XV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика ‘86-‘95
подготвена од Илија Јанев, Никола Петрески и Милчо Аврамоски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Најди го четирицифрениот број $\overline{abcd}$, ако $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=1990$.

2. Осум лесни трактори можат да изораат една нива за 5 дена, а пет тешки трактори истата нива можат да ја изораат за 3 дена. За колку денови два лесни и три тешки трактори ќе изораат нива чијашто плоштина кон плоштината на првата нива се однесува како $7:2$? (Тракторите од ист вид за еднакво време изоруваат еднакви плоштини.)

3. Висините на триаголникот ABC се сечат во точката H - ортоцентарот на триаголникот ABC. Најди го аголот ACB, ако $\overline{HC}=\overline{AB}$.

4. Конструирај триаголник ABC, ако се зададени: тежишната линија t_c, висината h_c и радиусот R на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

XV (90.VII.1)

Бидејќи:

$$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$$
$$\overline{abc}=100a+10b+c$$
$$\overline{ab}=10a+b$$

ја добиваме равенката:

(1) $$1111a+111b+11c+d=1990$$

Имајќи предвид дека *a, b, c, d* се цифри, заклучуваме дека равенката (1) е можна само за $a=1$. Тогаш:

$$1111+111b+11c+d=1990$$

(2) $$111b+11c+d=879$$

Равенката (2) е можна само за $b=7$, од каде што добиваме:

$$11c+d=102,$$

а оттука $c=9$, $d=3$.

Следствено, бараниот број $\overline{abcd}=1793$.

XV (90.VII.2)

Прво ќе пресметаме за колку денови два лесни и три тешки трактори ќе ја изораат првата нива. Според условот на задачата еден лесен трактор првата нива ќе ја изора за 8·5 дена, т.е. за 40 дена, а еден тежок трактор за 15 дена. Значи, за еден ден еден лесен трактор ќе изора $\frac{1}{40}$ од нивата, а еден тежок трактор $\frac{1}{15}$ од нивата. Два лесни и три тешки трактори за еден ден ќе изораат:

$$2\cdot\frac{1}{40}+3\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

од нивата; а целата нива ќе ја изораат за 4 дена.

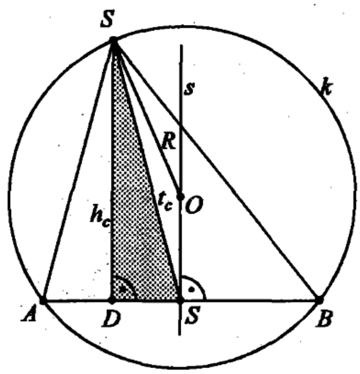
Втората нива е 7 : 2 = 3,5 пати поголема од првата, па овие два лесни и три тешки трактори ќе ја изораат за 4·3,5 дена, т.е. за 14 дена.

XV (90.VII.3)

Види го решението на задачата **XII (87.VII.4)**.

XV (90.VII.4)

1⁰ Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена, т.е. ΔABC е бараниот, при што $\overline{CD}=h_c$, $\overline{CS}=t_c$ и $\overline{OC}=R$ (црт. 1). Триаголникот CDS е правоаголен, со прав агол во темето D, катета $\overline{CD}=h_c$ и хипотенуза $\overline{CS}=t_c$. Него лесно можеме да го конструираме, со што го одредуваме темето C. Темињата A и B на ΔABC лежат на правата DS и на кружницата k. Радиусот R на кружницата k е зададен, а нејзиниот центар O лежи на правата s - симетралата на отсечката AB која минува низ точката S и е нормална на правата DS, а од темето C е оддалечен за R. Значи, центарот O на кружницата k е пресекот на правата s и кружницата $k'(C,R)$.

