$$

т.е. триаголникот DBE е рамностран.

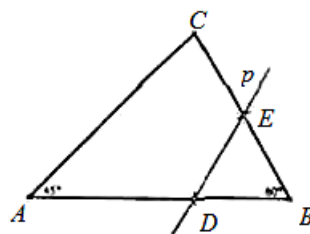
Според тоа, $\overline{DB} = \overline{DE} = \overline{BE}$, па како $\overline{DE}$

$= \overline{CE}$ добиваме $\overline{BE} = \overline{CE}$, што значи дека точката E е средина на страната BC .

Конструкција. Го конструираме триаголникот ABC , за кој се дадени $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\angle CAB = 45^\circ$ и $\angle ABC = 60^\circ$. Конструираме симетрала на страната BC и во пресекот на симетралата и страната BC ја наоѓаме точката E . Конечно, точката D ја наоѓаме во пресекот на кружницата $k(B, \overline{BE})$ и страната AB , по што низ точките D и E ја повлекуваме правата p .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Триаголникот ABC е еднозначно определен, а од анализата и конструкцијата следува дека и точките D и E се еднозначно определени. Според тоа, задачата има едно и единствено решение.

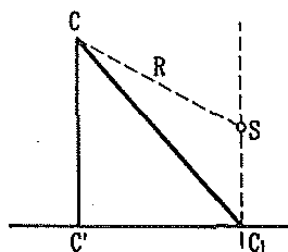


149. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени: висината $\overline{CC'} = h_c = 3\text{ cm}$, тежишната линија $\overline{CC_1} = t_c = 4\text{ cm}$ и радиусот $R = 3\text{ cm}$ на опишаната кружница околу $\triangle ABC$

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена и нека C_1 е средината на страната AB , а C' е подножјето на висината повлечена од темето C (направи цртеж). Тогаш триаголникот $CC'C_1$

е правоаголен и за него се познати хипотенузата $\overline{CC_1} = t_c = 4\text{ cm}$ и една катета $\overline{CC'} = h_c = 3\text{ cm}$, па затоа може да се конструира. Понатаму, центарот S на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ припаѓа на симетралата на страната AB , а тоа е нормалата на $C'C_1$ во точката C_1 и лежи на кружницата $k(C, R)$.

Конструкција. Конструираме правоаголен триаголник $CC'C_1$ таков што $\overline{CC'} = h_c = 3\text{ cm}$ и $\overline{CC_1} = t_c = 4\text{ cm}$ (цртеж десно). Во точката C_1 конструираме нормала на правата $C'C_1$ и конструираме кружница $k(C, R)$ и во нивниот пресек ја наоѓаме точката S . Конструираме кружница $k_1(S, R)$ и во пресекот со правата $C'C_1$ ги наоѓаме темињата A и B на триаголникот ABC .

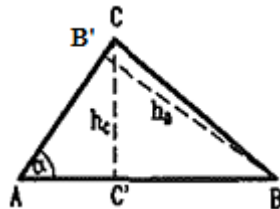


Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

150. Конструирај триаголник ABC ако се дадени: аголот $\angle BAC = 60^\circ$, висината $\overline{BB'} = 4\text{ cm}$ и висината $\overline{CC'} = 3\text{ cm}$.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена (цртеж десно). Триаголникот $AC'C$ е правоаголен и за него се познати едната катета и аголот наспроти неа, па затоа тој може да се конструира. Сега, темето B лежи на полуправата AC' и е на растојание 4 cm од правата AC , па затоа може да се конструира.



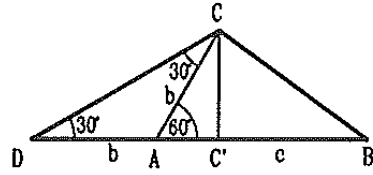
Конструкција. Прво конструираме агол $\angle A = 60^\circ$, потоа повлекуваме права p која од полуправата Ax е оддалечена 3 cm и наоѓаме $C = p \cap Ay$. Во насока на полуправата Ax конструираме права q која од правата AC е оддалечена 4 cm и наоѓаме $B = q \cap Ax$, со што триаголникот ABC е конструиран (направи цртеж).

