

Шефкет Арсланагиќ
Алија Муминагиќ

ПОВЕЌЕ ДОКАЗИ НА ЕДНО ПОЗНАТО ГЕОМЕТРИСКО НЕРАВЕНСТВО

Во математиката, докажувањето на неравенства е една од најкреативните, па затоа и во исто време е најинтересна работа. Секако, тој кој што сака тоа да го прави мора многу солидно да биде едуциран од различни области од елементарната математика, но да има и добри познавања од диференцијалното сметање.

Оваа работа е посветена на доказот на едно тригонометриско неравенство, кое има важно место во тригонометриските неравенства, и кое има голема примена во докажувањето на други неравенства. Ќе биде разгледувано тригонометриското неравенство во триаголник:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}, \quad (1)$$

каде α, β и γ се внатрешните агли во триаголник. Ќе бидат дадени повеќе различни докази на ова неравенство. Во некои од доказите ќе бидат користени познати равенства и неравенства, чии докази пак може да се најдат во [1] и [2].

Равенствата

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (2)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}, \quad (3)$$

каде r и R се радиуси на впишаната и опишаната кружница во триаголникот, и неравенствата

$$R \geq 2r \quad (4)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}, \quad (5)$$

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc, \quad (6)$$

каде a, b, c се должини на страни на триаголникот, се точни во произволен триаголник.

Доказот на овие равенства и неравенства не се предмет на оваа статија, и заради тоа ќе преминеме на доказот на неравенството (1).

Доказ 1. Од (2) и (5), т.е. имаме

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1 + 4 \cdot \frac{1}{8},$$

т.е.

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Равенство важи само во случај кога

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{2},$$

односно $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Забелешка 1. Од (2) заради $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} > 0$ добиваме дека е точно неравенството

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > 1.$$

Заради тоа, неравенството (1) во литературата најчесто се појавува во облик на двојно неравенство

$$1 < \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Доказ 2. Од (2) и (3) добиваме

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{r}{R},$$

а одовде заради (4), т.е. $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$ следува

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Доказ 3. Нека $S = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$. Користејќи ја косинусната теорема имаме

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{и} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Сега следува,

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \left(\frac{b^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 - b^2}{2ac} \right) + \left(\frac{c^2}{2bc} + \frac{c^2}{2ac} \right) \\ &= \left(\frac{a^2 - b^2}{2ac} - \frac{a^2 - b^2}{2bc} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a} \right) = \frac{a^2 - b^2}{2c} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a} \right) \\ &= \frac{a^2 - b^2}{2c} \frac{b - a}{ab} + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a} \right) - \frac{(a - b)^2 (a + b)}{2abc}. \end{aligned}$$

Потполно аналогно добиваме:

$$\cos \alpha + \cos \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} \right) - \frac{(a - c)^2 (a + c)}{2abc}, \quad \cos \beta + \cos \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \right) - \frac{(b - c)^2 (b + c)}{2abc}.$$

Со собирање на последните три равенства, добиваме:

$$2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \right) - \frac{(a - b)^2 (a + b) + (a - c)^2 (a + c) + (b - c)^2 (b + c)}{2abc}$$

т.е.

$$\begin{aligned}
 2S &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2 \right) + 3 - \frac{(a-b)^2(a+b) + (a-c)^2(a+c) + (b-c)^2(b+c)}{2abc} \\
 &= 3 + \frac{(a-b)^2}{2ab} + \frac{(b-c)^2}{2bc} + \frac{(a-c)^2}{2ac} - \frac{(a-b)^2(a+b) + (a-c)^2(a+c) + (b-c)^2(b+c)}{2abc}, \\
 2S &= 3 - \frac{(a-b)^2(a+b-c) + (a-c)^2(a+c-b) + (b-c)^2(b+c-a)}{2abc}.
 \end{aligned}$$

Заради неравенствата $a+b-c > 0, b+c-a > 0, a+c-b > 0$, имаме:

$$\frac{(a-b)^2(a+b-c) + (a-c)^2(a+c-b) + (b-c)^2(b+c-a)}{2abc} \geq 0,$$

па според тоа

$$2S = 3 - \frac{(a-b)^2(a+b-c) + (a-c)^2(a+c-b) + (b-c)^2(b+c-a)}{2abc} \leq 3,$$

односно $2S \leq 3$, т.е. $S \leq \frac{3}{2}$.

