**Сава Гроздев,**
**БАН, Софија**

# ПРИМЕНА НА ЕДНО ОБОПШТУВАЊЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ПТОЛОМЕЈ

Позната ни е теоремата на античкиот математичар Птоломеј (100-170):

**Теорема 1.** Еден четириаголник може да се впише во кружница ако и само ако производот на должините на неговите дијагонали е еднаков на збирот од производите на неговите спротивни страни.

Ќе ја формулираме таканаречената теорема на Бретшнајдер, која уште е позната и како косинусна теорема за четириаголник.

**Теорема 2.** Даден е четириаголник $ABCD$, во кој $\angle BAD = \alpha$ и $\angle BCD = \beta$. Да се докаже дека

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot DA^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA\cos(\alpha + \beta).$$

***Коментар.*** Бидејќи $\cos(\alpha+\beta) \geq -1$, добиваме

$$-2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cdot \cos(\alpha+\beta) \leq 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$$

и од теорема 2 следува дека

$$AC^2 \cdot BD^2 \leq AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot DA^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA = (AB \cdot CD + BC \cdot DA)^2.$$

Оттука

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$

Последното равенство е познато како обопштена теорема на Проломеј, бидејќи во случајот повторно од теорема 2 имаме, дека $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$ ако и само ако $\cos(\alpha+\beta) = -1$, т.е. кога $\alpha+\beta = 180^0$. Да забележиме, дека во формулацијата на теорема 2 наместо $\alpha+\beta$ можеме да го земеме збирот на другите два агли во четириаголникот, бидејќи збирот на внатрешните агли во четириаголник е $360^\circ$.

***Доказ на теорема 2.*** Нека точката $K$ е внатрешна за $ABCD$ и важи $\angle KDA = \angle BAC$ и $\angle KAD = \angle ACB$ (направи цртеж). Нека исто така точката $M$ е внатрешна за $ABCD$ и $\angle MAB = \angle ACD$, $\angle MBA = \angle CAD$. Од а$ADK$ ~ $\Delta CAB$ следува дека $AK = \dfrac{BC \cdot DA}{AC}$ и $DK = \dfrac{AB \cdot DA}{AC}$, а од $\Delta ABM$~$\Delta CAD$ следува дека $AM = \dfrac{CD \cdot AB}{AC}$ и $BM = \dfrac{DA \cdot AB}{AC}$. Заклучуваме дека $DK = BM$. Од друга страна

$$\angle KDA + \angle ADB + \angle DBA + \angle ABM = \angle ADB + \angle DBA + \angle BAD = 180^0$$

(агли во $\Delta ABD$). Следствено $\angle KDB + \angle DBM = 180^0$ и значи $DK$ и $BM$ се паралелни, од што зедно со $DK = BM$ следува дека четириаголникот $KMBD$ е паралелограм. Заклучуваме дека $KM = BM$. Сега да ја примениме косинусната теорема за $\Delta AMK$. Добиваме

$$BD^2 = KM^2 = AK^2 + AM^2 - 2AK \cdot AM \cos(\alpha+\beta)$$
$$= \frac{BC^2 \cdot DA^2}{AC^2} + \frac{CD^2 \cdot AB^2}{AC^2} - 2\frac{BC \cdot DA \cdot CD \cdot AB}{AC^2}\cos(\alpha+\beta)$$

и следствено

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot DA^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos(\alpha+\beta)\ .\ \blacklozenge$$

Ќе разгледаме две задачи во кои ќе ја примениме теорема 2.

***Задача 1.*** Даден е конвексен четириаголник $ABCD$, чии должини на страни и дијагонали се рацвионални броеви. Ако дијагоналите $AC$ и $BD$ се сечат во точката $O$, докажи дека должините на отсечкте $AO$, $BO$, $CO$ и $DO$ исто така се рационални броеви.