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

151. Конструирај триаголник ABC ако е даден збирот на страните $\overline{AB} + \overline{BC} = b + c = 8\text{ cm}$, $\angle CAB = \alpha = 60^\circ$ и висината $\overline{CC'} = h_c = 3\text{ cm}$.

Решение. *Анализа.* Нека $\triangle ABC$ е конструиран и преку темето A да ја продолжиме страната AB до точка D таква што $\overline{AD} = b$. Тогаш $\overline{BD} = b + c$ и триаголникот ADC е рамнокрак



бидејќи $\overline{AD} = \overline{AC} = b$ (види цртеж). Според тоа, $\angle ADC = \angle ACD = 30^\circ$, па триаголникот DCC' може да се конструира. Сега за темето B важи $\overline{BD} = b + c$, а темето A е во пресекот на симетралата на страната DC и страната DB .

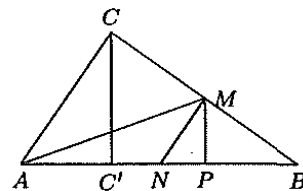
Конструкција. Цртаме отсечка $\overline{BD} = b + c$ и над неа во точката D конструираме агол од 30° . Конструираме права p паралелна на правата DB таква што растојанието меѓу DB и p е еднакво на $h_c = 3\text{ cm}$. Во пресекот на правата p и вториот крак на нацртаниот агол го добиваме темето C . Конструираме симетрала s на отсечката CD и во пресекот на s и DB го наоѓаме темето A со што триаголникот е конструиран (направи цртеж).

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

152. Конструирај триаголник ABC за кој се познати висината $\overline{CC'} = h_c = 3\text{ cm}$, страната $\overline{AC} = b = 4\text{ cm}$ и тежишната линија $\overline{AM} = t_a = 5\text{ cm}$.

Решение. *Анализа.* Нека N е средина на страната AB и P е подножјето на нормалата повлечена од точката M на страната AB . Имаме $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{CC'}$ и $\angle NPM = 90^\circ$, па затоа $\triangle MNP$ може да се конструира.



Конструкција. Прво го конструираме $\triangle MNP$ за кој $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 2\text{ cm}$, $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{CC'} = 1,5\text{ cm}$ и $\angle NPM = 90^\circ$. Понатаму, цртаме кружница $k(M, t_a)$ и во пресек со правата NP го добиваме темето A . Понатаму, низ A повлекуваме права p паралелна на NM и од страната на

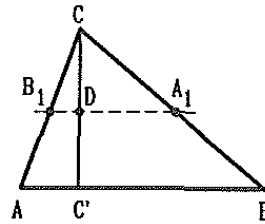
точката M повлекуваме права $q \parallel NP$. Сега $p \cap q = C$ и на крајот во пресекот на правите AN и CM ја добиваме точката B (направи цртеж).

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Кружницата $k(M, t_a)$ ја сече правата NP во две точки, па затоа задачата има две решенија.

153. Дадени се три неколинеарни точки A_1, B_1 и C' . Конструирај триаголник ABC ако A_1 и B_1 се средини на страните BC и AC , соодветно, а C' е подножјето на висина h_c .

Решение. *Анализа.* Средната линија A_1B_1 ја дели висината CC' на два еднакви дела, т.е. $\overline{CD} = \overline{DC'}$, па затоа темето C е симетрично на точката C' во однос на правата A_1B_1 . Правата AB е паралелна на средната линија A_1B_1 , па таа може да се конструира. Сега е јасно како се наоѓаат темињата A и B .



