



ВТОР МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

ДЕН 1

Сабота, 9. Јануари 2021

Задача 1. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ за кој $\overline{AB} = \overline{AD}$. Нека E и F се точки на страните BC и CD , соодветно, такви што $\overline{BE} + \overline{DF} = \overline{EF}$. Докажете дека $\angle BAD = 2\angle EAF$.

Задача 2. Даден е прост број p . Нека A е вистинско подмножество од $F = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ со следната особина:

$$\text{ако } a, b \in A, \text{ тогаш } ab + 1 \pmod{p} \in A.$$

Колку елементи може да има множеството A ? (Одговорот да се образложи.)

Задача 3. За цел број $n \geq 3$, нека \mathcal{C}_n е множеството од сите n -торки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ од ненегативни реални броеви a_i , $i = 1, \dots, n$ такви што $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. За секои $k \in \{1, \dots, n-1\}$ и $a \in \mathcal{C}_n$, нека $\sigma_k(a) = \{a_1 + \dots + a_k, a_2 + \dots + a_{k+1}, \dots, a_{n-k+1} + \dots + a_n\}$. Докажете дека:

(a) Постојат $m_k = \max\{\min \sigma_k(a) : a \in \mathcal{C}_n\}$ и $M_k = \min\{\max \sigma_k(a) : a \in \mathcal{C}_n\}$.

(b) Важи $1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{m_k} \right) \leq n-2$. Притоа, на левата страна, равенство се достигнува само за конечно многу вредности на n , а на десната страна, равенство се достигнува за бесконечно многу вредности на n .

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.



ДЕН 2

Недела, 10. Јануари 2021

Задача 4. Најдете ги сите природни броеви n што имаат точно $\sqrt{n+1}$ природни делители.

Задача 5. Нека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, и нека симетралите на отсечките OA, OB и OC ги пресекуваат правите BC, CA и AB , соодветно, во точки D, E и F . Докажете дека D, E, F се колинеарни.

Задача 6. Нека \mathbb{R}^+ е множеството позитивни реални броеви. Најдете ги сите функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такви што за секои $x, y \in \mathbb{R}^+$ важи

$$f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}.$$

*Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.*



ДЕН 1: РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

Задача 1. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ за кој $\overline{AB} = \overline{AD}$. Нека E и F се точки на страните BC и CD , соодветно, такви што $\overline{BE} + \overline{DF} = \overline{EF}$. Докажете дека $\angle BAD = 2\angle EAF$.

Решение. Нека G е точка на EF таква што $\overline{DF} = \overline{FG}$ и $\overline{EG} = \overline{BE}$ (1 поен). Нека F' е точка на продолжението на BC преку B таква што $\overline{BF'} = \overline{DF}$, и нека E' е точка на продолжението на CD преку D таква што $\overline{DE'} = \overline{BE}$. (1 поен)

Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен, $\angle ADF = \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = \angle ABF'$. Од $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\overline{BF'} = \overline{DF}$, признакот САС повлекува дека $\triangle ABF' \cong \triangle ADF$. Следствено, $\overline{AF} = \overline{AF'}$. (2 поени)

Според ССС, $\triangle AFE \cong \triangle AF'E$ (имено, $\overline{AF} = \overline{AF'}$, $\overline{EF} = \overline{EF'}$, и AE е заедничка страна). Оттука $\angle AEF' = \angle AEF$, т.е., $\angle AEB = \angle AEG$. Според САС, $\triangle ABE \cong \triangle AGE$, што повлекува дека $\angle BAE = \angle GAE$. (1 поен)

Аналогно важи $\triangle ADF \cong \triangle AGF$, од каде што следува $\angle DAF = \angle GAF$. (1 поен)

Заклучуваме дека $\angle BAC = 2\angle EAF$. (1 поен)

□

Задача 2. Даден е прост број p . Нека A е вистинско подмножество од $F = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ со следната особина:

$$\text{ако } a, b \in A, \text{ тогаш } ab + 1 \pmod{p} \in A.$$

Колку елементи може да има множеството A ? (Одговорот да се образложи.)