Доказ 4. Нека повторно $S = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$. Користејќи ја косинусната теорема, како и во доказот 3, добиваме:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\
 &= \frac{1}{2abc} [a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)]
 \end{aligned}$$

Не е тешко да се докаже дека

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) + 2abc,$$

од каде добиваме

$$S = \frac{1}{2abc} [(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) + 2abc].$$

Заради неравенството (6), т.е. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$, имаме

$$S \leq \frac{1}{2abc} [abc + 2abc] = \frac{3}{2}.$$

Доказ 5. Нека сега $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = t$. Бидејќи $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, т.е.

$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, добиваме $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos(90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = \sin \frac{\gamma}{2}$. Исто така:

$$\cos \gamma = \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Сега

$$t = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

односно

$$-2\sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + 1 - t = 0.$$

Квадратната равенка по $\sin \frac{\gamma}{2}$ има реални решенија ако и само само ако $D \geq 0$,

односно

$$4\cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} + 8(1-t) \geq 0,$$

$$t \leq 1 + \frac{1}{2}\cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Бидејќи $\cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} \leq 1$, добиваме $t \leq \frac{3}{2}$.

Доказ 6. Користејќи тригонометриски идентитети, својства на аглите во триаголник и својства на \cos , добиваме:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos[\pi - (\alpha + \beta)] \\ &= 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos(\alpha + \beta) \\ &\leq 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} - \cos(\alpha + \beta) \\ &= 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} - 2\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + 1 = \\ &= -2\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2} - 2\left(\cos \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Доказ 7. Во овој доказ ќе го користиме неравенството (5), т.е.

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Бидејќи $\sin \frac{\gamma}{2} = \cos(90^\circ - \frac{\gamma}{2})$, добиваме

$$2\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos(90^\circ - \frac{\gamma}{2}) \leq \frac{1}{4}.$$

Заради равенствата

$$2\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ и } \cos(90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = \cos \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \cos \frac{\alpha+\beta}{2},$$

имаме

$$\left(\cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \frac{1}{4},$$

т.е.

$$-2\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \leq \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Повторно, заради равенствата

$$2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \cos \alpha + \cos \beta$$

и

$$2\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} - 1 = \cos(\alpha + \beta),$$

со замена во (7), добиваме

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \leq \frac{3}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\pi - \gamma) \leq \frac{3}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Доказ 8. Имаме:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$$

$$2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos[\pi - (\alpha + \beta)] \leq \frac{3}{2}$$

$$2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos(\alpha + \beta) \leq \frac{3}{2}$$

$$2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + 1 \leq \frac{3}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} - \left(\cos \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Последното неравенство е точно бидејќи

$$\cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} \leq 1 \text{ и } \left(\cos \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Според тоа, точно е и неравенството (1), при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 1 \text{ и } \cos \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0,$$

т.е. $\alpha = \beta$ и $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Значи, знак за равенство важи ако и само ако $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Доказ 9. За овој доказ ќе користиме вектори. Нека е $\triangle ABC$ произволен триаголник и нека

$$\angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma \text{ и}$$

$$\angle CAB = \alpha,$$

а \vec{e}_1, \vec{e}_2 и \vec{e}_3 се единечни вектори колонеарни со векторите \vec{AB}, \vec{BC} и \vec{CA} соодветно (види цртеж). Јасно е дека

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geq 0,$$

од каде што добиваме

$$\vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + \vec{e}_3^2 + 2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) \geq 0,$$

$$|\vec{e}_1|^2 + |\vec{e}_2|^2 + |\vec{e}_3|^2 + 2(|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cos(\pi - \beta) + |\vec{e}_2| \cdot |\vec{e}_3| \cos(\pi - \alpha) + |\vec{e}_3| \cdot |\vec{e}_1| \cos(\pi - \gamma)) \geq 0$$

$$1 + 1 + 1 + 2[\cos(\pi - \beta) + \cos(\pi - \alpha) + \cos(\pi - \gamma)] \geq 0,$$

$$3 - 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \geq 0,$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Забелешка 2. Ако еден од аглите α или β или γ е тап или прав, тогаш $\cos \alpha \leq 0$ или $\cos \beta \leq 0$ или $\cos \gamma \leq 0$, па неравенството (1) во тој случај очигледно е точно, бидејќи тоа е точно ако се α, β и γ остри агли, т.е. $\cos \alpha > 0$, $\cos \beta > 0$ и $\cos \gamma > 0$

Доказ 10. Неравенството (1) ќе го докажеме со помош на неравенството на Јенсен, ако се α, β и γ се остри агли (и овде важи забелешката 2).