Конструкција. Конструираме права n која минува низ C' и е нормална на A_1B_1 . Нека $D = n \cap A_1B_1$. На правата n определуваме точка C таква што $\overline{CD} = \overline{DC'}$. Понатаму, во точката C' повлекуваме права p паралелна на правата A_1B_1 , а потоа ги повлекуваме правите CB_1 и CA_1 и добиваме $A = p \cap CB_1$ и $B = p \cap CA_1$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

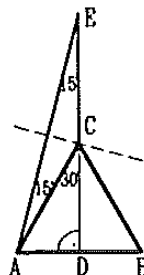
154. Конструирај $\triangle ABC$ за кој се познати висината $\overline{AA'} = h_a = 4\text{ cm}$, тежишната линија $\overline{AA_1} = t_a = 6\text{ cm}$ и тежишната линија $\overline{BB_1} = t_b = 9\text{ cm}$.

Решение. *Конструкција.* Го конструираме правоаголниот триаголник $AA'A_1$. Потоа го определуваме тежиштето T на триаголникот ABC кое тежишната линија AA_1 ја дели во однос $\overline{AT} : \overline{TA_1} = 2 : 1$. Понатаму конструираме кружница $k(T, \frac{2}{3}t_b)$ и во пресекот на оваа кружница со правата $A'A_1$ го наоѓаме темето B . Конечно темето C лежи на правата $A'A_1$ и важи $\overline{BA_1} = \overline{A_1C}$ (направи цртеж).

Забелешка. Пожелно е читателот да ги испише анализата, доказот и дискусијата.

155. Конструирај рамностран триаголник ABC ако е даден збирот на страната и висината на триаголникот $d = 5\text{ cm}$.

Решение. *Анализа.* Ако висината CD на рамностранниот триаголник ABC ја продолжиме преку темето C до точка E таква што $\overline{AC} = \overline{CE}$ (цртеж десно), тогаш триаголникот ADE е правоаголен со страна $\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE} = d = 5\text{ cm}$. Триаголникот EAC е рамнокрак со агол при основара $\angle AEC = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$, што



значи дека за триаголникот ADE се познати аглите $\angle ADE = 90^\circ$, $\angle AED = 15^\circ$ и страната $\overline{DE} = 5\text{ cm}$. Сега темето C е во пресекот на симетралата на страната AE и страната ED .

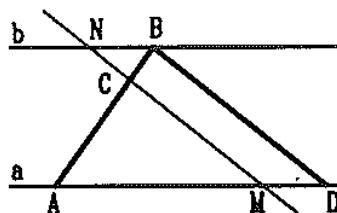
Конструкција. Конструираме триаголник ADE со страна $\overline{DE} = 5\text{ cm}$ и агли $\angle ADE = 90^\circ$, $\angle AED = 15^\circ$. Повлекуваме симетрала s на отсечката AE и наоѓаме $s \cap ED = C$. Ја продолжуваме страната AD преку темето D и наоѓаме точка B така што $\overline{AD} = \overline{DB}$, со што триаголникот ABC е конструиран

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

156. Дадени се паралелни прави a и b кои се на растојание 3 cm една од друга. На правата a е дадена точка A , а на правата b е дадена точка B при што важи $\overline{AB} > 3\text{ cm}$. На отсечката AB е избрана точка C таква што $\overline{AC} > \overline{BC}$. Конструирај права p која ја содржи точката C , правата a ја сече во точка M , правата b ја сече во точка N и $\overline{AM} + \overline{BN} = 5\text{ cm}$.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека правата p е конструирана (цртеж десно). Низ точката B повлекуваме права q таква $q \parallel p$ и нека правата q ја сече правата a во точката D . Тогаш



четириаголникот $MNBD$ е паралелограм, па затоа $\overline{BN} = \overline{MD}$. Значи,
 $\overline{AD} = \overline{AM} + \overline{MD} = \overline{AM} + \overline{MN} = 5\text{ cm}$.

Конструкција. На правата a конструираме точка D таква што $\overline{AD} = 5\text{ cm}$. Низ точките B и D повлекуваме права q . Низ точката C повлекуваме права p паралелна со правата q . Сега $a \cap p = M$ и $b \cap p = N$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има две решенија, бидејќи точката D може да ја конструираме лево и десно од точката A .

157. Конструирај квадрат ако е даден збирот на дијагоналата и полупериметарот на квадратот $\overline{MN} = 6\text{ cm}$.