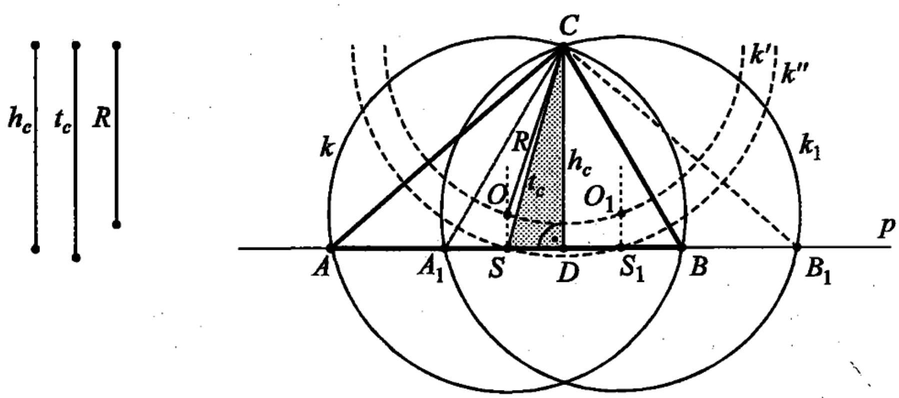


Црт. 1

2⁰ Конструкција. Најнапред го конструираме помошниот ΔCDS. На произволна права p избираме точка D, издигнуваме нормала $\overline{DC}=h_c$, а потоа ја одредуваме точката S како пресек на правата p и кружницата $k''(C, t_c)$ (црт. 2). Понатаму низ точката S повлекуваме права $s\perp p$ и го одредуваме центарот O на опишаната кружница k - како пресек на правата s и кружницата $k'(C, R)$. Конечно, во пресекот на правата p и кружницата $k(O, R)$ ги одредуваме темињата A и B на ΔABC.

Со тоа триаголникот ABC е конструиран.

Во нашиот случај задачата има две решенија - тоа се триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ (црт. 2).



Црт. 2

3^{o} *Доказ.* Триаголникот ABC ги исполнува условите на задачата, бидејќи по конструкција: $\overline{CD} = h_c$ и $CD \perp AB$ и притоа $\overline{CS} = t_c$ и $\overline{AS} = \overline{BS}$ - сите точки од правата s се еднакво оддалечени од A и B, и - очигледно, кружницата $k(O, R)$ е опишана за триаголникот ABC.

4^{o} *Дискусија.* Конструкцијата на правоаголниот ΔCDS е можна само ако $h_c < t_c$, затоа ќе разгледаме три случаи:

1) Ако $h_c > t_c$, тогаш задачата нема решение.

2) Ако $h_c = t_c$, тогаш задачата нема решение за $2R \leq h_c$, а има единствено решение за $2R > h_c$ - и тоа е рамнокрак триаголник $(\overline{AC} = \overline{BC})$.

3) Ако $h_c < t_c$, задачата може да има две решенија, едно решение или да нема решение. Во специјален случај ако $R = t_c$, тогаш ΔABC е правоаголен.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Збирот на цифрите на годината во којашто е роден еден македонски револуционер е делив со 9. Ако на годината на раѓањето се додаде бројот 909, се добива број напишан со истите цифри, но во обратен ред. Во која година е роден револуционерот?

2. Еден велосипедист тргнал од местото A кон местото B со брзина од 14 km/h. Откако му останале 18 km помалку отколку што поминал, ја зголемил брзината на 21 km/h. На тој начин средната брзина на движењето од A до B му била 16 km/h. Одреди го растојанието меѓу местата A и B.

3. Во рамнокракиот трапез $ABCD$ дијагоналите се заемно нормални. Пресметај ја плоштината на трапезот, ако средната линија $\overline{MN} = m$.

4. Околу рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$) опишана е кружницата k. Низ темето A повлечена е права која основата BC ја сече во точката M, а кружницата k во точката N. Пресметај ја плоштината на впишаниот круг во триаголникот ABC, ако $\overline{AM} \cdot \overline{AN} = 25\ cm$, а периметарот на триаголникот ABC е 16 cm.

XV (90.VIII.1)

Нека годината на раѓањето на револуционерот ја означиме со $\overline{1xyz}$, каде што x, y, z се цифри, тогаш:

$$(*)\qquad \begin{array}{r} \overline{1xyz} \\ +\ 909 \\ \hline \overline{zyx1} \end{array}$$

Очигледно $z = 2$. Понатаму имаме:

$$y + 1 = x \quad \text{и} \quad x + 9 = 10 + y.$$

Но, овие две равенки изразуваат иста зависност: $x = y + 1$. По услов, збирот на цифрите:

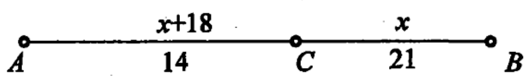
$$1 + x + y + z = 1 + y + 1 + y + 2 = 2y + 4 = 2(y + 2)$$

е делив со 9. Тоа е можно само за $y = 7$, а тогаш $x = 8$.

Значи, годината на раѓањето е 1872 (Гоце Делчев).

