XLVI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Најди ги сите реални решенија на следниот систем равенки:

$$a+b+c=0,$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

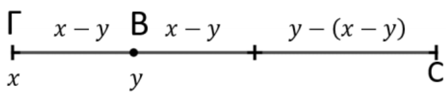
Решение. Ниту еден од трите броја не е еднаков на 0. Имаме:

$$\frac{1}{c}=-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{a+b}{ab}=\frac{c}{ab}\text{, т.е. } ab=c^2>0.$$

Слично се добива дека: $ac=b^2>0$ и $bc=a^2>0$. Следува, броевите a,b,c имаат ист предзнак. Но, тогаш не е можно нивниот збир да биде 0. Значи, дадениот систем нема решенија.

2. Горан имал тројно повеќе години отколку што имала Виолета кога бил на нејзината сегашна возраст. Одреди го односот на годините на Горан и Виолета.

Решение. Нека Горан сега има x години, а Виолета y години. Кога Горан бил на нејзината сегашна возраст, тој имал $x-(x-y)$ години, а таа имала $y-(x-y)$ години. Значи,



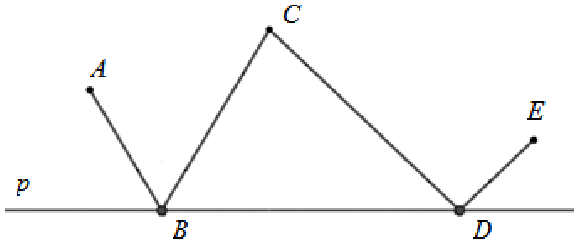
$$x-(x-y)=3(y-(x-y)),$$

односно $3x=5y$. Заклучуваме дека односот од годините на Горан и годините на Виолета е 5:3.

3. Три ученици се договориле за ужинка да си поделат 11 еднакви кифлички. За таа прилика Трајко донел 5 кифлички, Вангел донел 6 кифлички, а Јордан донел 11 денари. Како овие 11 денари треба да ги распределат меѓу себе Трајко и Вангел, за тројцата ученици рамноправно да учествуваат во трошоците за ужинката?

Решение. Бидејќи Јордан си го платил својот дел од ужинката, ужинката на тројцата вреди 33 денари. Значи, секоја кифличка вреди 3 денари. Следствено, петте кифлички на Трајко вредат 15 денари, а тој ужинал за 11 денари. Заклучуваме дека Трајко треба да земе 4 денари, а Вангел преостанатите 7 денари.

4. Искршената линија $L = ABCDE$ не преоѓа под правата p со која има точно две заеднички точки: B и D. Притоа, од сите такви искршени линии за кои прво, трето и петто теме се редоследно дадените точки A, C и E, линијата L е со најмала можна должина



Докажи дека

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CDE = 2\measuredangle BCD.$$

Решение. Нека C' е точката што е симетрична на C во однос на правата p. Тогаш B е пресечната точка на правите AC' и p. Слично, D е пресечната точка на правите EC' и p. Имено, во овој случја искршената линија $L = ABCDE$ има најмала должина ($\overline{BC} = \overline{BC'}$ и $\overline{DC} = \overline{DC'}$). Имаме:

$$\measuredangle C'BD + \measuredangle CBD + \measuredangle ABC = 180^\circ;$$

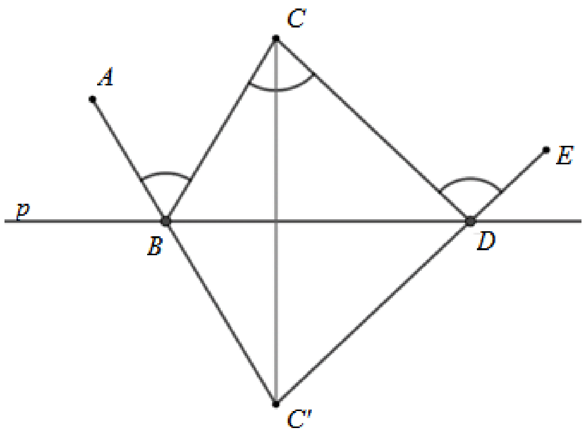
$$\measuredangle C'DB + \measuredangle BDC + \measuredangle CDE = 180^\circ$$

Од $\triangle BDC$ имаме:

$$\measuredangle CBD + \measuredangle BCD + \measuredangle BDC = 180^\circ,$$

па затоа

$$\measuredangle ABC + \measuredangle EDC = 2\measuredangle BCD.$$



VII одделение

1. Докажи дека $12^n - 22n - 1$ е делив со 11 за секој природен број *n*.

   Решение. Ја формираме низата $1, 12, 12^2, 12^3, \dots, 12^{n-1}$. Го запишуваме збирот

   $$S = 1 + 12 + 12^2 + 12^3 + \dots + 12^{n-1}.$$

   Двете страни множиме со 12 т.е.

   $$12S = 12 + 12^2 + 12^3 + \dots 12^n .$$

   Со одземање на последните две равенства добиваме $11S = 12^n - 1$, т.е.

   $$12^n - 1 = 11(1 + 12 + 12^2 + \dots + 12^{n-1}).$$

   Значи,

   $$12^n - 22n - 1 = 11(1 + 12 + 12^2 + \dots + 12^{n-1} - 2n),$$

   од каде следува дека $11 | 12^n - 22n - 1$.

2. Пред 4 години, таткото бил трипати постар од своите ќерки Елена и Наташа заедно. Наташа тогаш била два пати постара од Елена. Колку години има Наташа, а колку Елена ако татко им сега е два пати постар од нив двете заедно?

   Решение. Нека таткото има t години, ќерката Елена има x и ќерката Наташа има y години. Пред четири години, имаме:

   $$t - 4 = 3(x - 4 + y - 4) \text{ и } y - 4 = 2(x - 4).$$

   Оттука,

   $$t = 3x + 3y - 20 \quad y = 2x - 4, \text{ т.е. } t = 9x - 32.$$

   Од друга страна, денес имаме

   $$t = 2(x + y), \text{ т.е. } t = 6x - 8.$$

   Според тоа,

   $$9x - 32 = 6x - 8,$$

   од каде добиваме $x = 8$. Сега $y = 2 \cdot 8 - 4 = 12$. Значи Наташа има 12 години, а Елена има 8 години.

3. На располагање се две кофи, река и празно отворено буре кое собира околу 200 литри течност. Не е дозволено претурање од една кофа во друга. Дали може да се одмерат 13 литри вода во бурето ако кофите се со зафатнини од:

   а) 7 литри и 11 литри,

б) 6 литри и 10 литри?

Решение. а) Може да се измерат. Имено, бидејќи $2\cdot 11-3\cdot 7=1$, важи $26\cdot 11-39\cdot 7=13$. Значи, 26 пати тураме по 11 литри и 39 пати истураме по 7 литри и добиваме 13 литри.

б) Не може, бидејќи 13 е непарен број, а зафатнината на секоја кофа е парен број.

4. Плоштините на три ѕида на дрвен квадар изнесуваат $6dm^2;8dm^2$ и $12dm^2$. Кај секое од темињата изделкана и отстранета е коцка така што едно нејзино теме се совпаѓа со темето на квадарот, при што страната на коцката е 25% од најмалата страна на квадарот. Пресметај:

   а) го бројот на темиња, рабови и ѕидови на добиеното тело,

   б) ги плоштината и волуменот на квадарот и телото.

   в) Процентот на плоштината и процентот на волуменот на телото во однос на соодветната мерка на квадарот.

   Решение. а) Добиеното тело има 56 темиња; 84 рабови и 30 ѕидови.

   Нека a,b,c, ($a<b<c$) се димензиите на квадарот изразени во dm. Од $ab=6, ac=8, bc=12$ се добива $(abc)^2=576$, т.е. $abc=24$. Значи $a=2dm, b=3dm, c=4dm$. Нека x е работ на коцката (во dm). Тогаш $x=\frac{25\cdot 2}{100}=0,5dm$.

   б) Сега лесно се гледа дека

$$P_{kv}=52dm^2,\ V_{kv}=24dm^3,\ P_t=52dm^2 \text{ и } V_t=24-8\cdot 0,5^3=23dm^3.$$

   в) Јасно,

$$p_P=\frac{100P_t}{P_{kv}}=100\ \% \text{ и } p_V=\frac{100V_t}{V_{kv}}=\frac{2300}{24}\%.$$

VIII одделение

1. Докажи дека $3^{2n+1}+2^{n+2}$ е деливо со 7 за секој природен број *n*.

   Решение. Имаме:

$$3^{2n+1}+2^{n+2}=3\cdot 9^n+4\cdot 2^n=3(9^n-2^n)+7\cdot 2^n.$$

   Ако ја искористиме позната формула:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

   во чија точност се уверуваме со непосреднбо множење на полиномите на десната страна, добиваме

$$3^{2n+1}+2^{n+2}=3\cdot 9^n+4\cdot 2^n=3(9^n-2^n)+7\cdot 2^n$$
$$=3\cdot(9-2)(9^{n-1}+9^{n-2}\cdot 2+...+9\cdot 2^{n-2}+2^{n-1})+7\cdot 2^n$$
$$=7\cdot(3\cdot(9^{n-1}+9^{n-2}\cdot 2+...+9\cdot 2^{n-2}+2^{n-1})+2^n),$$

што значи $7|3^{2n+1}+2^{n+2}$, за секој природен број n.

2. Даријан и Ведран со своите моторцикли извозеле од Скопје до Охрид. Даријан првата третина од патот ја возел со брзина од 20 километри на час, втората третина со брзина од 30 километри на час, а последната третина со брзина од 40 километри на час. Ведран првата третина од времето ја возел со брзина од 20 километри на час, втората третина од времето со брзина од 30 километри на час, а последната третина од времето со 40 километри на час. Кој од нив двајца побрзо стасал во Охрид?

   Решение. Ги пресметуваме средните брзини на движење на двајцата. Означувајќи ги со v_1, v_2, v_3 редоследно брзините од од 20 километри на час, од 30 километри на час, односно од 40 километри на час, за Даријан имаме:

$$\frac{3s}{v_{sr}}=\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}+\frac{s}{v_3},$$

   каде s е должина на третина од патот Скопје-Охрид. Така

$$v_{sr}(D)=\frac{3}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}=27,7\,km/h.$$

   Од друга страна, за Ведран имаме: $3tv_{sr}=v_1t+v_2t+v_3t$, каде t е третина од времетрањето на неговото патување. Значи,

$$v_{sr}(V)=\frac{v_1+v_2+v_3}{3}=30\,km/h.$$

   Заклучуваме дека Ведран побрзо стасал во Охрид.

3. Дадени се правоаголник и квадрат со еднакви плоштини. Нека a и b се две соседни страни на правоаголникот, а c е страната на квадратот. Докажи дека

$$a+b-c>R\sqrt{2},$$

   каде R е радиусот на опишаната кружница околу правоаголникот.

   Решение. Да забележиме дека

$$c=\sqrt{ab} \text{ и } R\sqrt{2}=\frac{2R}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Задачата се сведува на докажување на следново тврдење: За произволни и различни $a,b>0$ важи неравенството

$$a+b>\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Ставајќи $c=\sqrt{ab}$ и $d=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, имаме $ab=c^2$ и $a^2+b^2=2d^2$.

Според тоа,

$$(a+b)^2=2(c^2+d^2)=(c+d)^2+(c-d)^2\geq(c+d)^2,$$

и знак за равенство важи ако и само ако $c=d$. Според тоа,

$$a+b\geq c+d$$

и знак за равенство важи ако и само ако $c=d$. Останува да забележиме дека равенството $c=d$ е еквивалентно со равенството $a=b$. Навистина,

$$c=d \Leftrightarrow 2ab=a^2+b^2 \Leftrightarrow 0=(a-b)^2.$$

4. Нека a,b,c се страни на даден $\triangle ABC$ и притоа важи равенството

$$a^2+b^2=c^2.$$

Докажи дека внатрешниот агол наспроти страната c е прав.