Решение. *Анализа.* Нека квадратот $ABCD$ е конструиран и нека M' и N' се точки на правата AC во распоред $M' - A - C - N'$ и такви што $\overline{M'A} = \overline{CN'} = \overline{AB}$ (направи цртеж). Тогаш $\overline{M'N'} = \overline{AC} + 2\overline{AB} = 6\text{ cm}$. Понатаму, триаголниците $M'AB$ и $BN'C$ се рамнокраки и важи $\angle AM'B = \angle BN'C = 22^\circ 30'$ (Зошто?). Значи триаголникот $M'BN'$ може да се конструира, а темињата A и C се наоѓаат во пресек на $M'N'$ со симетралите на страните $M'B$ и $N'B$, соодветно.

Конструкција. Конструираме рамнокрак триаголник со MNB со основа $\overline{MN} = 6\text{ cm}$ и агол при основата еднаков на $22^\circ 30'$ (направи цртеж). Конструираме симетрали s и p на страните MB и NB , соодветно и наоѓаме $s \cap MN = A$ и $p \cap MN = C$. Сега лесно се конструира темето D .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

158. Конструирај правоаголник за кој се дадени страна $b = 10\text{ cm}$ и збирот на другата страна и дијагоналата на правоаголникот $a + d = 15\text{ cm}$.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена и $\overline{AB} = 10\text{ cm}$. Ако страната BC ја продолжиме преку темето C до точка E таква што $\overline{BE} = a + d = 15\text{ cm}$, тогаш $\overline{CE} = \overline{BE} - \overline{BC} = \overline{AC}$ следува дека триаголникот ACE е рамнокрак, па затоа темето C лежи на симетралата на отсечката AE (направи цртеж).

Конструкција. Конструираме правоаголен триаголник ABE со катети $\overline{AB}=10\text{ cm}$ и $\overline{BE}=15\text{ cm}$. Потоа ја конструираме симетралата s на отсечката BE и наоѓаме $s \cap BE = C$. Сега лесно го определуваме четвртото теме D (направи цртеж).

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение, бидејќи триаголникот ABE е еднозначно определен.

159. Дадени се три неколинеарни точки A, C и E . Конструирај правоаголник $ABCD$ ако A и C се негови темиња, а E е точка на дијагоналата BD .

Решение. *Анализа.* Нека S е средината на отсечката AC . Тогаш дијагоналата BD припаѓа на правата SE . Понатаму, бидејќи аглиите ABC и ADC се прави, точките B и D припаѓаат на кружницата $k(S, \overline{SA})$.

Конструкција. Ја конструираме симетралата s на отсечката AC и наоѓаме $s \cap AC = \{S\}$. Ја повлекуваме правата SE и ја цртаме кружницата $k(S, \overline{SA})$. Имаме $s \cap k = \{B, D\}$ со што правоаголникот $ABCD$ е конструиран (направи цртеж).

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

160. Конструирај трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$), ако

$$\overline{AB} = 7\text{ cm}, \overline{DC} = 3\text{ cm}, \overline{AC} = 8\text{ cm} \text{ и } \overline{BD} = 6\text{ cm}.$$

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена. Ја продолжуваме страната AB преку темето B до точка M таква што $\overline{BM} = \overline{CD} = 3\text{ cm}$ (направи цртеж). Тогаш четириаголникот $BMCD$ е паралелограм и важи $\overline{MC} = \overline{BD} = 6\text{ cm}$. За триаголникот AMC важи

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = 10\text{ cm}, \overline{AC} = 8\text{ cm} \text{ и } \overline{MC} = 6\text{ cm},$$

па затоа може да се конструира. Темето A се определува на страната AM , а темето C го определуваме како четврто теме на паралелограмот $BMCD$.