***Решение.*** Ќе докажеме де $AO$ и $CO$ се рационални броеви. За $BO$ и $DO$ доказот е очигледен. Доволно е да се констатира дека $\frac{AO}{CO}$ е рационален број. Навистина, ако $\frac{AO}{CO} = \frac{m}{n}$, каде $m$ и $n$ се природни броеви, тогаш $\frac{AO}{AO+CO} = \frac{m}{m+n}$ и значи $AO = \frac{m}{m+n}AC$ е рационален број, од каде што следува дека и $CO$ е рационален број (како разлика од рационални броеви).

Нека $AH_1 \perp BD$ $(H_1 \in BD)$ и $CH_2 \perp BD$ $(H_2 \in BD)$. Тогаш $\Delta AOH_1 \sim \Delta COH_2$, па затоа $\frac{AO}{CO} = \frac{AH_1}{CH_2}$. Од друга страна $\frac{P_{ABD}}{P_{BDC}} = \frac{BD \cdot AH_1}{BD \cdot CH_2} = \frac{AH_1}{CH_2}$. Според тоа,

$$\frac{AO}{CO} = \frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{AB \cdot DA \sin\angle BAD}{BC \cdot CD \sin\angle BCD} = r\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle BCD}\ ,$$

каде $r = \frac{AB \cdot DA}{BC \cdot CD}$ е рационален број. Од досега изнесеното следува дека

$$\frac{AO}{CO} = r\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle BCD} = r\frac{\sin^2\angle BAD}{\sin\angle BCD \cdot \sin\angle BAD} = r\frac{1-\cos^2\angle BAD}{\sin\angle BCD \cdot \sin\angle BAD}\ .$$

Но, од косинусната теорема за $\Delta ABD$ следува, дека

$$\cos\angle BAD = \frac{AB^2 + DA^2 - BD^2}{2AB \cdot DA} = q\ ,$$

каде $q$ е рационален број. Тогаш $\cos^2\angle BAD$ исто така е рационален број, од што следува дека и бројот $1-\cos^2\angle BAD = 1-q^2$ е рационален. Според тоа, добиваме дека $\frac{AO}{CO}=\frac{r(1-q^2)}{\sin\angle BCD\cdot\sin\angle BAD}$. Понатаму, ја применуваме теорема 2 за четириаголникот *ABCD*. Имаме

$$\cos(\angle BAD+\angle BCD)=\frac{AB^2\cdot CD^2+BC^2\cdot DA^2-AC^2\cdot BD^2}{2AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA}=s,$$

каде $s$ е рационален број. Добиваме дека

$$s=\cos(\angle BAD+\angle BCD)=\cos\angle BAD\cdot\cos\angle BCD-\sin\angle BAD\cdot\sin\angle BCD.$$

Но, како и претходно, од косинусната теорема за триаголниците *ABD* и *BCD* следува, дека $\cos\angle BAD$ и $\cos\angle BCD$ се рационални броеви. Добиваме дека $\sin\angle BAD\cdot\sin\angle BCD$ е рационален број. Конечно $\frac{AO}{CO}$ е рациоален број, што и требаше да се докаже.

***Задача 2.*** (Американска олимпијада, 23 април 2003 година) Должините на страните и дијагоналите на конвексен многуаголник се рационални броеви. Во многуаголникот се повлечени сите дијагонали и тие го разделуваат на помали многуаголници. Докажи дека должините на страните на помалите многуаголници се рационални броеви.

***Решение.*** Нека *PQ* е произволна страна на некој од помалите многуаголници. Нека *P* е пресечна точка на дијагоналите *XS* и *ZT* на почетниот многуаголник, а *Q* е пресечна точка на дијагоналите *ZT* и *YU* на почетниот многуаголник. Ако ја примениме задача 1 за четириасголниците *XTYZ* и *UTYZ*, добиваме, дека должините на отсечките *ZP* и *QT* се рационални броеви. Но, тогаш

$$PQ=ZT-(ZP+QT)$$

исто така е рационален број, што и требаше да с докаже.

***Литература***

**1. Шаригин, И.:** Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)

**Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија**