II ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2015

IV одделение

1. Претстави ги множествата:

A – парни броеви од осмата десетка,

B – природни броеви поголеми од 74, а помали од 85

Најди: $\delta(A)$, $\delta(B)$, $\delta(A\cup B)$ и $\delta(A\cap B)$.

Решение. Имаме

$$A=\{72,74,76,78,80\},\ \ B=\{75,76,77,78,79,80,81,82,83,84\}.$$

$$A\cup B=\{72,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84\} \text{ и } A\cap B=\{76,78,80\}.$$

Според тоа,

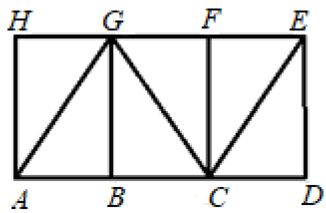
$$\delta(A)=5,\ \delta(B)=10,\ \delta(A\cup B)=12,\ \delta(A\cap B)=3.$$

2. За еден ден столарот изработува 6 столици и 3 маси. Пресметај колку парчиња мебел тој ќе изработи за 5 работни дена.

Решение. *Прв начин.* Столарот за еден ден ќе изработи $6+3=9$ парчиња мебел, а за 5 дена $5\cdot 9=45$ парчиња мебел.

Втор начин. За 5 дена столарот ќе изработи $5\cdot 6=30$ столици и $5\cdot 3=15$ маси, односно $30+15=45$ парчиња мебел.

3. Запиши ги сите триаголници што се претставени на цртежот. Потоа, добиениот број на триаголници помножи го со најмалиот трицифрен број и одземи го бројот на месеци во годината. Кој број го доби?



Решение. На цртежот се претставени триаголниците: *ABG, ACG, AHG, BCG, CDE, CFG, CFE, CGE*, што значи дека имаме вкупно 8 триаголници. Од условот на задачата следува:

$$8\cdot 100-12=800-12=788.$$

Значи, бараниот број е 788.

4. Во една книжарница: првиот ден донеле 120 книги, вториот ден два пати повеќе од првиот ден, третиот ден три пати помалку од вториот ден, во четвртиот ден донеле книги колку што донеле првиот и третиот ден заедно, а во петтиот ден исто колку и вториот ден.

Колку вкупно книги биле донесени во книжарницата?

Решение. Од условот на задачата следува дека по денови се донесени:

I ден: 120 книги

II ден: $2\cdot 120=240$ книги

III ден: $240:3=80$ книги

IV ден: 120+80=200 книги и

V ден: 240 книги.

Според тоа, вкупно се донесени:

120+240+80+200+240=880 книги.

V одделение

1. Пресметај:

$$7\cdot(36\cdot 2+7\cdot 4)+36-5\cdot(256-127)$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}7\cdot(36\cdot 2+7\cdot 4)+36-5\cdot(256-127)&=7\cdot(72+28)+36-5\cdot 129\\&=7\cdot 100+36-645\\&=700+36-645=736-645=91.\end{aligned}$$

2. Продавач продавал јагне, јаре и теле. Кога го прашале колку килограми има секое од нив, продавачот одговорил: „Јагнето и јарето заедно имаат 32 kg, јагнето и телето 102 kg, а јарето и телето 100 kg. Колку килограми има секое животно?

Решение. Јагнето, јарето и телето заедно имале

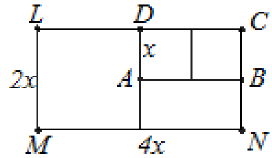
$$(32+102+100):2=117\ kg.$$

Оттука телето имало $117-32=85$ kg, јарето $117-102=15$ kg и јагнето имало $117-100=17$ kg.

3. Два трактора орале нива. Првиот трактор орал по 10 ha на ден, а вториот по 11 ha на ден. Последниот ден орал само првиот трактор. Колку дена првиот трактор бил на нива, а колку вториот, ако нивата имала 70 ha.

Решение. Двата трактори ораат по 21 ha на ден. За три дена ќе изораат 63 ha. Четвртиот ден неизораниот дел од $70-63=7$ ha ќе ги доора првиот трактор. Значи првиот трактор бил 4 дена, а вториот 3 дена на нивата.

4. Да се пресмета периметарот на правоаголникот $MNCL$ ако периметарот на правоаголникот $ABCD$, кој е составен од два еднакви квадрати, изнесува 174 *cm*.