Ќе ја разгледаме функцијата $y = \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Имаме $y' = -\sin x$,

$y'' = -\cos x < 0$, за секое $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Значи, дадената функција е конкавна за

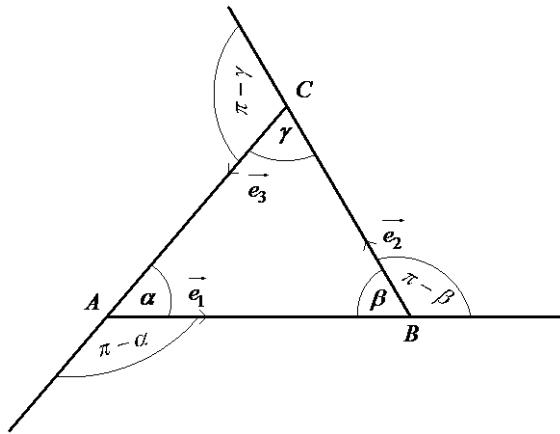
$x \in (0, \frac{\pi}{2})$, па според неравенството на Јенсен, имаме

$$f\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) \geq \frac{1}{3}[f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)].$$

Заради равенството $\alpha + \beta + \gamma = \pi$:

$$\frac{1}{3}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \leq \cos \frac{\pi}{3},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$



Последица 1. Во случај на остроаголен триаголник, т.е. кога $\cos \alpha > 0$, $\cos \beta > 0$, $\cos \gamma > 0$, според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Од последното неравенство и заради неравенството (1) имаме:

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}.$$

Ова неравенство е очигледно точно во случај кога триаголникот е тапоаголен или правоаголен, бидејќи левата страна е негативна или еднаква на нула.

Доказ 11. Заради симетрија на равенството, можеме да претпоставиме дека $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < \pi$. Заради равенството $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ имаме

$$\cos \gamma = \cos[\pi - (\alpha + \beta)] = -\cos(\alpha + \beta).$$

Ќе ја разгледаме функцијата

$$f(\alpha) = \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta),$$

$$f'(\alpha) = -\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta),$$

од каде добиваме

$$f'(\alpha) = -2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \sin \frac{\beta}{2}.$$

Решенија на равенката $f'(\alpha) = 0$ се решенија на равенката $\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = 0$, бидејќи

$\sin \frac{\beta}{2} > 0$. Решение на последната равенка е $\alpha + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$, односно $\alpha = \frac{\pi - \beta}{2}$. Бидејќи

$$f''(\alpha) = -2 \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \sin \frac{\beta}{2},$$

добиваме

$$f''\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\beta}{2} = -2 \sin \frac{\beta}{2} < 0.$$

Според тоа, во точката $\alpha = \frac{\pi - \beta}{2}$ функцијата $f(\alpha)$ има максимум:

$$f_{\max} = f\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right) = \cos \frac{\pi - \beta}{2} + \cos \beta - \cos\left(\frac{\pi - \beta}{2} + \beta\right)$$

$$f_{\max} = 2 \sin \frac{\beta}{2} + \cos \beta = -2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 2 \sin \frac{\beta}{2} + 1,$$

$$f_{\max} = -2\left(\sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\right) = -2\left(\sin \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2},$$

$$f_{\max} = \frac{3}{2} \text{ за } \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}.$$

Значи, максимумот се достигнува за $\beta = \frac{\pi}{3}$, при што

$$f(\alpha) \leq f_{\max} = \frac{3}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \leq \frac{3}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Доказ 12. Имаме

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \cos \alpha + \cos \beta + \cos[\pi - (\alpha + \beta)] = \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \\ &= (\cos \alpha + \cos \beta) \cdot 1 + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Заради неравенството меѓу аритметичка средина A и геометричка средина G , $A \geq G$, добиваме:

$$\sqrt{(\cos \alpha + \cos \beta)^2 \cdot 1^2} \leq \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + 1^2}{2},$$

$$(\cos \alpha + \cos \beta) \cdot 1 \leq \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + 1^2}{2},$$

$$\sqrt{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} \leq \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}{2},$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \leq \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}{2}.$$

Ако ги употребиме последните неравенства, имаме

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &\leq \frac{1}{2}[(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + 1^2] + \frac{1}{2}(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - \cos \alpha \cos \beta \\ &= \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta + 1 + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - \cos \alpha \cos \beta \\ &= \frac{1}{2}[(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + 1] = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Значи,

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Равенство важи ако и само ако

$$\cos \alpha + \cos \beta = 1 \text{ и } \sin \alpha = \sin \beta,$$

од каде добиваме $\alpha = \beta$ и $2 \cos \alpha = 1$. Добиваме $\alpha = \frac{\pi}{3}$, па затоа

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Литература

- [1] **Arslanagić, Š.**, Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
- [2] **Arslanagić, Š.**, Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.
- [3] **Bottema, O. i ostanati**, Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

Статијата првпат е објавена во списанието СИГМА на СММ