Решение. Најпрво ќе покажеме дека 0 и 1 не се елементи на A . Имено, ако $0 \in A$, тогаш $1 \in A$. Но, ако $1 \in A$, тогаш $A = F$, што противречи на тоа дека A е вистинско подмножество на F . Значи, $0, 1 \notin A$. (1 поен)

Да претпоставиме дека $A \neq \emptyset$. (Празното множество ја има посакуваната особина независно од тоа за кој прост број p станува збор.) Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, каде $1 \leq k < p$ и $1 \leq a_1 <$



$a_2 < \dots < a_k \leq p - 1$. Дефинираме пресликување $f_{a_1} : A \rightarrow A$ со:

$$f_{a_1}(x) = a_1x + 1 \pmod{p}.$$

Бидејќи $a_1 \neq 0$, бројот a_1 е заемно прост со p . Оттука, f_{a_1} е инјекција. Но ова повлекува и сурјективност на f_{a_1} (затоа што A е конечно множество). Значи, f_{a_1} е биекција. **(1 поен)**

Применувајќи го f_{a_1} врз секој елемент на A добиваме

$$(1) \quad f_{a_1}(a_1) + f_{a_1}(a_2) + \dots + f_{a_1}(a_k) = a_1(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + k \pmod{p}$$

Од тоа што f_{a_1} е биекција следува дека

$$(2) \quad f_{a_1}(a_1) + f_{a_1}(a_2) + \dots + f_{a_1}(a_k) = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

каде (i_1, i_2, \dots, i_k) е пермутација на $(1, 2, \dots, k)$. **(2 поени)**

Нека $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k \pmod{p}$. Од (1) и (2) добиваме

$$(3) \quad a = a_1a + k \pmod{p}.$$

Претпоставувајќи дека $k > 1$, можеме да го разгледуваме и пресликувањето $f_{a_2} : A \rightarrow A$ дефинирано со $f_{a_2}(x) = a_2x + 1 \pmod{p}$. Аналогно размислување води до следниот заклучок:

$$(4) \quad a = a_2a + k \pmod{p}.$$

Но $1 < k < p$ имплицира $a \neq 0$. Тогаш, од (3) и (4) и фактот дека $\gcd(a, p) = 1$, добиваме $a_1 = a_2$. Оваа противречност укажува дека A нема повеќе од еден елемент. **(2 поени)**

Останува да го забележиме следното: $A = \emptyset$ е добро за $p = 2$, а $A = \{2\}$ за $p = 3$. Значи, A може да има 0 или 1 елемент. **(1 поен)**

□

Задача 3. За цел број $n \geq 3$, нека \mathcal{C}_n е множеството од сите n -торки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ од ненегативни реални броеви a_i , $i = 1, \dots, n$, такви што $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. За секој $k \in \{1, \dots, n-1\}$ и $a \in \mathcal{C}_n$, нека $\sigma_k(a) = \{a_1 + \dots + a_k, a_2 + \dots + a_{k+1}, \dots, a_{n-k+1} + \dots + a_n\}$. Докажете дека:

(i) Постојат $m_k = \max\{\min \sigma_k(a) : a \in \mathcal{C}_n\}$ и $M_k = \min\{\max \sigma_k(a) : a \in \mathcal{C}_n\}$.

(ii) Важи $1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{m_k} \right) \leq n - 2$. Притоа, на левата страна, равенство се достигнува само за конечно многу вредности на n , а на десната страна, равенство се достигнува за бесконечно многу вредности на n .

Решение.

(i) За постоењето на $\max\{\min \sigma_k(a) : a \in \mathcal{C}_n\}$, прво воочуваме дека за секој $a \in \mathcal{C}_n$ важи

$$\begin{aligned} \min \sigma_k(a) &\leq \min\{a_1 + \dots + a_k, a_{k+1} + \dots + a_{2k}, \dots, a_{(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1)k+1} + \dots + a_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor k}\} \\ &\leq \frac{(a_1 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + \dots + a_{2k}) + \dots + (a_{(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1)k+1} + \dots + a_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor k})}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \\ &\leq \frac{1}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}. \end{aligned}$$

(1 поен)

Од друга страна, за конкретниот избор на $\hat{a} \in \mathcal{C}_n$ дефиниран со

$$\hat{a}_i = \begin{cases} \frac{1}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} & \text{ако } k \mid i \\ 0 & \text{во спротивно} \end{cases}$$

имаме $\sigma_k(\acute{a}) = \{\frac{1}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}\}$. Ова го потврдува постоењето на m_k . Уште повеќе, докажува дека $m_k = \frac{1}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}$.

