Општински натпревар 2019

I година

1А. Докажи дека за секое x, x^2+x+1 е делител на x^8+x^4+1.

Решение. Полиномот x^8+x^4+1 можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} x^8+x^4+1 &= x^8+2x^4+1-x^4=(x^4+1)^2-(x^2)^2 \\ &=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1) \\ &=(x^4+2x^2+1-x^2)(x^4-x^2+1) \\ &=((x^2+1)^2-x^2)(x^4-x^2+1) \\ &=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1). \end{aligned}$$

Според тоа

$$\tfrac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}=\tfrac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)}{x^2+x+1}=(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)\,\text{.}$$

Забелешка. Задачата може да се реши и со делење на полиномот x^8+x^4+1 со полиномот x^2+x+1.

1Б. Одреди ги сите трицифрени природни броеви кои се 12 пати поголеми од збирот на своите цифри.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот трицифрен број. Тогаш од условот на задачата добиваме дека

$$100a+10b+c=12(a+b+c)=12a+12b+12c\,,$$

од каде $88a-11c=2b$. Бидејќи левата страна е делива со 11, следува дека мора биде и десната, а тоа е можно само кога $b=0$ (b е цифра). Тогаш $11(8a-c)=0$, од каде следува дека $c=8a$, односно дека $c=8, a=1$. Според тоа, бараниот број е 108.

2А.3Б. Производот од четири последователни броеви зголемен за 1 е полн квадрат. Докажи!

Решение. Да ги означиме броевите со $n, n+1, n+2, n+3$. Тогаш:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\ &=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &=(n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

2Б. Ако бројот на страните на конвексен многуаголник се зголеми за 5, тогаш бројот на дијагоналите се зголемува за 100. Колку страни има тој многуаголник?

Решение. Нека бројот на страни на многуаголникот е n. Тогаш, бројот на дијагонали во тој многуаголник е $\frac{n(n-3)}{2}$. Од условот на задачата добиваме $\frac{n(n-3)}{2}+100=\frac{(n+5)(n+2)}{2}$, од каде што $n=19$. Значи, многуаголникот има 19 страни.

3А. Ако $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1$, тогаш докажи дека $xy+yz+zx=0$.

Решение. Нека $k=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Тогаш $x=ka, y=kb, z=kc$ и

$$xy+yz+zx=ka\cdot kb+kb\cdot kc+kc\cdot ka=k^2(ab+bc+ca).$$

Од $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1$ добиваме

$$ab+bc+ca=\tfrac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]=0,$$

односно $xy+yz+zx=0$.

4АБ. За природните броеви a,b,c,d важи

$$a+b=c \text{ и } a+d=2c.$$

Докажи, дека постои правоаголен триаголник со плоштина $abcd$ и чии должини на страни се изразени со природни броеви.

Решение. Имаме $a=c-b$ и $d=2c-a=b+c$. Според тоа,

$$abcd=(c-b)\cdot b\cdot c\cdot(b+c)=bc(c^2-b^2)=\tfrac{1}{2}(2bc)(c^2-b^2).$$

Бидејќи b и c се природни броеви и $c>b$ (a е природен број) добиваме дека $c^2-b^2>0$. Според тоа, $abcd$ е плоштина на правоаголен триаголник со катети со должини $2bc$ и c^2-b^2. Должината на хипотенузата е еднаква на

$$\sqrt{(2bc)^2+(c^2-b^2)^2}=\sqrt{c^4+2b^2c^2+c^4}=\sqrt{(b^2+c^2)^2}=b^2+c^2.$$

Јасно, бидејќи b и c се природни броеви и $c>b$, добиваме дека должините на сите три страни $2bc$, c^2-b^2 и c^2+b^2 се природни броеви.

II година

1АБ. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{5y+4x}{xy} = 7 \\ \frac{7y-3x}{2xy} = \frac{11}{4} \end{cases}$$

Решение. Го трансформираме системот во

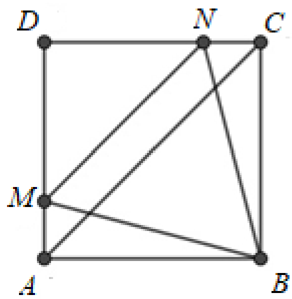
$$\begin{cases} \frac{5y}{xy} + \frac{4x}{xy} = 7 \\ \frac{7y}{2xy} - \frac{3x}{2xy} = \frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 7 \\ \frac{7}{2x} - \frac{3}{2y} = \frac{11}{4} \end{cases}$$

Потоа, ставаме смена $\frac{1}{z} = u, \frac{1}{y} = v$. Добиваме

$$\begin{cases} 5u + 4v = 7 \\ \frac{7}{2}u - \frac{3}{2}v = \frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u + 4v = 7 \\ 14u - 6v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15u + 12v = 21 \\ 28u - 12v = 22 \end{cases}$$

Решенијата на последниот систем се $u = 1, v = \frac{1}{2}$, од каде што $x = 1, y = 2$.