Конструкција. Конструираме триаголник AMC со должини на страни $\overline{AM} = 10\text{ cm}$, $\overline{AC} = 8\text{ cm}$ и $\overline{MC} = 6\text{ cm}$. На страната AM наоѓаме точка B таква што $\overline{AB} = 7\text{ cm}$. Низ точката C повлекуваме права s пара-

лелна на страната AM , а низ точката B права p паралелна на страната MC и наоѓаме $s \cap p = D$, со што траpezот е конструиран,

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Триаголникот AMC е еднозначно определен, а и сите натамошни елементи во конструкцијата, што значи дека адачата има единствено решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V. (1991). Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I. (1988).: Primprenni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd
3. Ilić, N. V. (1991). Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd
4. Kostić, Z. K. (1963). Između igre i matematike, Tehnička knjiga, Beograd
5. Mićić, V.; Kadelburg, Z. (1989). Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd
6. Stojanović, V. (1985). Matematiskop 2, Naučna knjiga, Beograd
7. Stojanović, V. (1999). Vodič za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd
8. Stojanović, V.; Zolić, A. (1991). Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole), DMS, Beograd
9. Tošić, R. (1990). Rešeni zadaci iz matematike za mlade matematičare, Naučna knjiga, Beograd
10. Tošić, R.; Vukoslavčević, V. (1995). Elementi teorije brojeva, Alef, Novi sad, 1995
11. Zbirka zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola Srbije u 1993 godini, DMS, Valjevo, 1993
12. Zolić, A. (1990). Zbirka rešenih konkursnih zadataka, Matematički list, Beograd
13. Андрић, В. (2006). Математика (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд
14. Андрић, В.; Ђорић, М.; Јовчић, М.; Љубић, Д.; Петровић, Љ.; Стојановић, В. (1997). 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1987-1996. године, ДМС, Београд
15. Аневска, К. (2014). Логички парадокси, Нумерус, Скопје
16. Аневска, К. (2014). Покривање на шаховска табла, Нумерус, Скопје
17. Аневска, К. (2018). Питагорови тројки, Нумерус, Скопје
18. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини I, Нумерус, Скопје

19. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини II, Нумерус, Скопје
20. Аневска, К., Гоговска, В. (2015). Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје
21. Аневска, К., Малчески, Р. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје
22. Аневска, К., Малчески, С. (2013). Геометриско пресметување на зборови, Нумерус, Скопје
23. Антонов, Н. П.; Выгодский, М. Я.; Никитин, В. В.; Санкин, А. И. (1961). Сборник задач по элементарной математике, Наука, Москва
24. Будуров, С.; Серафимов, Д. (1980). Математически олимпиади 2, Народна просвета, София
25. Василевска, Д. Немојте да се излажете, Хероновата формула помага, Нумерус, Скопје
26. Главче, М. (2016). Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје
27. Главче, М. (2016). Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
28. Главче, М. (2016). Пресметуваме зборови, Нумерус, Скопје
29. Главче, М. (2018). Една задача, повеќе начини на решавање, Нумерус, Скопје
30. Главче, М. (2018). Периметар и неравенство на триаголник, Нумерус, Скопје
31. Главче, М. (2018). Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје
32. Главче, М., Ангелкоска, В. (2013). Магични квадрати и магична коцка, Нумерус, Скопје
33. Главче, М., Аневска, К. (2019). Решавање конструктивни задачи со помош на Питагорова теорема, Нумерус, Скопје
34. Главче, М., Малчески, С. (2019). Решавање на аритметички задачи со доведување до противречност, Нумерус, Скопје
35. Гоговска, В. Вкупен број можности, Нумерус, Скопје
36. Гоговска, В. Да започнеме од крајот, Нумерус, Скопје
37. Гоговска, В. Математички игри во кои се определува најголема и најмала вредност, Нумерус, Скопје
38. Гоговска, В. Неменливи големини, Нумерус, Скопје
39. Граврилов, Ј.; Давидов, Л. (1977). Делимост на числата, Народна просвета, София
40. Гроздев, С. Да побараме она што не се менува, Нумерус, Скопје