(1 поен)

За постоењето на $\min\{\max \sigma_k(a) : a \in \mathcal{C}_n\}$, прво воочуваме дека за секој $a \in \mathcal{C}_n$ важи

$$\begin{aligned} \max \sigma_k(a) &\geq \min\{a_1 + \dots + a_k, a_{k+1} + \dots + a_{2k}, \dots, a_{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor k+1} + \dots + a_n\} \\ &\geq \frac{(a_1 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + \dots + a_{2k}) + \dots + (a_{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor k+1} + \dots + a_n)}{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1} \\ &= \frac{1}{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1}. \end{aligned}$$

(1 поен)

Од друга страна, за конкретниот избор на $\acute{a} \in \mathcal{C}_n$ дефиниран со

$$\acute{a}_i = \begin{cases} \frac{1}{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1} & \text{ако } k \mid i - 1 \\ 0 & \text{во спротивно} \end{cases}$$

имаме $\sigma_k(\acute{a}) = \{\frac{1}{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1}\}$. Ова го потврдува постоењето на M_k . Уште повеќе, докажува дека $M_k = \frac{1}{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1}$.

(1 поен)

(ii) Равенствата изведени во (i) ни даваат $\sum_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{M_k} - \frac{1}{m_k}) = \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor)$. Така, од очигледниот факт

$$\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{ако } k \mid n \\ 0 & \text{во спротивно} \end{cases}$$

добиваме дека

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{M_k} - \frac{1}{m_k}) = (n-1) - (\tau(n) - 1) = n - \tau(n).$$

(1 поен)

(Тука, $\tau(n)$ го означува вкупниот број природни делители на n .) Бидејќи $1, n \mid n$ и $n-1 \nmid n$, важи $2 \leq \tau(n) \leq n-1$. Следствено,

$$1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{M_k} - \frac{1}{m_k}) \leq n-2.$$

(1 поен)

На левата страна се достигнува равенство ако и само ако $\tau(n) = n-1$, т.е., само за $n \in \{3, 4\}$. (Имено, $\tau(n) = n-1$ повлекува $n-2 \mid n$, што дава $n-2 \mid 2$). На десната страна се достигнува равенство ако и само ако $\tau(n) = 2$, т.е., точно кога n е прост број. Останува да се присетиме на Евклидовата теорема што кажува дека постојат бесконечно многу прости броеви. (1 поен)

□

ДЕН 2: РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

Задача 4. Најдете ги сите природни броеви n што имаат точно $\sqrt{n+1}$ природни делители.

Решение. Секој природен број n може да се запише како $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, каде $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ се простите делители на n ; притоа, n има точно $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ различни природни делители. **(1 поен)**

Нека $\tau(n) = \sqrt{n+1}$. Ако n е парен, тогаш $\sqrt{n+1}$ е непарен, што повлекува дека сите α_i се парни, т.е., n е полн квадрат. Од друга страна, за $\sqrt{n+1}$ да биде цел број, потребно е $n+1$ да е полн квадрат. Бидејќи не постојат последователни природни броеви кои се полни квадрати, задачата нема решение помеѓу парните броеви. **(1 поен)**

Значи n е непарен, односно $p_i \geq 3$ за секој i . За $p_1 > 3$ би добиле противречност дека $\sqrt{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} + 1} > 2^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots 2^{\alpha_k} \geq (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. **(1 поен)**

Следствено, $p_1 = 3$. Доколку $\alpha_1 > 1$, од неравенството $3^{\alpha_1} \geq (\alpha_1 + 1)^2$ со горенаведеното резонирање повторно би добиле противречност. Значи, $\alpha_1 = 1$. **(1 поен)** Ако $p_k \geq 7$, тогаш (од $\alpha_k > 0$) би имале дека

$$\sqrt{3 \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} + 1} > 2^{\alpha_2} \cdots 2^{\alpha_{k-1}} 2^{\alpha_k - 1} \sqrt{16} = 2 \cdot 2^{\alpha_2} \cdots 2^{\alpha_{k-1}} 2^{\alpha_k} \geq (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

(1 поен)

Заклучуваме дека сите решенија се помеѓу броевите од облик $n = 3 \cdot 5^\alpha$ (каде $\alpha \geq 0$). Непосредна проверка покажува дека $0 \leq \alpha \leq 1$ одговара, односно, $n = 3$ и $n = 15$ се две решенија на задачата. **(1 поен)** Всушност, ова се единствените решенија, со оглед на тоа дека за секој $\alpha \geq 2$ важи $\sqrt{3 \cdot 5^\alpha + 1} > \sqrt{75} \cdot 2^{\alpha-2} > 2^{\alpha+1} > 2(\alpha + 1)$. **(1 поен)** \square

Задача 5. Нека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, и нека симетралите на отсечките OA, OB и OC ги пресекуваат правите BC, CA и AB , соодветно, во точки D, E и F . Докажете дека D, E, F се колинеарни.





Прво решение. Нека K, L и M се пресечните точки на правите BC, CA и AB со тангентите на опишаната кружница за $\triangle ABC$ повлечени во A, B и C , соодветно. Применувајќи ја синусната теорема за триаголниците AMC, BMC, ALB, CLB, BKA и CKA ги добиваме овие равенства (a, b, c ги означуваат должините на страните на $\triangle ABC$):

$$\begin{aligned} |AM| &= b \cdot \frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle AMC}, & |BM| &= a \cdot \frac{\sin \angle BCM}{\sin \angle BMC}, & |AL| &= c \cdot \frac{\sin \angle ABL}{\sin \angle ALB}, \\ |CL| &= a \cdot \frac{\sin \angle CBL}{\sin \angle CLB}, & |BK| &= c \cdot \frac{\sin \angle BAK}{\sin \angle BKA}, & |CK| &= b \cdot \frac{\sin \angle CAK}{\sin \angle CKA}. \end{aligned}$$

(1 поен)

Нека A', B' и C' се средишни точки на отсечките AO, BO и CO , соодветно. Од правоаголните трапези $CMFC', BELB'$ и $AKDA'$ имаме (r е радиусот на опишаната кружница (ABC)):

$$|FM| = \frac{r}{2 \sin \angle FMC}, \quad |EL| = \frac{r}{2 \sin \angle ELB}, \quad |DK| = \frac{r}{2 \sin \angle DKA}.$$

(1 поен)

Бидејќи правите AK, BL и CM се тангенти на кружницата (ABC), важи следното (каде што α, β, γ се големините на внатрешните агли CAB, ABC, BCA на $\triangle ABC$ во радиани):

$$\begin{aligned} \angle ACM, \angle CAK &\in \{\beta, \pi - \beta\}, \\ \angle ABL, \angle BAK &\in \{\gamma, \pi - \gamma\}, \\ \angle BCM, \angle CBL &\in \{\alpha, \pi - \alpha\}. \end{aligned}$$

(2 поени)

Ова ни овозможува да ги пресметаме односите $\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}, \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$ and $\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$, во кои се појавуваат должини со знак:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} &= \frac{\overline{AM} - \overline{FM}}{\overline{BM} - \overline{FM}} = \frac{b \cdot \frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle AMC} - \frac{r}{2 \sin \angle FMC}}{a \cdot \frac{\sin \angle BCM}{\sin \angle BMC} - \frac{r}{2 \sin \angle FMC}} = \frac{2b \sin \beta - r}{2a \sin \alpha - r}, \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{BK} - \overline{DK}}{\overline{CK} - \overline{DK}} = \frac{c \cdot \frac{\sin \angle BAK}{\sin \angle BKA} - \frac{r}{2 \sin \angle DKA}}{b \cdot \frac{\sin \angle CAK}{\sin \angle CKA} - \frac{r}{2 \sin \angle DKA}} = \frac{2c \sin \gamma - r}{2b \sin \beta - r}, \\ \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} &= \frac{\overline{CL} - \overline{EL}}{\overline{AL} - \overline{EL}} = \frac{a \cdot \frac{\sin \angle CBL}{\sin \angle CLB} - \frac{r}{2 \sin \angle ELB}}{c \cdot \frac{\sin \angle ABL}{\sin \angle ALB} - \frac{r}{2 \sin \angle ELB}} = \frac{2a \sin \alpha - r}{2c \sin \gamma - r}. \end{aligned}$$

(1 поен)

Со множење на споменатите три односи добиваме:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1.$$

Според добиеното равенство, обратната теорема на Менелај ни кажува дека точките D, E и F се колинеарни.