Решение. Според условот на задачата периметарот на правоаголникот $ABCD$ е 174 *cm*. Затоа имаме

$$2(x+2x)=174$$
$$2\cdot 3x=174,$$
$$6x=174,$$
$$x=29$$

Значи, периметарот на правоаголникот $MNCL$ е

$$2(2x+4x)=2(2\cdot 29+4\cdot 29)=2(58+116)=2\cdot 174=248.$$

VI одделение

1. Еден од комплементните агли е за $31°30'$ поголем од другиот. Одреди ја големината на аглите.

Решение. Аглите се комплементни, што значи дека нивниот збир е еднаков на $90°$. Затоа $\alpha+\beta=90°$ и $\alpha-\beta=31°30'$. Оттука $2\alpha=121°30'$, односно $\alpha=60°45'$ и $\beta=90°-60°45'=29°15'$.

2. За кои природни брови a и b важи НЗД$(a,b)=8$ и НЗС$(a,b)=168$?

Решение. Нека $a=8m$ и $b=8n$, при што НЗД$(m,n)=1$. За секои два природни броеви важи $ab=$ НЗД$(a,b)\cdot$ НЗС(a,b), па затоа $ab=8\cdot 168$. Со замена $a=8m$ и $b=8n$, добиваме $8m\cdot 8n=8\cdot 168$, односно $m\cdot n=21$. Бројот 21 можеме да го запишеме како $21=21\cdot 1=7\cdot 3$, па затоа паровите (m,n) се $(1,21)$, $(7,3)$, $(3,7)$ и $(21,1)$. Конечно, со замена во $a=8m$ и $b=8n$ добиваме

$$(a,b)\in\{(8,168),(24,56),(56,24),(168,8)\}.$$

3. Продавач измешал 150 *kg* кафе по цена од 440 *kg* денари со 50 *kg* кафе по цена од 640 денари. Колкава ќе биде цената на еден килограм од така добиената мешавина на кафе, ако треба да се заработи иста сума пари?

Решение. Вкупната количина на кафе е $150+50=200$ *kg*. Продавачогт треба да продаде 200 килограми кафе и треба да заработи

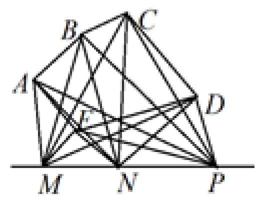
$$150\cdot 440+50\cdot 640=66000+32000=98000.$$

Ако цената на 1 килограм кафе е x, тогаш $200x = 98000$, па затоа

$$x = 98000 : 200 = 490.$$

Значи, цената по која ќе се продава новата смеса е 490 денари.

4. Дадени се точките A, B, C, D, E такви што било кои од нив не се колинеарни и права p која не минува низ ниту една од нив. Точките M, N, P лежат на правата p. Колку прави и колку отсечки се определени со дадените точки?



Решение. За неколинеарните точки, вкупниот број на прави, а во исто време и на отсечки (еднозначно определени со две различни точки), е еднаков на $4+3+2+1= 10$. Имено, од точката A може да ги повлечеме отсечките AB, AC, AD, AE. Без да има повторување, низ точката B ги повлекуваме BC, BD, BE, низ C правите CD, CE и низ D правата DE. На правата p се определени три отсечки и јасно, само една права. И конечно, при поврзувањето на точките A, B, C, D, E со точките од правата има вкупно $5 \cdot 3 = 15$ прави и 15 отсечки. Вкупниот број на прави тогаш е $10+1+15 = 26$ и вкупно има $10+3+15 = 28$ отсечки.

VII одделение

1. Во две кутии има 140 јаболки. Колку јаболки има во секоја кутија, ако 0,3 делови од бројот на јаболките во првата е три пати помал од 0,36 делови од бројот на јаболките во втората кутија?

Решение. Да ги означиме со a и b бројот на јаболките во првата и втората кутија, соодветно. Според условот на задачата имаме:

$$\begin{cases} a+b=140 \\ 0,3\cdot a\cdot 3=0,36b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=140 \\ a=\frac{2}{5}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=40 \\ b=100 \end{cases}$$

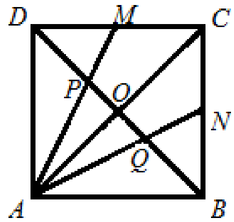
2. Најди двоцифрен број таков што, ако меѓу неговите цифрите се запише истиот број, тогаш новодобиениот број е 77 пати поголем од дадениот.

Решение. Со $\overline{xy}$ да го означиме бараниот број. Од условот на задачата ја добиваме равенката $77\overline{xy} = \overline{xxyy}$. Последната равенка е еквивалентна на равенката

$$77(10x+y)=1000x+100x+10y+y$$

од каде следува $5x=y$. Но, x и y се цифри, па затоа од последната равенка добиваме $x=1$ и $y=5$. Конечно, бараниот број е 15.

3. Даден е квадрат $ABCD$. Темето A е поврзано со точките M и N кои се средини на страните CD и BC, соодветно. Да се докаже дека дијагоналата BD со отсечките AM и AN е поделена на три еднакви делови.



Решение. Нека O е пресекот на дијагоналите AC и BD. Отсечките AM и AN се тежишни линии во триаголниците ΔACD и ΔABC, соодветно. Па, затоа

$$\overline{DP}=\tfrac{2}{3}\overline{DO}=\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{2}\overline{DB}=\tfrac{1}{3}\overline{DB}.$$

Аналогно

$$\overline{BQ}=\tfrac{2}{3}\overline{BO}=\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{2}\overline{DB}=\tfrac{1}{3}\overline{DB}.$$

4. Ширината на правоаголникот ја зголемуваме за $3,6\text{cm}$, а неговата должина ја намалуваме за 16%. Плоштината на новодобиениот правоаголник е поголема за 5% од плоштината на почетниот. Одреди ја ширината на новиот правоаголник.

Решение. Плоштината на новиот правоаголник е зголемена за 5%, па таа е 1,05 од плоштината на првиот правоаголник. Должината на новиот правоаголник е намалена за 16%, па таа е 0,84 од должината на првиот. Според тоа ширината на новиот правоаголник е $1,05:0,84=1,25$ од ширината на првиот. Значи настанало зголемување на ширината на првиот правоаголник за 25%, т.е. за $3,6\text{cm}$. Следува дека ширината на првиот правоаголник е $3,6:0,25=14,4\text{cm}$. Конечно, ширината на новиот правоаголник е $14,4+3,6=18\text{cm}$.

VIII одделение

1. Разликата меѓу броевите на страните на два конвексни многуаголници е 5, а разликата меѓу броевите на нивните дијагонали е 45. Колку страни има секој од многуаголниците?

Решение. Нека бројот на страни на конвексниот многуаголник е n. Тогаш бројот на дијагоналите е $\frac{n(n-3)}{2}$. Кога бројот на страните е $n+5$, тогаш многуаголникот има $\frac{(n+5)(n+5-3)}{2}$ дијагонали. Според тоа, од условот на задачата следува

$$\frac{n(n-3)}{2}+45=\frac{(n+5)(n+5-3)}{2},$$

односно $n^2-3n+90=n^2+7n+10$, од каде добиваме дека $n=8$. Вториот многуаголник има $n+5=13$ страни.

2. Што е поголемо: $\frac{2014}{2015}$ или $\frac{2015}{2016}$?

Решение. Точни се следниве равенства

$$\frac{2014}{2015}=\frac{2015-1}{2015}=1-\frac{1}{2015} \text{ и } \frac{2015}{2016}=\frac{2016-1}{2016}=1-\frac{1}{2016}.$$

Но, $\frac{1}{2015}>\frac{1}{2016}$, па затоа $-\frac{1}{2015}<-\frac{1}{2016}$, т.е. $\frac{2014}{2015}<\frac{2015}{2016}$.

3. Еден работник некоја работа може да ја заврши за 9 дена, а друг работник истата работа може да ја заврши за 12 дена. Ако им се приклучи трет работник, тројцата работата би ја завршиле за 4 дена. За колку дена третиот работник сам би ја завршил работата?

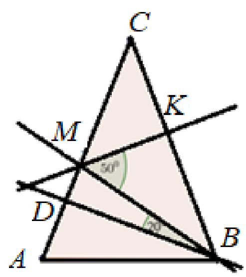
Решение. Нека третиот работник сам може да ја заврши работата за x денови. За еден ден, првиот, вториот, односно третиот работник би завршиле $\frac{1}{9},\frac{1}{12},\frac{1}{x}$ дел од работата, соодветно. Според тоа, $(\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{x})\cdot 4=1$, од каде добиваме дека $x=18$. Следува дека третиот работник сам би ја завршил работата за 18 дена.

4. Во ΔABC повлечени се симетралата BM и висината BD. Во ΔBMC повлечена е висината MK. Отсечката BM образува со отсечката BD агол од 20°, а со отсечката MK агол од 50°. Одреди ги аглите во ΔABC.

Решение. Триаголникот MBK е правоаголен и MB е симетрала на аголот β, па затоа $\frac{\beta}{2}=40^\circ$, т.е. $\beta=80^\circ$. Триаголникот ABD е правоаголен, и како

$\measuredangle DBA=\measuredangle ABM-\measuredangle DBM=20^\circ$,

добиваме $\alpha=70^\circ$. Следува дека $\gamma=30^\circ$.



IX одделение

1. Бројот 49 е запишан како збир на два броја, така што петтина од едниот собирок зголемена за осмина од другиот собирок е еднаква на 8. Одреди ги тие броеви.

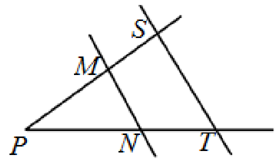
Решение. Нека 49 е поделен на x и y. Од условите на задачата имаме

$$\begin{cases} x+y=49 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{8}=8 \end{cases}$$

Со решавање на системот се добива x=25 и y=24. Конечно, бараните броеви се 25 и 25.

2. Правите MN и ST се паралелни (види цртеж). Најди ја вредноста на y ако:

$$\overline{PN}=y+4, \overline{NT}=y-2, \overline{SM}=8cm, \ \overline{MP}=24cm$$



Решение. Од Талесовата теорема следува дека

$$\overline{PN}:\overline{PT}=\overline{PM}:\overline{PS}\ ,$$

односно

$$\overline{PN}:(\overline{PN}+\overline{NT})=\overline{PM}:(\overline{PM}+\overline{MS})\,.$$

Оттука

$$(y+4):(2y+2)=24:32\,.$$

Од последната пропорција добиваме

$$32(y+4)=24(2y+2)\,,$$

од каде се добива дека $32y+128=48y+48$, односно $16y=80$. Конечно, $y=5$.

3. Во правоаголен триаголник висината над хипотенузата ја дели хипотенузата на два дела со должини 9 и 16. Одреди ги периметарот и плоштината на триаголникот.

Решение Нека катетите на триаголникот се a и b, а висината над хипотенузата е h. Исполнети се равенствата

$$a^2=h^2+16^2,\ b^2=h^2+9^2,\ a^2+b^2=25^2$$

Ако ги собереме првите две равенства, добиваме дека

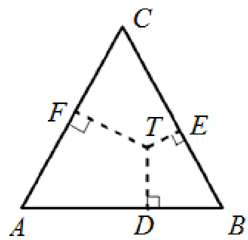
$$25^2=2h^2+16^2+9^2\,.$$

од каде $h=12$. Сега, лесно добиваме дека $a=20$, $b=15$. Оттука добиваме дека периметарот на триаголникот е $L=60$, а неговата плоштина е $P=150$.

4. Во внатрешноста на еден рамностран триаголник, избрана е точка T која од страните на триаголникот е оддалечена 1 cm, 2 cm и 3 cm соодветно. Одреди ја плоштината на триаголникот.

Решение. Од условот на задачата, следува дека

$$\overline{TD}=1, \overline{TE}=2, \overline{TF}=3\ .$$



Да ја прикажеме плоштината на триаголникот ABC како збир на плоштини на три триаголници. Имаме

$$P_{ABC}=P_{ABT}+P_{BCT}+P_{CAT}\ .$$

па затоа

$$P_{ABC}=\frac{a\cdot\overline{TD}}{2}+\frac{a\cdot\overline{TE}}{2}+\frac{a\cdot\overline{TF}}{2}=\frac{a}{2}(\overline{TD}+\overline{TE}+\overline{TF})=\frac{a}{2}(1+2+3)=3a\ .$$

Од друга страна, плоштината на рамностраниот триаголник е $P_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, па со изедначување на двата добиени изрази, се добива $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3a$. Значи $a=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$. Конечно, од формулата за плоштина на рамностран триаголник, добиваме $P_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{48}{4}=12\sqrt{3}\,cm^2$.