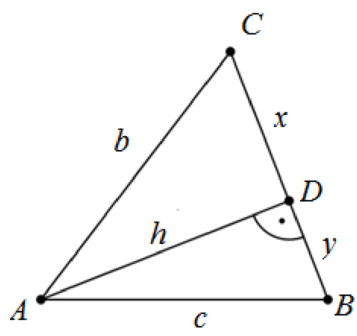
Решение. Со примена на Питагорова теорема ќе го докажеме следното посилно тврдење:

За $\triangle ABC$ е триаголник со страни $a=BC$, $b=AC$ и $c=AB$ важи:

1) ако $\measuredangle ACB<90^\circ$, тогаш $c^2<a^2+b^2$,

2) ако $\measuredangle ACB>90^\circ$, тогаш $c^2>a^2+b^2$.

<u>Доказ на 1).</u> Висината спуштена од било кое од темињата A и B е во внатрешноста на триаголникот ABC (бидејќи $\measuredangle C<90^\circ$). При ознаки како на цртежот ($x=CD, y=BD$), користејќи ја Питагоровата теорема имаме:

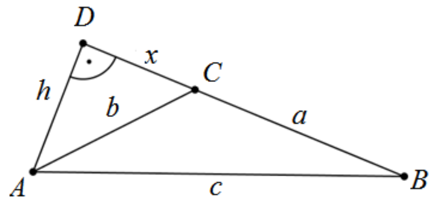


$$a^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$$
$$b^2=h^2+x^2,$$
$$c^2=h^2+y^2.$$

Оттука,

$$a^2+b^2=c^2+(2x^2+2xy)=c^2+2x(x+y)=c^2+2xa>c^2.$$

<u>Доказ на 2).</u> Висината спуштена од било кое од темињата A и B е во надворешноста на триаголникот ABC (бидејќи $\measuredangle C>90°$).



При ознаките како на цртежот ($x=CD, y=BD$), користејќи ја Питагоровата теорема, имаме:

$$a^2=(y-x)^2=y^2-2xy+x^2,$$
$$b^2=h^2+x^2,$$
$$c^2=h^2+y^2.$$

Оттука

$$a^2+b^2=c^2-(2xy-2x^2)=c^2-2x(y-x)=c^2-2xa<c^2.$$

Од претходните разгледувања следува дека, ако внатрешниот агол наспроти страната c не е прав агол, тогаш $a^2+b^2\neq c^2$, од што следува тврдењето на задачата.

IX одделение

1. Докажи дека

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdot\cdot\cdot(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdot\cdot\cdot(2021^3+1)}>\frac{674}{1011}.$$

Решение. Користејќи ги идентитетите

$$x^3\pm1=(x\pm1)(x^2\mp x+1)$$

имаме:

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdot\cdot\cdot(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdot\cdot\cdot(2021^3+1)}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2020}{3\cdot4\cdot5\cdot...\cdot2022}\cdot\frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)...(2021^2+2021+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)...(2021^2-2021+1)} \quad (1)$$

За првата од двете дропки на десната страна од добиеното равенство (1), со кратење, добиваме:

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2020}{3\cdot4\cdot5\cdot...\cdot2022}=\frac{2}{2021\cdot2022}=\frac{1}{2021\cdot1011}.$$

За да ја пресметаме втората дропка на десната страна на (1), ќе го користиме идентитетот:

$$x^2+x+1=(x+1)^2-(x+1)+1.$$

Имаме:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2020}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2022}\cdot\frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)\ldots(2021^2+2021+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)\ldots(2021^2-2021+1)}=\frac{2021^2+2021+1}{2^2-2+1}$$
$$=\frac{2021\cdot 2022+1}{3}$$
$$>\frac{2021\cdot 2022}{3}=2021\cdot 674$$

Конечно,

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(2021^3+1)}>\frac{1}{2021\cdot 1011}\cdot 2021\cdot 674=\frac{674}{1011}.$$

2. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq a+b+c$$

и знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

Решение. За секои $x,y\in\mathbb{R}^+$ важи $\frac{x^3}{y^2}\geq 3x-2y$. Притоа, знак за равенство важи ако и само ако $x=y$. Множејќи со y^2 и користејќи дека

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2),$$

заклучуваме дека споменатото неравенство е еквивалентно со неравенството:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)\geq 3y^2(x-y). \qquad (1)$$

Разгледуваме три случаи:

1) Ако $x>y$, тогаш (1) е еквивалентно со неравенството

$$x^2+xy+y^2\geq 3y^2,$$

кое очигледно е исполнето.