(2 поени)

□

Второ решение. Ќе дадеме решение со комплексни броеви. Како што е вообичаено, малите букви означуваат комплексни броеви (афикси) на точки именувани со соодветните големи букви. Без губење на општоста, претпоставуваме дека:

$$|a| = |b| = |c| = 1.$$

Оттука,



$$a\bar{a} = 1, b\bar{b} = 1, c\bar{c} = 1,$$

односно

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}.$$

Користејќи дека d лежи на симетралата на AO , имаме:

$$|d - a| = |d|.$$

Следствено,

$$\begin{aligned} (d - a)(\bar{d} - \bar{a}) &= d\bar{d} \\ d\bar{d} - a\bar{d} - \bar{a}d + a\bar{a} &= d\bar{d} \\ \bar{d} &= \frac{a\bar{a} - \bar{a}d}{a} = \frac{a^2\bar{a} - a\bar{a}d}{a^2} = \frac{a - d}{a^2}. \end{aligned}$$

(1 поен)

Од колинеарноста на точките D, B, C имаме:

$$\begin{aligned} \frac{d - b}{\bar{d} - \bar{b}} &= \frac{d - c}{\bar{d} - \bar{c}} \\ (d - b)(\bar{d} - \bar{c}) &= (d - c)(\bar{d} - \bar{b}) \\ d\bar{d} + b\bar{c} - b\bar{d} - \bar{c}d &= d\bar{d} + c\bar{b} - d\bar{b} - c\bar{d} \\ d(\bar{b} - \bar{c}) &= \bar{d}(b - c) + c\bar{b} - b\bar{c} \\ d(b\bar{b}c - bc\bar{c}) &= bc\bar{d}(b - c) + b\bar{b}c^2 - b^2c\bar{c} \\ d(c - b) &= bc\bar{d}(b - c) + (c - b)(c + b) \\ d &= b + c - bc\bar{d} = b + c - bc \frac{a - d}{a^2} \\ a^2d &= a^2b + a^2c - abc + bcd \\ d &= \frac{a^2b + a^2c - abc}{a^2 - bc}. \end{aligned}$$

(1 поен)

Така

$$\bar{d} = \frac{\bar{a}^2\bar{b} + \bar{a}^2\bar{c} - \bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{a}^2 - \bar{b}\bar{c}} = \frac{a^2\bar{a}^2\bar{b}bc + a^2\bar{a}^2bc\bar{c} - a^2bc\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{a^2\bar{a}^2bc - a^2\bar{b}\bar{b}c\bar{c}} = \frac{c + b - a}{bc - a^2}.$$

Аналогно, добиваме

$$\begin{aligned} e &= \frac{b^2c + b^2a - abc}{b^2 - ac} \\ \bar{e} &= \frac{a + c - b}{ac - b^2} \\ f &= \frac{c^2a + c^2b - abc}{c^2 - ab} \\ \bar{f} &= \frac{a + b - c}{ab - c^2}, \end{aligned}$$

(1 поен)

Доволно е да покажеме дека

$$\frac{d - e}{\bar{d} - \bar{e}} = \frac{d - f}{\bar{d} - \bar{f}}.$$

(1 поен)



Последното е еквивалентно со:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^2b + a^2c - abc}{a^2 - bc} - \frac{b^2c + b^2a - abc}{b^2 - ac} \right) \left(\frac{c + b - a}{a^2 - bc} - \frac{a + b - c}{c^2 - ab} \right) \\ &= \left(\frac{a^2b + a^2c - abc}{a^2 - bc} - \frac{c^2a + c^2b - abc}{c^2 - ab} \right) \left(\frac{c + b - a}{a^2 - bc} - \frac{a + c - b}{b^2 - ac} \right) \\ &\iff [(a^2b + a^2c - abc)(b^2 - ac) - (b^2c + b^2a - abc)(a^2 - bc)] \cdot \\ &\quad [(b + c - a)(c^2 - ab) - (a + b - c)(a^2 - bc)] \\ &= [(a^2b + a^2c - abc)(c^2 - ab) - (c^2a + c^2b - abc)(a^2 - bc)] \cdot \\ &\quad [(b + c - a)(b^2 - ac) - (a + c - b)(a^2 - bc)]. \end{aligned}$$