XV (90.VIII.2)

Да го означиме со x *km* патот што велосипедистот го минал со брзина од 21 *km/h*; тогаш патот што велосипедистот го минал со брзина од 14 *km/h* е $x + 18$ *km* (црт. 3). Првиот дел од патот велосипедистот го минал за време од $\frac{x+18}{14}$ часа, а вториот дел - за време од $\frac{x}{21}$ часа.



Црт. 3

Следствено, целиот пат $s = 2x + 18$ *km* велосипедистот ќе го измине за време од $t = \frac{x+18}{14} + \frac{x}{21}$ часа, т.е. за $t = \frac{5x+54}{42}$ часа.

Бидејќи средната брзина на движењето $v = 16$ *km/h* имаме ($S = v \cdot t$):

$$2x + 18 = 16 \cdot \frac{5x+54}{42} \qquad / \cdot 21$$

$$42x + 378 = 40x + 432$$

$$2x = 54$$

Тогаш $S = 2x + 18 = 54 + 18 = 72$.

Значи, растојанието меѓу A и B е 72 *km*.

XV (90.VIII.3)

Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со заемно нормални дијагонали и средна линија $\overline{MN} = m$ (црт. 4). За да ја најдеме плоштината на трапезот, доволно е да ја одредиме неговата висина h.

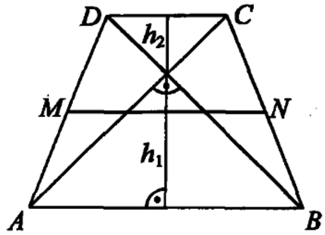
Очигледно е дека триаголниците ABS и CDS се рамнокраки правоаголни; тогаш за нивните висини h_1 и h_2 имаме:

$$h_1 = \frac{a}{2}, \quad h_2 = \frac{b}{2}.$$

Висината на трапезот е: $h = h_1 + h_2 = \frac{a+b}{2} = m$,

па за плоштината добиваме:

$$P = m \cdot h = m \cdot m = m^2.$$

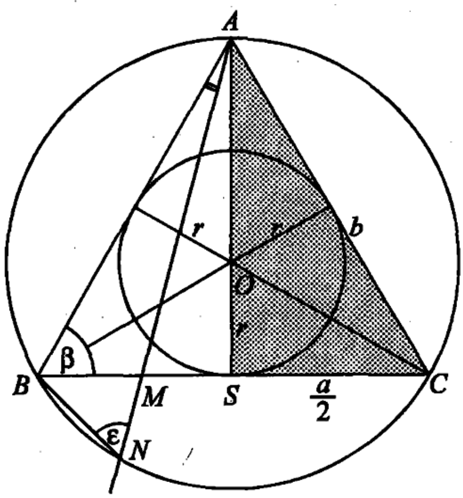


Црт. 4

Забелешка. Висината h на трапезот може да се одреди и на друг начин. На продолжението на основата AB избери точка E, таква што $EC \| BD$, а потоа за рамнокракиот правоаголен ΔAEC со основа $\overline{AE} = a+b$ заклучи дека $h = \frac{a+b}{2}$.

XV (90.VIII.4)

Бидејќи $r = \frac{P}{S}$, а $S = 8$ *cm*, треба да ја пресметаме плоштината на ΔABC. За да го искористиме условот $\overline{AM} \cdot \overline{AN} = 25$, ќе покажеме дека триаголниците ABM и ANB (црт. 5) се слични. Навистина, тие имаат заеднички агол кај темето A, и уште $\beta = \varepsilon$ како периферни агли над еднакви кружни лаци ($\widehat{AC} = \widehat{AB}$). Од сличноста на овие триаголници следува:



Црт. 5

$$\overline{AB} : \overline{AN} = \overline{AM} : \overline{AB}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AN} = 25,\ \overline{AB} = 5,$$

т.е. $b = 5$.

Од $L = a + 2b$ имаме:

$$16 = a + 2 \cdot 5,\quad a = 6.$$

Од правоаголниот ΔASC наоѓаме:

$$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 25 - 9 = 16,\ h_a = 4.$$

Сега ја пресметуваме плоштината на ΔABC:

$$P = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12.$$

Тогаш:

$$r = \frac{P}{S} = \frac{12}{8} = 1{,}5.$$

$$P = r^2 \pi = 1{,}5^2 \pi = 2{,}25\pi.$$

Значи, бараната плоштина е $2{,}25\pi$ cm^2 или $\approx 7{,}07$ cm^2.

Забелешка. Можеш ли радиусот r да го одредиш на друг начин? Како? Види ја забелешката на задачата XI (86.VIII.2).