41. Гроздев, С. Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус, Скопје
42. Гроздев, С. Неравенство на Шур и примена, Нумерус, Скопје
43. Гроздев, С. Црвенката и Диофантовата равека од прв ред, Нумерус, Скопје
44. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Боиме броеви, Нумерус, Скопје
45. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Броиме со помош на графови, Нумерус, Скопје
46. Гроздев, С., Аневска, К. (2018). Патување на островот на витезите и лажговците, Нумерус, Скопје
47. Гроздев, С., Малчески, А. (2016). Малку математика на шаховска табла I, Нумерус, 2016
48. Гроздев, С., Малчески, А. (2017). Малку математика на шаховска табла II, Нумерус, 2016
49. Димовски, И. Број на делители, Нумерус, Скопје
50. Димовски, И. Проблемот на Швејк, Нумерус, Скопје
51. Дојчев, С. Дали е можно Дали постои?, Нумерус, Скопје
52. Дојчев, С. Кој број е поголем?, Нумерус, Скопје
53. Дуденков, С.; Чакърян, К. (1999). Задачи по теорија на числата, Регалия 6, София
54. Зубелевич, Г. И. (1967). Сборник задач московских математических олимпиад, Просвещение, Москва
55. Иванова, А., Велинов, Д. Златен пресек, омилена пропорција на архитектите, Нумерус, Скопје
56. Јанев, И. И броењето не е лесно, Нумерус, Скопје
57. Јанев, И. Пак броење, Нумерус, Скопје
58. Јанев, К.; Мишовски, К. (1985). Десет години републички натпревари по математика (основни училишта), Нумерус, Скопје
59. Јошеска Јованчева, Б. Функционални равенки, Нумерус, Скопје
60. Лесов, Х. Принцип на Дирихле, Нумерус, Скопје
61. Лукарески, М. Боиме и пребојуваме фигури, Нумерус, Скопје
62. Малчески, А. Адам Рис и лекомислениот геометар, Нумерус, Скопје
63. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Метод на Ферма за решавање Диофантови равенки, Нумерус, Скопје
64. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решаваме задачи со множества, Нумерус, Скопје
65. Малчески, Р. (1994). Математички игри 1, Нумерус, Скопје
66. Малчески, Р. (1994). Математички игри 2, Нумерус, Скопје

-
67. Малчески, Р. (1995). Математички игри 3, Нумерус, Скопје
 68. Малчески, Р. (1995). Математички игри 4, Нумерус, Скопје
 69. Малчески, Р. (1995). Стрелките на часовникот се движат, па што, Нумерус, Скопје
 70. Малчески, Р. (1996, 2015). Две задачи за правилен шестаголник, Нумерус, Скопје
 71. Малчески, Р. (1997). Како да и помогнете на мува која не знае геометрија, Нумерус, Скопје
 72. Малчески, Р. (1998). За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово
 73. Малчески, Р. (2001). Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје
 74. Малчески, Р. (2002). Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје
 75. Малчески, Р. (2003). Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София
 76. Малчески, Р. (2003). Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје
 77. Малчески, Р. (2004). И ова е лесно – алгоритам за решавање задачи со претурање, Нумерус, Скопје
 78. Малчески, Р. (2004). Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје
 79. Малчески, Р. (2005). Идентитетот на Софија Жермен, Нумерус, Скопје
 80. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 1, Нумерус, Скопје
 81. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 2, Нумерус, Скопје
 82. Малчески, Р. (2012). Кралот Артур и тркалезната маса, Нумерус, Скопје
 83. Малчески, Р. (2012). Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје
 84. Малчески, Р. (2012). Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје
 85. Малчески, Р. (2013). Историјата е добра учителка, Нумерус, Скопје
 86. Малчески, Р. (2014). Пресметување на зборови од производи и степени, Нумерус, Скопје
 87. Малчески, Р. (2015). Покривање рамнострани триаголник со рамнострани триаголници, Математика+ (Нумерус), София (Скопје)
 88. Малчески, Р. (2017). Пресметуваме периметри и плоштини, Нумерус, Скопје
 89. Малчески, Р. (2018). Решаваме конструктивни задачи, Нумерус, Скопје