Да ги воочиме следните факторизации:

$$\begin{aligned} & [(a^2b + a^2c - abc)(b^2 - ac) - (b^2c + b^2a - abc)(a^2 - bc)] \\ &= (a^2b^3 - a^3bc + a^2b^2c - a^3c^2 - ab^3c + a^2bc^2 - a^2b^2c + b^3c^2 - a^3b^2 + ab^3c + a^3bc - ab^2c^2) \\ &= a^2b^3 - a^3b^2 - a^3c^2 + a^2bc^2 + b^3c^2 - ab^2c^2 = a^2b^2(b - a) + c^2(b^3 - a^3) + abc^2(a - b) \\ &\quad (b - a)(a^2b^2 + c^2(a^2 + ab + b^2) - abc^2) = (b - a)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \end{aligned}$$

(1 поен)

Од причини на симетрија, важи и

$$[(a^2b + a^2c - abc)(c^2 - ab) - (c^2a + c^2b - abc)(a^2 - bc)] = (c - a)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

Аналогно,

$$\begin{aligned} & [(b + c - a)(c^2 - ab) - (a + b - c)(a^2 - bc)] \\ &= bc^2 - ab^2 + c^3 - abc - ac^2 + a^2b - a^3 + abc - a^2b + b^2c + a^2c - bc^2 \\ &= -ab^2 + c^3 - ac^2 - a^3 + b^2c + a^2c = c^3 - a^3 + b^2(c - a) + ac(a - c) \\ &= (c - a)[(a^2 + ac + c^2 + b^2 - ac)] = (c - a)(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

(1 поен)

На сличен начин, заклучуваме дека

$$\begin{aligned} & [(b + c - a)(b^2 - ac) - (a + c - b)(a^2 - bc)] \\ &= (b - a)(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Бидејќи

$$\begin{aligned} & (b - a)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)(c - a)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= (c - a)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)(b - a)(a^2 + b^2 + c^2), \end{aligned}$$

точките D, E, F се колинеарни. (1 поен) □

Задача 6. Нека \mathbb{R}^+ е множеството позитивни реални броеви. Најдете ги сите функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такви што за секои $x, y \in \mathbb{R}^+$ важи

$$f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}.$$

Решение. Ќе покажеме дека равенката за единствено решение ја има функцијата

$$(1) \quad f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$



Непосредно се проверува дека оваа функција е навистина решение на равенката. **(1 поен)**

Дадениот услов е еквивалентен со

$$(2) \quad f(xf(y)) = f(x) - \frac{1}{xyf(y)}.$$

Нека $a = f(1)$. Ставајќи $x = 1$ во (2), добиваме

$$(3) \quad f(f(y)) = a - \frac{1}{yf(y)}.$$

Комбинирајќи ги (2) и (3),

$$(4) \quad f(f(x)f(y)) = f(f(x)) - \frac{1}{f(x)yf(y)} = a - \frac{1}{xf(x)} - \frac{1}{f(x)yf(y)}.$$

Со заменување на улогите на x и y во (4), имаме

$$(5) \quad f(f(y)f(x)) = f(f(y)) - \frac{1}{f(y)xf(x)} = a - \frac{1}{yf(y)} - \frac{1}{f(y)xf(x)}.$$

Значи,

$$a - \frac{1}{xf(x)} - \frac{1}{f(x)yf(y)} = a - \frac{1}{yf(y)} - \frac{1}{f(y)xf(x)},$$

што е еквивалентно со

$$yf(y) + x = xf(x) + y.$$

(3 поени)

Оттука, $x - xf(x) = c$ за некоја константа c (што не зависи од x), т.е.,

$$f(x) = 1 - \frac{c}{x}.$$

(1 поен)

Бидејќи $f(1) = a$, важи $c = 1 - a$ и

$$(6) \quad f(x) = 1 - \frac{1-a}{x}.$$

Тогаш,

$$(7) \quad f(f(y)) = 1 - \frac{1-a}{f(y)}.$$

(1 поен)

Споредувајќи ги (3) и (7), и користејќи ја повторно (6), добиваме $(a-1)^2 = 1$. Од $a > 0$, заклучуваме дека $a = 2$ и оттука (1). **(1 поен)**

□