2А. Нека даден е квадрат $ABCD$ и нека M и N се точки од страните AD и DC, соодветно такви што $\triangle BMN$ е рамностран. Докажи дека $AC \| MN$.



Решение. Триаголниците $\triangle ABM$ и $\triangle BNC$ се складни (имаат еднакви хипотенузи и еднакви катети), па затоа $\measuredangle AMB = \measuredangle CNB$. Значи

$$\begin{aligned} \measuredangle DMN &= 180^\circ - (\measuredangle AMB + \measuredangle BMN) \\ &= 180^\circ - (\measuredangle CNB + \measuredangle BNM) \\ &= \measuredangle DNM = 45^\circ = \measuredangle DAC. \end{aligned}$$

Според тоа, $AC \| MN$.

2Б. Упрости го изразот $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+(\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

3А. Пресметај го збирот на квадратите на решенијата на равенката

$$(x^2-5x)^2-7(x^2-5x)+7=0.$$

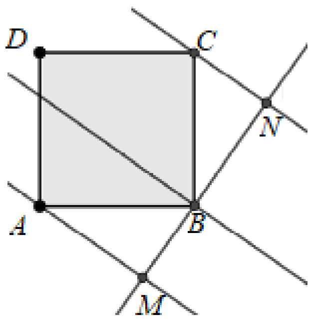
Решение. Со смената $y=x^2-5x$, дадената равенка ја сведуваме на равенката $y^2-7y+7=0$, чиишто решенија се $y_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-28}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{21}}{2}$. Тогаш, решенијата на равенките $x^2-5x-\frac{7+\sqrt{21}}{2}=0$ и $x^2-5x-\frac{7-\sqrt{21}}{2}=0$ се решенија и на дадената равенка. Според Виетовите врски, за збирот на квадратите на решенијата x_1 и x_2 на равенката $x^2+px+q=0$ важи:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-p)^2-2q=p^2-2q.$$

Затоа за збирот на квадратите на решенијата x_1, x_2, x_3 и x_4 на дадената равенката имаме:

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 &= 5^2-2\tfrac{-7-\sqrt{21}}{2}+5^2-2\tfrac{-7+\sqrt{21}}{2} \\ &= 25+7+\sqrt{21}+25+7-\sqrt{21}=64. \end{aligned}$$

3Б. Во темињата A, B и C на квадратот $ABCD$ повлекуваме три паралелни прави a, b и c, соодветно, така што b е меѓу a и c. Нека растојанието меѓу и b е $5cm$, а меѓу b и c е $7cm$. Пресметај ја плоштината на квадратот.



Решение. Од темето B ги повлекуваме нормалите кон правите a и c. Нека нормалата кон a ја сече a во точка M, а нормалата кон c ја сече c во точка N. Тогаш правоаголните триаголници AMB и BNC се складни, т.е. нивните катети имаат должини $5cm$ и $7cm$. Затоа, страната на квадратот има должина $\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}\,cm$, односно плоштината на квадратот изнесува $74cm^2$.

4АБ. Нека a,b,c се комплексни броеви такви што

$$a+b+c=0 \text{ и } ab+bc+ca=0.$$

Докажи, дека $|a|=|b|=|c|$.

Решение. Од првото равенство добиваме $a+b=-c$, па затоа со замена во второто равенство наоѓаме

$$0=ab+bc+ca=ab+c(a+b)=ab-c^2\text{, т.е. } ab=c^2 .$$

Аналогно добиваме $bc=a^2$ и $ca=b^2$. Од добиените равенства следува

$$|a|\cdot|b|=|c|^2,\ |b|\cdot|c|=|a|^2 \text{ и } |c|\cdot|a|=|b|^2 .$$

Ако ги поделиме првите две равенства добиваме $\frac{|a|}{|c|}=\frac{|c|^2}{|a|^2}$, т.е. $|a|^3=|c|^3$, па затоа $|a|=|c|$. Аналогно се добива дека $|b|=|c|$, па затоа важи $|a|=|b|=|c|$.

III година

1А.3Б. Реши ја равенката:

$$\log_3(3^{x^2-13x+28}+\tfrac{2}{9})=\log_5 0,2 .$$

Решение. Бидејќи $\log_5 0,2=\log_5 \frac{1}{5}=-1$, имаме $\log_3(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9})=-1$ од каде следува $3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$ или $3^{x^2-13x+28}=3^{-2}$. Од последната експоненцијална равенка следува квадратната равенка $x^2-13x+30=0$, чии корени се 3 и 10.

1Б. Реши ја равенката $4^x+9^x=2\cdot 6^x$.