2) Ако $x=y$, тогаш (1) преминува во равенство.

3) Ако $x<y$, тогаш (1) е еквивалентно со неравенството

$$x^2+xy+y^2\leq 3y^2,$$

кое очигледно е исполнето.

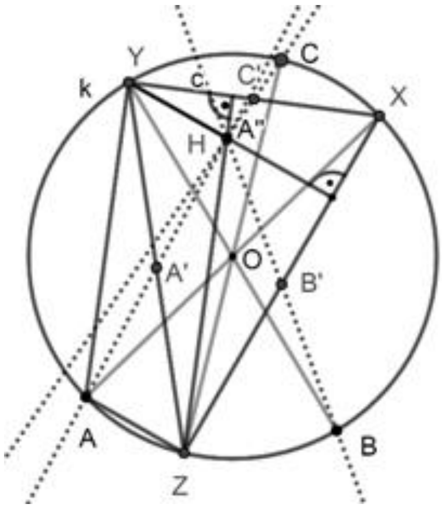
Од досега изнесеното следува

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq 3a-2b+3b-2c+3c-2a=a+b+c.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

3. На кружница k се избрани три точки A, B, C и кека X, Y, Z соодветно се нивните дијаметрално спротивни точки во k. Нека A', B', C' се средините на тетивите YZ, ZX, XY соодветно. Докажи дека правите AA', BB', CC' се сечат во една точка.

Решение. Со A'' ја означуваме сликата на точката A при централна симетрија во однос на A'. Тогаш $YAZA''$ е четириаголник чии дијагонали се половат во пресечната точка A'; па значи $YAZA''$ е паралелограм. Според тоа, $A''Y \parallel AZ$ и $A''Z \parallel AY$. Бидејќи $\measuredangle XYA = \measuredangle XZA = 90°$, следува дека $A''Y \perp AZ$ и $A''Z \perp XY$. Значи A'' се совпаѓа со ортоцентарот H на триаголникот XYZ. Слично, правите BB' и CC' минуваат низ точката H.



4. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол кај темето C. Точките D и E се соодветно подножја на висината и симетралата на внатрешниот агол повлечени од темето C кон хипотенузата AB. Нека $AD = q, BD = p$ и $AE = n, BE = m$. Докажи дека:

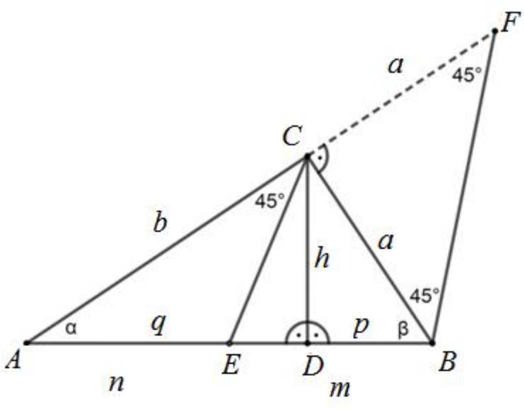
а) $a : b = m : n$ б) $p : q = m^2 : n^2$.

Решение. а) Имаме

$$\triangle AEC \sim \triangle ABF \Rightarrow$$
$$(m+n) : n = (a+b) : b \Rightarrow$$
$$m : n + 1 = a : b + 1 \Rightarrow$$
$$a : b = m : n.$$

б) Имаме:

$$\triangle CDB \sim \triangle ACB \Rightarrow$$
$$p : a = a : c \Rightarrow$$
$$p = \frac{a^2}{c} \wedge \triangle ADC \sim \triangle ACB \Rightarrow$$
$$q : b = b : c \Rightarrow q = \frac{b^2}{c}$$



Добиваме, $p : q = \frac{a^2}{c} : \frac{b^2}{c} \Rightarrow p : q = a^2 : b^2$.