90. Малчески, Р. (2019). Пресметување плоштина на паралелограм и триаголник, Нумерус, Скопје
91. Малчески, Р. (2020). Занимливости со броеви, armaganka.org.mk
92. Малчески, Р. (2020). Расекување и составување геометриски фигури, armaganka.org.mk
93. Малчески, Р. (2020). Решавање на некои нелинеарни Диофантови равенки, armaganka.org.mk
94. Малчески, Р., (1998). Еден елементарен доказ на Хероновата формула, Сигма, Скопје
95. Малчески, Р., Аневска, К. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје
96. Малчески, Р., Аневска, К. (2016). Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје
97. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К. (1993). Вовед во теорија на броеви, МММ, Скопје
98. Малчески, Р., Малчески, А. (1995). За златниот пресек, Нумерус, Скопје
99. Малчески, Р., Малчески, А. (2017). Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
100. Малчески, Р., Малчески, А. (2018). Откривање на непознат број, магија или математика, Нумерус, Скопје
101. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решавање на текстуални задачи (четврто издание), Армаганка, Скопје
102. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје
103. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Збирка задачи по елементарна алгебра, Армаганка, Скопје
104. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). По патеките на шампионите за математика (второ издание), Армаганка, Скопје
105. Малчески, С. Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
106. Малчески, С. Конструкција на аритметичка, геометриска и хармониска средина на две отсечки, Нумерус, Скопје
107. Малчески, С. Неколку начини за докажување на едно неравенство, Нумерус, Скопје
108. Малчески, С., Аневска, К. (2013). Шаховските фигури и златниот пресек, Нумерус, Скопје
109. Малчески, С., Аневска, К. (2018). Една теорема многу начини на докажување, Нумерус, Скопје

-
110. Малчески, С., Лукарески, М. Пополнуваме табели со броеви, Нумерус, Скопје
 111. Милошевиќ, Д. Еден проблем во врска со расекување на коцка, Нумерус, Скопје
 112. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – втор дел, Нумерус, Скопје
 113. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – прв дел, Нумерус, Скопје
 114. Милошевиќ, Д. Квадрат и точка, Нумерус, Скопје
 115. Милошевиќ, Д. Некои теореми за точки во рамнината на триаголникот, Нумерус, Скопје
 116. Милошевиќ, Д. Основни својства на магичните квадрати од ред четири, Нумерус, Скопје
 117. Михајлова, Е. Брзо множење, Нумерус, Скопје
 118. Михајлова, Е. Како едноставно да решаваме текстуални задачи – вештина за составување равенки, Нумерус, Скопје
 119. Младеновиќ, П. Правила на еднаков број, збир и производ, Нумерус, Скопје
 120. Муминагиќ, А. За една олимписка задача, Нумерус, Скопје
 121. Муминагиќ, А. Плоштина на правилен петаголник, Нумерус, Скопје
 122. Муминагиќ, А., Карстенсен, Ј. Од страниците на забавната математика, Нумерус, Скопје
 123. Муминагиќ, А., Сведрец, Р. Кои броеви недостасуваат, Нумерус, Скопје
 124. Петревски, Н. Максимум и минимум во задачи од геометрија, Нумерус, Скопје
 125. Петревски, Н. Ојлерова кружница, Нумерус, Скопје
 126. Петровиќ, В. Натпревар во повеќебој, Нумерус, Скопје
 127. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1993). Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София
 128. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1995). Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София
 129. Србиноска, Н. Повеќе начини на решавање на една задача, Нумерус, Скопје
 130. Тренчевски, К. За младите логичари, Нумерус, Скопје
 131. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д. (1994). Занимлива математика, МММ, Скопје

132. Тфекчиев, И.; Лесов, Х. (1988). Задачи за извнкласна работа по математика в IV и V клас, Софија
133. Филипоски, С. Неколку избрани задачи од неравенства, Нумерус, Скопје
134. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч. (1998). Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София
135. Цофман, Ј. Користење табели броеви за одредување на збирите на елементите на некои низи броеви, Нумерус, Скопје
136. Шарик, Милан Метод на помошни фигури, Нумерус, Скопје
137. Шаркова, И. Последните цифри, Нумерус, Скопје
138. Шаркова, И., Карацова, Р. Бројните ребуси помагаат, Нумерус, Скопје