Решение. Бидејќи $4^x=2^{2x}=(2^x)^2$, $9^x=(3^x)^2$, $6^x=2^x\cdot 3^x$, дадената равенка може да се трансформира во обликот $(2^x)^2-2\cdot 2^x\cdot 3^x+(3^x)^2=0$, односно $(2^x-3^x)^2=0$, од каде добиваме дека $2^x-3^x=0$, т.е. $2^x=3^x$. Последното равенство важи само за $x=0$. Значи решението на равенката е $x=0$.

2АБ. За аглите α,β,γ на $\triangle ABC$ важи $\cos\gamma=2\sin\alpha\sin\beta-1$. Докажи, дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Бидејќи $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$, добиваме $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$. Според тоа, за $\triangle ABC$ важи

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta=1\\
&\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+2\sin\alpha\sin\beta=1\\
&\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=1\\
&\cos(\alpha-\beta)=1.
\end{aligned}$$

Последното равенство е исполнето ако и само ако $\alpha - \beta = 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ и како α и β се агли на триаголник мора да важи $k = 0$, т.е. $\alpha = \beta$. Според тоа, $\triangle ABC$ е рамнокрак.

3А. За која вредност на параметарот m, збирот од квадратите на корените на квадратната равенка $x^2 + (m+2)x + m^2 + 1 = 0$ има најголема вредност. Најди го тој збир.

Решение. Од Виетовите формули следува

$$x_1 + x_2 = -(m+2) \text{ и } x_1 x_2 = m^2 + 1.$$

Затоа важи

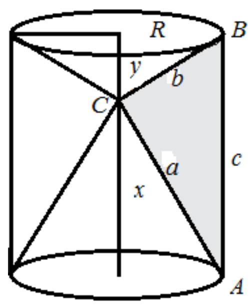
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-(m+2))^2 - 2(m^2+1) = -m^2 + 4m + 2$$

Темето на параболата $-m^2 + 4m + 2$ е $\alpha = -\frac{b}{2a} = 2, \beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{24}{-4} = 6$, т.е. $T(2,6)$ и во него параболата достигнува максимум бидејќи $a = -1 < 0$. Значи, бараната вредност за m е 2, а бараниот збир е 6, т.е.

$$x_1^2 + x_2^2 = -m^2 + 4m + 2 = -4 + 8 + 2 = 6.$$

4А. Правоаголен триаголник со катети $20cm$ и $15cm$ ротира околу права која минува низ темето на правиот агол и е паралелна со хипотенузата. Пресметај го волуменот на вака добиеното ротационо тело.

Решение. Телото кое се добива со ротација на триаголникот ABC е телото што се добива кога од цилиндарот ќе се одземат двата конуси (како на цртежот). Според ознаките на цртежот, од Питагоровата теорема имаме



$$c^2 = (x+y)^2 = a^2 + b^2 = 20^2 + 15^2 = 625.$$

Значи, $c = 25cm$. Затоа, $x + y = 25 \Rightarrow y = 25 - x$. Пак од Питагоровата теорема за двата конуси (едниот со основа со радиус R и висина x, а другиот со основа со радиус R и висина y) имаме

$$\begin{cases} R^2 + y^2 = 15^2 \\ R^2 + x^2 = 20^2 \end{cases}.$$

Од овде,

$$15^2 - y^2 = 20^2 - x^2$$
$$225-(25-x)^2 = 400 - x^2 .$$
$$50x = 800$$
$$x = 16$$

Од овде $y = 25-16 = 9cm$, а $R = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12cm$. Конечно, волуменот V на телото е

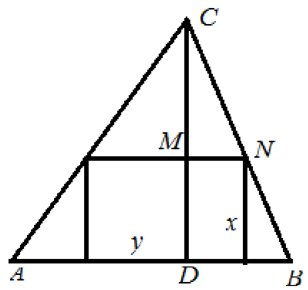
$$V = V_{ц} - V_{к_1} - V_{к_2} = 4900\pi cm^3$$

каде што

$$V_{ц} = R^2\pi(x+y) = 144 \cdot 25\pi = 6100\pi cm^3,$$
$$V_{k_1} = \frac{R^2\pi x}{3} = \frac{144 \cdot 16\pi}{3} = 768\pi cm^3,$$
$$V_{k_1} = \frac{R^2\pi y}{3} = \frac{144 \cdot 9\pi}{3} = 432\pi cm^3$$

4Б. Во триаголник со основа $16cm$ и висина $10cm$ впиши правоаголник со максимална плоштина, ако една страна на правоаголникот лежи на основата. Определи ги должините на страните на вака добиениот правоаголник.

Решение. Нека страните на бараниот правоаголник ги означиме со x и y. Од сличноста на триаголниците DBC и MNC, имаме



$$8:10 = \frac{y}{2}:(10-x) \Rightarrow 5y = 80 - 8x \Rightarrow y = 16 - \frac{8}{5}x$$

Плоштината на правоаголникот е $P = xy$. Ако замениме, добиваме

$$P = xy = x(16 - \frac{8}{5}x) = -\frac{8}{5}x^2 + 16x$$

Максимумот $(a = -\frac{8}{5} < 0)$ на оваа функција се достигнува во темето $T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}) = T\left(5,40\right)$.

IV година

1АБ. Ако a,b,c образуваат аритметичка прогресија (во тој редослед), тогаш $abc(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = 2b^2 + ac$. Докажи!

Решение. Ако a,b,c образуваат аритметичка прогресија, тогаш

$$b-a=c-b\text{, т.е. } 2b=a+c\text{,}$$

па имаме

$$abc(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})=abc\tfrac{bc+ac+ab}{abc}=b(c+a)+ca=2b^2+ac\,.$$

2А. Најди полином со најмал можен степен и со рационални коефициенти така што $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ е негова нула.

Решение. Јасно е дека во разложувањето на полиномот на множители мора да го има членот $x-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$, но треба да има рационални коефициенти. За таа цел $x-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$ го множиме со $x-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$, па добиваме $x^2-7-\sqrt{2}(2x+6)$. Но, сеуште изразот има ирационални коефициенти. Сега последниот полином го множиме со $x^2-7+\sqrt{2}(2x+6)$ и го добиваме полиномот

$$Q(x)=x^4-14x^2+49-8x^2-48x-72=x^4-22x^2-48x-23$$

кој ги задоволува условите на задачата.

2Б. Графикот на полиномната функција

$$P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

има пет различни пресеци со x- оската, при што еден од нив е во точката $(0,0)$. Кој од коефициентите не може да биде нула? Одговорот да се образложи!

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $P(0)=e=0$, полиномната функција може да се запише во облик $P(x)=x(x^4+ax^3+bx^2+cx+d)$. Според тоа, функцијата $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ има четири различни нули, и ниту една не е 0. Затоа $d\neq 0$.

Втор начин. Полиномната функција $P(x)$ може да се запише како $P(x)=(x-r)(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$, каде r,s,t,u,v се различни нули на полиномот $P(x)$. Тогаш, $d=rstu+rstv+rsuv+stuv$. Без губење на општоста претпоставуваме дека $r=0$ и $s,t,u,v\neq 0$. Тогаш $d=stuv\neq 0$.

3АБ. Нека a,b,c се должините на страните на триаголник со плоштина P. Докажи дека $P<\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)$.

Решение. Нека α е аголот на разгледуваниот триаголник наспроти страната со должина a. Од формулата $P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ следува $P\le\frac{1}{2}bc$, т.е. $2P\le bc$. Аналогно, $2P\le ca$ и $2P\le ab$. Аго ги собереме последните три неравенства добиваме $6P\le ab+bc+ca$. Понатаму, равенството $P=\frac{1}{2}bc$ е исполнето само ако аголот α е прав, па затоа не е можно истовремено да важи $P=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}ca=\frac{1}{2}ab$. Значи,

$$6P<ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2, \text{ т.е. } P<\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2).$$

4А. Нека е дадена низата $(a_n)_n$ со $a_n=\sqrt{n(n+1)}$. Со S_n го означуваме збирот на првите n членови. Докажи дека $\frac{n(n+1)}{2}<S_n<\frac{(n+1)^2}{2}$.

Решение. Да забележиме дека $a_n=\sqrt{n(n+1)}>\sqrt{n\cdot n}=n$. Според тоа,

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n>1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Дополнително, важи

$$a_n=\sqrt{n(n+1)}=\sqrt{n^2+n}<\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}=\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2}=n+\frac{1}{2},$$

па, имаме

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n<\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+...+(n+\frac{1}{2})$$
$$=\frac{n(n+2)}{2}=\frac{n^2+2n}{2}<\frac{n^2+2n+1}{2}=\frac{(n+1)^2}{2}.$$

4Б. Определи ги сите прости броеви p,q и r кои ја задоволуваат равенката

$$pqr-pq-pr-qr+p+q+r-33=0$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(p-1)(q-1)(r-1)=2^5.$$

Без губење на општост можеме да претпоставиме дека $p\le q\le r$. Единствени делители на 2^5 се $1,2,2^2,2^3,2^4,2^5$. Со директна проверка се добива дека можни се само случаите

$$p-1=1, q-1=2, r-1=2^4 \text{ и кога } p-1=2, q-1=2^2, r-1=2^2.$$

Според тоа, $(p,q,r)=(2,3,17)$ и $(p,q,r)=(3,5,5)$ и сите нивни пермутации се броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.