Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 18
(збирка задачи за IX одделение - втор дел)

Скопје, 2020

Одговорен уредник
проф. д-р Алекса Малчески

Рецензенти
проф. д-р Методи Главче
проф. д-р Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Математички талент 18 : (збирка задачи за IX одделение-втор дел) /
Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2020. - 404 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 398-[404]

ISBN 978-608-4904-50-2

COBISS.MK-ID 51291141

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* 18 е наменета за талентираните ученици по математика од деветто одделение и на извесен начин е дополнување на книгата *Математички* 6. Меѓутоа, сметам дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 678 решени задачи во која во пет одделни дела се обработени алгебарски, аритметички, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски и задачи од теорија на броеви, приспособени за учениците на возраст од петнаесет до шестнаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области.

Рецензентите, д-р Методи Главче и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодарам.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сум благодарен на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ми биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје Авторот
мај, 2020 г.

I АЛГЕБРА

I.1. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

1. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$12345^2+12353^2-2\cdot 12349^2.$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот
$$2019^2-2018^2+2017^2-2016^2+...+3^2-2^2+1^2.$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$(1^2+2^2+3^2+...+2017^2)-(1\cdot 3+2\cdot 4+...+2016\cdot 2018).$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот
$$1999^2-1997^2+1995^2-1993^2+...+3^2-1^2.$$

5. Пресметај ја разликата $a-b$, каде
$$a=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+...+\frac{2016^2}{4031} \text{ и } b=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+...+\frac{2015^2}{4031}.$$

6. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ изразот $(n^2+n-7)(n^2+n-3)+4$ е квадрат на природен број.

7. Определи го збирот на сите природни броеви n за кои $\frac{2004-n}{99}$ е природен број.

8. Дали за некој природен број n збирот $1+2+3+...+n$ може да завршува на цифрите 2019?

9. Ако $a^2=\underset{1990}{100..05}\cdot\underbrace{11...11}_{1991}+1$, определи го бројот a.

10. Нека a е природен број запишан со 2016 цифри 1, а b е природен број запишан со 1008 цифри 2. Докажи дека $a-b$ е точен квадрат на природен број.

11. Ако меѓу секои две цифри на бројот 1331 допишеме по 2019 нули, се добива број кој е точен куб. Докажи!

12. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{[(5,2^2:2,6+8,1)^2-6,5^2]:0,025}{(60,192:2,4-1,08)^2-0,24\cdot 1400}:0,125\,.$$

13. Периодичниот децинален број 0,818181... запиши го во бид на дропка.

14. Определи го бројот на цифри кои треба да се соберат во децималниот запис на бројот $\frac{11}{21}$ (почнувајќи од цифрата на десетинките) за да се добие збир 2016?

15. Ако x,y се природни броеви за кои важи $x-y-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0$, пресметај ја вредноста на изразот $(\frac{x}{y})^{2018}+(\frac{y}{x})^{2018}$.

16. Нека за реалните броеви a,b,c важи $(ab):(ac):(bc)=5:3:1$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{a^5b^2}{c^3}:\frac{a^3b^5}{c^4}$.

17. Ако $\frac{y}{x}=3$, пресметај ја вредноста на дропката $\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}$.

18. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x+2y}{x-2y}$, ако $x^2+4y^2=5xy$.

19. За различните реални броеви a,b,c е важи

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}=2\,.$$

Пресметај

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\,.$$

20. Пресметај ја вредноста на изразот

$$1755\tfrac{23}{3571}\cdot 1754\tfrac{23}{3571}-1756\tfrac{23}{3571}\cdot 1753\tfrac{23}{3571}\,.$$

21. Производот од четири последователни броеви зголемен за 1 е точен квадрат на природен број. Докажи!

22. Даден е изразот:

$$A=1\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}(3x-\tfrac{(3x+1)(1-3x)}{2})-\tfrac{1}{2}(-x-3)^2\,.$$

а) Запиши го изразот A во нормален вид.

б) Разложи го изразот A на множители.

в) Определи ја најмалата вредност на изразот A.

23. Докажи дека полиномот x^2+x+1 е делител на полиномот x^8+x^4+1.

24. Упрости го изразот

$$\frac{a^3-a^2x-ax^2+x^3}{a^3+a^2x-ax^2-x^3},\ a\neq\pm x.$$

25. Ако $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, тогаш $a=b=c$. Докажи!

26. За реалните броеви a,b,c важи

$$a+b+c=1,\quad b^2+c^2+2bc+6a+3=0.$$

Определи ја вредноста на изразот $ab+ac$.

27. Ако a,b,c се реални броеви такви што $a+b+c=0$ и $abc=1988$, тогаш $a(a+b)(a+c)=1988$. Докажи!

28. За реалните броеви x и y важи $x+y=18$ и $x^2+y^2=170$. Кои вредности може да ги има изразот $x-y$?

29. Ако $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1$, тогаш докажи дека $xy+yz+zx=0$.

30. Ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=6$, пресметај ја вредноста на изразот $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

31. Докажи дека разликата на бројот запишан во декаден броен систем со 100 единици и на бројот запишан во декаден броен систем со 50 двојки е точен квадрат на природен број.

32. Пресметај ја вредноста на изразот

а) $\sqrt{333^2+444^2}$, б) $\sqrt{108^2+24^2+72^2}$.

33. Докажи дека $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ е природен број.

34. Докажи дека вредноста на изразот

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{5})(-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$$

е природен број.

35. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}).$$

36. Пресметај ја вредноста на изразот

$$2\sqrt{245}+\frac{1}{6}\sqrt{58^2-22^2}-30\sqrt{1,8}.$$

37. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{\sqrt{144}\cdot\sqrt{14,4}}{\sqrt{0,144}\cdot\sqrt{1,44}}.$$

38. Рационализирај ја и скрати ја дропката:

$$\frac{8+2\sqrt{2}}{4+\sqrt{128}}.$$

39. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{7}{2\sqrt{2}+1}-(11-5\sqrt{5})(2+\sqrt{5}).$$

40. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}-\frac{\sqrt{5,5}-\sqrt{7,5}}{\sqrt{2}}.$$

41. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\left(\frac{3}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}+\frac{3}{\sqrt{17}+\sqrt{14}}-\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^2.$$

42. Спореди ги дропките

$$\frac{\frac{1}{6}-(23\frac{1}{8}-19\frac{5}{12}):17,8}{0,6:4,2-\frac{2}{7}} \text{ и } \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+\sqrt{72}}{32}.$$

43. Определи ја вредноста на изразот:

$$\frac{1}{3240}\left[\frac{1250^2-950^2-1900\cdot1250}{10\sqrt{275^2-225^2}}\right]^2.$$

44. Определи ја вредноста на изразот:

$$\left[\frac{\sqrt{340^2-160^2}+\sqrt{650^2-250^2}}{(1000^2-1000\cdot1940+970^2)(1000^2-1000\cdot1998+999^2)}\right]^{2014}.$$

45. Упрости го изразот :

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}.$$

46. Докажи дека
$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=\sqrt{3}.$$

47. Ако $a+b=3$ и $ab=2$ докажи дека $a^4+b^4=17$.

48. а) Пресметај ја вредноста на изразот $2a^2+3ab+a+b^2+b$ ако $2a+b=-1$.

б) Пресметај ја вредноста на изразот x^6+y^6 ако $x^2+y^2=20$ и $x+y=2$.

49. Ако $x+y=1$ и $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, определи ја вредноста на изразот x^8+y^8.

50. Нека $x^2+\frac{1}{x^2}=7$. Определи ја вредноста на изразот $x+\frac{1}{x}$.

51. Нека x е реален број таков што $x+\frac{1}{x}=3$. Определи ја вредноста на изразот $x^3+\frac{1}{x^3}$.

52. Нека x и a се реални броеви такви што $x+\frac{1}{x}=a$. Пресметај ги вредностите на изразите $x^2+\frac{1}{x^2}$ и $x^4+\frac{1}{x^4}$ во функција од a.

53. Ако $a^2+a+1=0$, определи ја вредноста на изразот $a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}$.

54. Нека $x^2+y^2+xy=28$ и $8x-12y+xy=80$. Определи ја вредноста на изразот $3x+2y$.

55. Определи ја вредноста на изразот $x+y+z$ ако за броевите x,y,z важи:
$$x^2+y^2+z^2-4x+4y-8z+24=0.$$

56. За реалните броеви x и y важи $x^2+y^2+14x-10y+74=0$. Определи ја вредноста на изразот x^2+y^2.

I.2. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

57. Реши ја равенката

$$x[(1,2:36+1\tfrac{1}{5}:0,25-1\tfrac{5}{16}):\tfrac{169}{24}]=(7-6,35):6,5+9,9.$$

58. Реши ја равенката

$$(x+10^{2015})^2-(x-10^{2015})^2=10^{2016}.$$

59. За кои вредности на параметарот a равенката

$$(3x-a)^2+(4x+1)^2=(5x-1)^2$$

има решение.

60. Реши ја по x равенката

$$\tfrac{a+b-x}{c}+\tfrac{a+c-x}{b}+\tfrac{b+c-x}{a}+\tfrac{4x}{a+b+c}=1,$$

каде $a,b,c,a+b+c$ се броеви различни од нула.

61. Дадени се реалните броеви x и y, $x\neq y$. За кои вредности на реалниот број a е исполнето равенсвото

$$\tfrac{x^2-8}{y-x}+\tfrac{a}{x-y}=\tfrac{(x+3)(x-5)}{y-x}?$$

62. Решението на равенката

$$\tfrac{(x+5)^2}{2}-\tfrac{(x-2)(x+2)}{3}=(x-1)^2-(x^2-1)-\tfrac{55-x^2}{6}$$

е отсечокот на графикот на линеарната функција на $y-$оската. Определи ја оваа линеарна функција ако нејзиниот график минува низ точката $A(-4,3)$.

63. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+12x-4y+40=0.$$

64. За кои вредности на реалните броеви x,y и z е исполнето равенството:

$$16x^2+9y^2+4z^2=8x+6y+4z-3?$$

65. Реши ја равенката:

$$|2x-1|+2x=3.$$

66. Реши ја равенката

$$|x-1|+|x+3|=2x+2.$$

67. Реши ја равенката:

$$|1-|x||=2.$$

68. Реши ја равенката:

$$\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+6x+9}=13.$$

69. Реши ја равенката:

$$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=2019.$$

70. За кои вредности на реалниот параметар a равенката $||x-1|-1|=a$ има најмногу реални решенија? Определи ги овие решенија.

71. Дадени се изразите

$$P=a^2-a+b-b^2 \text{ и } Q=(a+b-1)^2+3-3a-3b.$$

а) Определи ги бројните вредности на P и Q ако a е еднаков на помалиот корен на равенката

$$\frac{x(-2x-1)^2}{4}+\frac{3x+2}{4}=2(\tfrac{1}{2}+x)(x-\tfrac{1}{2})+x^2+1 \text{ и } b=\frac{57^3-59^3}{59^2+59\cdot 57+57^2}+1.$$

б) Разложи ги на множители изразите P,Q и $P-Q$.

72. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$x^3-6\sqrt[3]{2000}x+2008=0.$$

73. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2007 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2008 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=2009. \end{cases}$$

74. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} \frac{5y+4x}{xy}=7 \\ \frac{7y-3x}{2xy}=\frac{11}{4} \end{cases}$$

75. За кои вредности на параметрите a и b системот равенки

$$\begin{cases}(a-1)x+by=1\\ax+2by=b\end{cases}$$

е неопределен.

76. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}y-x=2\\|x|+|y|=1988.\end{cases}$$

77. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases}x^2=6y-14\\y^2=-4x+1.\end{cases}$$

78. Реши го системот равенки

$$1+x^2=2y,\ \ 1+y^2=2z,\ \ 1+z^2=2t,\ \ 1+t^2=2x\,.$$

79. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases}x^2+y^2=2x+2y-1\\y^2+z^2=2y+2z+3\\z^2+x^2=2z+2x+2.\end{cases}$$

80. Колку има подредени тројки реални броеви (a,b,c) такви што важи $ab=c, bc=a, ca=b$.

81. Реши го системот равенки:

$$(x+y)^2-z^2=1,\ (y+z)^2-x^2=5,\ (z+x)^2-y^2=10\,.$$

82. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases}x+y=6\\xy=8.\end{cases}$$

83. Определи ги сите парови реални броеви (x,y) такви што

$$\begin{cases}x-12y=4\\2x-24y=8xy.\end{cases}$$

84. Реши ја неравенката:

$$x-2|x|>2\,.$$

85. Реши ја неравенката:
$$|x|+1996>5x.$$

86. Реши ја неравенката:
$$\frac{2-x}{x-1}>\frac{2}{3}.$$

87. Реши ја неравенката:
$$\frac{2019}{1+|x-1|}>1.$$

88. Реши ја неравенката:
$$\sqrt{x^2-2x+1}<1991.$$

89. Во множеството позитивни реални броеви, реши го системот
$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=3,\\ x+y+z\le 12.\end{cases}$$

I.3. ФУНКЦИИИ

90. Дадена е функцијата $f(x)=x^2-3x+4$. Ако $x_1=f(1), x_2=f(2)$ и $x_3=f(3)$, определи ја вредноста на изразот $f(x_1)+f(x_2)f(x_3)$.

91. Нека $f(2x-3)=4x+2$. Пресметај $f(1987)$.

92. За функцијата $f(x)$ важи $3f(x-2)+f(2x-4)=x^2+1988$. Пресметај $f(0)$.

93. За секој реален број x определуваме број $f(x)=ax+b$. Определи ја разликата $b-a$ ако е познато дека за секој x е исполнето равенството
$$f(x+1)=4f(x+4)+x.$$

94. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е определена со $f(x)=2x-1$. Определи ја функција $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што $f(g(x))=6x+3$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

95. Во рамнината xOy определи го множеството точки чии координати го задоволуваат равенството
$$y=|x|+x.$$

96. Нацртај го графикот на функцијата:

$$y=|x-|x||.$$

97. Што претставува множеството точки (x,y) во рамнината xOy такви што

$$x+|x|=y+|y|?$$

98. Правата p: $3x-4y+1=0$ ја сече правата a: $y=\frac{5}{3}x-3$ во точката A, а правата b: $5x+4y-55=0$ ја сече во точката B. Определи го растојанието меѓу точките A и B.

99. Дадена е функцијата $f(x)=ax+b$, чиј график во правоаголен координатен систем минува низ точките $A(0;\frac{1}{12})$ и $B(-1;0)$.

а) Определи ја функцијата $f(x)$;

б) Дали постои $x\in[-1;1]$, за кој вредноста на изразот

$$K=\sqrt{14x^2+28x+14+f^2(x)}+\sqrt{14x^2-28x+14\frac{1}{36}+f^2(x)-\frac{f(x)}{2}}$$

е рационален број?

100. Определи ги сите вредности на параметарот m за кои правата $3x+my=12$ со координатните оски формира триаголник со плоштина 6.

101. Точките $A(3,0)$ и $C(-4,1)$ се две спротивни темиња на квадратот $ABCD$. Определи ги координатите на темињата B и D, ако темето B лежи на позитивниот дел на $y-$оската.

102. Определи ја плоштината на триаголникот кој е ограничен со $x-$оската и правите p и q чии равенки се $y=\frac{1}{2}x-3$ и $y=-3x+4$, соодветно.

103. Страните на $\triangle ABC$ лежат на правите чии равенки се

$$y=-2x+10,\quad y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2},\quad x+4y-5=0.$$

Определи ги координатите на темињата на $\triangle ABC$ и неговата плоштина.

104. Определи го растојанието од координатниот почеток O до правата p чија равенка е $4x+3y-6=0$.

105. Дадена е функцијата $y=(2m+1)x+6$.

а) Определи ја вредноста на параметарот m така што графикот на функцијата минува низ точката $M(4,3)$.

б) За најдената вредност на m определи ја оддалеченоста на координатниот почеток до графикот на функцијата.

106. Во координатната рамнина е дадена права $4x+3y=n$, n е некој реален број. Нормалното растојание на координатниот почеток до дадената права е 12. Определи ги бројот n и плоштината на триаголникот кој дадената права го формира со координатните оски.

107. Темето A на триаголникот ABC е пресекот на линеарната функција $y=\frac{3}{4}x+12$ со $x-$оската, а темето B е пресекот на линеарната функција $y=-\frac{4}{3}x+12$ со $x-$оската. Темато C е пресечната точка на графиците на овие две линеарни функции.

а) Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен

б) Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

108. Дадени се линеарните функции

$$y=-1, y=\frac{3}{2}x-4, y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}, y=2x+7.$$

Определи ги координатите на темињата и плоштината на четириаголникот ограничен со графиците на дадените функции.

109. Во координатен систем во рамнината е дадена точка $T(2,3)$. Низ точката T минуваат прави p и t. Правата p ја сече $x-$оската во точка A, а $y-$оската во точка D. Правата t ја сече $x-$оската во точка B, а $y-$оската во точка C. Определи ги равенките на правите p и t ако триаголниците ABT и CDT се рамнокраки со основи AB и CD, соодветно и ако важи $P_{\triangle ABT}:P_{\triangle CDT}=9:4$.

I.4. НЕРАВЕНСТВА

110. Спореди ги броевите 80^5 и 2^{32}.

111. Што е поголемо 26^{400} или 82^{300}?

112. Спореди ги вредностите на изразите

$$A=\frac{\frac{1}{6}-(23\frac{1}{8}-19\frac{5}{12}):17,8}{0,6:4,2-\frac{2}{7}} \text{ и } B=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+\sqrt{72}}{32}.$$

113. За кои вредности на x и y вредноста на изразот

$$4x^2+9y^2-12x+30y+1987$$

е најмала? Определи ја оваа најмала вредност.

114. За кои вредности на x,y и z изразот $x^2+y^2+z^2-12y-14z+90$ прима најмала вредност? Определи ја оваа вредност.

115. За кои вредности на x и y изразот $\frac{2x^2+2y^2-4y+7}{x^2+y^2-2y+2}$ прима најголема вредност. Определи ја таа вредност.

116. Нека a,b,c се ненегативни броеви чиј збир е еднаков на 3. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $\frac{2a+1}{a^2+3}+\frac{2b+1}{b^2+3}+\frac{2c+1}{c^2+3}$.

117. За четири броја a,b,c,d е исполнето: $d>c, a+b=c+d, a+d<b+c$. Подреди ги по големина овие четири броеви.

118. Нека x,y и z се реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}.$$

Кога важи знак за равенство?

119. Докажи дека $x^8-x^5+x^2-x+1>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

120. Нека a и b се реални броеви такви што $a+b\geq 0$. Докажи дека

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geq(\frac{a+b}{2})^3.$$

Кога важи знак за равенство?

121. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a\geq b\geq c$. Докажи го неравенството

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\leq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

122. Ако $a>b>c$, докажи дека

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}>\frac{2}{a-c}.$$

123. Ако за позитивните реални броеви a, b, c и d важи $9ac \geq 3bd \geq ac$, докажи дека $\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(ac+bd)^2} \geq \frac{3}{4}$. Кога важи знак за равенство?

124. Нека a,b,c е позитивни реални броеви, такви што $a+b+c=1$. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}} \geq 3.$$

Кога важи знак за равенство?

125. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи дека

$$\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2}+\frac{y^2+z^2+x}{y^2+2}+\frac{z^2+x^2+y}{z^2+2} \geq 3.$$

126. Докажи, дека за позитивните реални броеви a, b, c и d важи:

а) $(\frac{a+b+c+d}{4})^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}$;

б) $\frac{a^3}{2a^4+1}+\frac{b^3}{2b^4+1}+\frac{c^3}{2c^4+1} \leq 1$, ако $a+b+c=3$.

127. Ако x, y и z се позитивни реални броеви, докажи дека

а) $(3x^2+2)(3y^2+2) \geq \frac{9}{2}(x+y)^2+3$;

б) $(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2) \geq 9(x+y+z)^2$.

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Кој е најголемиот природен број кој го задоволува следниот услов: било кои две соседни цифри во истиот редослед формираат двоцифрен број делив со 23?

2. Определи ги сите природни броеви кои се деливи со 8, чиј збир на цифри е еднаков на 7, а производот на цифрите им е 6.

3. Низа од природни броеви започнува со бројот 6. Секој следен член во низата се добива по следното правило: ако членот a е парен број, тогаш нареден член е $\frac{1}{2}a$, а ако членот a е непарен број, тогаш нареден член во низата е $3a+1$. Кој број е 2018-ти член? Образложи го својот одговор!

4. Определи ги сите парови последователни природни броеви такви што едниот број може да се запише како производ $2(n-3)(n+1)$, а другиот како производ $(n-2)(2n-1)$ каде што n е природен број.

5. Определи ги сите трицифрен броеви кои се 15 пати поголеми од збирот на цифрите со кои се запишани.

6. Одреди ги сите трицифрени природни броеви кои се 12 пати поголеми од збирот на своите цифри.

7. Никола купил тетратка од 100 листа и секоја страна на тетратката ја нумерирал со редните броеви од 1 до 200. Неговата сестра Маја произволно од тетратката скинала 24 листа и ги собрала редните броеви на страниците на скинатите листови. Дали добиениот збир може да биде:
   а) 2018,
   б) 2019?

8. Остатокот при делењето на целиот број a со 4 е 3. Определи го остатокот при делењето на бројот a^2-a со 4.

9. Збирот на квадратите на три непарни последователни природни броја е еднаков на четирицифрен број запишан со исти цифри. Определи ги овие броеви.

10. Дали може броевите $2, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^{1995}, 2^{1996}$ да се поделат во две дисјунктни множества така што збирот на броевите од првото множество биде еднаков на збирот на броевите од другото множество?

11. Определи ги сите природни броеви запишани само со помош на цифрата 2 и кои може да се запишат во вид на збир или разлика на квадрати на два природни броја.

12. Докажи дека изразот $n^2 - n + 1987$ не е делив со 1986 за ниту еден природен број n.

13. Ако n е природен број, тогаш $n^2 - n + 2019$ не е делив со 2018. Докажи.

14. Докажи дека $6 | n^3 - 1987n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

15. Докажи дека за секој природен број n изразот $n^3 + 1988n$ е делив со 3. За кои вредности на n дадениот израз е делив со 6.

16. За секој природен број n бројниот израз $(9n+4)^2 - (4-n)^2$ е делив со 160. Докажи!

17. Докажи дека разликата на квадратите на било кои два непарни броја е делива со 8.

18. Ако поголеминот од два последователни прирдони броја е квадрат на некој природен број, тогаш производот на овие два последователни природни броја е делив со 12. Докажи!

19. За целите броеви x, y е исполнето $90 | x^2 + xy + y^2$. Докажи дека $900 | xy$.

20. Докажи дека за секој природен број n изразот $3^{2n} - 1$ не е делив со $2^{2n} - 1$.

21. Ако $x = 10^{2019}$, тогаш 54 е делител на $x^2 + x - 2$. Докажи!

22. Нека $x=\underbrace{444...444}_{11\text{ четворки}}$. Докажи дека бројот x^2-x-2 е делив со 270.

23. Нека $x=\underbrace{1111...111}_{20\text{ единици}}$. Докажи дека x^3-x^2-2x е делив со 1188.

24. Даден е бројот $n=\underbrace{111..11}_{1994}\underbrace{222..22}_{1994}$. Докажи дека бројот n^3-3n^2-18n е делив со 13200.

25. Докажи дека за секој природен број n изразот $5^{2002}+7^{2002}+9^{2n}$ е делив со 5.

26. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броја е делив со 9.

27. Докажи, дека збирот на квадратите на 5 последователни природни броеви не може да биде точен квадрат на природен број.

28. а) Докажи дека за секој природен број n бројот n^5-n е делив со 30.

б) Ако a и b се природни броеви такви што $a^5+b^5=2020$, тогаш збирот $a+b$ е делив со 5. Докажи.

29. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот $8^n+8^{n+1}+8^{n+2}$ е делив со 584.

30. Докажи дека бројот $2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{1999}+2^{2000}$ е делив со 30.

31. Нека $S=3+3^2+3^3+...+3^{2018}+3^{2019}$. Докажи дека $39\,|\,S$.

32. Докажи дека збирот $1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}+...+2018^{2019}+2019^{2019}$ е делив со 2019.

33. За природните броеви x,y и z важи $x^2+y^2=z^2$. Докажи дека $15\,|\,xyz$.

34. Определи го најмалиот природен број k за кој важи: збирот на квадратите на било кои k последователни природни броја е делив со 15.

35. Збирот на цифрите на бројот X е Y, а збирот на цифрите на бројот Y е Z. Ако $X+Y+Z=60$, определи го бројот X.

36. Нека a,b,c се меѓусебно различни ненулти цифри. Дали може збирот
$$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{cab}+\overline{cba}+\overline{bca}+\overline{bac}$$
да биде еднаков на точен квадрат на некој природен број.?

37. Производот на два природни броја е 1176, а нивниот најмал заеднички содржател е 168. Определи ги овие броеви.

II.2. ПРОСТИ БРОЕВИ

38. Горјан го пресметал збирот на сите природни броеви од 1 до n и добил трицифрен број запишан со исти цифри. Колку природни броеви собрал Горјан?

39. Природниот број n има точно три делители. Докажи дека $\sqrt{n}$ е природен број.

40. Бројот $3a$ има точно 4 делители, а бројот $5a$ има точно 6 делители. Најди ја првата цифра на бројот $2019a$.

41. Докажи дека за секои природни броеви x и y бројот
$$x^2y^2+3x^2+2y^2+6$$
е сложен број.

42. Природниот број n е таков што броевите $2n+1$ и $3n+1$ се точни квадрати на природни броеви. Докажи дека бројот $5n+3$ е сложен.

43. а) Изразот a^4+4b^4 запиши го како производ на два полиноми.
б) Докажи дека $2^{1994}+5^{1996}$ е сложен број.

44. Ако p е прост број поголем или еднаков на 3, тогаш 12 е делител на p^2+11. Докажи!

45. Нека p е прост број и нека $3p+10$ е збир на квадратите на 6 последователни природни броеви. Докажи дека $36\mid p-7$.

46. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $|n^2-100|$ е прост број.

47. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот $5p+1$ е квадрат на природен број.

48. Нека p и q се дадени различни прости броеви. Определи ги сите подредени парови природни броеви (m,n) кои се решенија на равенката $pm+qn=mn$.

49. Определи ги сите прости броеви p,q и r кои ја задоволуваат равенката
$$pqr-pq-pr-qr+p+q+r-33=0$$

50. Најди ги сите природни броеви n такви што n има цифри колку што има различни прости делители и збирот на различните прости делители е еднаков со збирот на степените на истите делители.

51. Нека функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, е таква што за секој природен број $n>1$, постои прост делител p на n така што
$$f(n)=f(\tfrac{n}{p})-f(p).$$
Ако
$$f(2^{2007})+f(3^{2008})+f(5^{2009})=2006.$$
пресметај
$$f(2007^2)+f(2008^3)+f(2009^5).$$

II.3. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

52. Определи ги сите природни броеви a за кои бројот $\sqrt{\frac{a+64}{a-64}}$ е природен број.

53. Определи ги сите двоцифрени природни броеви n такви што бројот $\sqrt{\frac{n+24}{n-24}}$ исто така е природен број.

54. Определи го најголемиот природен број n за кој вредноста на изразот $\frac{\sqrt{666}+\sqrt{n}}{\sqrt{666}-\sqrt{n}}$ е природен број.

55. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}.$$

56. Ако на производот на два природни броја му го додадеме нивниот збир ќе го добиеме бројот 14. Кои се тие природни броеви?

57. Ивана избрала два броја a и b од множеството $\{1,2,3,...,25,26\}$. Производот ab е еднаков на збирот на преостанатите 24 броја од ова множество. Определи ја вредноста на изразот $|a-b|$.

58. Учителот и неговите ученици тргнале со автобус во градот во кој се одржувал Државниот натпревар по математика. Тие седеле на седишта чии броеви биле последователни природни броеви и нивниот збир бил 54. Колку ученици оделе на натпреварот, ако само еден од броевите на седиштата на кои седеле бил прост број?

59. Во множеството цели броеви реши ја равенката:
$$xy+x-3y=10.$$

60. Определи ги сите цели броеви n такви што $\sqrt{n^2+4n-5}$ е цел број.

61. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2-1=y^2+104.$$

62. Во множеството цели броеви реши ја равенката $x^2+y^2=2x$.

63. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2-1992=y^2.$$

64. На колку начини бројот 1991 може да се запише како збир на последователни природни броеви?

65. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{2x-5}{3}+\sqrt{x^2-8x+16}=\frac{2}{3}+\frac{x-2}{6}-\frac{x-4}{2}.$$

66. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1).$$

67. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$

68. Во множеството природни броеви реши ја равенката $x^2+y^2=2017^2$.

69. Во множеството цели броеви реши ја равенката $2^x+1=y^2$.

II.4. КОНГРУЕНЦИИ

70. При делењето на бројот m со бројот 4 се добива остаток 2. Определи го остатокот кој се добива при делењето на бројот m^3-3m со бројот 4.

71. Даден е бројот $M=19^{91}-91^{19}$.
а) Докажи дека $M>0$.
б) Докажи дека $72|M$.

72. Нека $S=p_1^{1996}+p_2^{1996}+...+p_{1996}^{1996}$, каде $p_1,p_2,...,p_{1996}$ се првите 1996 прости броеви. Докажи дека $5|S$.

73. Дали постои природен број n за кој бројот $n^2+n+2006$ е делив со 2005?

74. Дали можат броевите $1^1,2^2,...,2008^{2008}$ да се запишат еден по друг, во произволен редослед, така што добиениот број да биде точен квадрат.

75. Дали постојат природни броеви x и y такви што
а) $x^3+y^4=2^{2003}$, б) $x^3+y^4=2^{2005}$.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Квадрат на природен број има цифра на единиците 5. Дали неговата цифра на стотките е парна или непарна?

2. Броевите од 1 до 17 се запишани во низа, секој број по еднаш, така што збирот на било кои два соседни броја е точен квадрат. Кој број е запишан во средината на низата?

3. Збирот на два природни броја е 2018. Ако се прецрта цифрата на единиците на едниот, ќе се добие другиот број. Определи ги сите такви броеви.

4. Цифрата на единиците на шестцифрен број е 7. Ако цифрата на единиците се премести на местото на стоилјадитите, тогаш се добива број кој е пет пати поголем од почетниот. Кој е тој број?

5. Горјан замислил двоцифрен број кај кој цифрата на десетките е двапати помала од цифрата на единиците. Ако овој број се зголеми за 18 се добива бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед. Кој број го замислил Горјан?

6. Едноцифрен број x е зголемен за 10 и со тоа бројот x е зголемен за некој процент. Ако добиениот број го зголемиме за истиот процент како при првото зголемување, го добиваме бројот 72. Определи го бројот x.

7. Дадени се четири броја: $\overline{abbcd}, \overline{bac}, \overline{ac}, c$ (a,b,c се различни цифри). Почнувајќи од вториот, секој број е еднаков на производот од цифрите на претходниот. Определи ги броевите $\overline{abbcd}, \overline{bac}, \overline{ac}, c$.

8. Определи ги сите трицифрени броеви со различни цифри кои се деливи со секој двоцифрен број кој се добива со изоставување на една негова цифра без да се менува редоследот на останатите цифри.

9. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што

$$4\cdot\overline{abcd}+30=\overline{dcba}.$$

10. Определи го шестцифрениот број n чии производи со 2, 3, 4, 5 и 6 исто така се шестцифрени броеви запишани со истите цифри како и бројот n.

11. Определи ги природните броеви a и b, $a>b$, за кои збирот на броевите $a+b, a-b, ab$ и $\frac{a}{b}$ е еднаков на 245.

12. Ако на бројот x му се одземе 7 или му се додаде 2, се добиваат точни квадрати на природни броеви. Определи го бројот x.

13. Бројот 10 запиши го како збир на два броја чии квадрати се однесуваат како $1:16$.

14. Кој број треба да се додаде на броителот и именителот на дропката $\frac{34}{53}$ за да се добие дропка еднаква на $\frac{4}{5}$?

15. Дадена е дропка чиј именител е за 2020 поголем од броителот. Ако оваа дропка се собере со $\frac{1}{3}$, се добива дропка која е трипати поголема од дадената дропка. Определи ги именителот и броителот на дадената дропка.

16. Ако броителот на некоја дропка се зголеми за 3, а именителот се намали за 2, се добива 2. Но, ако броителот на истата дропка се намали за 2, а именителот се зголеми за 3, се добива $\frac{1}{3}$. Определи ја оваа дропка.

17. Во одделението на Горјан учат 25 ученици и тие постигнале просечна оценка од 2,8. Ако се изостави успехот на Петар, тогаш просечната оценка на останатите ученици е 2,78. Определи го успехот на Петар.

18. Во едно одделение има 10 момчиња и 15 девојчиња. На крајот на учебната година одделението имало просечен успех 4,00. Просечниот успех на девојчињата бил 3,80. Определи го просечниот успех на момчињата.

19. Кога два трицифрени броја се запишат еден по друг се добива шестцифрен број кој е трипати поголем од нивниот производ. Определи ги овие трицифрени броеви.

20. Дадени се четири природни броја. При пресметување на сите можни ненегативни разлики на броевите добиваме 0, 2, 3 и 5. Определи ги овие броеви ако се знае дека збирот на двата најголеми броја е три пати поголем од збирот на двата најмали броја.

21. Дадена е низа од неколку последователни природни броеви. Бројот на природните броеви во оваа низа е за 2 помал од двократната вредност на најмалиот број во низата, а нивната аритметичка средина е 12,5. Определи ги овие броеви?

22. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои збирот на дропките $\frac{a+1}{a+4}$ и $\frac{5}{a-7}$ ќе биде еднаков на нивниот производ.

III.2. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

23. Во 4 часот наутро стрелките на часовникот зафаќаат агол од 120°. По колку време стрелките на часовникот за првпат повторно ќе зафаќаат агол од 120°?

24. Павел тргнал за Прилеп неколку минути пред 9 часот, а кога стигнал, во неколку минути пред 12 часот, малата и големата стрелка на часовникот си ги замениле местата. Колку време Павел поминал на пат и кога тргнал за Прилеп?

25. На прашањето „Колку е часот?", Самоил му одговорил на Горјан: „Четвртина од изминатото време и половина од преостанатото време на овој ден го даваат точното време." Колку бил часот во тој момент?

26. Тројца пријатели Владо, Љубе и Божин копаат бунар. Владо и Љубе првиот ден ископале $\frac{1}{20}$ од бунарот, Љубе и Божин вториот ден ископале 7% од бунарот, а Владо и Божин третиот ден ископале $\frac{2}{25}$ од бунарот. Потоа бунарот го копале сите тројца заедно, при што секој работел исто како и претходните три дена. За колку дена, сметајќе ги и првите три дена, е завршено копањето на бунарот?

27. Молерот Киро молерисува двапати побрзо од својот помошник. Гарсоњерата на Петра заедно ја молерисале за 4 часа. Колку време на се-

кој од нив му е потребно самостојно да ја молериса гарсоњерата на Петра?

28. Еден работник сам може да заврши некоја работа за 20 дена, а друг работник истата таа работа сам може да ја заврши за 30 дена. Ако на првиот и вториот работник им се придружи трет работник, тогаш сите тројца работата заедно може да ја завршат за 8 дена. За кое време третиот работник сам може да ја заврши работата?

29. Четириесет крави испасуваат една ливада за 50 дена. Истата ливада 60 крави ја испасуваат за 30 дена. За колку дена 20 крави ќе ја испасат оваа ливада? Колку крави можат да ја испасат оваа ливада за 75 дена? (Секоја крава пасе еднакво количество трева секој ден.)

30. Во езеро се влева поток кој секојдневно внесува исто количество вода. За 24 часа водата од езерото може да ја испијат 183 коњи, а 37 коњи, почнувајќи од денеска, целата вода може да ја испијат за 5 дена. За колку дена, почнувајќи од денес, еден коњ може да ја испие водата од езерото?

31. Тројца работници работејќи заедно една работа завршуваат за два дена. Првиот и вториот работник работејќи заедно истата работа ја завршуваат за три дена, а вториот и третиот работник работејќи заедно истата работа ја завршуваат за четири дена. За кое време секој од тројцата работници самостојно може да ја заврши оваа работа?

32. Павел една работа ја завршил за 5 дена. Првиот ден завршил $\frac{1}{m}$ од работата, каде m е природен број. Вториот ден завршил $\frac{1}{n}$ од работата кој му останал по првиот ден, каде n е природен број поголем од m. Третиот ден завршил $\frac{1}{m}$ од остатокот од работата кој му останал по вториот ден, а четвртиот ден завршил уште $\frac{1}{n}$ од работата кој му останал по третиот ден. Петтиот ден Павел ја завршил останатата $\frac{1}{4}$ од целата работа. Определи ги броевите m и n.

33. Еден трактор може да изора една нива за 7 часа, а друг трактор истата нива може да ја изора за 5 часа. Ако двата трактори заедно ја ораат нивата, тогаш вториот трактор ќе изора 7 хектари повеќе од првиот трактор. Колку хектари има нивата?

34. Колку литри чиста дестилирана вода треба да се измешаат со 4 литри петпроцентен раствор на алкохол за да се добие еднопроцентен раствор на алкохол?

35. Колку литри вода треба да се дотурат во смеша од 40 литри 60% раствор на алкохол и 60 литри 40% раствор за да се добие 25% раствор на алкохол?

36. Во една цистерна има 470 литри вода, а во друга има 240 литри вода. За еден час од првата цистерна истекува трипати повеќе вода отколку од втората. По пет часа во првата цистерна останале 20 литри вода помалку отколку во втората цистерна. Колку литри вода се одлеваат од секоја цистерна за 1 час?

37. Во селата A, B и C живеат 300, 200 и 100 ученици. Растојанијата меѓу селата се $\overline{AB} = 3\,km, \overline{BC} = 2\,km, \overline{AC} = 4\,km$. Каде треба да се изгради заедничко училиште така што вкупниот број километри кој го минуваат сите ученици е најмал?

38. Турист поминал $105\,km$, при што секој ден поминувал еднаков цел број километри. Ако дневно поминувал $6\,km$ помалку, тогаш патувањето ќе траело два дена повеќе. Колку километри дневно поминувал туристот?

39. Во се движел по угорнина со константна брзина. Во текот на движењето возот го сретнал Александар, кој се движи покрај пругата по удолнина со брзина од $6\,km/h$ и поминал покрај него за $12,6$ секунди. Малку покасно возот го стигнал Борис кој покрај пругата се движи по угорнина со брзина $3,6\,km/h$ и покрај него поминал за 15 секунди. Определи ја брзината на возот и неговата должина.

40. Возејќи со постојана брзина велосипедистот Киро за 15 минути го поминал половина од патот AB. Втората половина од патот ја возел со брзина за $6\,km/h$ помала од почетната брзина. Така целиот пат Киро го поминал за 33 минути. Определи ги брзините на движење на Киро и должината на патот AB.

41. Местата A и B се поврзани со праволиниска пруга со должина $300\,km$. Од местото A кон местото B тргнува воз V_A со брзина $v_1 = 40\,km/h$. Истовремено од местото B кон местото A тргнува воз

V_B со брзина $v_2 = 80\,km/h$. Во моментот на тргнување на возовите, од местото A кон возот V_B полетува ластовица. Кога ќе стигне до возот V_B, ластовицата лета назад кон возот V_A се додека не го сретне, па повторно лета кон возот V_B итн.

Ластовицата на овој начин чета меѓу возовите V_A и V_B со брзина од $120\,km/h$. Колку километри ќе прелета ластовицата до срекавањето на возовите V_A и V_B?

42. Бродовите A и B се движат по заемно нормални патеки кои се сечат во точката O. Бродот A од точката O е оддалечен $300\,km$ и се движи со брзина $40\,km/h$, а бродот B од точката O е оддалечен $100\,km$ и се движи со брзина $30\,km/h$. Определи кога растојанието меѓу бродовите ќе биде најмало и определи го тоа растојание.

43. Брод од пристаниште исповил правоалиниски на север со брзина од $36\,km/h$. По еден час бродот свртел кон исток и праволиниски продолжил да плови со двојно поголема брзина. Откако го поминал истиот пат како од пристаништето до првото свртување, бродот со истата брзина уште 10 минути продолжил да се движи кон север. Колку бил во тој момент бродот оддалечен од пристаништето и со која просечна брзина пловел до тоа место?

44. На кружна патека долга $1650\,m$ со различни постојани брзини од исто место тргнуваат два мотоциклисти. Ако се движат во спротивни насоки, тогаш тие се сретнуваат по 1 минута, а ако се движат во иста насока тогаш побрзиот мотоцклист ќе го стигне поспориот по 11 минути. Определи ги брзините на мотоциклистите.

45. Воз се движи со брзина $4m/s$. Птица лета со брзина $12m/s$. За 60 секунди птица прелетала од крајот до почетокот на возот и назад. Колку е долг возот?

46. Војничка колона има должина $1km$ и се движи рамномерно. Курир од чело на колоната дотрчува до крајот на колоната, предава порака и се враќа на чело на колоната. За тоа време колоната поминала пат од $1km$. Колкав пат поминал куририот?

47. Одејќи со постојана брзина пешак го поминал патот од местото A до местото B за 4 саати. Ако по една третина поминат пат пешакот ја

зголеми брзината за $3km/h$, тогаш патот од A до B ќе го помине вкупно за 3 саати. Определи ја должината на патот од A до B.

48. Од местото A кон местото B тргнал велосипедист, кој се движел со брзина од $9km/h$. После 1 час и 15 минути од поаѓањето на велосипедистот, од местото B кон местото A тргнал моторциклист кој се движел со брзина од $21km/h$. На која оддалеченост од местото A се сретнале велосипедистот и моторциклистот, ако растојанието меѓу местата A и B е $81\frac{1}{4}km$.

49. Автомобил го поминал патот од градот A до градот B за 5 саати, а во обратна насока од B до A за 4 саати. Притоа на угорнина се движел со брзина од $60\,km/h$, по рамен пат со брзина од $72\,km/h$ и по удолнина со брзина од $90\,km/h$. Колку е долг патот од A до B?

50. Двајца другари, Васко и Лазар, истовремено тргнале од Охрид и Битола во пресрет еден на друг со брзина $6\,km/h$. Истовремено од главата на Васко кон Лазар полетува мува со брзина од $50\,km/h$ и кога доаѓа до Лазар одма се враќа кон Васко. Движењето на мувата така продолжува се до срееќавањето на Васко и Лазар. Колку километри поминала мувата ако растојанието од Охрид до Битола е $66\,km$.

51. На раскрсница се сретнале два автомобили, кои истовремено го продолжиле патот. Едниот автомобил тргнал на север со брзина од $54\,km/h$, а другиот на запад. По 20 минути автомобилите биле оддалечени еден од друг $30\,km$. Со која брзина се движел вториот автомобил?

52. Два прави пата се сечат во точка O под прав агол. По овие патишта кон O се движат двајца велоспедисти, првиот со брзина од $30/h$, а вториот со брзина од $40\,km/h$. Во еден момент првиот велосипедист на својот пат од раскрсницата O е оддалечен $10\,km$, а вториот на својот пат е оддалечен $30\,km$. За кое време од овој момент велосипедистите ќе бидат најмалку оддалечени еден од друг? Колкава е таа оддалеченост?

53. Два автомобили тргнале истовремено еден од местото A за местото B, а другиот од местото B за местото A. Возејќи секој со постојана,

но со меѓусебно различни брзини автомобилите се сренале по 8 часа возење. Ако брзината на автомобилот од местото A е за 14% поголема отколку што е, а брзината на автомобилот од местото B е за 15% поголема отколку што е, тогаш автомобилите ќе се сретнеле по 7 часа возење. Кој автомобил бил побрз и колку пати неговата брзина е поголема од брзината на поспориот автомобил?

54. Од местата *А* и *Б* оддалечени едно од друго 120 km истовремено тргнуваат еден кон друг двајца велосипедисти, првиот со брзина $10\frac{4}{5}km/h$, а вториот со 12,5 km/h. По колку време од тргнувањето велосипедистите ќе се сретнат?

55. Два велосипедисти тргнуваат од местата A и B во пресрет еден на друг. Секој од нив кога ќе стигне до целта се враќа назад кон местото од кое тргнал. Првпат велосипедистите се сретнале на $5km$ од A, а вториот пат се сретнале на $3km$ од B.Определи го растојанието од A до B.

56. На ист брег на една река се наоѓаат две места A и B, кои се меѓусебно оддалечени $80km$. Речен брод растојанието од местото A до местото B и назад до местото A го поминува за 8 часа и 20 минути. Брзината на бродот додека плови наспроти течението на реката е $16km/h$. Определи ја брзината на реката.

57. Свежа трева содржи 80% вода, а сеното содржи 20% вода. Определи го количеството свежа трева кое е потребно за да се добие 1 тон сено.

58. Четири ученици, Ацо, Борис, Цветко и Дарко, собирале стара хартија. Заедно собрале $288kg$ хартија. Колку килограми собрал секојод нив, ако се знае дека Ацо собрал $36kg$ повеќе од Борис, односно $\frac{3}{4}$ од количеството хартија кое го собрале Борис и Цветко заедно, а Дарко собрал двапати повеќе од Цветко?

III.3. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

59. Синот се наоѓа на 60 свои чекори пред таткото кој го стигнува. Додека синот направи 9 чекори, таткото прави 6 чекори, но 4 чекори на

таткото се со иста должина како 7 чекори на синот. Колку чекори треба да направи таткото за да го стигне синот?

60. Две шишиња со еднаков волумен се наполнети со смеша од вода и сок. Во првото шише односот на количествата вода и сок е $2:1$, а во второто шише е $4:1$. Ако содржините од двете шишиња ги прелееме во трето шише, колкав ќе биде во него односот на количествата вода и сок?

61. Во една чаша е направен сок од вода и сируп во однос $2:1$, а во друга во однос $3:2$. Сокот од двете чаши е прелеан во празен сад при што е добиен сок во кој односот на водата и сирупот е $27:17$. Определи го односот на количеството сок во двете чаши.

62. На еден остров $\frac{2}{3}$ од сите мажи се оженети, а $\frac{3}{5}$ од сите жени се омажени. Колкав дел од населението не е во брак?

63. Јован има двапати повеќе браќа од сестри, а неговата сестра Мирјана има петпати повеќе браѓа од сестри. Колку синови и колку ќерки има во ова семејство?

64. На еден училишен натпревар учествувале 240 ученици. Половината од учениците е еднаква на збирот на $\frac{3}{5}$ од девојчињата и $\frac{3}{7}$ од момчињата. Колку момчиња, а колку девојчиња учествувале на натпреварот?

65. На промоција на нови книги во една книжарница на посетителите им се поделени џепни календари за 2020 година. Секој посетител добил еднаков број календари. Ако на промоцијата присуствувале 5 лица помалку, секој од нив ќе добиел по 2 календара повеќе, а ако присуствувале 4 лица повеќе, секој ќе добиел по 1 календар помалку. Колку лица присуствувале на промоцијата? Колку календари добило секое од присутните лица?

66. Три девојки Ана, Маја и Александра, во шумата набрале 770 јаготки и одлучиле меѓусебно да ги поделат пропорционално со бројот на своите години. Секогаш кога Маја земала 4 јаготки, Ана земала по 3 јаготки, а на секои 6 јаготки кои ги земала Маја, Александра земала по 7 јаготки. Колку години има секоја од девојките, ако е познато дека тие заедно имаат 35 години? По колку јаготки добила секоја од нив?

67. Марија прочитала книга која има 480 страници така што секој ден таа читала еднаков број страници. Ако Марија секој ден читала по 16 страници повеќе, книгата ќе ја прочитала 5 дена порано. За колку дена Марија ја прочитала книгата?

68. Читајќи дневно еднаков број страници (освен последниот ден) Горјан прочитал книга од 264 страници. Ако тој читал дневно по 5 страници повеќе, тогаш книгата ќе ја прочитал 10 дена порано отколку во случај секој ден да читал по 5 страници помалку. Колку страници Горјан читал секој ден (освен последниот ден)?

69. Јане прочитал пет книги. Од петте книги може да се формираат 5 множества од по четири книги. Четирите книги од секое од овие множества имале заедно 913, 973, 873, 1011 и 1002 страни. По колку страни имала секоја од петте книги?

70. Во кутија се наоѓаат топчиња и коцки со црвена и зелена боја, при што топчињата се 48% од вкупниот број предмети во кутијата. Односот на бројот на црвените топчиња и бројот на зелените топчиња е еднаков на односот на сите црвени предмети и бројот на сите зелени предмети во кутијата. Определи го односот на бројот на црвените топчиња и бројот на црвените коцки во кутијата.

71. Меѓу учениците на едно училиште спроведена е анкета – кој сака да гледа фудбал и кој – кошарка. Се покажало дека 90% од љубителите на фудбал сакаат и кошарка, а 72% од љубителите на кошарка сакаат и фудбал. Од анкетираните ученици 10% не сакаат ниту фудбал, ниту кошарка. Колку проценти од анкетираните ученици сакаат само еден спорт? Кој е најмалиот можен број на анкетирани ученици?

72. Марко одгледува лубеници и дињи. Секоја лубеница ја продава по 80 денари, а секоја диња ја продава по 60 денари. За да купи жица за оградување на градината, Марко мора да го продаден четвртина од родот на лубениците и половина од родот на дињите. Истата сума пари може да ја заработи со продажба на дванаесеттина од родот на лубениците и три четвртини од родот на дињите. Колку лубеници и колку дињи има Марко во својата градина ако вкупната вредност на лубениците е за 1920 денари поголема од вкупната вредност на дињите?

73. Елена купила кујна што чинела 24000 денари. Таа платила 35% од вкупната цена. Остатокот требало да го плати на 24 еднакви месечни рати. Колку изнесува нејзината месечна рата?

74. По намалувањето на цената за 20%, за 800 денари може да се купи една тетратка повеќе отколку што можело за 900 денари да се купат тетратки пред намалување на цената. Определи ја цената на една тетратка пред намалување на цената.

75. Група пријатели поделиле определена сума пари така што првиот добил 10 евра и десеттина од остатокот, вториот добил 20 евра и десеттина од новиот остаток, третиот добил30 евра и десеттина од новиот остаток и така се додека не ја поделиле целата сума пари. На крајот се покажало дека сите добиле еднакви суми пари. Колку пријатели учествувале во поделбата на парите?

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Дадени се три тврдења:
   1) Бројот $n+29$ е точен квадрат на некој природен број.
   2) Бројот n има цифра на единици 8.
   3) Бројот $n-60$ е точен квадрат на некој природен број.

   Определи го бројот n ако се знае дека две од трите тврдења се точни, а едно не е точно.

2. Како со помош на садови од 3 литри и 5 литри во сад од 8 литри од чешма ќе туриш точно 7 литри вода?

3. Скакулците S_1, S_2, S_3 се наоѓаат на бројната оска во точките 1, 2, 3, соодветно. Секој скакулец скока преку еден од другите два скакулци така што доскокнува во точка која е централно симетрична со неговата положба во однос на скакулецот преку кој се изведува скокот. По неколку изведени скокови скакулците повторно се нашле во точките 1, 2, 3, но во редослед различен од претходниот. Докажи дека скакулците S_1 и S_3 меѓусебно ги замениле местата.

4. Во кутија се наоѓаат 10 бели, 20 црвени и 30 зелени топчиња. Определи го најмалиот број топчиња кои без гледање треба да се извлечат од кутијата за да сме сигурни дека имаме:
   а) три црвени топчиња,
   б) три топчиња од различна боја,
   в) три топчиња со иста боја.

5. На кружницата се земени девет точки и на секоја од нив во произволен распоред им е придружена по една од цифрите 1, 2, 3,..., 8, 9 така што секоја цифра е запишана само по еднаш. Секои три последователни цифри, гледано во насоката на движењето на часовникот, формираат по еден трицифрен број. Определи го збирот на вака добиените девет броеви? Дали овој збир зависи од распоредот на цифрите на кружницата?

6. Дадени се пет точки во рамнината такви што било кои три од нив не лежат на права. Докажи дека од нив може да се изберат четири така што да бидат темиња на конвексен четириаголник!

IV.2. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

7. На еден натпревар по математика биле зададени 5 задачи, а награда добивале оние ученици кои точно решиле најмалку две задачи. На натпреварот учествувале 32 ученика, а биле наградени 25% од учениците. Докажи дека меѓу зададените 5 задачи постои најмалку една задача која точно ја решиле најмногу 12 ученици.

8. Нека a,b,c се непарни природни броеви. Докажи дека барем еден од броевите $ab-1, bc-1, ac-1$ е делив со 4.

9. На првенство во фудбал во едно училиште учествуваат 8 екипи. Секоја екипа игра само по еден натпревар со секоја од останатите екипи. Докажи дека во секој момент за време на првенството, постојат барем две екипи кои дотогаш одиграле еднаков број на натпревари.

10. Докажи дека е можно од било кои 2014 природни броја да се изберат 35 броја така што разликата на секои два избрани броја да е делива со 59?

11. Во рамнината низ точката S минуваат 11 различни прави. Докажи дека меѓу аглите определени со овие 11 различни прави постојат најмалку два кои се помали од 17°.

12. Во внатрешноста на квадрат со страна 1 на произволен начин се распоредени 51 точка. Докажи дека постои круг со радиус помал од $\frac{1}{7}$, кој содржи најмалку три од дадените точки.

13. Даден е рамностран триаголник со должина на страна $31dm$, во кој на произволен начин се распоредени 1989 точки. Докажи дека постои круг со радиус $6cm$ во кој се наоѓаат најмалку три од дадените точки.

14. Даден е квадрат и 9 различни прави во неговата рамнина. Секоја од овие прави го дели квадратот на два трапези чии плоштини се одне-

суваат како $2:3$. Докажи дека меѓу дадените прави постојат три кои минуваат низ иста точка.

IV.3. ПРЕБРОЈУВАЊА

15. Определи го бројот на четирицифрените броеви чија прва цифра е парен број, втора цифра е прост број, трета цифра е непарен број и четврта цифра е сложен број.

16. Определи го бројот на петцифрените броеви кои може да се запишат со помош на цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6 такви што:
а) цифрите може да се повторуваат,
б) цифрите не може да се повторуваат,
в) цифрите може да се повотруваат, но бројот не е делив со 4.

17. а) Определи го бројот на шестцифрените броеви кои може да се запишат со помош на цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, такви што не мора да се користи секоја цифра.
б) Определи го бројот на шестцифрените броеви кои може да се запишат со помош на цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, такви што секоја цифра мора да се користи барем еднаш.

18. Колку петцифрени броеви постојат такви што првата цифра е парна, третата непарна, а последната прост број?

19. Колку парови природни броеви (x, y) постојат такви што
$$3x+8y=1996\,?$$

20. На една од две паралелни прави се земени 8 точки. Колку точки се земени на другата права, ако сите точки се темиња на вкупно 640 триаголници?

21. Во рамнината е даден конвексен четириаголник и во неговата внатрешност 1996 точки, такви што никои три од нив не лежат на иста права. Во произволен редослед поврзуваме по две точки со отсечки кои не се сечат меѓусебно. Оваа постапка ја продолжуваме се додека постои барем еден пар точки кој може да се поврзе со помош на отсечка која не сече ниту една од претходно повлечените отсечки. Колку отсечки кои не се сечат меѓусебно сме поврзале?

22. Дадени се 10 точки. Определи ги најголемиот број прави и најголемиот број рамнини определени со овие точки.

23. Дадени се разминувачки прави a и b, точките A_1, A_2, A_3 на правата a, точките B_1, B_2, B_3, B_4 на правата B и точка C надвор од овие прави. Определи го најголемиот број рамнини определени со овие точки.

24. На разминувачки прави p и q се дадени точките $A, B, C \in p$ и $D, E \in q$. Колку рамнини се определени до точките A, B, C, D, E, F ако точката F не припаѓа на ниту една од правите определени со точките A, B, C, D, E?

25. Дали постои многуаголник кој има
а) 1710 дијагонали б) 1988 дијагонали.
Колку страни има многуаголникот ако истиот постои?

26. Односот на бројот на дијагоналите и бројот на отсечките чии крајни точки се темињата на даден многуаголник е 0,8. Кој е тој многуаголник?

27. Бројот на темињата на многуаголникот P е за 3 поголем од бројот на темињата на многуаголникот M, додека бројот на сите дијагонали на многуаголникот P е три пати поголем од бројот на сите дијагонали на многуаголникот M. Определи го бројот на страните на многуаголниците P и M.

28. Ако бројот на страните на конвексен многуаголник се зголеми за 5, тогаш бројот на дијагоналите се зголемува за 100. Колку страни има тој многуаголник?

29. Ако бројот на страните на еден многуаголник се зголеми за 4, тогаш бројот на неговите дијагонали ќе се зголеми за 30. Кој е тој многуаголник?

30. Ако бројот на страните на конвексниот многуаголник се зголеми за 5, тогаш бројот на неговите дијагонали се зголемува за 45. Определи го бројот на страните на почетниот многуаголник.

31. Ако бројот на страните на конвексен многуаголник се зголеми за 5, тогаш бројот на неговите дијагонали се зголемува за 1990. Колку страни има многуаголникот со ова својство?

32. Дадени се n точки такви што никои четири од нив не лежат во една рамнина. Бројот на рамнините определен со овие точки е 35 пати поголем од бројот на точките. Колку прави се определени со овие точки?

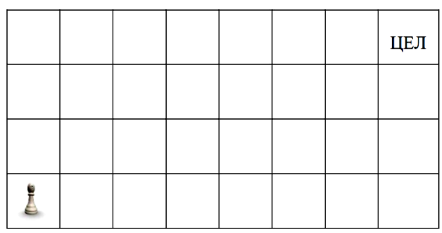
33. Дадени се n различни точки такви што не постојат четири точки кои лежат во иста рамнина. Определи го бројот на точките ако се знае дека дадените точки определуваат двапати повеќе различни рамнини отколку што определуваат различни прави.

34. На еден состанок на група луѓе требало секој со секого да се ракува. По 30 ракувања преостанало секој од присутните да се ракува уште по 16 пати. Колку луѓе биле на состанокот?

35. На една вечера пристигнале поранешни ученици од едно одделение. Сите мажи меѓусебно се ракувале, а сите жени меѓусебно се бациле (една со друга во образ), а секој маж по еднаш ја бацил раката на секоја жена. Колку лица биле на вечерата ако вкупно имало 78 ракувања и 288 бацувања?

36. Дваесет ученици кои учествувале на математичка олимпијада одлучиле меѓусебно да се испратат пораки и тоа секој од нив да прати порака на точно 10 од останатите ученици. Определи го најмалиот можен број заемни пораки, т.е. најди пример на распоред на праќање пораки во кој бројот на заемните пораки е најмал можен и докажи дека не е можно да се постигне помал број заемни пораки.
(За пораката меѓу учениците A и B велиме дека е заемна ако ученикот A му пратил порака на ученикот B и ученикот B му пратил порака на ученикот A.)

37. Фигурата на цртежот десно треба во повеќе потези да се поместува од полето на кое се наоѓа до целта. Во секој чекор фигурата може да се помести на соседно поле (соседни се полињата со заедничка страна) и тоа или надесно или нагоре. На колку различни начини фигурата мооже да се помести до целта?



38. На колку различни начини на шаховска табла може да се постават 8 топови така што тие меѓусебно нема да се напаѓаат?

39. Нека $ABCD$ е квадрат со должина на страната 10. Да се определи максималниот број точки, кои можат да бидат распоредени во внатрешноста на квадратот, така што секој квадрат со должина на страна 1 и страни, паралелни на страните на $ABCD$, да содржи (заклучно со неговата граница) најмногу 4 точки.

40. Во низа се запишани броевите $a_1, a_2, ..., a_8$. На почетокот $a_k = (-1)^k$, за $k = 1, 2, ..., 8$. Во еден чекор се избира некој k и оние од броевите a_{k-1} и a_{k+1}, кои постојат, се заменуваат со броевите $a_{k-1}a_k$ и $a_k a_{k+1}$. Ќе велиме дека ена низа е достижна ако може од почетната низа да се добие со помош на конечен број чекори. Определи го бројот на достижните низи.

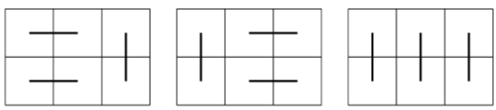
41. На кружница во насока на движењето на стрелките на часовникот се запишани сите природни броеви од 1 до 2000. Прво е пречкртан бројот 1, потоа бројот 16, па бројот 31 итн. секој петнаесетти број во иста насока. Кој број прв ќе биде пречкртан два пати? Колку броеви во тој момент останале непречкртани?

42. На колку начини продавач точно може да измери диња тешка $1,67\ kg$ ако има на располагање само тегови од $20\ g$ и $50\ g$?

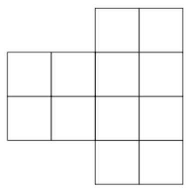
43. 650 топчиња со еднаков радиус се поделени на два дела. Од едниот дел е направена „права пирамида“ со основа квадрат, а од другиот дел е направена „права пирамида“ со основа рамностран триаголник. Двете „пирамиди“ во висина имаат еднаков број редови. По колку топчиња има во секоја „пирамида“?

IV.4. БОЕЊА, ПОКРИВАЊА И РАСЕКУВАЊА

44. Правоаголник 3×2 може да биде покриен со домина на 3 различни начини (цртеж десно).



На колку начини фигурата прикажана на цртежод десно може да биде покриена со домина?



45. Квадрат со плоштина $10\,dm^2$ поплочи го со 10 квадратни плочки со плоштина по $1\,dm^2$. Дозволено е некои од плочките со едно праволиниско сечење да се поделат на два еднакви делови.

46. Секоја од четирите страни на правилен тетраедар со помош на средните линии е поделена на четири рамнострани триаголници. За боење на тетраедарот се користат бела (Б), портокалова (П), црвена (Ц) и зелена (З) боја. Определи го бројот на различните боења на тетраедарот ако на секоја страна на тетраедарот се користат само по две бои, со секоја боја се обоени точно по четири триаголници и секои два триаголника со заедничка страна се обоени со различни бои?
(Страните на тетраедарот не се означени. Различни се боењата кои даваат различно обоен тетраедар независно од неговото вртење и превртување.)

47. Во квадратна мрежа се дадени два квадрати кои не се сечат и кои се составени од m^2 и n^2 единечни квадратчиња на мрежата, соодветно. Ако $m^2+n^2=2017$ докажи дека
а) такви квадрати постојат;
б) единичните квадратчиња на точно еден од двата квадрати можат да се обојат во црвена или сина боја така што секое квадратче има непарен број соседни квадратчиња обоени во истата боја. (Две единечни квадратчиња се соседни, ако имаат барем едно заедничко теме.

48. Дадена е коцка со должина на раб $13cm$. Подели ја дадената коцка на 1988 помали коцки чии рабови се со целобројни должини.

49. Коцка со раб $13cm$ е расечена на 1994 коцки со целобројни должини на рабовите. Определи ги димензиите на добиените коцки. Колку коцки има од секоја димензија?

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ЕЛЕМЕНТИ НА ТРИАГОЛНИК. СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

1. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle CAB=50^\circ$. Нека D е точка надвор од триаголникот таква што A и D се на различни страни од правата BC, при што важи $\measuredangle CBD=30^\circ$ и $\measuredangle BAD=20^\circ$. Определи го $\measuredangle BCD$.

2. Даден е триаголник ABC. Низ точката B повлекуваме права паралелна со страната AC. На оваа права избираме две точки X и Y така што X и A лежат во иста полурамнина определена со правата BC, а Y и C лежат во иста полурамнина определена со правата AB. За аглите $\measuredangle XBA, \measuredangle ABC$ и $\measuredangle YBC$ важи $\measuredangle XBA : \measuredangle ABC : \measuredangle YBC = 3:10:5$. Определи ги аглите на триаголникот ABC.

3. Даден е $\triangle ABC$ со симетрала на агол $AL\ (L\in BC)$. Точката $M\in AC$ е таква што $ML \| AB$. Нека β' е надворешниот агол при темето B на $\triangle ABC$ и $\measuredangle ACB:\beta' = 5:11$.

   а) Определи го односот $\measuredangle CAB : \measuredangle ACB$.

   б) Ако $\measuredangle ALB=80^\circ$, определи го $\measuredangle ALM$.

4. Даден е триаголник ABC така што $\measuredangle BAC=60^\circ$. Нека O е центар на опишаната кружница околу триаголникот, и нека D е произволна точка на лакот BC. Докажи дека $\measuredangle BOC+\measuredangle OCD=120^\circ$.

5. Определи ги аглите на $\triangle ABC$ кај кој центарот на опишаната и центарот на впишаната кружница се симетрични во однос на правата BC.

6. Триаголникот ABC е впишан во кружница k. Точката K е внатрешна за $\triangle ABC$ и лежи на симетралата на $\measuredangle BAC$. Правата CK по втор пат ја сече кружницата k во точката M. Кружницата k_1 која минува низ A и ја допира MC во точката K по втор пат ги сече отсечката

AB и кружницата k во точките P и Q, соодветно. Ако $\measuredangle ACQ = 20^\circ$ и $\measuredangle BCM = 30^\circ$, определи го $\measuredangle AKQ$.

7. Во остроаголниот $\triangle ABC$ ($\overline{BC} > \overline{AC}$) е дадена висината CE. Симетралата на надворешниот агол во темето C ја сече правата AB во точката D, така што $\overline{CD} = 2\overline{CE}$. Докажи дека $\alpha - \beta = 60^\circ$, каде α, β се аглите во темињата A, B, соодветно.

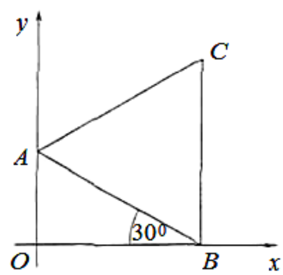
8. Даден е $\triangle ABC$ и точки M и N, соодветно на страните AC и BC такви што $\overline{CM} = \overline{CN}$. Нека O *е* пресечната точка на AN и BM. Ако $\overline{AO} = \overline{BO}$ и еден од аглите на триаголникот е еднаков на $40°$, определи ги другите два агли.

9. Даден произволен триаголник ABC. Нека P е пресечната точка на симетралата на аголот $\measuredangle BAC$ и правата која ги преполовува отсечките AC и BC. Докажи дека $\measuredangle APC$ е прав агол.

10. Даден е правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето C и агол во темето B еднаков на 20°. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече катетата BC во точка D, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече катетата AC во точка F. Од точките D и F повлечени се нормали на хипотенузата и тие хипотенузата ја сечат во точките M и N. Пресметај го $\measuredangle MCN$.

11. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\measuredangle BAC = 37^\circ$ и $\measuredangle ABC = 16^\circ$. На продолжението на страната BC е земена точка M таква што $\overline{AM} = \overline{AC}$, каде C е меѓу B и M, а во полурамнината во однос на правата BC, која не ја содржи A, е земена точка N така што $\measuredangle CBN = 2\measuredangle CMN = 37^\circ$. Определи ги:
а) $\measuredangle CNM$;
б) односот $\overline{AQ} : \overline{AC}$, каде Q е пресечната точка на правите AB и CN.

12. Во правоаголен координатен систем е нацртан рамностран триаголник ABC како на цртежот десно. Ако $\overline{AB} = a$, определи ги координатите на темињата на триаголникот ABC.



13. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C, таков што $\overline{BC} > \overline{AC}$. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето C кон хипотенузата AB. На помалиот лак BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ избрана е точка E таква што $\overline{CA} = \overline{CE}$. Правата AE ја сече висината CD во точката M, а страната BC ја сече во точката N. Докажи дека $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{MC}$.

14. Дадени се два рамнострани триаголници ABC и CDE кои се наоѓаат од иста страна на правата AE и имаат само една заедничка точка, точката C. Притоа точките A, C и D не се колинеарни, а исто така и точките B, C и E не се колинеарни . Нека M е средина на BD, N е средина на AC и нека K е средина на CE. Докажи дека $\triangle MNK$ е рамностран.

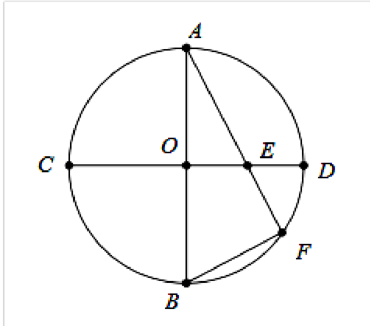
15. Нека M и N се средините на страните BC и AB на триаголникот ABC, соодветно и точката D лежи на страната BC . Докажи, дека ако $P = AD \cap MN$, тогаш $AP \perp BP$ ако и само ако AD е симетрала на аголот $\measuredangle CAB$.

16. Нека D е точка на страната на триаголникот ABC таква да правата AB е тангента во точката B на кружницата опишана околу триаголникот BCD и нека притоа важи $\overline{BD} = \overline{CD}$. Докажи дека правата BD е симетрала на аголот $\measuredangle CBA$.

17. Даден е триаголник ABC.
а) Ако $\measuredangle BAC$ е тап агол, определи ги сите точки M на страната BC такви што $\overline{AM} = \sqrt{\overline{BM} \cdot \overline{CM}}$.
б) За кој видови триаголници точката M од задачата под а) не може да се најде на ниту една од страните на траиголникот? Одговорот да се образложи!

18. Докажи дека кружницата чиј дијаметар е висината на рамностраниот триаголник ги сече неговите две страни во точки кои овие страни ги делат во однос $1:3$.

19. Даден е триаголникот ABC, $(BC < AB)$. Низ точката C е повлечена права l, нормална на симетралата BE на аголот $\measuredangle B$. Правата l ја сече BE во точка F, а тежишната линија BD во точка G. Да се докаже дека отсечката DF ја преполовува отсечката EG.

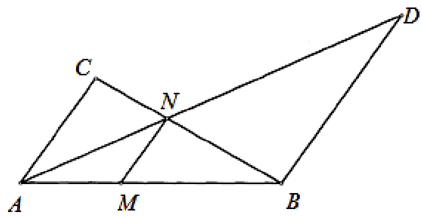


20. На цртежот десно, дијаметрите $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ се заемно нормални. Докажи дека $\triangle ABF \sim \triangle AEO$!

21. Отсечките BD и CE се висини на остроаголниот $\triangle ABC$. Докажи дека $\measuredangle ADE = \measuredangle ABC$.

22. Од точката A, која е $120\,m$ оддалечена од подножјето на вертикалната кула BC, врвот C се гледа под агол α. Од точката D, која е за $90\,m$ поблиску до подножјето на кулата B, врвот на кулата се гледа под агол $90^\circ - \alpha$. Определи ја висината на кулата BC.

23. Во рамнината се дадени точките A, B, C, D, M и N (цртеж десно) при што $AC \| MN \| BD$. Докажи дека $\frac{1}{MN} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BD}$.



24. Во триаголник ABC важи $\overline{AB} = 30\,mm$ и $\overline{AC} = 60\,mm$. Од точката D на страната AC е повлечена права која страната E ја сече во точка E така што важи $\measuredangle ADE = \measuredangle CBA$. Определи ги должините на отсечките AD и AE ако $\overline{AE} = \overline{AD} + 6\,mm$.

25. Два столба се високи $20\,m$ и $30\,m$. Со затегнато јаже врвот на секој столб е поврзан со дното на другиот столб. На која висина од подлогата се сечат двете јажиња ако столбовите се наоѓаат на растојание од $40\,m$?

26. Во рамнокрак триаголник со основа a и крак b аголот при основата е еднаков на 72°. Докажи дека $b = \sqrt{a(a+b)}$.

27. Во рамнокрак $\triangle ABC$ $(\overline{AC} = \overline{BC})$ важи $\overline{AB} = 10\,cm$ и $\measuredangle ACB = 36^\circ$. Определи ја должината на кракот на $\triangle ABC$.

28. Симетралата на аголот β во $\triangle ABC$ ја сече страната AC во точката D. Нормалата на BD низ средината M на отсечката BD ја сече правата AC во точката E. Докажи дека $\overline{AE} \cdot \overline{CE} = \overline{DE}^2$.

29. Во триаголникот ABC дадени се висините BD и CE ($B \in AC$, $E \in AB$). Докажи дека $\measuredangle ADE = \measuredangle ACE + \measuredangle CBD$.

30. Даден е триаголник ABC, $\overline{BC} = 12\,cm$, $\overline{AC} = 6\,cm$ и $\measuredangle ACB = 120^\circ$. Ако симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката D, определи ја должината на отсечката CD.

31. Во рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AC} = \overline{BC}$) аголот при врвот е еднаков на 108°. Докажи дека симетралата на аголот при основата AE е двапати подолга од висината CD.

32. За $\triangle ABC$ важи $\overline{AB} = 9\,dm, \overline{BC} = 6\,dm$ и $\measuredangle ABC = 120^\circ$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AC во точката D. Определи ја должината на отсечката BD.

33. На страната BC од рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AB} = \overline{BC}$) е избрана точка D таква што $\overline{BD} : \overline{DC} = 1:4$. Во кој однос правата AD ја дели висината BE сметајќи од темето B?

34. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle CAB = 2\measuredangle ABC$. Ако $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ се должините на страните на $\triangle ABC$, докажи дека
$$a^2 = b(b+c).$$

35. На правата p се земени точки C и D така што $\overline{CD} = 114$. Од иста страна на правата p се земени точки A и B такви што $AC \perp p$ и $BD \perp p$, при што $\overline{AC} = 13$ и $\overline{BD} = 65$. На отсечката CD избрана е точка P така што збирот $\overline{AP} + \overline{PB}$ е најмал можен. Определи ги должините на отсечките CP и PD?

36. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. На кракот AB земена е точка M, а на кракот AC земена е точка N така што правата MN не е паралелна со правата BC. Правата p која минува низ средината S на отсечката MN ги сече краците AB и AC во точките K и L, соодветно. Нека M_1 и N_1 се подножјата на нормалите повлечени од точките M и N кон правата p, соодветно. Ако $\overline{KL} = \overline{M_1N_1}$, докажи дека $p \parallel BC$.

37. Даден е рамнокрак триаголник ABC и точка M на основата AB. Права n која ја содржи точката M е нормална на основата AB и го сече кракот BC во точка N, а продолжението на кракот AC го сече во точка P. Докажи дека збирот $\overline{MN}+\overline{MP}$ не зависи од положбата на точката M.

38. Основата AB на рамнокрак триаголник ABC има должина $24cm$, а кракот има должина $20cm$. Определи го растојанието меѓу ортоцентарот H и тежиштето T на овој триаголник.

39. Нека ABC е рамнокрак правоаголен триаголник со прав агол во темето C, и нека D е подножјето на висината повлечена од C. Ако симетралата на аголот CAB ја сече висината CD во точката E, докажи дека $\overline{BC}+\overline{CE}=\overline{AB}$.

40. Низ темето A на $\triangle ABC$ е повлечена права која ја сече страната BC во точка M таква што $\overline{BM}:\overline{CM}=2016:2015$. Тежишната линија CC_1 ја сече правата AM во точка S. Определи го односот на должините на отсечките SC и CC_1.

41. Даден е рамностран триаголник ABC, при што $\overline{AB}=9cm$. Нека M е точка на страната AC, точката P е подножје на нормалата спуштена од M на AB, точката Q е подножје на нормалата спуштена од точката P на страната BC и нормалата спуштена од Q на AC ја сече AC во точката M. Пресметај ја должината на отсечката AM.

42. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и $\overline{AC}>\overline{BC}$. Нека D е средина на хипотенузата AB, а правата p минува низ D и е нормална на правата CD. Правата p ја сече правата BC во точката E, а отсечката AC ја сече во точката F. Докажи дека нормалата од темето C на хипотенузата AB ја полови отсечката EF.

43. Даден е триаголник ABC со остар агол $\measuredangle BAC$. На продолжението на страната AB преку темето A избрана е точка D таква што $\overline{AD}=\overline{AC}$. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од темето B на правата која минува низ точката D и е паралелна на правата AC, точката B_1 е подножјето на висината повлечена од темето B кон страната

AC и C_1 е подножјето на висината повлечена од темето C кон страната AB. Докажи дека $\overline{BE} = \overline{B_1B} + \overline{C_1C}$.

44. Над страните AB, BC и AC на рамностраниот триаголник ABC земени се соодветно точки M, N и P такви што $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{1}{2}$. На отсечката PM земена е точка Q таква што $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QM}} = \frac{1}{2}$. Определи ги аглите на триаголникот AQN.

45. Докажи дека во произволен правоаголен триаголник збирот на катетите е еднаков на збирот на дијаметрите на опишаната и впишаната кружница.

V.2. ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

46. Нека a и b се катетите, c е хипотенузата и h е визината повлечена кон хипотенузата во правоаголен триаголник. Докажи дека триаголникот чии страни се $a+b, h$ и $c+h$ исто така е правоаголен.

47. За природните броеви a,b,c,d важи
$$a+b=c \text{ и } a+d=2c.$$
Докажи, дека постои правоаголен триаголник со плоштина $abcd$ и чии должини на страни се изразени со природни броеви.

48. Од средината на едната катета на правоаголен триаголник е повлечена нормала на хипотенузата. Докажи дека разликата на квадратите на должините на отсечките што таа нормала ги формира на хипотенузата е еднаква на квадратот на должината на другата катета.

49. Даден е триаголник ABC и точка E на висината AD. Докажи дека
$$\overline{AC}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{EB}^2.$$

50. Во правоаголен $\triangle ABC$ на катетите AC и BC земени се точки M и N, соодветно. Докажи го равенството
$$\overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{AB}^2.$$

51. Ако a е должината на сновата, а b должината на кракот на рамнокрак триаголник со агол при врвот еднаков на 150°, докажи дека $a^2 = b^2(2+\sqrt{3})$.

52. Даден е $\triangle ABC$ со должини на страни $a=15\,cm, b=13\,cm$ и $c=14\,cm$. На страната AB земена е точка D таква што CD е висина на $\triangle ABC$. Точката E е средина на страната AB. Определи ја должината на отсечката DE.

53. Ако должината на катетата AC на правоаголниот $\triangle ABC$ ја намалиме за $3\,cm$, а должината на катетата BC ја зголемиме за $9\,cm$, добиваме правоаголен триаголник чија хипотенуза е еднаква на хипотенузата AB на $\triangle ABC$. Исто важи и ако должината на катетата AC ја намалиме за $20\,cm$, а должината на катетата BC ја зголемиме за $40\,cm$. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$.

54. Разликата на должините на катетите на правоаголниот триаголник е $6\,cm$, а должината на висината спуштена од темето на правиот агол е $8\,cm$. Пресметај ја должината на хипотенузата на триаголникот.

55. Во правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето C, односот на висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол е еднаков на $12:13$. Определи го односот на катетите на триаголникот $a:b$, ако $a>b$.

56. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle BCA = 90^\circ$ и $\measuredangle CAB = 15^\circ$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.

57. Во функција од катетите изрази го растојанието меѓу центрите на впишаната и опишаната кружница во правоаголен триаголник.

58. Определи го растојанието меѓу центрите на опишаната и впишаната кружница на правоаголен триаголник со катети $\overline{AC} = 4\,cm$ и $\overline{BC} = 3\,cm$.

59. На хипотенузата AB на правоаголниот $\triangle ABC$ се дадени точки P и Q такви што $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Нека $\overline{CQ} = y$ и $\overline{CP} = x$. Докажи дека $x^2 + y^2 = \frac{5}{9}c^2$.

60. Во правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C повлечена е висната CD. Во триаголниците ABC, ACD, BCD се впишани полукружници со радиуси r, r_1, r_2 и центри S, S_1, S_2, соодветно.

а) Докажи дека $r^2 = r_1^2 + r_2^2$

б) Пресметај ја должината на S_1S_2.

в) Докажи дека $S_1S_2 \perp CS$. .

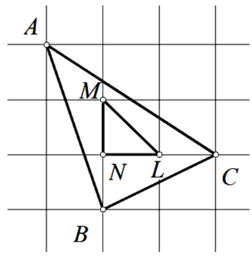
61. Нека симетралата на аголот α ја сече страната BC на триаголникот ABC во точката E. Ако важи равенството $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \sqrt{\frac{1}{BE^2} + \frac{1}{CE^2}}$, тогаш α е прав агол.

62. Во рамнокрак $\triangle ABC$, со теме A наспроти основата, е впишана кружница со радиус $16\,cm$. Во внатрешноста на овој триаголник нацртана е друга кружница со радиус r која ги допира краците на триаголникот и впишаната кружница. Должината на основата на $\triangle ABC$ е еднаква на $64\,cm$. Определи го радиусот r.

63. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB со должина $10\,cm$ и крак со должина $13\,cm$. Нека D е точка на страната BC таква што $\overline{BD} : \overline{DC} = 1:2$ и нека E е точка на CA таква што $\overline{CE} : \overline{EA} = 1:2$. Пресметај ја должината на отсечката DE.

64. Нека H е подножјето на висината на $\triangle ABC$ повлечена од темето C. Нека R и S се точките во кои опишаните кружници во $\triangle AHC$ и $\triangle BCH$ соодветно ја допираат страната CH. Ако $\overline{AB} = 2018$, $\overline{AC} = 2017$ и $\overline{BC} = 2016$, определи ја должината на отсечката RS.

65. Дали постои триаголник чии висини се еднакви на $2\,cm, 3\,cm$ и $4\,cm$?



66. Во квадратна мрежа сместени се два триаголници ABC и MNL (види цртеж). Најди го односот на плоштините на тие триаголници.

67. Во правоаголен триаголник висината над хипотенузата ја дели хипотенузата на два дела со должини 9 и 16. Одреди ги периметарот и плоштината на триаголникот.

68. Во правоаголен триаголник ABC должината на катетата BC е $12cm$, а на хипотенузата AB е $37cm$. На другата катета се наоѓа точка D така да $\overline{CD}:\overline{DA}=1:6$. Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголникот ABD.

69. На страната AB на триаголникот ABC дадена е точка D, а на страната AC точка E така да искршената линија DEB го дели триаголникот ABC на три триаголници со еднакви плоштини. Во кој однос точката D ја дели страната AB, а во кој однос точката E ја дели страната AC?

70. Во триаголникот ABC каде $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ABC$, симетралата на аголот $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точка D, така што $\overline{BD}=5\,cm$ и $\overline{DC}=4\,cm$. Пресметај го периметарот на овој триаголник.

71. Ако a и b се катетите и h е висината која соодветствува на хипотенузата на правоаголен триаголник, тогаш $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$. Докажи!

72. Должините на катетите на правоаголен $\triangle ABC$ се a и b. Симетралата на правиот агол во темето C ја сече хипотенузата во точката D. Определи ја должината на отсечката CD?

73. Даден е триаголник ABC. Ако страната AB се продолжи за $2\,cm$ преку темето A и за $3\,cm$ преку темето B, тогаш добиениот триаголник ќе има двапати поголема плоштина од почетниот триаголник. Ако во почетниот триаголник ABC висината над страната AB се продолжи преку темето C за $4\,cm$, повторно ќе се добие триаголник со двапати поголема плоштина од почетниот триаголник. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC.

74. На страната AB на рамностраниот триаголник ABC дадена е произволна точка M. Нека P и Q се подножја на висините повлечени од точката M кон страните AC и BC. Нека P_1 и Q_1 се подножјата на нормалите повлечени од точките P и Q кон страната AB. Докажи дека $\overline{P_1Q_1}=\frac{3}{4}\overline{AB}$.

75. Даден е четириаголник $ABCD$. Отсечката која ги сврзува средините на страните AB и CD, со дијагоналата AC е поделена на два еднакви дела.

Докажи дека $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ADC}$.

76. Нека P е плоштина, а R и r се радиуси на опишаната и впишаната кружница во правоаголен триаголник. Докажи дека $P = r^2 + 2Rr$.

77. Во правоаголен триаголник со хипотенуза c, острите агли се однесуваат како $1:5$. Изрази ја плоштината на триаголникот со помош на хипотенузата c.

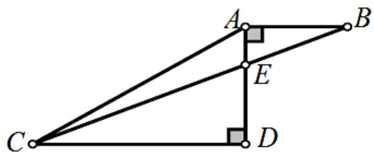
78. Во правоаголен $\triangle ABC$, со прав агол во темето C, впишан е квадрат $CDEF$, така што темето D лежи на катетата AC, темето F на катетата BC, а темето E на хипотенузата AB, при што $\overline{CE} = 4cm$. Должината на висината повлечена од темето C кон хипотенузата е еднаква на $3cm$. Определи ја плоштината на $\triangle ABC$.

79. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и должина на хипотенузата $c = 16\,cm$. Определи ја должината на висината повлечена кон хипотенузата на тој триаголник, ако должината на неговата тежишна линија повлечена од темето C е еднаква на $\sqrt{ab}$, каде a и b се должините на катетите на $\triangle ABC$.

80. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со катекати $\overline{AC} = 7$ и $\overline{BC} = 4$. Точката D припаѓа на хипотенузата AB, а точките M и N се тежиштата на триаголниците ADC и BCD, соодветно. Определи ја плоштината на $\triangle CMN$.

81. Во внатрешноста на рамностран $\triangle ABC$ земена е точка M која од страните на $\triangle ABC$ е оддалечена $1cm, 2\,cm$ и $3\,cm$. Определи ја плоштината на $\triangle ABC$.

82. Ако $\overline{AD} = 4\,cm$, $\overline{AB} = 3\,cm$, $\overline{CD} = 9\,cm$, определи ја плоштината на триаголникот AEC на цртежот десно.



83. Должините на страните на $\triangle ABC$ се природни броеви, а најмалата е $2\,cm$. Определи ја плоштината P на $\triangle ABC$ ако $h_c = h_a + h_b$, каде h_a, h_b, h_c се должините на висините соодветни на страните a, b, c.

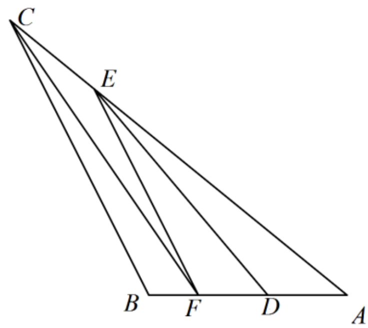
84. Во рамнокрак правоаголен триаголник е впишан ромб така што едното темена ромбот е теме на острит агол на правоаголниот триагол-

ник, а секое од останатите три темиња лежи на по една страна на триаголникот. Должината на страната на ромбот е еднаква на $3(\sqrt{2}-1)\,cm$. Определи го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.

85. Во остроаголен триаголник ABC висината од врвот C ја дели спротивната страна на два дела AD и DB со должини $\overline{AD}=3\,cm$ и $\overline{DB}=2\,cm$. Аголот при темето A изнесува 60°. Одреди ги должините на страните на триаголникот ABC како и должината на висината на триаголникот ABC спуштена од темето A.

86. Плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на $72\,cm^2$. Должината на страната AB е еднаква на $12\,cm$, а должината на тежишната линија повлечена од темето C е еднаква на $13\,cm$. Определи ги должините на другите две страни на $\triangle ABC$.

87. Триаголникот ABC е поделен со отсечките DE, EF и CF на четири триаголници чии плоштини се еднакви (цртеж десно). Определи го односот на $\overline{AF}:\overline{BD}$.



88. Во $\triangle ABC$ симетралата на $\measuredangle CAB$ ја сече страната BC во точката N, а симетралата на $\measuredangle CBA$ ја сече страната AC во точката P и важи $\overline{PN}=1$. Нека $Q=AN\cap BP$ и нека точката C припаѓа на кружницата која минува низ точките P,Q и N. Определи ја плоштината на $\triangle NPQ$.

89. Даден е правоаголен триаголник ABC со катетити $a=15\,cm$ и $b=20\,cm$. Во триаголникот ABC е впишана кружница, а во неа е впишан триаголник $A'B'C'$ кој е сличен на триаголникот ABC. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот $A'B'C'$.

90. Даден е рамнокрак триаголник со краци со должина $2\sqrt{2}\,cm$. Нека P е средината на висината повлечена кон основата на овој триаголник. Оддалеченоста на точката P до кракот е трипати помала од нејзината

оддалеченост до основата. Определи ја плоштината на овој триаголник.

91. Во триаголник ABC со должини на страни a,b,c впишани се три квадрати со должини на страни x,y,z, така што по две темиња на тие квадрати лежат на страните AB,BC,CA соодветно. Ако $x=y=z$, тогаш $a=b=c$. Докажи!

92. Пресметај го радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник со плоштина $480\,cm^2$ чии катети се однесуваат како $5:12$.

93. Даден е рамнокрак триаголник со основа $a=8\,cm$ и крак $b=5\,cm$. Пресметај го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.

94. Нека a,b,c се должините на страните на триаголникот ABC, $s=\frac{a+b+c}{2}$ и P е плоштината на триаголникот. Со помош на Питагоровата теорема докажи ја познатата Херонова формула за плоштината на триаголникот:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,. \tag{1}$$

95. Пресметај ја плоштината на триаголникот зададен со страните $a=25cm$, $b=39cm$ и $c=56cm$.

96. Пресметај ги радиусите на впишаната и опишаната кружница за $\triangle ABC$ зададен со страните $a=12cm$, $b=35cm$ и $c=37cm$.

V.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

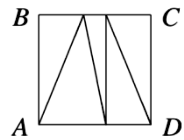
97. Нека даден е квадрат $ABCD$ и нека M и N се точки од страните AD и DC, соодветно такви што $\triangle BMN$ е рамностран. Докажи дека $AC \parallel MN$.

98. Даден е квадрат $ABCD$. Точката E е средина на страната BC. Ако F е точка на страната CD таква што EF е нормална на AE, докажи дека $\measuredangle EAB = \measuredangle FAE$.

99. Над хипотенузата во надворешноста на правоаголен триаголник со катети a и b е конструиран квадрат. Определи го растојанието од центарот на квадратот до темето на правиот агол на триаголникот.

100. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран триаголник ABK. Правите BK и AD се сечат во точка P. Докажи, дека должината на отсечката која ги поврзува средините на отсечките KD и CP е еднаква на половината од должината на страната на квадратот.

101. Во квадратот $ABCD$ со страна 1 ги поврзуваме A и D со искршена линија која ја допира страната BC двапати и страната AD еднаш (види цртеж). Определи ја должината на најкратката искршена линија.



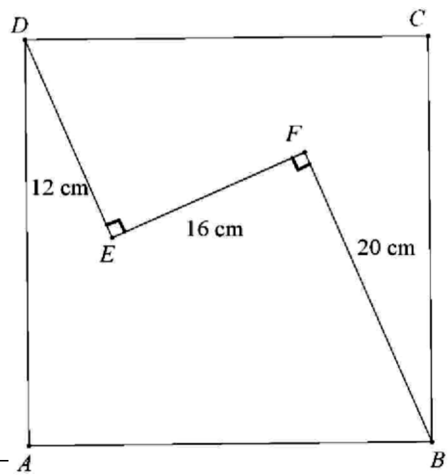
102. Даден е квадрат $ABCD$. Ако точката M е средина на страната AD, точката N е средина на страната CD, а точката P е пресек на отсечките BN и CM, тогаш $\overline{AP}=\overline{AB}$. Докажи!

103. Во темињата A, B и C на квадратот $ABCD$ повлекуваме три паралелни прави a, b и c, соодветно, така што b е меѓу a и c. Нека растојанието меѓу a и b е $5cm$, а меѓу b и c е $7cm$. Пресметај ја плоштината на квадратот.

104. Даден е квадрат $ABCD$ околу кој е опишана кружница. Конструирај нов квадрат $EFGH$ таков што темињата E и F лежат на страната AB, а темињата G и H на лакот AB на опишаната кружница. Определи го односот на плоштините на двата квадрата.

105. Даден е квадрат $ABCD$. Точките E,F,G,H ги делат страните на квадратот DA,AB,BC,CD, соодветно во однос $4:3$. Точките I,J,K,L се средини на страните на четириаголникот $EFGH$. Плоштината на четириаголникот $IJKL$ е еднаква на $200\,dm^2$. Определи ја плоштината на квадратот $ABCD$.

106. Определи го односот на плоштините на триаголникот ECF и квадратот $ABCD$, ако точката E е средина на страната AB и отсечката EF е нормална на дијагоналата AC.

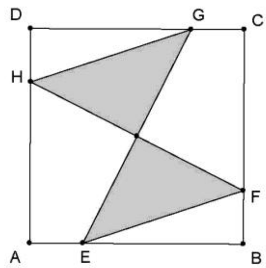


107. Пресметај ја плоштината на квадратот прикажан на цртежот десно.

108. Квадрат $ABCD$ има плоштина $80\,cm^2$. Точките E,F,G,H се наоѓаат на страните AB,BC,CD,DA, соодветно и важи

$$\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}.$$

Ако $\overline{BE}=3\overline{EA}$, определи ја плоштината на сивиот дел од фигурата прикажана на цртежот десно.



109. Во правоаголник $ABCD$ точката M е средина на отсечката AB, а точката E е пресек на дијагоналата AC и отсечката DM. Ако $\overline{AB}=2\sqrt{2}cm$ и $\overline{BC}=2cm$, докажи дека $\measuredangle CED=90^\circ$.

110. Во правоаголник $ABCD$ точката M припаѓа на страната CDE и важи $\overline{DM}=2\overline{CM}$. Правите AC и BM се сечат под прав агол и O е пресекот на дијагоналите на правоаголникот. Определи го $\measuredangle BOM$.

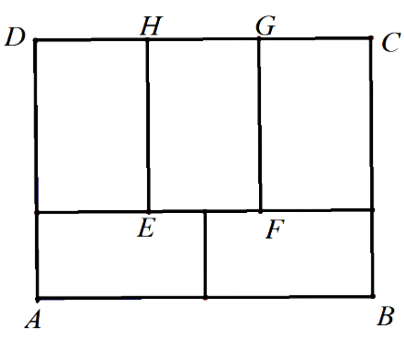
111. Даден е правоаголник $ABCD$ таков да $\overline{AB}=3\overline{BC}$. На страната AB дадена е точка P таква да $\overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AB}$. Докажи дека

$$\measuredangle CAB+\measuredangle CPB=45^\circ.$$

112. Во правоаголник $ABCD$, $\overline{AB}=10\,cm, \overline{BC}=5\,cm$ впишана е полукружница со дијаметар AB. Во кој однос полукружницата ја дели дијагоналата на правоаголникот?

113. Правоаголник со должини на страни $9\,cm$ и $16\,cm$ расечи го на два дела од кои може да се состави квадрат.

114. Даден е правоаголник $ABCD$ чија плоштина е $750cm^2$. Правоаголникот $ABCD$ е поделен на пет складни правоаголници (види цртеж). Смести го правоаголникот $ABCD$ во првиот квадрант на координатниот систем така што точката A е во координатниот почеток, а точката B лежи на апцисата. Опре-



дели ги координатите на темињата на правоаголникот $EFGH$.

115. Од правоаголникот $ABCD$ отсечен е квадрат $AEFG$ така што плоштината на новодобиениот многуаголник е $216\,cm^2$. Ако $\overline{EB}=0,8\,dm$, $\overline{GD}=6\,cm$, пресметај ја плоштината на квадратот $AEFG$?

116. Даден е правоаголник $ABCD$ и точка E на страната BC. Отсечката DE го дели правоаголникот $ABCD$ на два дела чии плоштини се однсуваат како $6:1$. Определи го односот $\overline{CE}:\overline{BE}$.

117. Од сите правоаголници со должина на дијагонала еднаква на 4 определи го оној кој има најголема плоштина.

118. Даден е правоаголник $ABCD$ со должини на страни $16cm$ и $12cm$. Симетралата на дијагоналата BD ги сече страните AB и CD во точките E и F соодветно. Пресметај ја должината на отсечката EF.

119. Нека е даден $\triangle ABC$ и нека AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишни линии во триаголникот кои се сечат во точка T и притоа важи $\overline{BA_1}=\overline{A_1T}$. На продолжението на CC_1 избираме точка C_2 таква што $\overline{C_1C_2}=\frac{\overline{CC_1}}{3}$, а на продолжението на BB_1 избираме точка B_2 таква што $\overline{B_1B_2}=\frac{\overline{BB_1}}{3}$. Докажи дека четириаголникот TB_2AC_2 е правоаголник.

120. Збирот на дијагоналите на еден ромб е еднаков на $8\,cm$, а неговата плоштина е еднаква на $7\,cm^2$. Определи го периметарот на ромбот?

121. Даден е ромб со остар агол еднаков на 30°. Докажи дека должината на неговата страна е геометриска средина од должините на неговите дијагонали.

122. Периметарот на еден ромб е еднаков на $68\,cm$, а неговите дијагонали се однесуваат како $15:8$. Определи ја плоштината на ромбот кој е сличен на дадениот и чија страна е со должина $34\,cm$.

123. Периметарот на ромбот е $52\,cm$, а периметарот на еден од триаголниците кој се добил со повлекување на дијагоналите е $30\,cm$. Определи ја плоштината на ромбот.

124. Даден е ромб $ABCD$ со остар агол 60°. Докажи, дека кружницата со центар во пресекот на дијагоналите и дијаметар еднаков на малата дијагонала ги полови страните на ромбот.

125. Пресметај ја плоштината на ромбот зададен со страни $a=13cm$ и дијагонала $d_2=10\,cm$.

126. На страните AB и CD на ромбот $ABCD$ се дадени точки M и N такви што $\overline{AM}:\overline{AB}=\overline{CN}:\overline{CD}=1:3$. Правата MN ги сече продолженијата на страните AD и BC во точките P и Q. Докажи дека пресекот на дијагоналите на ромбот лежи на правата MN и дека $\overline{MP}=\overline{MN}=\overline{NQ}$.

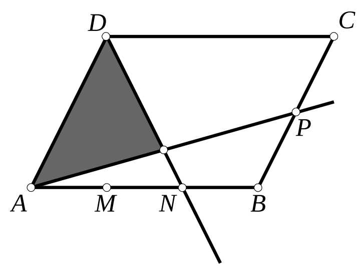
127. Отсечките AC и BD се две заемно нормални тетиви на кружница. Нормалата повлечена од точката A на правата CD ја сече правата BD во точката M, а нормалата од точката B на правата CD ја сече правата AC во точката N. Докажи дека четириаголникот $ABNM$ е ромб.

128. Нека a и b се должините на страните, а d_1 и d_2 се должините на дијагоналите на произволен паралелограм. Докажи дека

$$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2).$$

129. Даден паралелограм $ABCD$ со страна $\overline{AB}=a$ и агол $\measuredangle DAB=60^\circ$. Ако симетралата на аголот $\measuredangle DAB$ ја сече страната CD во точка E и важи $P_{ABCE}=2\cdot P_{\Delta AED}$, пресметај ја плоштинатана на паралелограмот $ABCD$.

130. Точките M и N ја делат страната AB од паралелограмот $ABCD$ на три еднакви дела. Точката P е средина на страната BC. Колкава е плоштината на осенчената површина на цртежот десно?



131. Даден е паралелограм $ABCD$ со плоштина 28. На страната BC е избрана точка M таква што $\overline{BM}:\overline{MC}=3:4$, а на продолжението на страната AD преку темето D е избрана точка N таква што $\overline{AD}:\overline{DN}=2:3$. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABMN$.

132. Две паралелни прави сечат дадена кружница во четири точки. Докажи дека овие точки се темиња на рамнокрак трапез.

133. Во трапезот $ABCD$ важи $AD \| BC$, $\measuredangle ABC = 60^\circ$, $\measuredangle BCD = 30^\circ$ и $\overline{BC} = 7$. Нека E, M, F, N се средини на страните AB, BC, CD, DA, соодветно и $\overline{MN} = 3$. Определи ја должината на отсечката EF.

134. Нека точката S е пресек на дијагоналите на трапезот $ABCD$ и нека правата која минува низ точката S и е паралелна на основите AB и CD ги сече краците на трапезот AD и BC во точките M и N, соодветно. Докажи, дека $\overline{SM} = \overline{SN}$.

135. Нека S е пресекот на дијагоналите AC и BD во трапезот $ABCD$. Низ точката S се повлечени прави паралелни со краците AD и BC, кои основата AB ја сечат во точките M и N, соодветно. Докажи дека $\overline{AM} = \overline{BN}$.

136. Докажи дека збирот на квадратите на дијагоналите на произволен трапез е еднаков на збирот на квадратите на краците зголемен за двојниот производ на основите.

137. Даден е $\triangle ABC$ и во неговата рамнина е дадена права p, која не го сече $\triangle ABC$. Ако A_1, B_1, C_1, T_1 се подножјата на нормалите повлечени од A, B, C, T на правата p, соодветно (T е тежиштето на $\triangle ABC$), докажи дека $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 3\overline{TT_1}$.

138. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со основи AB и CD. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката S и важи $\measuredangle ASB = 60^\circ$. Докажи дека средините на отсечките DS, AS и BC се темиња на рамностран триаголник.

139. Даден е трапез со заемно нормални дијагонали. Колкава е должината на средната линија на трапезот, ако должините на дијагоналите се $2{,}5\,cm$ и $6\,cm$.

140. Пресметај ја плоштината на трапез со основи $20\,cm$ и $11\,cm$ и краци $17\,cm$ и $10\,cm$.

141. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи $9\,cm$ и $3\,cm$ и крак $5\,cm$.

142. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со дијагонала $12cm$ и ако се знае дека аголот меѓу дијагоналата и поголемата основа е еднакво на 45°.

143. Пресметај ја плоштината на трапез со основи $19cm$ и $2cm$ и дијагонали $17cm$ и $10cm$.

144. Определи ја плоштината на рамнокрак трапез со заемно нормални дијагонали и чија средна линија има должина m.

145. Дијагоналата AC на рамнокракиот трапез $ABCD$ со основите зафаќа агол од 45° и важи $\overline{AC}=12\,cm$. Определи ја плоштината на трапезот $ABCD$.

146. Дијагоналата AC на трапезот $ABCD$ има должина $13\,cm$. За мерните броеви на втората дијагонала d и висината на трапезот v важи равенството $d^2+v^2-30d-24v+369=0$. Определи ја плоштината на трапезот $ABCD$.

147. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD. Низ средината M на кракот AD е повлечена нормала на правата BC и точката N е подножјето на таа нормала. Докажи, дека плоштината P на трапезот $ABCD$ е еднаква на $\overline{BC}\cdot\overline{MN}$.

148. Даден е трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB}=50\,cm$ и $\overline{CD}=30\,cm$. Основата CD е продолжена преку темето C до точка M. Определи ја должината на отсечката CM ако се знае дека отсечката AM го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини.

149. Должината на поголемата основа на рамнокрак трапез е еднаква на $44\,cm$, должината на кракот е еднаква на $17\,cm$ и должината на дијагоналата е еднаква на $39\,cm$. Определи ја плоштината на овој трапез.

150. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со основи AB и CD, $\overline{AD}=18\,cm$, $\measuredangle BAD=75^\circ$ и $\overline{AB}=2\overline{CD}$. Определи ја плоштината на трапезот.

151. Даден е трапез со должини на основите $10\,cm$ и $6\,cm$. Со три паралелни прави подели го трапезот на четири дела кои имаат еднакви плоштини.

152. Дијагоналите на произволен трапез го делат трапезот на четири триаголници. Плоштините на двата триаголника во кои основите на трапезот се страни се еднакви на $m\,cm^2$ и $n\,cm^2$. Определи ја плоштината на трапезот.

153. Во триаголникот ABC со должини на страни $a=20\,cm, b=13\,cm$ и $c=21\,cm$, точката M е подножје на најкратката висина. Нека N,P,Q се средините на страните AB,BC,CA на триаголникот ABC. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е рамнокрак трапез. Определи ја плоштината на трапезот $MNPQ$.

154. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$, ако: $\overline{AB}=20\,cm$, $\overline{BC}=7\,cm$, $\overline{CD}=13\,cm$, $\overline{DA}=4\,cm$ и $\overline{AC}=15\,cm$.

155. Пресметај ја плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали $d_1=6\,dm$ и $d_2=10\,cm$.

156. Пресметај ја плоштината на делтоидот со страни $17cm$ и $113cm$ една дијагонала $30cm$.

157. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ кај кој $\measuredangle ABD=50^\circ$, $\measuredangle ADB=80^\circ$, $\measuredangle ACB=40^\circ$, а $\measuredangle DBC$ е за 30° поголем од $\measuredangle BDC$. Определи го $\measuredangle DBC$.

158. Нека е даден конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $AD\perp BC$. Нека растојанието од средината на AB до средината на CD е $1cm$. Пресметај го растојанието од средината на AC до средината на BD.

159. Конвексен четириаголник $ABCD$ со дијагоналата AC е поделен на два триаголници со еднакви плоштини. Докажи дека AC ја преполовува BD.

160. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $AB\perp BC$, $AD\perp DC$, $\overline{BC}=14$ и $\overline{DC}=30$. Нека E е точка од дијагоналата AC

таква што $DE \perp AC$. Ако $\overline{DE} = 24$, определи ја должината на отсечката AB.

161. Во кружница е впишан конвексен четириаголник $ABCD$, $\overline{AB} = \overline{BC}$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката S. Определи ја должината на дијагоналата BD ако $\overline{AB} = 6\,cm$ и $\overline{BS} = 4\,cm$.

162. Во кружница со центар S е впишан четириаголник $ABCD$ со заемно нормални дијагонали. Докажи дека растојанието од центарот S до страната AB е еднакво на растојанието од центарот S до страната CD.

163. Во дадена кружница е впишан четириаголник $ABCD$ чии дијагонали се сечат во точката M и се заемно нормални. Низ точката M е повлечена права p нормална на страната AB. Докажи дека правата p ја полови страната CD.

164. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Ако O е пресекот на неговите дијагонали, докажи дека

$$P_{\triangle AOB} \cdot P_{\triangle COD} = P_{\triangle BOC} \cdot P_{\triangle DOA}.$$

165. Нека $ABCD$ е произволен четириаголник со плоштина 3. На страната AB дадени се точки M и N такви што $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NB}$, а на страната CD дадени се точки P и Q такви што $\overline{CP} = \overline{PQ} = \overline{QD}$. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ има плоштина 1.

166. Ако дијагоналите на конвексен четириаголник се сечат под агол од 30°, тогаш плоштината на тој четириаголник е еднаква на една четвртина од производот на должините на неговите дијагонали. Докажи!

167. Даден е правоаголен триаголник ABC. Од темето C на правиот агол повлечена е висина CD кон хипотенузата AB. Кружницата k, чиј дијаметар е CD, ги сече катетата AC во точка M и катетата BC во точка N. Тангентата на кружницата k во точката M ја сече хипотенузата AB во точка E, а тангентата на кружницата во точката N ја сече хипотенузата AB во точка F. Определи го односот на плоштината на четириаголникот $EFNM$ и плоштината на триаголникот ABC.

V.4. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

168. Конструирај кружница k која минува низ точката A е допира дадена кружница $k_1(O, r=2\,cm)$ во дадена точка B.

169. Дадени се кружница k со центар S, точка D на кружницата и права p која со k нема заеднички точки. Конструирај кружница која ги допира кружницата k во точката D и правата p.

170. Даден е триаголник ABC. Низ темето C, надвор од триаголникот ABC, а во рамнината на триаголникот, конструирај права p таква што бирот на нормалните растојанија од точките A и B до правата p е најголем можен.

171. Дадени се квадрати со должини на страни a и b. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на дадените квадрати.

172. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на $14cm^2$.

173. Во кружница $k(O,R)$ конструирај:

а) квадрат,

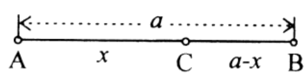
б) рамностран триаголник,

в) правилен шестаголник,

г) правилен осумаголник,

174. Конструирај геометриска средина на отсечки со должини a и b, $a>b$.

175. За точката C ќе велиме дека ја дели отсечката AB по златен пресек ако $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{CB}$ (цртеж десно). Ако ставиме $\overline{AB}=a, \overline{AC}=x$, тогаш имаме



$$a:x=x:(a-x) \text{ т.е } x=\sqrt{a(a-x)},$$

што значи дека при поделбата по златен пресек поголемиот дел е геометриска средина од целата отсечка и нејзиниот помал дел.

Отсечка со должина a подели ја по златен пресек.

176. Конструирај правилен десетаголник впишан во кружница со радиус r.

177. Во дадена полукружница со радиус r впиши квадрат.

178. Конструирај правоаголен триаголник ако се дадени висината h која соодветствува на хипотенузата и разликата на катетите m.

179. Конструирај правоаголен триаголник ако му се познати должините на хипотенузата c и на симетралата на правиот агол s.

180. Во квадрат со страна a впиши пет еднакви кружници така што четири од нив допираат по две страни на квадрато, а петтата ги допира преостанатите четири кружници.

181. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на разликата на плоштината на даден квадрат и даден правоаголник.

182. Нека a и b се должини на дадени отсечки. Конструирај отсечка со должина $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$.

183. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени $\overline{BC}=6\,cm$, $\measuredangle BAC=60^\circ$ и тежишната линија $\overline{CC_1}=t_c=4\,cm$.

184. Даден е кружница со центар O и дијаметар $\overline{AB}=4\,cm$. Нацртај три тангенти на оваа кружница, две во точките A и B, а трета во точка така што отсечокот CD меѓу првите две тангенти ќе биде еднаков на $5\,cm$.

185. Дадени се прави p и q и точка A. Конструирај рамностран триаголник $ABCD$ таков, што $B\in p$ и $C\in q$.

186. Конструирај квадрат $ABCD$ таков, што три негови темиња да лежат на три дадени паралелни прави.

187. Дадена е права p и точки A и B кои не припаѓаат на p и лежат во иста полурамнина определена со p. На правата p определи точка C таква, што збирот $\overline{AC}+\overline{BC}$ да биде најмал.

188. Конструирај квадрат, така што две негови спротивни темиња да лежат на дадена права p, а другите соодветно на две дадени кружници k_1 и k_2.

189. Дадени се точките O, M и N. Конструирај квадрат, така што точката O е пресек на неговите дијагонали, а точките M и N лежат на две негови спротивни страни.

190. Дадени се прави p и q и точка A која не лежи на правите. Низ точката A повлечи права a, така што A да биде средина на отсечката MN, каде што $M = a \cap p$ и $N = a \cap q$

V.4. ГЕОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

191. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. На основата AB избрани се точки D и E такви што $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$. Полуравите CD и CE го делат $\measuredangle ACB$ на три агли. Докажи дека $\measuredangle DCE$ е најголем од трите агли.

192. Даден е тангентен четириаголник со страни $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c,$ $\overline{DA} = d$ и дијагонала $\overline{AC} = e.$ Докажи дека $a + c > e.$

193. Точката D е пресек на симетралата на аголот BAC и страната BC на триаголникот ABC. АКо $\overline{AB} = 10cm$ и $\overline{AC} = 15\,cm$, докажи дека $\overline{AD} < 12\,cm$.

194. Во правоаголен триаголник катетите се со должина a и b, а должината на висината која соодветствува на хипотенузата е h_c. Докажи дека $h_c \leq \sqrt{\frac{ab}{2}}$.

195. Ако се v_a, v_b, v_c должините на висините на триаголникот ABC и ако $a < b$, тогаш важи $v_c < \frac{v_a v_b}{v_a - v_b}$. Докажи!

196. Нека се t_a и t_b тежишните линии во правоаголен триаголник со катети a и b. Докажи дека $\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b} < 2$.

197. Даден е $\triangle ABC$. На лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката A, земени се точки X и Y такви што $\measuredangle BAX = \measuredangle CAY$. Нека M е средината на тетивата AX. Докажи дека $\overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AY}$.

198. Во правоаголен триаголник со должини на катети $15cm$ и $20cm$ впишан е квадрат така што две негови темиња лежат на хипотенузата, а секое од останатите две темиња припаѓа на по една од катетите. Докажи дека плоштината на квадратот е поголема од $64cm^2$.

199. Даден е $\triangle ABC$ и точка M во неговата внатрешност. Докажи дека
$$\overline{AM}\cdot\overline{BC}+\overline{BM}\cdot\overline{AC}+\overline{CM}\cdot\overline{AB}\geq 4P \qquad (1)$$
каде P е плоштината на $\triangle ABC$.

200. Нека m е должината на средната линија, а h должината на висината на трапез чии дијагонали се заемно нормални. Докажи дека $m \geq h$. Кога важи знак за равенство?

201. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD и нека $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$, $\overline{AC}=m$ и $\overline{BD}=n$. Познато е дека $m^2+n^2=(a+c)^2$.
а) Докажи дека AC и BD се заедно нормални.
б) Докажи дека $ac<bd$.

202. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ с основи $\overline{AB}>\overline{CD}$. Нека O е пресекот на дијагоналите и $\measuredangle AOB=36°$. Симетралите на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle DCA$ ја сечат дијагоналата BD во точките K и N, соодветно. Висината на трапезот DH $(H\in AB)$ ја сече дијагоналата AC во нејзината средина P. На дијагоналата BD е земена точка M таква што $4\overline{PM}=\overline{KN}$. Докажи, дека:
а) $\overline{PM}=\overline{CD}$;
б) $\frac{4}{5}<P_{\triangle AHP}:P_{\triangle AHM}\leq 1$.

203. Нека кружниците k_1 и k_2 со центри во S_1 и S_2, соодветно се сечат во точките A и B. Права p која минува низ точката A по вторпат ги сече кружниците k_1 и k_2 во точките M_1 и M_2, соодветно. Докажи дека $\overline{M_1M_2}\leq 2\overline{S_1S_2}$. Кога важи знак за равенство.

V.6. КРУЖНИЦА И КРУГ

204. Дадена е полукружница со центар O и дијаметар AB. Нека се C и D точки од отсечката AB такви што $\overline{OC}=\overline{OD}$, а E и F точки од полукружницата такви што $CE \| DF$. Докажи дека отсечките CE и DF се нормални на EF.

205. Даден е остар агол α со теме во точката V. Во внатрешноста на аголот α земена е точка S која е центар на кружница k. Кружницата k го сече едниот крак на α во точките A и B, а другиот крак во точките C и D, така што точките B и D се поблиску до темето V од точките A и C. Докажи, дека $\measuredangle AVC=\frac{1}{2}(\measuredangle ASC-\measuredangle BSD)$.

206. Нека k е кружница над дијаметар BD, $\overline{BD}=12\,cm$ и нека A и C се точки на k на различни страни од правата BD. Ако $\measuredangle DBA=60^\circ$ и $\measuredangle DBC=45^\circ$,определи ја должината на тетивата AC

207. Две кружници со различни радиуси надворешно се допираат во точката A. Заедничката тангента на кружниците која не минува низ точката A ги допира кружниците во точките B и C. Определи го $\measuredangle BAC$.

208. Кружниците k_1 и k_2 со центри S_1 и S_2 се сечат во точките A и B. Права која минува низ точката B по втор пат ги сече кружниците k_1 и k_2 во точките C и D, соодветно. Докажи дека $\measuredangle CAS_1=\measuredangle DAS_2$.

209. Кружниците k_1 и k_2 со центри O_1 и O_2, соодветно се допираат однадвор во точката B. Права која минува низ точката B по втор пат ги сече кружниците k_1 и k_2 во точките A и C, соодветно. Докажи дека тангентите на овие кружници во точките A и C се паралелни.

210. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Правите p и q минуваат низ точката A и ги сечат кружниците k_1 и k_2во точките C,D и E,F ($C,E\in k_1$ и $D,F\in k_2$). Докажи дека $\measuredangle CBD=\measuredangle EBF$.

211. Две кружници со центри O_1 и O_2 имаат две заеднички точки Aи B. Права низ точката A, ги сече двете кружници во точките Mи N. Докажи дека $\measuredangle O_1MB=\measuredangle O_2NB$.

212. Нека AB и CD се тетиви на кружницата $k(O,r)$ кои под прав агол се сечат во точката S. Докажи дека
$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4(2r^2-\overline{OS}^2).$$

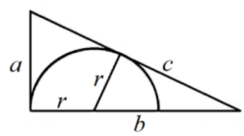
213. Дадена е кружница $k(S,r)$ и точка T надвор од неа. Од точката T е повлечена тангента на кружницата која кружницата ја допира во точката D. Нека T' е пресекот на нормалата повлечена од точката D на правата ST и правата ST. Докажи дека $\overline{ST}\cdot\overline{ST'}=r^2$.

214. Даден се кружница k и точка M надвор од неа. Низ точката M се повлечени секанта s и тангента t. Секантата s ја сече кружницата во точките A и B, а тангентата t ја допира кружницата во точката C. Определи ја должината на отсечката MC ако $\overline{MA}=4\,cm$ и $\overline{MB}=9\,cm$.

215. Дадени се кружница и во нејзината надворешност точка M. Низ точката M се повлечени прави s_1 и s_2 кои дадената кружница ја сечат во точките A и B, односно C и D. Ако $\overline{MA}=2\,cm$, $\overline{MB}=6\,cm$ и $\overline{MC}=3\,cm$, определи ја должината на отсечката CD.

216. Дадена е кружница k со дијаметар AB. Нека t е произволна тангента на k. Ако A' и B' се подножјата на нормалите повлечени од A и B кон t, соодветно, тогаш $\overline{AA'}+\overline{BB'}=\overline{AB}$. Докажи!

217. На цртежот е даден правоаголен триаголник со страни a,b,c. Во триаголникот е впишана полукружница со радиус r. Изрази го радиусот r со помош на страните a,b и c.



218. Во квадратот $ABCD$ над страната AB како над дијаметар е конструирана полукружница k. Потоа е конструиран кружниот лак $l=AC$ со центар во B. Нека P е произволна точка од лакот l, M е пресечната точка на отсечката BP и полукружницата k и N е подножјето на нормалата повлечена од P кон страната на квадратот AD. Докажи дека $\overline{MP}=\overline{NP}$.

219. Дадена се кружница $k(O,r)$ и нејзина тетива AB, која не е дијаметар. На тетивата е избрана произволна точка C. Со D да ја означиме

втората пресечна точка на кружницата k и опишаната кружница околу $\triangle OAC$. Докажи дека $\overline{CD}=\overline{BC}$

220. Во правоаголен $\triangle ABC$ висината CD повлечена кон хипотенузата ја дели хипотенузата на отсечки $\overline{AD}=32\,cm$ и $\overline{BD}=18\,cm$. Определи ја плоштината на кругот вписан во $\triangle ABC$.

221. Даден е рамнокрак триаголник со основа и соодветната висина еднакви на $8\,cm$. Определи ја плоштината на опишаниот круг околу овој триаголник.

222. Даден е рамнокрак трапез со основи $a=24\,cm$, $b=10\,cm$ и крак $c=13\sqrt{2}\,cm$. Пресметај ја плоштината на кругот опишан околу дадениот трапез?

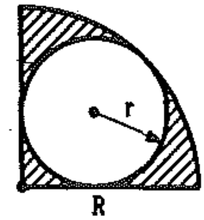
223. Околу рамнокрак трапез со основи $24\,cm$ и $10\,cm$, а висина еднаква на средната линија на трапезот, е опишан круг. Определи колку проценти од плоштината на кругот зафаќа трапезот.

224. Во кружница со радиус $R=10\,cm$ е вписан рамнокрак триаголник ABC со агол при врвот A еднаков на 45°. Определи ја плоштината на кружниот отсечок определен со основата BC и помалиот лак BC.

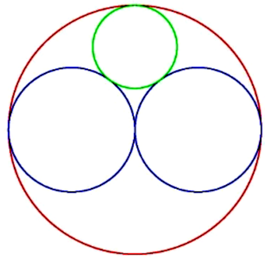
225. Даден е триаголник со должини на страни $13\,cm$, $20\,cm$ и $21\,cm$. Пресметај ја плоштината на делот од кругот опишан околу триаголникот, кој се наоѓа надвор од триаголникот.

226. Должините на соседните страни на еден правоаголник се $\sqrt{404}\,cm$ и $\sqrt{909}\,cm$. Најди ја плоштината на кругот и должината на кружницата која е опишана околу квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на дадениот правоаголник.

227. Во правоаголен исечок со радиус R вписан е круг со радиус r (цртеж десно). Изрази ја плоштината на штрафираниот дел на добиената фигура возависност од R.



228. Во рамнината се дадени четири кружници така што секоја од нив ги допира останатите три како на цртежот десно. Најголемата кружница има радиус 2, а секоја од средните кружници има радиус 1. Определи го радиусот на најмалата кружница.



229. Правоаголен триаголник има хипотенуза со должина $5cm$ и висина повлечена кон хипотенузата $2,4cm$. Познато е дека мерните броеви на катетите на триаголникот изразени во сантиметри се природни броеви. Над страните на триаголникот, во неговата надворешност се нацртани три полукруга. Определи ги плоштината и периметарот на добиената фигура.

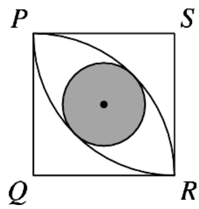
230. Во кружен исечок со големина на шестина на кругот впишан е нов круг. Определи го односот на плоштиние на кружниот исечок и кругот које впишан во него.

231. Даден е $\triangle ABC$ со должини на страни $\overline{AB}=14cm,$ $\overline{BC}=15cm$ и $\overline{CA}=13cm$ и кружница чиј центар припаѓа на страната AB и ги допира страните BC и CA. Определи ја плоштината на делот од триаголникот кој се наоѓа надвор од кружницата.

232. Должината на страната AB на триаголникот ABC е еднаква на $10cm$ и аголот наспроти неа е еднаков на 150°. Определи ја плоштината на опишаниот круг околу триаголникот ABC.

233. Во правоаголен триаголник должината на едната катета е $24cm$, а хипотенузата е за $16cm$ подолга од другата катета. Определи ги плоштината на овој триаголник и плоштината на кругот опишан околу него.

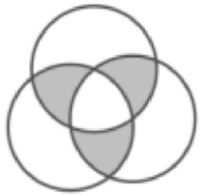
234. Две четвртини од кружници, чиј центри се во темињата S и Q на квадратот $PQRS$ со должина на страна 2 ги допираат страните на овој квадрат.
Во пресекот на двете четвртини кружници е нацртан круг со најголем можен радиус (цртеж десно). Определи ја плоштината на овој круг?



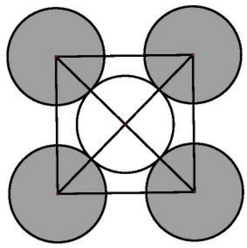
235. Даден е $\triangle ABC$ со должини на страни $a=15\,cm, b=13\,cm, c=14\,cm$. Нека точките D и E припаѓаат на страната AB и се такви што CD е висина, а CE е тежишна линија на $\triangle ABC$. Определи ја плоштината на кругот опишан околу $\triangle CDE$.

236. Дадена е кружница $k(O,r)$ и точка M во нејзината надворешност. Низ точката M е повлечена права s која кружницата ја сече во точките A и B. Определи ги периметарот и плоштината на кругот $k(O,r)$ ако $\overline{MA}=16\,cm, \overline{MB}=9\,cm$ и $\overline{MO}=13\,cm$.

237. Три кружници со радиус 2 cm се сечат во центрите, т.е. секои две кружници се сечат во центарот на третата кружница (види цртеж). Колкава е плоштината на делот обоен со сиво.

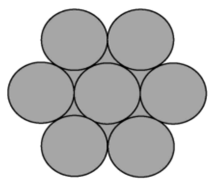


238. Пет складни кружници се допираат како што е прикажано на цртежот десно. Средините на надворешните кружници се темиња на квадрат. Определи го односот на збирот на плоштините на сивите кругови и плоштината на белиот дел од квадратот.

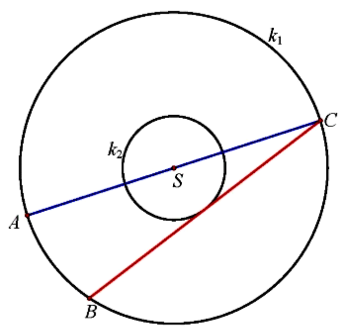


239. Два круга се сечат така што $\frac{6}{7}$ од поголемиот круг е надвор од помалиот круг, а $\frac{3}{4}$ од помалиот круг е надвор од поголемиот круг. Ако радиусот на поголемиот круг е $7\,cm$, определи ја плоштината на помалиот круг.

240. Седум кружници со радиус r се допираат како на цртежот десно. Определи ја плоштината на сивата фигура.



241. На цртежот десно се дадени две концентрични кружници k_1 и k_2. Должините на радиусите на овие кружници се однесуваат како $3:1$. Отсечката AC е дијаметар ба кружницата k_1, а отсечката BC е тетива на k_1 и е тангента на k_2. Ако $\overline{AB}=12\,cm$,

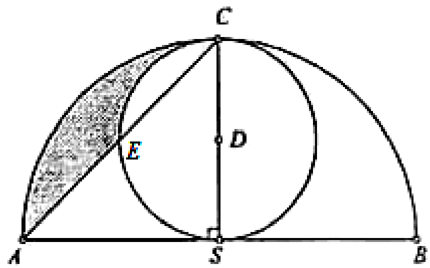


пресметај ја плоштината на прстенот определен со кружниците k_1 и k_2.

242. Од точката T се повлечени тангенти на кружница со радиус $4cm$. Определи ја должината на кружниот лак на кружницата кој се гледа од точката T, ако тангентите зафаќаат агол од 45°.

243. Во рамностран триаголник се впишани три кружници така што секоја допира по две страни од триаголникот и ја допира впишаната кружница k во триаголникот. Определи го односот на плоштината на впишаниот круг и збирот на плоштините на трите мали круга.

244. Дадена е отсечка AB со должина $16cm$. Над AB како над дијаметар е конструирана полукружница. Во полукружницата е впишана кружница со радиус $\overline{DS} = 4cm$, која полукружницата ја допира во точката C, а отсечката AB ја допира во нејзината средина S (цртеж десно). Потоа е повлечена тетивата AC. Докажи дека плоштината на сивиот дел на цртежот е еднаква на $(12\pi - 24)cm^2$.



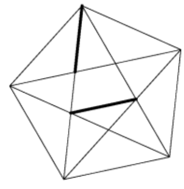
V.7. МНОГУАГОЛНИК

245. Нека $ABCDE$ е петаголник таков што

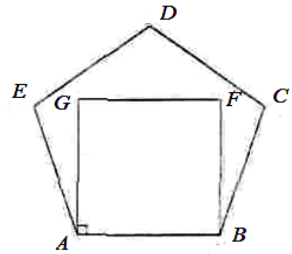
$$\overline{AB} = 4cm,\ \overline{BC} = 6cm,\ \overline{CD} = 8cm,\ \overline{DE} = 7cm \text{ и } \overline{EA} = 9cm.$$

Дали во овој петаголник може да се впише кружница? Одговорот да се образложи!

246. На цртежот е даден правилен петаголник во кој се повлечени дијагоналите. Докажи, дека задебелените отсечки имаат еднаква должина.



247. Во внатрешноста на правилниот петаголник $ABCDE$ е нацртан квадрат $ABFG$ (цртеж десно). Определи го $\measuredangle ACF$?

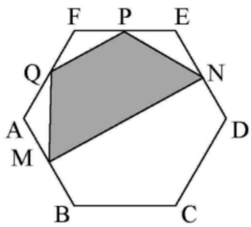


248. Внатрешните агли на два правилни многуаголници се донесуваат како $2:3$. Определи ги сите парови правилни многуаголници кои го имаат ова својство.

249. Даден е правилен многуаголник $A_1A_2A_3...A_n$ кај кој надворешниот агол е девет пати помал од внатрешниот агол. Определи го аголот меѓу дијагоналите A_1A_3 и A_1A_4 .

250. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Пресметај колкав дел од плоштината на шестаголникот е плоштината на триаголникот ACE.

251. На цртежот десно точките M,N,P,Q се средини на страните $AB,\ DE,EF,FA$ на правилниот шестаголник $ABCDEF$. Определи го односот на плоштините на шестаголникот $ABCDEF$ и четириаголникот $MNPQ$.



252. Даден е правилен шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Точките P_1 и P_2 се средини на страните A_4A_5 и A_3A_4 . Определи го односот на плоштините на триаголникот $P_1A_1P_2$ и правилниот шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

253. Радиусот на кружницата опишана околу правиален дванаесетаголник е $R=12\,cm$. Определи ја плоштината на овој дванаесетаголник.

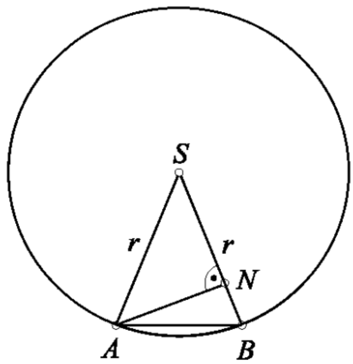
254. Определи ја плоштината на правилниот дванаесетаголник чија најкратка дијагонала е со должина $10\,cm$.

255. Должината на страната на правилен осумаголник е еднаква на $10\,cm$. Определи ја неговата плоштина.

256. Внатрешниот агол на еден правилен многуаголник е трипати поголем од надворешниот агол. Определи ги должините на сите дијагонали на овој многуаголник ако радиусот на опишаната кружница околу овој многуаголник е $R=10\,cm$.

257. Пресметај ја плоштината на правилен осумаголник впишан во кружница со радиус $16\,cm$.

258. Нека AB и BC се соседни страни на правилен деветаголник, точката L е средина на лакот BC, точката M е средина на отсечката AB и точката N е средина на отсечката OL, каде O е центарот на опишаната кружница околу деветаголникот. Докажи дека $\measuredangle OMN = 30^\circ$.



259. Во правиелн 100-аголник $A_1A_2...A_{100}$ дијагоналите A_2A_{100} и A_1A_3 се сечат во точката S. Определи го аголот $\measuredangle A_2SA_3$.

260. Должината на страната на правилен $2n-$аголник изрази ја како функција од должината на страната на правилен $n-$аголник, ако двата многуаголници се впишани во кружница со радису R.

V.8. СТЕРЕОМЕТРИЈА

261. Во внатрешноста на диедар со агол 120° избрана е точка P која е оддалечена по $4\,cm$ од двете страни на диедарот. Определи го најкраткото растојание на точката P до работ на диедарот.

262. Дадени се точките A и B кои се наоѓаат на различни страни на рамнината α и нивните нормални проекции A' и B' на рамнината α, соодветно. Ако $\overline{A'B'} = \overline{AA'} = 8\,cm$ и $\overline{BB'} = 7\,cm$, определи ја должината на отсечката AB.

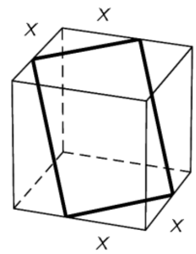
263. Темињата A, B и C на $\triangle ABC$ од рамнината α се оддалечени $24\,cm$, $30\,cm$ и $39\,cm$. Определи го растојанието на тежиштето T на $\triangle ABC$ до рамнината α.

264. Коцка $ABCDA'B'C'D'$ со должина на раб a пресечена е со рамнина π која ги содржи точките A, C и D'. Определи ја плоштината на пре-

секот на коцката со рамнината π. Определи ги волумените на деловите на кои рамнината π ја дели коцката.

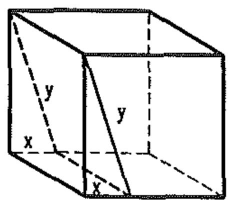
265. Должините на рабовите на едниот ѕид на квадарот се $a=3cm$ и $b=4cm$, а просторната дијагонал на квадарот со овој ѕид зафаќа агол од 60°. Определи ги плоштината и волуменот на овој квадар.

266. Дадена е коцка $ABCDEFGH$. За отсечката која го поврзува центарот S на основата $ABCD$ со темето E важи $\overline{SE}=\sqrt{6}\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на коцката.



267. На цртежот десно е даден правоаголник, чии темиња лежат на рабовите на коцка со должина на раб 1. За која вредност на x, овој правоаголник е квадрат?

268. Од коцка со раб $a=10cm$ отсечена е една нејзина третина, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ги должините на отсечките x и y. Колкава е плоштината на отсечениот дел.



269. Ако должината на работ на коцката се зголеми за 1, тогаш нејзиниот волумен се зголемува за 37. За колку се зголемила плоштината на коцката?

270. Од коцка со должина на раб $6cm$, со четири рамнини нормални на основата се отсечени четири еднакви тристрани призми, чии основи се рамнокраки триаголници. Остатокот од коцката е призма со основа правилен осумаголник. Определи ги волуменот и плоштината на добиената осумстрана призма.

271. Дадена е коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со раб $a=8cm$ (црт. 17). Да се конструира пресекот со рамнината која минува низ средината M на работ BB_1 и дијагоналата AC_1 на коцката и потоа да се пресмета неговата плоштина.

272. Даден е правоаголен паралелопипед $MNPQM'N'P'Q'$. Должините на рабовите MN, MQ и MM' се $20cm$, $15cm$ и $24cm$ соодветно. Да се најде плоштината на пресекот на рамнината која минува низ средините на рабовите MN, NP и темето Q'.

273. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$ со раб $a=10\,cm$. Докажи дека пресекот на коцката со рамнината која минува низ средините на рабовите AB, CC' и $A'D'$ е правилен шестаголник. Определи ја плоштината на овој пресек.

274. Основата на права четиристрана призма со висина $2\,dm$ е ромб со дијагонали $1\,dm$ и $24\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на призмата.

275. Плоштините на ѕидовите на квадар се 16, 20 и 45. Пресметај го волуменот на квадарот.

276. Односот на плоштините на ѕидовите на даден квадар е $2:3:5$. Определи го односот на рабовите на квадарот.

277. Волуменот на квадарот е еднаков на $192\,cm^3$. Определи ја плоштината на овој квадар, ако должините на неговите рабови се однесуваат како $2:3:4$.

278. Во базен во форма на квадар со основа $1{,}5\,m \times 4\,m$ и длабочина $2\,m$ турени се $4{,}5\,m^3$ вода.

а) За колку ќе се подигне нивото на водата во базенот ако во него ставиме метална коцна со раб $1\,m$?

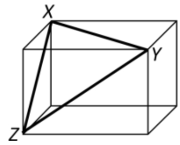
б) За колку ќе се подигне нивото на водата ако на дното на базенот спуштиме уште две такви коцки?

279. Основата на квадар е квадрат, а неговата висина е еднаква на $10\,cm$. Ако работ на основата на квадарот се зголеми за $3\,cm$, тогаш волуменот на квадарот ќе се зголеми за $210\,cm^3$. Определи ги плоштината и волуменот на овој квадар.

280. Ако должината на квадарот се зголеми за $\frac{1}{3}$, ширината се намали за 25%, а висината се намали за 15%, како ќе се промени неговиот волумен?

281. Мерните броеви на должините на рабовите на еден квадар, изразени во сантиметри, се три последователни природни броја. Еден од дијагоналните пресеци на квадарот е квадрат. Определи ги плоштината и волуменот на овој квадар.

282. Должините на страните на триаголникот XYZ се еднакви на $8cm$, $9cm$ и $\sqrt{55}cm$. Најди ја должината на дијагоналата на правоаголниот паралелопипед прикажан на цртежот десно.



283. Определи ги плоштината и волуменот на квадар кај кој должините на дијагоналите на трите негови ѕида се p,q и r.

284. Определи го волуменот на квадар кај кој растојанијата од точката на пресек на дијагоналите до рабовите се еднакви на $7cm, 8cm$ и $9cm$.

285. Определи ја плоштината на квадарот чија просторна дијагонала е $D=19,5cm$ и за неговите рабови a,b,c важи $a:b:c=3:4:12$.

286. Основата на права четиристрана призма е ромб со плоштина $\frac{2}{3}k^2$. Помалиот дијагонален пресек е квадрат со плоштина k^2.
а) Определи ги плоштината и волуменот на призмата.
б) Определи го k ако мерните броеви на плоштината и волуменот на примата се еднакви.

287. Основата на права призма е ромб со дијагонали $18cm$ и $24cm$. Пресметај го волуменот на призмата ако дијагоналата на бочниот ѕид е $17cm$.

288. Фабрика за стакло добивал нарачка да изработи стаклени чаши во форма на правилна шестстрана призма. Пресметај ја должината на основниот раб на призмата ако чашата треба да биде висока $20cm$ и да има волумен $300cm^3$.

289. Основата на коса призма $ANCDA'B'C'D'$ е квадрат со должина на страна $10cm$. Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата, ако нејзиниот бочен раб е $20cm$, бочната страна $ABB'A'$ е нормална на рамнината на основата, а бочната страна $ADD'A'$ со рамнината на основата зафаќа агол од 30°.

290. Бочните страни на права тристрана призма имаат плоштини $26cm^2$, $28cm^2$ и $30cm^2$. Определи го волуменот на призмата ако основата има плоштина $21cm^2$.

291. Основата на права призма е рамнокрак триаголник со основа a и агол при врвот од 120°. Определи го волуменот на призмата во функција од a ако плоштината на омотачот е двапати поголема од плоштината на основата.

292. Прав насип за пруга со должина $300\,m$ има нормален пресек во форма на трапез со основи $10\,m$ и $6m$ и висина $2{,}4\,m$. Колку кубни метри земја се потребни за оформување на насипот?

293. Правилна четиристрана призма со должина на раб при основата $k\,cm$ има висина со должина $3k\,cm$. Вертикална рамнина која со бочната страна формира агол од 60° ја дели призмата на два дела со еднакви волумени.
а) Определи ја плоштината на еден од добиените делови во функција од работ на основата на дадената призма.
б) Квадрат со страна $x\,cm$ има плоштина еднаква на плоштината на телото од задачата под а). Определи ја должината x.

294. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со раб $\overline{AA_1}=6\,cm$. Определи ги должините на отсечоците на просторната дијагонала AC_1 определени со проекциите на темињата на коцката врз дијагоналата AC_1.

295. Пресметај ја плоштината на права четиристрана призма чија основа е ромб со дијагонали $16\,cm$ и $1{,}2\,dm$ и висина $2\,dm$.

296. Основата на една права призма е ромб со плоштина $6cm^2$, плоштините на дијагоналните пресеци се $Q_1=21cm^2$ и $Q_2=28cm^2$. Пресметај ја плоштината *P* на призмата.

297. Пресметај ја плоштината на правилна шестстрана призма со основен раб $a=5cm$ и висина $h=12cm$.

298. Правилна шестстрана призма има висина $12\,dm$, а помалата дијагонала на основата е еднаква на $\sqrt{3}\,dm$. Определи ги плоштината и волуменот на оваа призма.

299. Дадена е правилна и права шестстрана призма $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ чија должина на работ на основата е $a=6\,cm$.

Определи ги плоштината и волуменот на тристраната призма $ABDA'B'D'$.

300. Надворешните димензии на една дрвена кутија со капак се: должина $30\,cm$, ширина $25\,cm$ и висина $2\,dm$. Дебелината на дрвото од кое е направена кутијата насекаде е $1\,cm$. Определи колку дрво е употребено за правење на кутијата.

301. При обработка на некоја дрвена греда во форма на квадар, должината се намалила за 2,5%, ширината за 7%, а висината за 3,2%. Колку проценти од гредата бил отпадот?

302. Коцка е направена од 125 залепени коцки со должина на раб $1\,cm$, а потоа од секој ѕид на коцката е извадена централната единечна коцка. За бојадисување на една единечна коцка е потребен $2{,}6\,g$ боја. Колку боја е потребна за бојадисување на вака добиеното тело?

303. Дадени се 2019 еднакви коцки со должина на раб $2\,cm$. Горјан коцките ги реди една до друга така што добиеното тело е паралелопипед. На колку различни начини може Горјан да ги нареди оцките и колкава е плоштината на секој од добиените паралелопипеди? Од паралелопипедот со помала плоштина Горјан извадил 334 коцки, така што добиеното тело има плоштина $24232\,cm^2$. Дади пример кои коцки може да ги отстрани Горјан.

304. Должините на страните на правоаголниот $\triangle ABC$ ($\measuredangle ACB = 90^\circ$) се

$$\overline{AC} = (3x+2)\,cm, \overline{BC} = (4x-2)\,cm \text{ и } \overline{AB} = 5x\,cm.$$

На хипотенузата AB се избрани точки M и N такви што

$$\overline{AM} : \overline{MN} : \overline{NB} = 3:5:2.$$

а) Определи ги должините на страните и висината повлечена кон хипотенузата во $\triangle ABC$.

б) Определи го волуменот на права шризма со основа $\triangle MNC$ и висина која е за 87,5% поголема од висината повлечена кон хипотенузата во $\triangle ABC$.

305. Основниот раб шестстрана пирамида е $a = 8\,cm$, а висината и е $H = 11\,cm$. Пресметај ги апотемата и бочниот раб на пирамидата.

306. Најди ја плоштината на дијагоналниот пресек на правилна четиристрана потсечена пирамида со должини на основите $40cm$ и $24cm$ и висина $16cm$.

307. Колу ќерамиди се потребни за покривање на една куќа чиј покрив има форма на правилна читиристрана пирамида со основен раб $8m$ и висина $3m$, ако за покривање на $1m^2$ се потребни 20 ќерамиди.

308. Основата на една пирамида е рамностран триаголник со страна a, а еден од бочните ѕидови е рамнокрак правоаголен триаголник чија рамнина е нормална на рамнината на основата. Пресметај ја бочната плоштина.

309. Рабовите AB, AC и AD на тристрана пирамида се заемно нормални. Определи го волуменот на пирамидата ако плоштините на ѕидовите ABC, ACD и ADB на пирамидата се $3cm^2, 4cm^2$ и $6cm^2$.

310. Да се пресмета плоштината на правилна тристрана потсечена пирамида со висина $h = 5cm$ и радиуси на опишаните кружници околу основите $R = 12cm$ и $R_1 = 6cm$.

311. Основните рабови на правилна четиристрана потсечена пирамида се $40cm$ и $10cm$. Пресметај ја висината на потсечената пирамида ако нејзината плоштина е $3400cm^2$.

312. Да се пресмета волуменот на правилна четристрана пирамида со основен раб $14cm$ и апотема $25cm$.

313. Една правилна четиристрана пирамида има плоштина $P = 800cm^2$ и бочна плоштина $M = 544cm^2$. Да се пресмета волуменот на пирамидата.

314. Два ѕида на тристрана пирамида се рамнострани триаголници со должина на страна a. Рамнините на овие триаголници се заемно нормални. Определи ги плоштината и волуменот на оваа пирамида.

315. Даден е правилен тетраедар со волумен $V = 18\sqrt{2}\,cm^3$. Определи ја плоштината на овој тетраедар.

316. Дадена е четиристрана пирамида $SABCD$ чии спротивни бочни страни SAB и SCD лежат во заемно нормални рамнини кои се нормални и на рамнината на основата $ABCD$. Ако $\overline{SA}=\overline{SD}=20\,cm$ и $\overline{SB}=\overline{SC}$ $=10\sqrt{2}\,cm$ и ако рабовите SA и SD со рамнината на основата зафаќаат агол од 30°, определи ги плоштината и волуменот на пирамидата $SABCD$.

317. Рамнините на бочните ѕидови на права тристрана пирамида се заемно нормални и имаат плоштини: $4\sqrt{105}\,cm^2, 16\sqrt{21}\,cm^2$ и $42\sqrt{5}\,cm^2$. Определи ги плоштината и волуменот на оваа пирамида.

318. Определи ги плоштината и волуменот на правилна тристрана пирамида чија страна е наклонета кон рамнината на основата под агол од 60°, а растојанието од тежиштето на основата до бочната страна е $3\,cm$.

319. Бочната страна на правилна тристрана пирамида е рамнокрак триаголник со агол при врвот од 30°. Должината на бочниот раб на пирамидата е $8\,cm$. Определи ја плоштината на оваа пирамида.

320. Плоштината на правилна тристрана пирамида е еднаква на $648\sqrt{3}\,cm^2$. Определи го волуменот на пирамидата ако нејзината висина е два пати подолга од основниот раб на пирамидата.

321. Оновата на права тристрана призма $ABCA_1B_1C_1$ е рамнокрак правоаголен триаголник ABC со катети $\overline{AB}=\overline{AC}=1\,cm$. Висината на призмата е $H=6\,cm$. Рамнината π ја содржи точката B и од рабовите AA_1 и BB_1 отсекува отсечки $\overline{AA'}=2\,cm$ и $\overline{CC'}=4\,cm$. Определи го волуменот на призмата на делот кој се наоѓа меѓу рамнината π и основата $A_1B_1C_1$.

322. Правоаголен триаголник чии катети се со должини $6\,cm$ и $8\,cm$ е основа на тристрана пирамида чии бочни ѕидови со основата формираат агли од 60°. Определи ги плоштината и волуменот на дадената пирамида.

323. Дијагоналниот пресек на правилна и права четиристрана пирамида е рамностран триаголник со плоштина $14\sqrt{3}\,cm^2$.

Определи ги плоштината и волуменот на пирамидата.

324. Нека P е точка од основата на права четиристрана пирамида. Нормалата n во точката P на рамнината на основата ги сече рамнините на бочните страни на пирамидата во точките M_1, M_2, M_3, M_4. Докажи дека за секоја точка P од основата важи

$$\overline{PM_1}+\overline{PM_2}+\overline{PM_3}+\overline{PM_4}=4H,$$

каде H е висината на пирамидата.

325. Едно теме на коцката и центрите на трите ѕидови на кои тоа теме им е заедничко се темиња на тристрана пирамида. Определи го волуменот на оваа пирамида, ако работ на коцката е a.

326. Пресметај го волуменот на тристрана пирамида чии бочни рабови се заемно нормални и имаат должини $12\,cm, 7\,cm$ и $13\,cm$.

327. Дадена е пирамида во која апотемите на бочните ѕидови се еднакви. Определи го аголот меѓу бочните ѕидови и рамнината на основата, ако плоштината на пирамидата е 1,5 пати поголема од плоштината на нејзиниот омотач.

328. Основата на четиристрана пирамида е рамнокрак трапез со основи $a=5\,cm$ и $b=3\,cm$ и краци $c=d=7\,cm$. Определи го волуменот на дадената пирамида ако висината на пирамидата паѓа во пресекот на дијагоналите на трапезот, а поголемиот бочен раб е еднаков на $13\,cm$.

329. Пресметај го волуменот на четиристрана пирамида со основа трапез со страни $a=5\,cm, b=3\,cm$ и $c=7\,cm$, $(a\parallel b)$, ако подножната точка на нејзината висина се совпаѓа со пресекот на дијагоналите на основата и поголемиот бочен раб е $s=10\,cm$.

330. Пресметај го волуменот на правилна потсечена четиристрана пирамида со основни рабови $a_1=7\,cm$, $a_2=5\,cm$ и дијагонала $D=9\,cm$.

331. Волуменот на правилна потсечена тристрана пирамида е $196\sqrt{3}cm^3$, едниот основен раб е $10cm$, а висината е $12cm$. Пресметај го вториот основен раб.

332. Тристрана потсечена пирамида со рамнина која минува низ еден од рабовите на помалата основа и е паралелна на спротивниот бочен раб

е поделена на два дела. Најди го односот на волумените на добиените полиедри ако се знае дека основните рабови на потсечената пирамида се однесуваат како $2:1$.

333. Висината на прав цилиндерот е $11cm$, а радиусот на основата е $10cm$. Пресметај ја плоштината на надолжен пресек кој од оската е оддалечен $8cm$.

334. Дијагоналата $D=24cm$ на оскиниот пресек на прав цилиндер со рамнината на основата зафаќа агол од 45°. Пресметај ја плоштината на цилиндерот.

335. Бочната површина на цилиндер е квадрат со страна a. Пресметај го неговиот волумен.

336. Пресметај го волуменот на водоводна цевка со должина $6m$, ако дијаметарот на надворешната површина е $3cm$, а дијаметарот на внатрешната површина е $2,4cm$.

337. Во прав конус со радиус на основата $r=10cm$ и висина $h=12cm$ е впишана коцка, така што еден ѕид на коцката да лежи на основата на конусот. Пресметај го волуменот на коцката.

338. Пресметај ја плоштината на оскиниот пресек на прав конус со радиус $r=10cm$, ако дијаметарот и генератрисата зафаќаат агол од 45°.

339. Висината на прав конус е $12cm$, а радиусот на основата е $5cm$. Пресметај ја неговата плоштина.

340. Правоаголен триаголник со катети $20\,cm$ и $15\,cm$ ротира околу права која минува низ темето на правиот агол и е паралелна со хипотенузата. Пресметај ги плоштината и волуменот на ротационото тело.

341. Плоштината на поголемата основа на прав потсечен конус е $144\pi\, cm^2$, а неговата висина е $8\,cm$. Пресметај ја неговата плоштина ако радиусите на основите се однесуваат како $2:1$.

342. Рамнокрак триаголник со основа $15\,cm$ и крак $17,5\,cm$ ротира околу права која минува низ едно теме на основата и е нормална на неа. Пресметај ги плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело.

343. Волуменот на потсечен конус е $56\pi cm^3$, а радиусот на едната основа е двапати поголем од радиусот на другата основа. Пресметај ја плоштината на потсечениот конус, ако се знае дека дијагоналите на неговиот оскин пресек се заемно нормални.

344. Околу полусвера со радиус r е опишан прав конус со висина H така што основата на полусферата и конусот се концентрични кругови. Определи го волуменот на конусот.

345. Дијагоналите на ѕидовите на квадарот се $15\,cm, \sqrt{481}\,cm$ и $\sqrt{544}\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на топката опишана околу овој квадар.

346. Плоштината на два паралелни пресека коишто се од иста страна од центарот на топката се $25\pi\,cm^2$ и $16\pi\,cm^2$. Да се пресмета плоштината на големиот круг, ако растојанието меѓу паралелните пресеци е $1cm$.

347. Радиусот на еден пресек на сферата е $60\,cm$, а висината на добиената калота е $25\,cm$. Пресметај ја плоштината на сферата.

348. Пресметај ја плоштината на топкин појас, ако радиусот на сферата е $65\,cm$ и ако радиусите на граничните кругови се $63\,cm$ и $60\,cm$.

349. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $360\,cm^2$, а работ на основата е $10cm$. Пресметај го волуменот на впишаната топка во пирамидата.

350. Во прав кружен конус аголот меѓу генератрисата и висината е 30°, а радиусот на основата е $5\sqrt{3}$. Пресметај го волуменот на впишаната топка во конусот.

351. Во топка со дијаметар $50\,mm$ треба да се издлаби цилиндричен отвор вдолж дијаметарот на топката. Пресметај го волуменот на делот од топката што останува, ако дијаметарот на цилиндричниот отвор е $30\,mm$.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I АЛГЕБРА

I.1. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$12345^2+12353^2-2\cdot 12349^2.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}12345^2+12353^2-2\cdot 12349^2&=12345^2-12349^2+12353^2-12349^2\\&=(12345-12349)\cdot(12345+12349)+(12353-12349)\cdot(12353-12349)\\&=-4\cdot 24694+4\cdot 24702=4\cdot(24702-24694)=4\cdot 8=32.\end{aligned}$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот

$$2019^2-2018^2+2017^2-2016^2+...+3^2-2^2+1^2.$$

Решение. Имаме

$$(2k+1)^2-(2k)^2=(2k+1-2k)(2k+1+2k)=2k+1+2k,$$

па затоа

$$\begin{aligned}2019^2-2018^2+2017^2-2016^2+...+3^2-2^2+1^2&=\\&=2019+2018+2017+2016+3+2+1\\&=\tfrac{2019\cdot(2019+1)}{2}=2019\cdot 1010=2039190.\end{aligned}$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(1^2+2^2+3^2+...+2017^2)-(1\cdot 3+2\cdot 4+...+2016\cdot 2018).$$

Решение. За секој природен број n важи $(n-1)(n+1)=n^2-1$. Со примена на последното равенство за $n=2,3,...,2017$ добиваме

$$\begin{aligned}&(1^2+2^2+3^2+...+2017^2)-(1\cdot 3+2\cdot 4+...+2016\cdot 2018)=\\&=(1^2+2^2+...+2017^2)-((2-1)(2+1)+\\&\quad+(3-1)(3+1)+...+(2017-1)(2017+1))\\&=(1^2+2^2+3^2+...+2017^2)-((2^2-1)+(3^2-1)+...+(2017^2-1)\\&=(1^2+2^2+3^2+...+2017^2)-(1^2+2^2+3^2+...+2017^2-2017)\\&=2017\end{aligned}$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот

$$1999^2-1997^2+1995^2-1993^2+...+3^2-1^2.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}&1999^2-1997^2+1995^2-1993^2+...+3^2-1^2=\\&=(1999-1997)(1999+1997)+(1995-1993)(1995+1993)+...+(3-1)(3+1)\\&=2\cdot(1999+1997+1995+1993+...+3+1)\\&=2\cdot((1999+1)+(1997+3)+...+(1001+999))\\&=2\cdot(\underbrace{2000+2000+...+2000}_{500})\\&=2\cdot 500\cdot 2000=2000000.\end{aligned}$$

5. Пресметај ја разликата $a-b$, каде

$$a=\tfrac{1^2}{1}+\tfrac{2^2}{3}+\tfrac{3^2}{5}+...+\tfrac{2016^2}{4031} \text{ и } b=\tfrac{1^2}{3}+\tfrac{2^2}{5}+\tfrac{3^2}{7}+...+\tfrac{2015^2}{4031}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}a-b&=\tfrac{1^2}{1}+\tfrac{2^2}{3}+\tfrac{3^2}{5}+...+\tfrac{2016^2}{4031}-(\tfrac{1^2}{3}+\tfrac{2^2}{5}+\tfrac{3^2}{7}+...+\tfrac{2015^2}{4031})\\&=1+\tfrac{2^2-1^2}{3}+\tfrac{3^2-2^2}{5}+...+\tfrac{2016^2-2015^2}{4031}\\&=1+\tfrac{(2-1)(2+1)}{3}+\tfrac{(3-2)(3+2)}{5}+...+\tfrac{(2016-2015)(2016+2015)}{4031}\\&=1+\tfrac{2+1}{3}+\tfrac{3+2}{5}+...+\tfrac{2016+2015}{4031}=1+1+1+...+1=2016,\end{aligned}$$

бидејќи бројот на единиците е еднаков на бројот на собирците во збирот a.

6. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ изразот $(n^2+n-7)(n^2+n-3)+4$ е квадрат на природен број.

Решение. Да означиме $n^2+n-7=m$. Тогаш $n^2+n-3=m+4$, па затоа

$$\begin{aligned}(n^2+n-7)(n^2+n-3)+4&=m(m+4)+4=m^2+4m+4=(m+2)^2\\&=(n^2+n-7+2)^2=(n^2+n-5)^2.\end{aligned}$$

7. Определи го збирот на сите природни броеви n за кои $\frac{2004-n}{99}$ е природен број.

Решение. Нека $\frac{2004-n}{99}=k$, каде $k\in\mathbb{N}$. Тогаш $n=2004-99k$, т.е. $99k$ е природен број помал од 2004. Најголемиот број за кој последното важи е 20. Значи, $k\in\{1,2,...,20\}$, а природните броеви се $2004-99k$, за $k=1,2,...,20$. Конечно, бараниот збир е

$$S=(2004-99\cdot 1)+(2004-99\cdot 2)+...+(2004-99\cdot 20)$$
$$=2004\cdot 20-99\cdot(1+2+...+20)=40080-99\cdot\frac{20\cdot 21}{2}=19290.$$

8. Дали за некој природен број n збирот $1+2+3+...+n$ може да завршува на цифрите 2019?

Решение. Ако збирот $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ завршува на цифрата 9, тогаш $n(n+1)$ завршува на цифрата 8. Но, производ на два последователни природни броја може да завршува на цифрите 0, 2 или 6, па затоа збирот $1+2+3+...+n$ не може да завршува на цифрата 9, односно на цифрите 2019. .

9. Ако $a^2=\underset{1990}{100..05}\cdot\underbrace{11...11}_{1991}+1$, определи го бројот a.

Решение. Имаме

$$a^2=\underset{1990}{100..05}\cdot\underbrace{11...11}_{1991}+1=a^2=(\underset{1991}{100..0}+5)\cdot\frac{1}{9}\cdot\underbrace{99...99}_{1991}+1$$
$$=\frac{1}{9}\cdot(10^{1991}+5)(10^{1991}-1)+1=\frac{1}{9}\cdot[(10^{1991})^2+4\cdot 10^{1991}+4]$$
$$=\frac{1}{9}\cdot(10^{1991}+2)^2=(\frac{10^{1991}+2}{3})^2.$$

Според тоа, $a=\frac{10^{1991}+2}{3}$ или $a=-\frac{10^{1991}+2}{3}$. Да забележиме дека

$$\frac{10^{1991}+2}{3}=\frac{1}{2}\cdot 1\underbrace{00...00}_{1990}2=\underbrace{33...33}_{1990}4\,.$$

10. Нека a е природен број запишан со 2016 цифри 1, а b е природен број запишан со 1008 цифри 2. Докажи дека $a-b$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Имаме:

$$a-b=\underbrace{111...11}_{2016}-\underbrace{222...22}_{1008}=\frac{1}{9}\underbrace{999...99}_{2016}-\frac{2}{9}\underbrace{999...99}_{1008}$$
$$=\frac{1}{9}(10^{2016}-1)-\frac{2}{9}(10^{1008}-1)$$
$$=\frac{1}{9}(10^{2016}-1-2\cdot 10^{1008}+2)$$
$$=\frac{1}{9}(10^{1008}-1)^2=(\frac{10^{1008}-1}{3})^2,$$

што и требаше да се докаже.

11. Ако меѓу секои две цифри на бројот 1331 допишеме по 2019 нули, се добива број кој е точен куб. Докажи!
Решение. Ако меѓу секои две цифри на бројот 1331 допишеме по 2019 нули, се добива бројот

$$1\underbrace{00\dots0}_{2019}3\underbrace{00\dots0}_{2019}3\underbrace{00\dots0}_{2019}1.$$

За овој број имаме

$$\begin{aligned}1\underbrace{00\dots0}_{2019}3\underbrace{00\dots0}_{2019}3\underbrace{00\dots0}_{2019}1 &= 10^{3\cdot2019+3}+3\cdot10^{2\cdot2019+2}+3\cdot10^{2019+1}+1\\ &=(10^{2019+1})^3+3\cdot(10^{2019+1})^2\cdot1+3\cdot10^{2019+1}\cdot1^2+1^3\\ &=(10^{2019+1}+1)^3\end{aligned}$$

12. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{[(5,2^2:2,6+8,1)^2-6,5^2]:0,025}{(60,192:2,4-1,08)^2-0,24\cdot1400}:0,125.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{[(5,2^2:2,6+8,1)^2-6,5^2]:0,025}{(60,192:2,4-1,08)^2-0,24\cdot1400}:0,125 &= \frac{[(5,2\cdot5,2:2,6+8,1)^2-6,5^2]:0,025}{(25,08-1,08)^2-0,24\cdot1400}:\frac{1}{8}\\ &=\frac{[(10,4+8,1)^2-6,5^2]:0,025}{24^2-0,24\cdot1400}:\frac{1}{8}\\ &=\frac{(18,5^2-6,5^2):\frac{1}{40}}{24(24-14)}:\frac{1}{8}\\ &=\frac{(18,5-6,5)(18,5+6,5)\cdot40}{240}\cdot8\\ &=\frac{12\cdot25\cdot40\cdot8}{240}=400.\end{aligned}$$

13. Периодичниот децинален број 0,818181... запиши го во бид на дропка.
Решение. Нека $a=0,818181...$. Тогаш $100a=81,818181...$, па затоа $100a-a=81,818181...-0,818181...=81$, односно

$$a=\frac{81}{100-1}=\frac{81}{99}=\frac{9}{11}.$$

14. Определи го бројот на цифри кои треба да се соберат во децималниот запис на бројот $\frac{11}{21}$ (почнувајќи од цифрата на десетинките) за да се добие збир 2016?
Решение. Имаме,

$$\frac{11}{21}=0,523809(523809).$$

Според тоа, збирот на цифрите во периодата на децималниот запис на дропката $\frac{11}{21}$ е $27=5+2+3+8+0+9$. Бидејќи $2016=27\cdot 74+18$, потребно е да собереме 74 групи од по 6 цифри во периодот и уште четири (5, 2, 3, 8) чиј збир е 18. Конечно, бројот на цифри кој треба да ги собереме е $74\cdot 6+4=448$.

15. Ако x,y се природни броеви за кои важи $x-y-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0$, пресметај ја вредноста на изразот $(\frac{x}{y})^{2018}+(\frac{y}{x})^{2018}$.

Решение. *Прв начин.* Ако даденото равенство го помножиме со xy добиваме $x^2y+x=xy^2+y$, т.е. $x(xy+1)=y(xy+1)$. Бидејќи броевите се природни следува дека $xy+1\neq 0$. Значи, $x=y$. Според тоа $(\frac{x}{y})^{2018}+(\frac{y}{x})^{2018}=2$.

Втор начин. Дадено равенство е еквивалентно на равенството $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{x}$, т.е. на равенството $\frac{xy+1}{y}=\frac{xy+1}{x}$. Бидејќи броевите се природни следува дека $xy+1\neq 0$. Значи, $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}$, односно $x=y$. Според тоа $(\frac{x}{y})^{2018}+(\frac{y}{x})^{2018}=2$.

Трет начин. Даденото равенство е еквивалентно на равенството $(x-y)+\frac{x-y}{xy}=0$, т.е. на равенството $(x-y)\frac{xy+1}{xy}=0$. Бидејќи броевите се природни следува дека $xy+1\neq 0$. Значи, $x=y$. Според тоа $(\frac{x}{y})^{2018}+(\frac{y}{x})^{2018}=2$.

16. Нека за реалните броеви a,b,c важи $(ab):(ac):(bc)=5:3:1$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{a^5b^2}{c^3}:\frac{a^3b^5}{c^4}$.

Решение. Имаме

$$\frac{a^5b^2}{c^3}:\frac{a^3b^5}{c^4}=\frac{a^5b^2}{c^3}\cdot\frac{c^4}{a^3b^5}=\frac{a^2c}{b^3}.$$

Од $(ab):(ac):(bc)=5:3:1$ следува

$$(ab):(ac)=5:3 \text{ и } (ac):(bc)=3:1,$$

па затоа $\frac{a}{b}=3$ и $\frac{c}{b}=\frac{3}{5}$. Според тоа,

$$\frac{a^5b^2}{c^3}:\frac{a^3b^5}{c^4}=\frac{a^2c}{b^3}=(\frac{a}{b})^2\frac{c}{b}=3^2\cdot\frac{3}{5}=\frac{27}{5}.$$

17. Ако $\frac{y}{x}=3$, пресметај ја вредноста на дропката $\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}$.

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2}}{\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}}=\frac{\frac{3y^2}{x^2}-\frac{2xy}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{xy}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{3(\frac{y}{x})^2-2\frac{y}{x}+1}{1+\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2}=\frac{3\cdot3^2-2\cdot3+1}{1+3+3^2}=\frac{22}{13}.$$

Втор начин. Ако $\frac{y}{x}=3$, тогаш $y=3x$. Имаме:

$$\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{3(3x)^2-2x(3x)+x^2}{x^2+x(3x)+(3x)^2}=\frac{27x^2-6x^2+x^2}{x^2+3x^2+9x^2}=\frac{22x^2}{13x^2}=\frac{22}{13}.$$

18. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x+2y}{x-2y}$, ако $x^2+4y^2=5xy$.

Решение. Имаме

$$(\frac{x+2y}{x-2y})^2=\frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-4xy+4y^2}=\frac{x^2+4y^2+4xy}{x^2+4y^2-4xy}=\frac{5xy+4xy}{5xy-4xy}=9,$$

па затоа $\frac{x+2y}{x-2y}=3$ или $\frac{x+2y}{x-2y}=-3$.

19. За различните реални броеви a,b,c е важи

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}=2.$$

Пресметај

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}.$$

Решение. Воведуваме смени

$$x=\frac{a}{b-c}, y=\frac{b}{c-a}, z=\frac{c}{a-b}.$$

Тогаш условот на задачата го добива обликот $x^2+y^2+z^2=2$, а збирот кој се бара е $x+y+z$. Да забележиме дека

$$x+1=\frac{a+b-c}{b-c}, y+1=\frac{b+c-a}{c-a}, z+1=\frac{c+a-b}{a-b} \text{ и}$$
$$x-1=\frac{a+c-b}{b-c}, y-1=\frac{b+a-c}{c-a}, z-1=\frac{c+b-a}{a-b}$$

од каде следува

$$(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1).$$

Последното равенство е еквивалентно со равенството $xy+yz+zx=-1$. Тогаш

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=2-2=0$$

од каде добиваме $x+y+z=0$.

20. Пресметај ја вредноста на изразот

$$1755\tfrac{23}{3571}\cdot 1754\tfrac{23}{3571}-1756\tfrac{23}{3571}\cdot 1753\tfrac{23}{3571}.$$

Решение. Да означиме $a=1755\frac{23}{3571}$. Тогаш дадениот израз е еднаков на

$$\begin{aligned}a(a-1)-(a+1)(a-2)&=a^2-a-(a^2-2a+a-2)\\&=a^2-a-a^2+2a-a+2=2.\end{aligned}$$

21. Производот од четири последователни броеви зголемен за 1 е точен квадрат на природен број. Докажи!

Решение. Да ги означиме броевите со $n, n+1, n+2, n+3$. Тогаш:

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2)(n+3)+1&=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\&=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1\\&=(n^2+3n+1)^2.\end{aligned}$$

22. Даден е изразот:

$$A=1\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}(3x-\tfrac{(3x+1)(1-3x)}{2})-\tfrac{1}{2}(-x-3)^2.$$

а) Запиши го изразот A во нормален вид.

б) Разложи го изразот A на множители.

в) Определи ја најмалата вредност на изразот A.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned}A&=1\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}(3x-\tfrac{(3x+1)(1-3x)}{2})-\tfrac{1}{2}(-x-3)^2=\tfrac{5}{3}+\tfrac{1}{3}(3x-\tfrac{1-9x^2}{2})-\tfrac{x^2+6x+9}{2}\\&=\tfrac{5}{3}+\tfrac{6x-1+9x^2}{6}-\tfrac{x^2+6x+9}{2}=x^2-2x-3.\end{aligned}$$

б) Имаме

$$A=x^2-2x-3=x^2+x-3x-3=x(x+1)-3(x+1)=(x+1)(x-3).$$

в) Од

$$x^2-2x-3=x^2-2x+1-4=(x-1)^2-4$$

следува дека најмалата вредност на A се достигнува за $x=1$ и таа е еднаква на -4.

23. Докажи дека полиномот x^2+x+1 е делител на полиномот x^8+x^4+1.

Решение. Полиномот x^8+x^4+1 можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}x^8+x^4+1&=x^8+2x^4+1-x^4=(x^4+1)^2-(x^2)^2\\&=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)\\&=(x^4+2x^2+1-x^2)(x^4-x^2+1)\\&=((x^2+1)^2-x^2)(x^4-x^2+1)\\&=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1).\end{aligned}$$

Според тоа

$$\frac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)}{x^2+x+1}=(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)\,.$$

24. Упрости го изразот

$$\frac{a^3-a^2x-ax^2+x^3}{a^3+a^2x-ax^2-x^3},\ a\neq\pm x\,.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{a^3-a^2x-ax^2+x^3}{a^3+a^2x-ax^2-x^3}&=\frac{a^3+x^3-(a^2x+ax^2)}{a^3-x^3+a^2x-ax^2}=\frac{(a+x)(a^2-ax+x^2)-ax(a+x)}{(a-x)(a^2+ax+x^2)+ax(a-x)}\\&=\frac{(a+x)(a^2-2ax+x^2)}{(a-x)(a^2+2ax+x^2)}=\frac{(a+x)(a-x)^2}{(a-x)(a+x)^2}=\frac{a-x}{a+x}.\end{aligned}$$

25. Ако $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, тогаш $a=b=c$. Докажи!

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca\\&2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ca\\&a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0\\&(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0,\end{aligned}$$

па како збир на квадрати на реални броеви е еднаков на 0 ако и само ако броевите се еднакви на нула од последното равенство следува $a-b=b-c=c-a=0$, односно $a=b=c$.

26. За реалните броеви a,b,c важи

$$a+b+c=1,\quad b^2+c^2+2bc+6a+3=0\,.$$

Определи ја вредноста на изразот $ab+ac$.

Решение. Прво второто равенство го запишуваме во видот

$$(b+c)^2+6a+3=0,$$

а потоа $b+c$ го заменуваме со $1-a$ и добиваме $(1-a)^2+6a+3=0$, односно $a^2+4a+4=0$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $(a+2)^2=0$, од каде наоѓаме $a=-2$, па затоа $b+c=3$. Конечно, $ab+ac=a(b+c)=-6$.

27. Ако a,b,c се реални броеви такви што $a+b+c=0$ и $abc=1988$, тогаш $a(a+b)(a+c)=1988$. Докажи!

Решение. Од $a+b+c=0$ следува $a+b=-c$ и $a+c=-b$. Затоа, ако искористиме дека $abc=1988$ добиваме

$$a(a+b)(a+c)=a(-c)(-b)=abc=1988.$$

28. За реалните броеви x и y важи $x+y=18$ и $x^2+y^2=170$. Кои вредности може да ги има изразот $x-y$?

Решение. Ако го квадрираме равенството $x+y=18$ и потоа го одземеме равенството $x^2+y^2=170$ добиваме $2xy=154$. Понатаму, ако равенството $2xy=154$ го одемеме од равенството $x^2+y^2=170$, добиваме $x^2-2xy+y^2=16$, т.е. $(x-y)^2=16$. Според тоа, $x-y=4$ или $x-y=-4$.

29. Ако $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1$, тогаш докажи дека $xy+yz+zx=0$.

Решение. Нека $k=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Тогаш $x=ka, y=kb, z=kc$ и

$$xy+yz+zx=ka\cdot kb+kb\cdot kc+kc\cdot ka=k^2(ab+bc+ca).$$

Од $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1$ добиваме

$$ab+bc+ca=\tfrac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]=0,$$

односно $xy+yz+zx=0$.

30. Ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=6$, пресметај ја вредноста на изразот $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

Решение. Од тоа што

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

и од условот на задачата имаме дека $ab+bc+ca=-3$. Ако ја искористиме уште еднаш формулата за трином на квадрат имаме

$$9=(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c).$$

Оттука,

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 9.$$

31. Докажи дека разликата на бројот запишан во декаден броен систем со 100 единици и на бројот запишан во декаден броен систем со 50 двојки е точен квадрат на природен број.

Решение. Имаме

$$\underbrace{11...11}_{100} - \underbrace{22...22}_{50} = \tfrac{1}{9}(10^{100}-1) - \tfrac{2}{9}(10^{50}-1) = \tfrac{1}{9}(10^{100}-1-2\cdot 10^{50}+1)$$

$$= \tfrac{1}{9}(10^{2\cdot 50} - 2\cdot 10^{50}+1) = \tfrac{1}{9}(10^{50}-1)^2 = (\tfrac{10^{50}-1}{3})^2.$$

32. Пресметај ја вредноста на изразот

а) $\sqrt{333^2+444^2}$,   б) $\sqrt{108^2+24^2+72^2}$.

Решение. а) Имаме:

$$\sqrt{333^2+444^2} = \sqrt{(3\cdot 111)^2 + (4\cdot 111)^2} = \sqrt{111^2(3^2+4)^2}$$

$$= \sqrt{111^2 \cdot 5^2} = 111\cdot 5 = 555.$$

б) Имаме:

$$\sqrt{108^2+24^2+72^2} = \sqrt{(12\cdot 9)^2 + (12\cdot 2)^2 + (12\cdot 6)^2} = \sqrt{12^2\cdot(9^2+2^2+6)^2}$$

$$= 12\sqrt{81+4+36} = 12\sqrt{121} = 12\cdot 11 = 132.$$

33. Докажи дека $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ е природен број.

Решение. Имаме

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} + \sqrt{4-4\sqrt{3}+3}$$

$$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$$

$$= 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4.$$

34. Докажи дека вредноста на изразот

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{5})(-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$$

е природен број.

Решение. Имаме:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{5})(-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})=(\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2)(\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2)$$
$$=(7-5)(5-3)=2\cdot 2=4.$$

35. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}).$$

Решение. Имаме

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})=$$
$$=[(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-\sqrt{5}^2]\cdot[(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-\sqrt{5}^2]$$
$$=(2+2\sqrt{6}+3-5)(2-2\sqrt{6}+3-5)$$
$$=2\sqrt{6}(-2\sqrt{6})=-4\cdot 6=-24.$$

36. Пресметај ја вредноста на изразот

$$2\sqrt{245}+\tfrac{1}{6}\sqrt{58^2-22^2}-30\sqrt{1,8}.$$

Решение. Имаме:

$$2\sqrt{245}+\tfrac{1}{6}\sqrt{58^2-22^2}-30\sqrt{1,8}=2\sqrt{49\cdot 5}+\frac{\sqrt{(58-22)(58+22)}}{6}-30\sqrt{\frac{18}{10}}$$
$$=14\sqrt{5}+\frac{\sqrt{36\cdot 80}}{6}-30\sqrt{\frac{9}{5}}$$
$$=14\sqrt{5}+\frac{6\sqrt{16\cdot 5}}{6}-\frac{30\cdot 3}{\sqrt{5}}$$
$$=14\sqrt{5}+4\sqrt{5}-\frac{90\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}$$
$$=14\sqrt{5}+4\sqrt{5}-\frac{90\sqrt{5}}{5}$$
$$=14\sqrt{5}+4\sqrt{5}-18\sqrt{5}=0$$

37. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\sqrt{144}\cdot\sqrt{14,4}}{\sqrt{0,144}\cdot\sqrt{1,44}}$.

Решение. Имаме

$$\frac{\sqrt{144}\cdot\sqrt{14,4}}{\sqrt{0,144}\cdot\sqrt{1,44}}=\frac{12\cdot\sqrt{14,4}}{\sqrt{0,144}\cdot 1,2}=10\cdot\sqrt{\frac{14,4}{0,144}}=10\cdot\sqrt{\frac{14400}{144}}$$
$$=10\cdot\sqrt{100}=10\cdot 10=100.$$

38. Рационализирај ја и скрати ја дропката: $\frac{8+2\sqrt{2}}{4+\sqrt{128}}$.

Решение. Имаме

$$\frac{8+2\sqrt{2}}{4+\sqrt{128}}=\frac{8+2\sqrt{2}}{4+8\sqrt{2}}=\frac{8+2\sqrt{2}}{4+8\sqrt{2}}\cdot\frac{8\sqrt{2}-4}{8\sqrt{2}-4}=\frac{64\sqrt{2}+32-32-8\sqrt{2}}{(8\sqrt{2})^2-4^2}=\frac{56\sqrt{2}}{112}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

39. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{7}{2\sqrt{2}+1}-(11-5\sqrt{5})(2+\sqrt{5}).$$

Решение. Имаме

$$\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{7}{2\sqrt{2}+1}-(11-5\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=\sqrt{5}-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1+3-\sqrt{5}=2.$$

40. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}-\frac{\sqrt{5,5}-\sqrt{7,5}}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}-\frac{\sqrt{5,5}-\sqrt{7,5}}{\sqrt{2}}=\\&=\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{15}-\sqrt{13}}{\sqrt{15}-\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}-\frac{\sqrt{5,5}-\sqrt{7,5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{13}}{2}+\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{2}-\frac{\sqrt{11}-\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}.\end{aligned}$$

41. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\left(\frac{3}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}+\frac{3}{\sqrt{17}+\sqrt{14}}-\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^2.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}&\left(\frac{3}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}+\frac{3}{\sqrt{17}+\sqrt{14}}-\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^2=\\&=\left(\frac{3(\sqrt{14}+\sqrt{11})}{(\sqrt{14}-\sqrt{11})(\sqrt{14}+\sqrt{11})}+\frac{3(\sqrt{17}-\sqrt{14})}{(\sqrt{17}+\sqrt{14})(\sqrt{17}-\sqrt{14})}-\sqrt{11}\right)^2\\&=\left(\frac{3(\sqrt{14}+\sqrt{11})}{14-11}+\frac{3(\sqrt{17}-\sqrt{14})}{17-14}-\sqrt{11}\right)^2\\&=(\sqrt{14}+\sqrt{11}+\sqrt{17}-\sqrt{14}-\sqrt{11})^2=(\sqrt{17})^2=17.\end{aligned}$$

42. Спореди ги дропките

$$\frac{\frac{1}{6}-(23\frac{1}{8}-19\frac{5}{12}):17,8}{0,6:4,2-\frac{2}{7}}\quad\text{и}\quad\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+\sqrt{72}}{32}.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{\frac{1}{6}-(23\frac{1}{8}-19\frac{5}{12}):17,8}{0,6:4,2-\frac{2}{7}}=\frac{\frac{1}{6}-(\frac{185}{8}-\frac{233}{12}):\frac{178}{10}}{\frac{6}{10}:\frac{42}{10}-\frac{2}{7}}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{555-466}{24}\cdot\frac{10}{178}}{\frac{6}{10}\cdot\frac{10}{42}-\frac{2}{7}}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{89}{24}\cdot\frac{10}{178}}{\frac{1}{7}-\frac{2}{7}}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{5}{24}}{-\frac{1}{7}}=\frac{7}{27}$$

и

$$\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+\sqrt{72}}{32}=\frac{6-2\sqrt{18}+3+6\sqrt{2}}{32}=\frac{9-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{32}=\frac{9}{32}.$$

Сега од $7\cdot 32=224>216=9\cdot 24$ следува $\frac{7}{27}>\frac{9}{32}$, па затоа

$$\frac{\frac{1}{6}-(23\frac{1}{8}-19\frac{5}{12}):17,8}{0,6:4,2-\frac{2}{7}}>\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+\sqrt{72}}{32}.$$

43. Определи ја вредноста на изразот:

$$\frac{1}{3240}[\frac{1250^2-950^2-1900\cdot 1250}{10\sqrt{275^2-225^2}}]^2.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{3240}[\frac{1250^2-950^2-1900\cdot 1250}{10\sqrt{275^2-225^2}}]^2=\frac{1}{3240}[\frac{(1250-950)^2}{10\sqrt{(275-225)(275+225)}}]^2$$

$$=\frac{1}{3240}[\frac{300^2}{10\sqrt{50\cdot 500}}]^2=\frac{1}{3240}[\frac{300^2}{10\sqrt{50^2\cdot 10}}]^2$$

$$=\frac{1}{3^4\cdot 2^2\cdot 10}\cdot\frac{300^4}{10^2\cdot 50^2\cdot 10}=\frac{1}{3^4}\frac{3^4\cdot 100^4}{10^4\cdot 5^2\cdot 2^2\cdot 10^2}$$

$$=\frac{100^4}{10^4\cdot 10^4}=\frac{100^4}{100^4}=1.$$

44. Определи ја вредноста на изразот:

$$[\frac{\sqrt{340^2-160^2}+\sqrt{650^2-250^2}}{(1000^2-1000\cdot 1940+970^2)(1000^2-1000\cdot 1998+999^2)}]^{2014}.$$

Решение. Имаме

$$[\frac{\sqrt{340^2-160^2}+\sqrt{650^2-250^2}}{(1000^2-1000\cdot 1940+970^2)(1000^2-1000\cdot 1998+999^2)}]^{2014}=$$

$$=[\frac{\sqrt{500\cdot 180}+\sqrt{900\cdot 400}}{(1000-970)^2(1000-999)^2}]^{2014}$$

$$=[\frac{\sqrt{90000}+\sqrt{360000}}{30^2\cdot 1^2}]^{2014}$$

$$=(\frac{300+600}{900})^{2014}=1^{2014}=1.$$

45. Упрости го изразот

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}.$$

Решение.

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+(\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})(1+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$

46. Докажи дека
$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=\sqrt{3}\,.$$

Решение. Левата страна на равенството кое треба да го докажеме е еднаква на
$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{4}-1)}=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt[3]{2}\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}$$
$$=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}(\sqrt[3]{2}+1).$$

Според тоа,
$$(\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}})^2=(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{2}+1)^2=(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1)$$
$$=\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}-1=2\cdot 2-1=3.$$

Последното равенство го коренуваме и го добиваме бараното равенство.

47. Ако $a+b=3$ и $ab=2$ докажи дека $a^4+b^4=17$.

Решение. Имаме, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\cdot 2=5$. Според тоа,
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$$
$$=5^2-2\cdot 2^2=25-8=17.$$

48. а) Пресметај ја вредноста на изразот $2a^2+3ab+a+b^2+b$ ако $2a+b=-1$.

б) Пресметај ја вредноста на изразот x^6+y^6 ако $x^2+y^2=20$ и $x+y=2$.

Решение. а) Имаме
$$2a^2+3ab+a+b^2+b=a(2a+b+1)+b(2a+b+1)=(a+b)(2a+b+1)$$
и како $2a+b=-1$ добиваме $2a^2+3ab+a+b^2+b=(a+b)(-1+1)=0$.

б) Имаме
$$x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$$
$$=(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3(xy)^2].$$

Понатаму, $xy=\frac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]=\frac{1}{2}(4-20)=-8$, па затоа

$$x^6+y^6=20\cdot(20^2-3(-8)^2)=20\cdot(400-192)=20\cdot 208=4160.$$

49. Ако $x+y=1$ и $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, определи ја вредноста на изразот x^8+y^8.

Решение. Имаме

$$2xy=(x+y)^2=(x^2+y^2)=1^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{, т.е. } xy=\frac{1}{4}.$$

Затоа

$$\begin{aligned}x^8+y^8&=x^8+2x^4y^4+y^8-2x^4y^4=(x^4+y^4)^2-2(xy)^4\\&=(x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2)^2-2(xy)^4\\&=((x^2+y^2)^2-2(xy)^2)^2-2(xy)^4\\&=((\tfrac{1}{2})^2-2(\tfrac{1}{4})^2)^2-2(\tfrac{1}{4})^4=(\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{16})^2-\tfrac{2}{256}\\&=(\tfrac{1}{8})^2-\tfrac{1}{128}=\tfrac{1}{64}-\tfrac{1}{128}=\tfrac{1}{128}.\end{aligned}$$

50. Нека $x^2+\frac{1}{x^2}=7$. Определи ја вредноста на изразот $x+\frac{1}{x}$.

Решение. Имаме $(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=7+2=9$, па затоа $x+\frac{1}{x}=3$ или $x+\frac{1}{x}=-3$.

51. Нека x е реален број таков што $x+\frac{1}{x}=3$. Определи ја вредноста на изразот $x^3+\frac{1}{x^3}$.

Решение. *Прв начин*. Ако искористиме дека

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b),$$

тогаш за $a=x$ и $b=\frac{1}{x}$ добиваме

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})=3^3-3\cdot 3=18.$$

Втор начин. Имаме

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=3^2-7.$$

Според тоа,

$$21=(x^2+\frac{1}{x^2})(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}+x+\frac{1}{x},$$

од каде добиваме

$$x^3+\frac{1}{x^3}=21-(x+\frac{1}{x})=18.$$

52. Нека x и a се реални броеви такви што $x+\frac{1}{x}=a$. Пресметај ги вредностите на изразите $x^2+\frac{1}{x^2}$ и $x^4+\frac{1}{x^4}$ во функција од a.

Решение. Имаме $(x+\frac{1}{x})^2=a^2$, па затоа $x^2+\frac{1}{x^2}+2=a^2$, т.е.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2.$$

Според тоа, $(x^2+\frac{1}{x^2})^2=(a^2-2)^2$, па затоа $x^4+\frac{1}{x^4}+2=(a^2-2)^2$, односно

$$x^4+\frac{1}{x^4}=(a^2-2)^2-2.$$

53. Ако $a^2+a+1=0$, определи ја вредноста на изразот $a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}$.

Решение. Равенството $a^2+a+1=0$ го множиме со $a-1$ и добиваме $(a-1)(a^2+a+1)=0$, т.е. $a^3-1=0$. Оттука $a^2+1=-a$ и $a^3=1$, па затоа $a^{1987}=a^{3\cdot662+1}=(a^3)^{662}\cdot a=1^{662}\cdot a=a$, Затоа важи

$$a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}=a+\frac{1}{a}=\frac{a^2+1}{a}=\frac{-a}{a}=-1.$$

54. Нека $x^2+y^2+xy=28$ и $8x-12y+xy=80$. Определи ја вредноста на изразот $3x+2y$.

Решение. Од второто равенство следува $xy=80-8x+12y$. Со замена во првото равенство добиваме $x^2+y^2+80-8x+12y=28$, односно $x^2-8x+16+y^2+12y+36=0$. Значи, $(x-4)^2+(y+6)^2=0$, од каде добиваме $x=4$ и $y=-6$. Конечно, $3x+2y=-12+12=0$.

55. Определи ја вредноста на изразот $x+y+z$ ако за броевите x,y,z важи:

$$x^2+y^2+z^2-4x+4y-8z+24=0.$$

Решение. Имаме

$$x^2+y^2+z^2-4x+4y-8z+24=0$$
$$x^2-4x+4+y^2+4y+4+z^2-8z+16=0$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=0.$$

Собирците на левата страна напоследното равенство се ненегативни броеви, па нивниот збир е еднаков на нула ако сите собирци се еднакви на нула. Според тоа, $x-2=0, y+2=0, z-4=0$, па затоа $x=2$, $y=-2, z=4$. Конечно, $x+y+z=2-2+4=4$.

56. За реалните броеви x и y важи $x^2+y^2+14x-10y+74=0$. Определи ја вредноста на изразот x^2+y^2.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$(x+7)^2+(y-5)^2=0,$$

од каде следува $x+7=0$ и $y-5=0$. Значи, $x=-7$ и $y=5$, па затоа $x^2+y^2=(-7)^2+5^2=74$.

I.2. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

57. Реши ја равенката

$$x[(1,2:36+1\tfrac{1}{5}:0,25-1\tfrac{5}{16}):\tfrac{169}{24}]=(7-6,35):6,5+9,9.$$

Решение. Последователно добиваме

$$x[(1,2:36+1\tfrac{1}{5}:0,25-1\tfrac{5}{16}):\tfrac{169}{24}]=(7-6,35):6,5+9,9$$

$$x[(\tfrac{1}{30}+\tfrac{6}{5}\cdot 4-\tfrac{21}{16})\cdot\tfrac{24}{169}]=0,65:6,5+9,9$$

$$x[\tfrac{16+2304-630}{480}\cdot\tfrac{24}{169}]=0,1+9,9$$

$$\tfrac{1}{2}x=10$$

$$x=20.$$

58. Реши ја равенката

$$(x+10^{2015})^2-(x-10^{2015})^2=10^{2016}.$$

Решение. Имаме

$$(x+10^{2015})^2-(x-10^{2015})^2=10^{2016}$$

$$(x+10^{2015}+x-10^{2015})(x+10^{2015}-x+10^{2015})=10^{2016}$$

$$2x\cdot 2\cdot 10^{2015}=10^{2016}$$

$$4x=10$$

$$x=\tfrac{5}{2}.$$

59. За кои вредности на параметарот a равенката

$$(3x-a)^2+(4x+1)^2=(5x-1)^2$$

има решение.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$9x^2-6ax+a^2+16x^2+8x+1=25x^2-10x+1$$
$$-6ax+8x+a^2=-10x$$
$$(18-6a)x=a^2.$$

1) Ако $18-6a\neq 0$, тогаш равенката има единствено решение $x=\frac{a^2}{18-6a}$.

2) Ако $18-6a=0$, тогаш $a=3$ и равенката го добива обликот $0\cdot x=9$ и таа нема решение.

Конечно, почетната равенка нема решение за $a=3$, а за сите останати вредности на параметарот a има единствено решение.

60. Реши ја по x равенката

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1,$$

каде $a,b,c,a+b+c$ се броеви различни од нула.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивлентна на следниве равенки:

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$$
$$\frac{a+b-x}{c}+1+\frac{a+c-x}{b}+1+\frac{b+c-x}{a}+1+\frac{4x}{a+b+c}=4$$
$$\frac{a+b+c-x}{a}+\frac{a+b+c-x}{b}+\frac{a+b+c-x}{c}=4\frac{a+b+c-x}{a+b+c}$$
$$(a+b+c-x)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}-\tfrac{4}{a+b+c})=0.$$

Можни се следниве случаи:

1) Ако $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}=0$, тогаш равенката го прима обликот $(a+b+c-x)\cdot 0=0$, па затоа решение е секој реален број x.

2) Ако $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\neq 0$, тогаш решение е $x=a+b+c$.

61. Дадени се реалните броеви x и y, $x\neq y$. За кои вредности на реалниот број a е исполнето равенсвото

$$\frac{x^2-8}{y-x}+\frac{a}{x-y}=\frac{(x+3)(x-5)}{y-x}\ ?$$

Решение. Бидејќи $x \neq y$ даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$\frac{x^2-8}{y-x} - \frac{a}{y-x} = \frac{(x+3)(x-5)}{y-x}$$
$$\frac{x^2-8-a}{y-x} = \frac{(x+3)(x-5)}{y-x}$$
$$x^2-8-a=(x+3)(x-5)$$
$$x^2-8-a=x^2-5x+3x-15$$
$$8+a=2x+15$$
$$a=2x+7,$$

што значи дека бараната вредност е $a=2x+7$.

62. Решението на равенката

$$\frac{(x+5)^2}{2} - \frac{(x-2)(x+2)}{3} = (x-1)^2-(x^2-1)-\frac{55-x^2}{6}$$

е отсечокот на графикот на линеарната функција на $y-$оската. Определи ја оваа линеарна функција ако нејзиниот график минува низ точката $A(-4,3)$.

Решение. Решението на равенката

$$\frac{(x+5)^2}{2} - \frac{(x-2)(x+2)}{3} = (x-1)^2-(x^2-1)-\frac{55-x^2}{6}$$

е $x=-3$. Сега, ако линеарната функција е $y=kx+n$, тогаш $n=-3$, т.е. функцијата има облик $y=kx-3$. Но, графикот на функцијата ја содржи точката $A(-4,3)$, па затоа $3=-4k-3$, т.е. $k=-\frac{3}{2}$. Конечно, бараната функција е $y=-\frac{3}{2}x-3$.

63. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+12x-4y+40=0.$$

Решение. Имаме

$$x^2+y^2+12x-4y+40=0$$
$$x^2+12x+36+y^2-4y+4=0$$
$$(x+6)^2+(y-2)^2=0$$

па затоа $x+6=0$ и $y-2=0$, односно $x=-6$ и $y=2$.

64. За кои вредности на реалните броеви x, y и z е исполнето равенството:

$$16x^2+9y^2+4z^2=8x+6y+4z-3?$$

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$16x^2-8x+1+9y^2-6y+1+4z^2-4z+1=0$$

$$(4x-1)^2+(3y-1)^2+(2z-1)^2=0.$$

Бидејќи збир на квадрати на реални броеви е еднаков на нула ако и само ако броевите се еднакви на нула, од последното равенство следува $4x-1=3y-1=2z-1=0$, односно $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{2}$.

65. Реши ја равенката:

$$|2x-1|+2x=3.$$

Решение. За $x\geq\frac{1}{2}$ равенката го добива обликот $2x-1+2x=3$, од каде добиваме $x=1$. За $x<\frac{1}{2}$ равенката го добива обликот $-2x+1+2x=3$ и како последната равенка нема решение, заклучуваме дека во овој случај почетната равенка нема решение.

66. Реши ја равенката

$$|x-1|+|x+3|=2x+2.$$

Решение. Ако $x<-3$, тогаш добиваме $1-x-x-3=2x+2$, т.е. $x=-1$ што значи дека во интервалот $(-\infty,-3)$ равенката нема решение. Ако $-3\leq x<1$, тогаш добиваме $1-x+x+3=2x+2$, т.е. $x=1$, па и во интервалот $[-3,1)$ равенката нема решение. Ако $x\geq 1$, тогаш добиваме $x-1+x+3=2x+2$, т.е. $2x+2=2x+2$, што значи дека секој $x\geq 1$ е решение на дадената равенка.

67. Реши ја равенката:

$$|1-|x||=2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенките $1-|x|=2$ и $1-|x|=-2$, т.е. со равенките $|x|=-1$ и $|x|=3$. Јасно првата равенка нема решение, а решенија на втората равенка се $x=3$ и $x=-3$ и тоа се решенија и на дадената равенка.

68. Реши ја равенката:

$$\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+6x+9}=13.$$

Решение. Од

$$\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|=\begin{cases} x-2, & x\geq 2 \\ -x+2, & x<2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+6x+9}=|x+3|=\begin{cases} x+3, & x\geq -3 \\ -x-3, & x<-3 \end{cases}$$

Следува:

- ако $x<-3$, тогаш дадената равенка е еквивалентна на равенката $-x+2-(-x-3)=13$ и истата нема решение,
- ако $-3\leq x<2$, тогаш дадената равенка е еквивалентна на равенката $-x+2-(x+3)=13$, од каде добиваме $x=-7$ и тоа не е решение бидејќи $-7\notin[-3,2)$,
- ако $x\geq 2$, тогаш дадената равенка е еквивалентна на равенката $x-2-(x+3)=13$ и истата нема решение.

Според тоа, дадената равенка нема решение.

69. Реши ја равенката:

$$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=2019.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

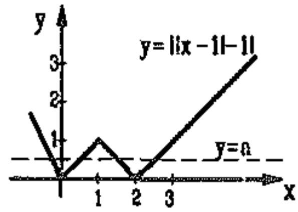
$$|x+1|+|x-1|=2019.$$

Ако $x<-1$, равенката го прима обликот $-x-1-x+1=2019$ и $x=-1009,5$ е едно решение на равенката. Ако $-1\leq x<1$ равенката го прима обликот $-x-+x-1=2019$ и во овој случај немаме решение. Ако $x\geq 1$, тогаш равенката го прима обликот $x+1+x-1=2019$ и решение е $x=1009,5$.

70. За кои вредности на реалниот параметар a равенката $||x-1|-1|=a$ има најмногу реални решенија? Определи ги овие решенија.

Решение. Графикот на функцијата

$$y=||x-1|-1|$$



е прикажан на цртежот десно. За $a<0$, правата $y=a$ не го сече графикот на функцијата $y=||x-1|-1|$, за $a=0$ го сече во две точки, за $0<a<1$, го сече во 4 точки, за $a=1$ го сече во 3 точки и за $a>1$ го сече во 2 точки. Според тоа, баранот интервал е $0<a<1$ и притоа решенијата на равенката се $-a, a, 2-a$ и $2+a$.

71. Дадени се изразите

$$P=a^2-a+b-b^2 \text{ и } Q=(a+b-1)^2+3-3a-3b.$$

а) Определи ги бројните вредности на P и Q ако a е еднаков на помалиот корен на равенката

$$\frac{x(-2x-1)^2}{4}+\frac{3x+2}{4}=2(\tfrac{1}{2}+x)(x-\tfrac{1}{2})+x^2+1 \text{ и } b=\frac{57^3-59^3}{59^2+59\cdot57+57^2}+1.$$

б) Разложи ги на множители изразите P,Q и $P-Q$.

Решение. а) Имаме:

$$\frac{x(-2x-1)^2}{4}+\frac{3x+2}{4}=2(\tfrac{1}{2}+x)(x-\tfrac{1}{2})+x^2+1$$

$$\frac{x(4x^2-4x+1)}{4}+\frac{3x+2}{4}=2(x^2-\tfrac{1}{4})+x^2+1$$

$$4x^3-8x^2+4x=0$$

$$4x(x^2-2x+1)=0$$

$$4x(x-1)^2=0,$$

па решенија на равенката се $x=0$ и $x=1$. Значи, $a=0$. Понатаму,

$$b=\frac{57^3-59^3}{59^2+59\cdot57+57^2}+1=-\frac{(59-57)(59^2+59\cdot57+57^2)}{59^2+59\cdot57+57^2}+1=-2+1=-1.$$

Според тоа,

$$P=0^2-0+(-1)-(-1)^2=-2 \text{ и } Q=(0-1-1)^2+3-3\cdot0-3\cdot(-1)=10.$$

б) Имаме

$$P=a^2-a+b-b^2=(a-b)(a+b)-(a-b)=(a-b)(a+b-1),$$

$$Q=(a+b-1)^2+3-3a-3b=(a+b-1)^2-3(a+b-1)$$
$$=(a+b-1)(a+b-4)$$

$$P-Q=(a+b-1)(a-b)-(a+b-1)(a+b-4)$$
$$=(a+b-1)(a-b-a-b+4)$$
$$=2(a+b-1)(2-b).$$

72. Во множеството реални броеви реши ја равенката :

$$x^3-6\sqrt[3]{2000}x+2008=0.$$

Решение. Лесно се покажува дека за секои реални броеви a,b,c важи

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \qquad (1)$$

Земаме $y=\sqrt[3]{2000}$, $z=2$ и добиваме дека дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$x^3-3xyz+y^3+z^3=0,$$

па од (1) следува дека таа е еквивалентна со равенката

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0. \qquad (2)$$

Понатаму, за секои реални броеви a,b,c важи

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0 \iff$$

$$2(a^2+b^2+c^2)\geq 2(ab+bc+ca) \iff$$

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca \qquad (3)$$

и знак за равенство важи ако и само ако $a-b=b-c=c-a=0$, т.е. ако и само ако $a=b=c$. Сега од (3) и од $y=\sqrt[3]{2000}\neq 2=z$ следува

$$x^2+y^2+z^2>xy+yz+zx,$$

т.е.

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\neq 0. \qquad (4)$$

Конечно, од равенството (2) и од неравенството (4) следува дека

$$x+y+z=0, \text{ т.е. } x=-y-z=-2-\sqrt[3]{2000}.$$

Значи единствено реално решение на дадената равенка е

$$x=-2-\sqrt[3]{2000}.$$

73. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2007 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2008 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=2009. \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме трите равенки и поделиме со 2 добиваме $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3012$. Ако од последната равенка последователно ги одземеме равенките на системот добиваме $\frac{1}{z}=1005, \frac{1}{x}=1004, \frac{1}{y}=1003$, па затоа решение на почетниот систем е $x=\frac{1}{1004}, y=\frac{1}{1003}, z=\frac{1}{1005}$.

74. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{5y+4x}{xy}=7 \\ \frac{7y-3x}{2xy}=\frac{11}{4} \end{cases}$$

Решение. Го трансформираме системот во

$$\begin{cases}\frac{5y}{xy}+\frac{4x}{xy}=7\\ \frac{7y}{2xy}-\frac{3x}{2xy}=\frac{11}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{x}+\frac{4}{y}=7\\ \frac{7}{2x}-\frac{3}{2y}=\frac{11}{4}\end{cases}$$

Потоа, ставаме смена $\frac{1}{z}=u,\frac{1}{y}=v$. Добиваме

$$\begin{cases}5u+4v=7\\ \frac{7}{2}u-\frac{3}{2}v=\frac{11}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5u+4v=7\\ 14u-6v=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15u+12v=21\\ 28u-12v=22\end{cases}$$

Добиваме $u=1,v=\frac{1}{2}$, од каде што $x=1,y=2$.

75. За кои вредности на параметрите a и b системот равенки

$$\begin{cases}(a-1)x+by=1\\ ax+2by=b\end{cases}$$

е неопределен.

Решение. Системот равенки е неопределен, т.е. има бесконечно многу решенија ако и само ако неговите коефициенти се пропорционални, т.е. ако и само ако $\frac{a-1}{a}=\frac{b}{2b}=\frac{1}{b}$, од каде добиваме $\frac{a-1}{a}=\frac{1}{2}$, т.е. $a=2$ и $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$, т.е. $b=2$.

76. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}y-x=2\\ |x|+|y|=1988.\end{cases}$$

Решение. Разликуваме четири случаи.

1) $x\geq 0, y\geq 0$ и тогаш $y-x=2, x+y=1988$, па затоа $x=993, y=995$.
2) $x<0, y\geq 0$ и тогаш $y-x=2,-x+y=1988$ и овој систем нема решение.
3) $x<0, y<0$ и тогаш $y-x=2,-x-y=1988$, т.е. $x=-995, y=-993$.
4) $x\geq 0, y<0$ и тогаш $y-x=2, x-y=1988$ и овој систем нема решение.

77. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}x^2=6y-14\\ y^2=-4x+1.\end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме дадените равенки добиваме

$$x^2+y^2=6y-4x-13$$

$$x^2+4x+y^2-6y+13=0$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2=0$$

од каде добиваме $x+2=0, y-3=0$, односно $x=-2, y=3$.

78. Реши го системот равенки

$$1+x^2=2y,\ \ 1+y^2=2z,\ \ 1+z^2=2t,\ \ 1+t^2=2x.$$

Решение. Ако ги собереме дадените равенки, по средувањето ја добиваме равенката

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(t-1)^2=0,$$

чие единствено решение е $x=y=x=t=1$ и тоа е единственото решение на дадениот систем.

79. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2x+2y-1 \\ y^2+z^2=2y+2z+3 \\ z^2+x^2=2z+2x+2. \end{cases}$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен на системот равенки

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=1 \\ (y-1)^2+(z-1)^2=5 \\ (z-1)^2+(x-1)^2=4. \end{cases}$$

Ако ги собереме горните равенки добиваме

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5.$$

Сега ако од последната равенка последователно ги одземеме прватам втората и трета равенка на системот добиваме

$$(z-1)^2=4,\ \ (x-1)^2=0,\ \ (y-1)^2=1.$$

Според тоа, решенијата на дадениот систем се:

$$(1,2,3),(1,2,-1),(1,0,3),(1,0,-1).$$

80. Колку има подредени тројки реални броеви (a,b,c) такви што важи $ab=c, bc=a, ca=b$.

Решение. Ако еден од броевите a,b,c е еднаков на 0, тогаш и другите два броја мора да се еднакви на 0, па затоа $(0,0,0)$ е една подредена тројка.

Нека броевите a,b,c се различни од 0. Тогаш $ab=c$ и $ac=b$, па затоа $a(ab)=b$, т.е. $a^2b=b$. Ако последното равенство го поделиме со $b\neq 0$, добиваме $a^2=1$, т.е. $a=\pm 1$. Ќе разгледаме два случаја:

1) Ако $a=1$, тогаш $b=ca=c$ и $bc=a=1$, па затоа $b^2=1$, од каде добиваме $b=c=\pm 1$, т.е. ги добиваме подредените тројки $(1,1,1)$ и $(1,-1,-1)$.

2) Ако $a=-1$, тогаш $b=ca=-c$ и $bc=a=-1$, па затоа $b^2=1$, од каде добиваме $b=\pm 1$ и $c=\mp 1$, т.е. ги добиваме подредените тројки $(-1,1,-1)$ и $(-1,-1,1)$.

81. Реши го системот равенки

$$(x+y)^2-z^2=1,\ (y+z)^2-x^2=5,\ (z+x)^2-y^2=10.$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{aligned}(x+y+z)(x+y-z)&=1,\\(x+y+z)(y+z-x)&=5,\\(x+y+z)(z+x-y)&=10.\end{aligned}$$

Ако ги собереме равенките добиваме

$$\begin{aligned}&(x+y+z)(x+y-z+y+z-x+z+x-y)=1+5+10\\&(x+y+z)^2=16.\end{aligned}$$

Според тоа, $x+y+z=4$ или $x+y+z=-4$.

Ако $x+y+z=4$, тогаш $x+y-z=\frac{1}{4}, y+z-x=\frac{5}{4}, z+x-y=\frac{10}{4}$, од каде добиваме $x=\frac{11}{8}, y=\frac{3}{4}, z=\frac{15}{8}$.

Ако $x+y+z=-4$, тогаш $x+y-z=-\frac{1}{4}, y+z-x=-\frac{5}{4}, z+x-y=-\frac{10}{4}$, од каде добиваме $x=-\frac{11}{8}, y=-\frac{3}{4}, z=-\frac{15}{8}$.

82. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}x+y=6\\xy=8.\end{cases}$$

Решение. Имаме $y=6-x$, па со замена во втората равенка по средувањето добиваме

$$\begin{aligned}&x^2-6x+8=0\\&x^2-2x-4x+8=0\end{aligned}$$

$$x(x-2)-4(x-2)=0$$
$$(x-2)(x-4)=0.$$

Решенија на последната равенка се $x=2$ и $x=4$, при што соодветно добиваме $y=4$ и $y=2$. Значи, $(x,y)\in\{(2,4),(4,2)\}$.

83. Определи ги сите парови реални броеви (x,y) такви што

$$\begin{cases} x-12y=4 \\ 2x-24y=8xy. \end{cases}$$

Решение. Првата равенка ја множиме со 2 и добиваме $2x-24y=8$. Со замена вои втората равенка наоѓаме $8=8xy$, т.е. $xy=1$, од каде следува $x,y\neq 0$ и $y=\frac{1}{x}$. Со замена во првата равенка добиваме $x-\frac{12}{x}=4$, односно $x^2-4x-12=0$. Сега последователно добиваме

$$x^2-4x+4-16=0$$
$$(x-2)^2-4^2=0$$
$$(x-2-4)(x-2+4)=0$$
$$(x-6)(x+2)=0$$

од каде наоѓаме $x_1=6$ и $x_2=-2$. Во првиот случај имаме $y_1=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{6}$, а во вториот случај $y_2=\frac{1}{x_2}=-\frac{1}{2}$. Конечно, почетниот систем има две решенија $(6,\frac{1}{6})$ и $(-2,-\frac{1}{2})$.

84. Реши ја неравенката:

$$x-2|x|>2.$$

Решение. За секој $x\in\mathbb{R}$ важи $|x|\geq x$ и $|x|\geq 0$, па затоа $x-|x|\leq 0$ и $-|x|\leq 0$. Ако ги собереме последните две неравенства добиваме $x-2|x|\leq 0$, што значи дека дадената неравенка нема решение.

85. Реши ја неравенката: $|x|+1996>5x$.

Решение. Ако $x<0$, тогаш неравенката е $-x+1996>5x$, од каде добиваме $6x<1996$, односно $x<\frac{998}{3}$, што значи дека во овој случај решение на задачата се броевите $x<0$. Ако $x\geq 0$, тогаш $x+1996>5x$ односно $1996<4x$, па е $x<499$. Според тоа, решение на дадената неравенка се сите броевите x такви што $x<499$.

86. Реши ја неравенката $\frac{2-x}{x-1} > \frac{2}{3}$.

Решение. Дадената неравенка последователно е еквивалентна на неравенките

$$\frac{6-3x}{x-1} > 2,$$
$$\frac{6-3x}{x-1} - 2 > 0,$$
$$\frac{6-3x-2x+2}{x-1} > 0,$$
$$\frac{8-5x}{x-1} > 0.$$

Количник на два броја е позитивен ако и двата броја се позитивни или ако и двата броја се негативни. Според тоа, последната неравенка е еквивалентна на севкупноста системи неравенки:

$$\begin{cases} 8-5x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8-5x<0 \\ x-1<0. \end{cases}$$

Од првиот систем добиваме $1<x<\frac{8}{5}$, а од вториот систем добиваме $x<1$ и $x>\frac{8}{5}$, што значи дека истиот нема решение.

87. Реши ја неравенката:

$$\frac{2019}{1+|x-1|} > 1.$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$2019 > 1+|x-1|,$$

т.е. на неравенката $|x-1|<2018$. Од последнта неравенка добиваме $-2018<x-1<2018$, односно $-2017<x<2019$.

88. Реши ја неравенката:

$$\sqrt{x^2-2x+1} < 1991.$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $\sqrt{(x-1)^2} < 1991$, т.е. со неравенката $|x-1|<1991$. Од последната неравенка добиваме $-1991<x-1<1991$, односно $-1990<x<1992$ и тоа е решението на почетната неравенка.

89. Во множеството позитивни реални броеви, реши го системот

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=3, \\ x+y+z\le 12. \end{cases}$$

Решение. Ако ги помножиме равенството и неравенството ($x>0$, $y>0$, $z>0$), добиваме

$$(\tfrac{4x}{y}+\tfrac{y}{x})+(\tfrac{z}{x}+\tfrac{9x}{z})+(\tfrac{4z}{y}+\tfrac{9y}{z})\le 22. \qquad (1)$$

Но, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$\tfrac{4x}{y}+\tfrac{y}{x}\ge 4,\ \tfrac{z}{x}+\tfrac{9x}{z}\ge 6,\ \tfrac{4z}{y}+\tfrac{9y}{z}\ge 12, \qquad (2)$$

па затоа

$$22\le(\tfrac{4x}{y}+\tfrac{y}{x})+(\tfrac{z}{x}+\tfrac{9x}{z})+(\tfrac{4z}{y}+\tfrac{9y}{z}), \qquad (3)$$

Од неравенствата (1) и (3) следува равенството

$$(\tfrac{4x}{y}+\tfrac{y}{x})+(\tfrac{z}{x}+\tfrac{9x}{z})+(\tfrac{4z}{y}+\tfrac{9y}{z})=22$$

што значи дека во неравенствата (2) важи знак за равенство меѓу средините, па затоа $\frac{4x}{y}=\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}=\frac{9x}{z}$ и како $x>0$, $y>0$, $z>0$ имаме $y=2x$, $z=3x$. Конечно, со замена во $x+y+z=12$ добиваме $x=2$, па затоа $y=2\cdot 2=4$, $z=3\cdot 2=6$.

I.3. ФУНКЦИИИ

90. Дадена е функцијата $f(x)=x^2-3x+4$. Ако $x_1=f(1), x_2=f(2)$ и $x_3=f(3)$, определи ја вредноста на изразот $f(x_1)+f(x_2)f(x_3)$.

Решение. Имаме: $x_1=f(1)=2, x_2=f(2)=2$ и $x_3=f(3)=4$. Тогаш $f(x_1)=f(x_2)=2$ и $f(x_3)=8$, па затоа

$$f(x_1)+f(x_2)f(x_3)=2+2\cdot 8=18.$$

91. Нека $f(2x-3)=4x+2$. Пресметај $f(1987)$.

Решение. *Прв начин*. Ставаме $2x-3=t$ и добиваме $x=\frac{t+3}{2}$, па затоа $f(t)=4\cdot\frac{t+3}{2}+2=2t+8$. Според тоа, $f(1987)=2\cdot 1987+8=3982$.

Втор начин. Од $2x-3=1987$ следува $2x=1990$, па затоа $x=995$. Според тоа, $f(1997)=f(2\cdot 995-3)=4\cdot 995+2=3982$.

92. За функцијата $f(x)$ важи $3f(x-2)+f(2x-4)=x^2+1988$. Пресметај $f(0)$.

Решение. Бидејќи $2-2=0$ и $2\cdot 2-4=0$, ако во дадената релација ставиме $x=2$ добиваме

$$3f(0)+f(0)=2^2+1988.$$

Според тоа, $4f(0)=1992$, односно $f(0)=498$.

93. За секој реален број x определуваме број $f(x)=ax+b$. Определи ја разликата $b-a$ ако е познато дека за секој x е исполнето равенството

$$f(x+1)=4f(x+4)+x.$$

Решение. Од условот на задачата следува дека за секој реален број x важи

$$a(x+1)+b=4[a(x+4)+b]+x,$$

т.е.

$$(3a+1)x+3(5a+b)=0. \qquad (1)$$

Ако во (1)земеме $x=0$ добиваме дека $5a+b=0$. Сега, заменуваме во (1) и добиваме $(3a+1)x=0$, од каде за $x=1$ наоѓаме $3a+1=0$. Според тоа, $a=-\frac{1}{3}$ и $b=-5a=-5(-\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$, па затоа

$$b-a=\frac{5}{3}-(-\frac{1}{3})=2.$$

94. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е определена со $f(x)=2x-1$. Определи ја функција $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што $f(g(x))=6x+3$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

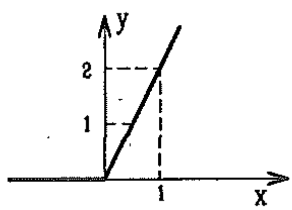
Решение. Бидејќи $f(x)=2x-1$, добиваме дека $f(g(x))=2g(x)-1$, па затоа $2g(x)-1=6x+3$, од каде добиваме

$$2g(x)=6x+4, \text{ т.е. } g(x)=3x+2.$$

95. Во рамнината xOy определи го множеството точки чии координати го задоволуваат равенството $y=|x|+x$.

Решение. Имаме

$$y=|x|+x=\begin{cases}-x+x, & \text{за } x<0\\ x+x. & \text{за } x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0, & \text{за } x<0\\ 2x. & \text{за } x\geq 0.\end{cases}$$



Графикот на дадената функција е прикажан на цртежот десно.

96. Нацртај го графикот на функцијата

$$y=|x-|x||.$$

Решение. Забележуваме дека

$|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geq 0,\end{cases}$ па затоа $x-|x|=\begin{cases}x-(-x)=2x, & x<0,\\ x-x=0, & x\geq 0.\end{cases}$

Според тоа,

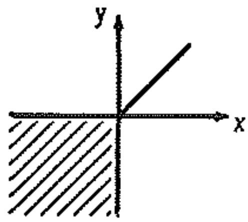
$$y=|x-|x||=\begin{cases}|2x|=-2x, & x<0,\\ |0|=0, & x\geq 0.\end{cases}$$

На читателот му останува да го нацрта графикот на оваа функција.

97. Што претставува множеството точки (x,y) во рамнината xOy такви што

$$x+|x|=y+|y|?$$

Решение. Во прввиот квадрант важи $x,y\geq 0$, па имаме $x+x=y+y$, односно тоа е правата $y=x$. Во вториот квадрант важи $x<0, y\geq 0$, па имаме $y=0$, Во третиот квадрант важи $x<0, y<0$, па имаме $x-x=y-y$, т.е. тоа се сите точки од овој квадрант и во четвртиот квадрант важи $x\geq 0, y<0$, па имаме $x=0$. Според тоа, множеството точки е штрафираниот дел прикажан на горниот цртеж (заедно со границите определени со координатните оски) и делот од правата $y=x$ кој се наоѓа во првиот квадрант.



98. Правата p: $3x-4y+1=0$ ја сече правата a: $y=\frac{5}{3}x-3$ во точката A, а правата b: $5x+4y-55=0$ ја сече во точката B. Определи го растојанието меѓу точките A и B.

Решение. Координатите на точката A се решението на системот равенки

$$\begin{cases}3x-4y+1=0\\ y=\frac{5}{3}x-3\end{cases}$$

т.е. $A(x_1,y_1)\equiv A(3,2)$. Координатите на точката B се решението на системот равенки

$$\begin{cases}3x-4y+1=0\\ 5x+4y-55=0\end{cases}$$

т.е. $B(x_2,y_2)\equiv B(7,5)$. Во координатен систем ги запишуваме точките A и B. Потоа, низ A повлекуваме права m паралелна со $x-$оската, а низ B повлекуваме права n паралелна со $y-$оската. Нека $C=m\cap n$ (направи цртеж). Триаголникот ABC е правоаголен со катети $\overline{AC}=x_2-x_1$ и $\overline{BC}=y_2-y_1$. Сега, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

99. Дадена е функцијата $f(x)=ax+b$, чиј график во правоаголен координатен систем минува низ точките $A(0;\frac{1}{12})$ и $B(-1;0)$.

а) Определи ја функцијата $f(x)$;

б) Дали постои $x\in[-1;1]$, за кој вредноста на изразот

$$K=\sqrt{14x^2+28x+14+f^2(x)}+\sqrt{14x^2-28x+14\tfrac{1}{36}+f^2(x)-\tfrac{f(x)}{2}}$$

е рационален број?

Решение. а) Заменуваме

$f(0)=a\cdot 0+b=\frac{1}{12}$, т.е. $b=\frac{1}{12}$ и $f(-1)=a\cdot(-1)+\frac{1}{12}=0$, т.е. $a=\frac{1}{12}$.

Значи, функцијата е $f(x)=\frac{x+1}{12}$.

б) Нека

$M=\sqrt{14x^2+28x+14+f^2(x)}$ и $N=\sqrt{14x^2-28x+14\frac{1}{36}+f^2(x)-\frac{f(x)}{2}}$.

Имаме:

$$M=\sqrt{14x^2+28x+14+f^2(x)}=\sqrt{14(x^2+2x+1)+\tfrac{(x+1)^2}{144}}$$
$$=\sqrt{(x+1)^2(14+\tfrac{1}{144})}=|x+1|\tfrac{\sqrt{2017}}{12}.$$
$$N=\sqrt{14x^2-28x+14\tfrac{1}{36}+f^2(x)-\tfrac{f(x)}{3}}$$
$$=\sqrt{14x^2-28x+14+\tfrac{1}{36}+f^2(x)-\tfrac{f(x)}{3}}$$
$$=\sqrt{14(x-1)^2+(f(x)-\tfrac{1}{6})^2}=\sqrt{14(x-1)^2+\tfrac{(x-1)^2}{144}}$$
$$=\sqrt{(x-1)^2(14+\tfrac{1}{144})}=|x-1|\tfrac{\sqrt{2017}}{12}.$$

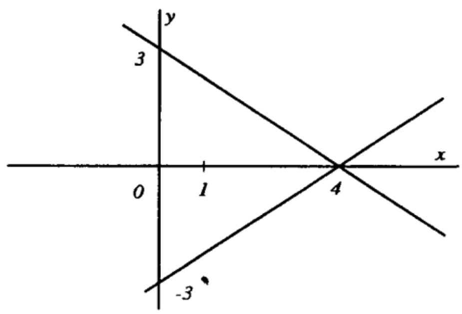
Тогаш $K=M+N=(|x+1|+|x-1|)\frac{\sqrt{2017}}{12}$ и ако искористиме дека за $x\in[-1;1]$ важи $|x+1|=x+1$ и $|x-1|=1-x$, наоѓаме

$$K=(x+1+1-x)\frac{\sqrt{2017}}{12}=\frac{\sqrt{2017}}{6}.$$

Значи, не постои $x\in[-1;1]$, за кој K е рационален број.

100. Определи ги сите вредности на параметарот m за кои правата $3x+my=12$ со координатните оски формира триаголник со плоштина 6.

Решение. Пресечната точка на правата со $x-$оската се добива за $y=0$, па затоа тоа е точката $(4,0)$. За $m=0$ се добива правата $3x=12$ која е паралелна со $y-$оската и не формира триаголник со плоштина 6. Значи, мора да е $m\neq 0$.



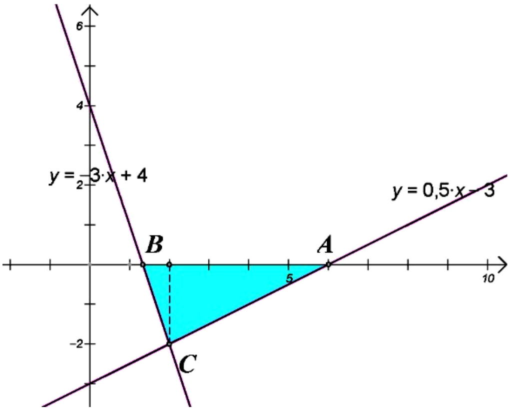
Пресечната точка на правата со $y-$оската се добива за $x=0$ и тоа е точката $(0,\frac{12}{m})$. Плоштината на триаголникот формиран од правата и координатните оски е $\frac{4\cdot\frac{12}{|m|}}{2}=6$, од каде добиваме $|m|=4$, односно $m=4$ и $m=-4$. За $m=4$ правата е $3x+4y=12$, а за $m=-4$ правата е $3x-4y=12$ (види цртеж).

101. Точките $A(3,0)$ и $C(-4,1)$ се две спротивни темиња на квадратот $ABCD$. Определи ги координатите на темињата B и D, ако темето B лежи на позитивниот дел на $y-$оската.

Решение. Со S да го означиме пресекот на дијагоналите на квадратот. Тоа значи дека S е средина на отсечката AC и нејзините координати се $S(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Правата BD на која лежи другата дијагонала на квадратот е нормална на правата AC и минува низ точката S. Затоа нејзината равенка гласи $y-\frac{1}{2}=7(x+\frac{1}{2})$, т.е. $y=7x+4$. Точката B лежи на правата, но и на $y-$оската, па затоа $x=0$ и добиваме $y=7\cdot 0+4=4$, т.е. $B(0,4)$. Понатаму, точката S е средина на BD, па затоа $-\frac{1}{2}=\frac{0+x_D}{2}, \frac{1}{2}=\frac{4+y_D}{2}$, од каде добиваме $x_D=-1$ и $y_D=-3$, т.е. $D(-1,-3)$.

102. Определи ја плоштината на триаголникот кој е ограничен со $x-$оската и правите p и q чии равенки се $y=\frac{1}{2}x-3$ и $y=-3x+4$, соодветно.

Решение. Пресечните точки на правите со $x-$оската се добиваат за $y=0$. Имаме $0=\frac{1}{2}x-3$, т.е. $x=6$, па затоа пресечната точка е $A(6,0)$ и $0=-3x+4$, т.е. $x=\frac{4}{3}$, па затоа пресечната точка е $B(\frac{4}{3},0)$.



Должината на страната AB е $\overline{AB}=6-\frac{4}{3}=\frac{14}{3}$. Од $\frac{1}{2}x-3=y=-3x+4$, добиваме $\frac{7}{2}x=7$, т.е. $x=2$ и $y=-3\cdot 2+4=-2$. Значи, пресечната точка на двете прави е $C(2,-2)$. Според тоа, висината на $\triangle ABC$ е $h=2$, па затоа $P_{\triangle ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot h}{2}=\frac{\frac{14}{3}\cdot 2}{2}=\frac{14}{3}$.

103. Страните на $\triangle ABC$ лежат на правите чии равенки се

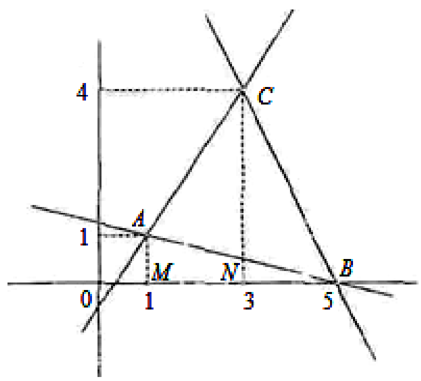
$$y=-2x+10,\quad y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2},\quad x+4y-5=0.$$

Определи ги координатите на темињата на $\triangle ABC$ и неговата плоштина.

Решение. Координатите на темињата ги добиваме решавајќи ги системите равенки:

$$\begin{cases} y=-2x+10, \\ y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}, \\ x+4y-5=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2x+10, \\ x+4y-5=0, \end{cases}$$



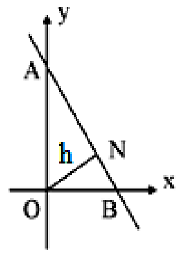
и наоѓаме $C(3,4)$, $B(5,0)$ и $A(1,1)$, цртеж десно. Сега за плоштината на $\triangle ABC$ добиваме

$$P_{\triangle ABC}=P_{MNCA}+P_{NBC}-P_{\triangle AMB}=5+4-2=7.$$

104. Определи го растојанието од координатниот почеток O до правата p чија равенка е

$$4x+3y-6=0.$$

Решение. Ако во равенката $4x+3y-6=0$ ставиме прво $x=0$, а потоа $y=0$ добиваме дека правата ги сече координатните оски во точките $A(0,2)$ и $B(\frac{3}{2},0)$. Од Питагоровата теорема следува



$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2}=\sqrt{(\tfrac{3}{2})^2+2^2}=\tfrac{5}{2}.$$

Бараното растојание е еднакво на висината на $\triangle ABO$. Сега за плоштината на $\triangle ABO$ добиваме $P=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{ON}}{2}$, па затоа

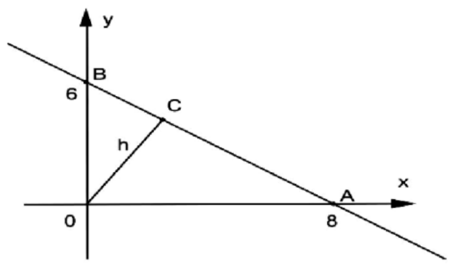
$$h=\overline{ON}=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{\overline{AB}}=\frac{2\cdot\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{6}{5}.$$

105. Дадена е функцијата $y=(2m+1)x+6$.

а) Определи ја вредноста на параметарот m така што графикот на функцијата минува низ точката $M(4,3)$.

б) За најдената вредност на m определи ја оддалеченоста на координатниот почеток до графикот на функцијата.

Решение. а) Бидејќи функцијата $y=(2m+1)x+6$ минува низ точката $M(4,3)$, важи $3=(2m+1)\cdot 4+6$, од каде добиваме $m=-\frac{7}{8}$, т.е. функцијата е $y=-\frac{3}{4}x+6$.

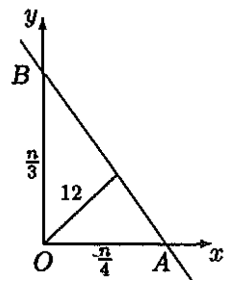


б) За $x=0$ важи $y=6$, а за $y=0$ важи $x=8$. Според тоа, пресечните точки со координатните оски се $A(8,0)$ и $B(0,6)$. Од Питагоровата теорема следува $\overline{AB}=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{OA}^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$. Сега ако C е подножјето на висината во $\triangle ABO$ повлечена од темето O добиваме

$$\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}=P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{OC}}{2}\text{, т.е. } \overline{OC}=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{\overline{AB}}=\frac{48}{10}=\frac{24}{5}.$$

106. Во координатната рамнина е дадена права $4x+3y=n$, n е некој реален број. Нормалното растојание на координатниот почеток до дадената права е 12. Определи ги бројот n и плоштината на триаголникот кој дадената права го формира со координатните оски.

Решение. Според условот на задачата дадената права на координатните оски отсекува отсечки $\overline{OA}=\frac{n}{4}$ и $\overline{OB}=\frac{n}{3}$ (цртеж десно). Хипотенузата на триаголникот е еднаква на $\sqrt{(\frac{n}{3})^2+(\frac{n}{4})^2}=\frac{5n}{12}$, а плоштината на триаголникот е еднаква на $\frac{n^2}{24}$. Понатаму, бидејќи висината над хипотенузата е 12 добиваме $\frac{n^2}{24}=\frac{5n\cdot 12}{12\cdot 2}$, односно $n=60$, $\overline{OA}=15$ и $\overline{OB}=20$, а плоштината на триаголникот ABO е $\frac{15\cdot 20}{2}=150$.



107. Темето A на триаголникот ABC е пресекот на линеарната функција $y=\frac{3}{4}x+12$ со $x-$оската, а темето B е пресекот на линеарната функција $y=-\frac{4}{3}x+12$ со $x-$оската. Темето C е пресечната точка на графиците на овие две линеарни функции.

а) Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен

б) Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Од $\frac{3}{4}x+12=0$ следува $x=-16$, па затоа $A(-16,0)$. Од $-\frac{4}{3}x+12=0$ следува $x=9$, па затоа $B(9,0)$. Од $\frac{3}{4}x+12=-\frac{4}{3}x+12$ добиваме $x=0$, па затоа $y=12$. Значи, $C(0,12)$. Должините на страните на триаголникот ABC се

$$a=\sqrt{9^2+12^2}=15, b=\sqrt{12^2+16^2}=20, c=9+16=25.$$

Сега, од $a^2+b^2=15^2+20^2=625=25^2=c^2$ следува дека триаголникот ABC е правоаголен.

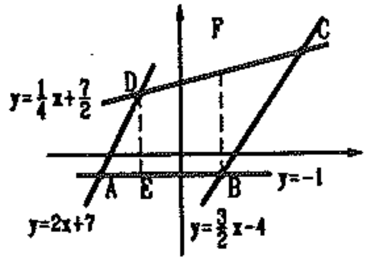
б) Периметарот на триаголникот ABC е $L=15+20+25=60$, а плоштината е $P=\frac{15\cdot 20}{2}=150$.

108. Дадени се линеарните функции

$$y=-1,\ y=\frac{3}{2}x-4,\ y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{2},\ y=2x+7\ .$$

Определи ги координатите на темињата и плоштината на четириаголникот ограничен со графиците на дадените функции.

Решение. Со A,B,C,D да ги означиме темињата на четириаголникот (цртеж десно). Нивните координати се $A(-4,-1), B(2,-1), C(6,5), D(-2,3)$.

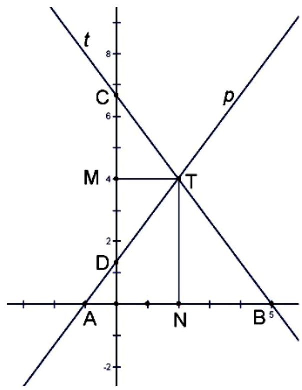


Затоа бараната плоштина е

$$P=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{ED}}{2}+\frac{(\overline{ED}+\overline{BF})\cdot\overline{EB}}{2}+\frac{\overline{BF}\cdot h_{BF}}{2}$$
$$=\frac{2\cdot4}{2}+\frac{(4+5)\cdot4}{2}+\frac{5\cdot4}{2}=32.$$

109. Во координатен систем во рамнината е дадена точка $T(2,3)$. Низ точката T минуваат прави p и t. Правата p ја сече $x-$оската во точка A, а $y-$оската во точка D. Правата t ја сече $x-$оската во точка B, а $y-$оската во точка C. Определи ги равенките на правите p и t ако триаголниците ABT и CDT се рамнокраки со основи AB и CD, соодветно и ако важи $P_{\triangle ABT}:P_{\triangle CDT}=9:4$.

Решение. Триаголникот ABT е рамнокрак, па затоа висината TN ја дели основата AB на два дела. Имаме, $a=\overline{AB}, \frac{a}{2}=\overline{AN}, \overline{TN}=4$ и $P_{\triangle ABT}=2a$. Слично, триаголникот CDT е рамнокрак, па затоа висината TM ја дели основата CD на два дела.



Имаме, $b=\overline{CD}, \frac{b}{2}=\overline{MC}, \overline{TM}=2$, $P_{\triangle CDT}=b$.

Од $P_{\triangle ABT}:P_{\triangle CDT}=9:4$ следува

$$2a:b=9:4, \text{ т.е. } b=\frac{8}{9}a.$$

Во $\triangle ABT$ важи $TN\perp AB$, а во $\triangle CDT$ важи $TM\perp CD$, па затоа $MC\parallel TN$ и $TM\parallel NB$, т.е. $\triangle NBT\sim\triangle MTC$. Од оваа сличност следува $\overline{NB}:\overline{TN}=\overline{TM}:\overline{MC}$, т.е. $\frac{a}{2}:4=2:\frac{b}{2}$, па затоа $ab=32$. Сега, од $b=\frac{8}{9}a$ и $ab=32$ добиваме $\frac{8}{9}a^2=32$, па затоа $a=6$. Координатите на точката N се $N(2,0)$ и како N е средина на AB добиваме $A(-1,0)$ и

$B(5,0)$. Нека равенката на правата p е $y=kx+n$. Бидејќи точките $T(2,4)$ и $A(-1,0)$ лежат на p добиваме

$$\begin{cases} -k+n=0 \\ 2k+n=4 \end{cases}$$

од каде наоѓаме $k=n=\frac{4}{3}$ и равенката на p е $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$. Нека равенката на t е $y=ax+b$. Бидејќи точките $T(2,4)$ и $B(5,0)$ лежат на t добиваме

$$\begin{cases} 5a+b=0 \\ 2a+b=4 \end{cases}$$

од каде наоѓаме $a=-\frac{4}{3}, n=\frac{20}{3}$ и равенката на p е $y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$.

I.4. НЕРАВЕНСТВА

110. Спореди ги броевите 80^5 и 2^{32}.

Решение. Имаме $80^5=(16\cdot 5)^5=(2^4\cdot 5)^5=2^{20}5^5$ и $2^{32}=2^{20}2^{12}$. Сега, од $2^{12}=4096>3125=5^5$ следува

$$2^{32}=2^{20}2^{12}>2^{20}5^5=80^5.$$

111. Што е поголемо 26^{400} или 82^{300}?

Решение. Ако искористиме дека од $1<a<b$ и $c>0$ следува $a^c<b^c$ добиваме

$$26^{400}<27^{400}=(3^3)^{400}=3^{3\cdot 400}=3^{1200}=3^{4\cdot 300}=(3^4)^{300}=81^{300}<82^{300}.$$

112. Спореди ги вредностите на изразите

$$A=\frac{\frac{1}{6}-(23\frac{1}{8}-19\frac{5}{12}):17{,}8}{0{,}6:4{,}2-\frac{2}{7}} \text{ и } B=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+\sqrt{72}}{32}.$$

Решение. Имаме

$$A=\frac{\frac{1}{6}-(23\frac{1}{8}-19\frac{5}{12}):17{,}8}{0{,}6:4{,}2-\frac{2}{7}}=\frac{\frac{1}{6}-3\frac{17}{24}:17{,}8}{\frac{1}{7}-\frac{2}{7}}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{5}{24}}{-\frac{1}{7}}=\frac{-\frac{1}{24}}{-\frac{1}{7}}=\frac{7}{24}$$

и

$$B=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+\sqrt{72}}{32}=\frac{6-2\sqrt{18}+3+\sqrt{72}}{32}=\frac{9-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{32}=\frac{9}{32},$$

па затоа

$$A=\frac{7}{24}=\frac{7\cdot 32}{24\cdot 32}=\frac{224}{24\cdot 32}>\frac{216}{24\cdot 32}=\frac{9\cdot 24}{24\cdot 32}=\frac{9}{32}=B.$$

113. За кои вредности на x и y вредноста на изразот

$$4x^2+9y^2-12x+30y+1987$$

е најмала? Определи ја оваа најмала вредност.

Решение. Од

$$\begin{aligned}4x^2+9y^2-12x+30y+1987&=(2x-3)^2+(3y+5)^2+1987-9-25\\&=(2x-3)^2+(3y+5)^2+1953,\end{aligned}$$

и фактот дека квадрат на реален број е поголем или еднаков на нула следува дека најмалата вредност на дадениот израз е 1953 и истата се достигнува ако $2x-3=0$ и $3y+5=0$, т.е. $x=\frac{3}{2}$ и $y=-\frac{5}{3}$.

114. За кои вредности на x,y и z изразот $x^2+y^2+z^2-12y-14z+90$ прима најмала вредност? Определи ја оваа вредност.

Решение. Имаме

$$x^2+y^2+z^2-12y-14z+90=x^2+(y-6)^2+(z-7)^2+5\geq 5,$$

бидејќи квадрат на реален број е поголем или еднаков на 0. Според тоа, дадениот израз прима најмала вредност за $x=0, y-6=0$ и $z-7=0$, односно за $x=0, y=6$ и $z=7$ и таа вредност е 5.

115. За кои вредности на x и y изразот $\frac{2x^2+2y^2-4y+7}{x^2+y^2-2y+2}$ прима најголема вредност. Определи ја таа вредност.

Решение. Имаме

$$\frac{2x^2+2y^2-4y+7}{x^2+y^2-2y+2}=2+\frac{3}{x^2+(y-1)^2+1}.$$

Но, позитивна дропка има најголема вредност ако нејзиниот именител е најмал, а тоа е очигледно за $x=0$ и $y=1$. Најголемата вредност на разгледуваната дропка е $2+\frac{3}{0^2+(1-1)^2+1}=2+3=5$.

116. Нека a,b,c се ненегативни броеви чиј збир е еднаков на 3. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $\frac{2a+1}{a^2+3}+\frac{2b+1}{b^2+3}+\frac{2c+1}{c^2+3}$.

Решение. Ќе докажеме дека ако $x\in[0,3]$,тогаш $\frac{2x+1}{x^2+3}\geq\frac{1}{12}(x+4)$. Навистина, последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$24x+12\geq x^3+4x^2+3x+12$, кое е еквивалентно со неравенството $x(x+7)(x-3)\leq 0$, кое е точно кога $x\in[0,3]$. Според тоа,

$$\frac{2a+1}{a^2+3}+\frac{2b+1}{b^2+3}+\frac{2c+1}{c^2+3}\geq\frac{1}{12}(a+b+c+12)=\frac{3+12}{12}=\frac{5}{4}.$$

Во последното неравенство знак за равенство се достигнува ако еден оид броевите a,b,c е еднаков на 3, а другите два се еднакви на 0. Значи, најмалата можна вредност на дадениот израз е $\frac{5}{4}$.

117. За четири броја a,b,c,d е исполнето: $d>c, a+b=c+d, a+d<b+c$. Подреди ги по големина овие четири броеви.

Решение. Од $a+d<b+c$, следува $a+d+b<2b+c$. Понатаму, од $a+b=c+d$ следува $c+2d<2b+c$, односно $d<b$.

Слично, од $a+d<b+c$, следува $a+d+c<b+2c$. Понатаму, од $a+b=c+d$ следува $2a+b<b+2c$, односно $a<c$.

Конечно, од условот имаме $c<d$ и како $d<b$ и $a<c$, добиваме $a<c<d<b$.

118. Нека x,y и z се реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека $x=\frac{1}{3}+a, y=\frac{1}{3}+b, z=\frac{1}{3}+c$. Тогаш од $x+y+z=1$ следува $a+b+c=0$. Според тоа,

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(\tfrac{1}{3}+a)^2+(\tfrac{1}{3}+b)^2+(\tfrac{1}{3}+c)^2\\&=\tfrac{1}{9}+\tfrac{2}{3}a+a^2+\tfrac{1}{9}+\tfrac{2}{3}b+b^2+\tfrac{1}{9}+\tfrac{2}{3}c+c^2\\&=3\cdot\tfrac{1}{9}+\tfrac{2}{3}(a+b+c)+a^2+b^2+c^2\\&=\tfrac{1}{3}+a^2+b^2+c^2\geq\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=0$, т.е. ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

119. Докажи дека $x^8-x^5+x^2-x+1>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека $P(x)=x^8-x^5+x^2-x+1$. За $x<0$ сите собирци во $P(x)$ се позитивни, па затоа $P(x)>0$. Понатаму, $P(0)=1>0$. Од

$$P(x)=x^8-x^5+x^2-x+1=x^5(x^3-1)+x(x-1)+1,$$

бидејќи за $x \ge 1$ важи $x^3 - 1 \ge 0$ следува дека за $x \ge 1$ важи $P(x) > 0$.

На крајот, бидејќи за $0 < x < 1$ важи $1 - x^3 > 0$ и $1 - x > 0$, од

$$P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x)$$

следува $P(x) > 0$.

120. Нека a и b се реални броеви такви што $a + b \ge 0$. Докажи дека

$$\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^3+b^3}{2} \ge \frac{(a+b)^3}{8} \qquad \Leftrightarrow$$

$$4a^3 + 4b^3 \ge a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \ge 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$a^2(a-b) - b^2(a-b) \ge 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(a-b)(a^2 - b^2) \ge 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(a-b)^2(a+b) \ge 0.$$

Според претпоставката $a + b \ge 0$ и како $(a-b)^2 \ge 0$, заклучуваме дека последното неравенство е точно, што значи дека е точно и почетното неравенство. Равенство важи ако $a = b$ или $a + b = 0$.

121. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a \ge b \ge c$. Докажи го неравенството

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \le \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

Решение. Последователно се добива низата елвивалентни неравенства:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \le \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

$$\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{abc} \le \frac{b^2c+c^2a+a^2b}{abc}$$

$$b^2c + c^2a + a^2b - a^2c - b^2a - c^2b \ge 0$$

$$a^2b - a^2c + b^2c - c^2b + c^2a - b^2a \ge 0$$

$$a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)\geq 0$$
$$a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b-c)(b+c)\geq 0$$
$$(b-c)(a^2+bc-ab-ac)\geq 0$$
$$(b-c)(a(a-b)-c(a-b))\geq 0$$
$$(a-b)(b-c)(a-c)\geq 0,$$

што е точно бидејќи $a\geq b\geq c$.

122. Ако $a>b>c$, докажи дека
$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}>\frac{2}{a-c}.$$

Решение. *Прв начин.* Од $a>b>c$ следува
$$a-c>a-b>0,\ a-c>b-c>0,$$
па затоа $\frac{a-c}{a-b}>1$ и $\frac{a-c}{b-c}>1$. Ако ги собреме последните две неравенства добиваме $\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}>2$. Последното неравенство го делиме со $a-c>0$ и добиваме $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}>\frac{2}{a-c}$, што и требаше д асе докаже.

Втор начин. Бидејќи $a>b>c$, постојат позитивни реални броеви x и y такви што $a-b=x$ и $b-c=y$. Последните две неравенства ги собираме и добиваме $a-c=x+y$. Според тоа,
$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}-\frac{2}{a-c}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{x+y}=\frac{x(x+y)+y(x+y)-2xy}{xy(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}>0,$$
па затоа $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}>\frac{2}{a-c}$.

123. Ако за позитивните реални броеви a, b, c и d важи $9ac\geq 3bd\geq ac$, докажи дека $\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(ac+bd)^2}\geq\frac{3}{4}$.

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно на следните неравенства:

$$4(ab+cd)(ad+bc)-3(ac+bd)^2\geq 0$$
$$4(a^2bd+ab^2c+acd^2+bc^2d)-3(ac+bd)^2\geq 0$$
$$4((ab^2c+acd^2)+(a^2bd+bc^2d))-3(ac+bd)^2\geq 0$$
$$4(ac(b^2+d^2)+bd(a^2+c^2))-3(ac+bd)^2\geq 0$$
$$4(ac(b^2+d^2)+bd(a^2+c^2)-4abcd)+16abcd-3(ac+bd)^2\geq 0$$
$$4(ac(b-d)^2+bd(a-c)^2)+16abcd-3(ac+bd)^2\geq 0$$

$$12(ac(b-d)^2+bd(a-c)^2)+48abcd-9(ac)^2-18abcd-9(bd)^2\geq 0$$
$$12(ac(b-d)^2+bd(a-c)^2)+30abcd-9(ac)^2-9(bd)^2\geq 0$$
$$12(ac(b-d)^2+bd(a-c)^2)+3(10abcd-3(ac)^2-3(bd)^2)\geq 0$$
$$12(ac(b-d)^2+bd(a-c)^2)+3(3ac-bd)(3bd-ac)\geq 0$$

Последното неравенство очегледно е точно, што значи дека е точно е даденото неравенство.

124. Нека a,b,c е позитивни реални броеви, такви што $a+b+c=1$. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}}\geq 3.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sqrt{(a+2b)(b+2a)}\leq \frac{a+2b+b+2a}{2}=\frac{3(a+b)}{2},$$

па затоа

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}}\geq \frac{2}{3(a+b)}. \qquad (1)$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}}\geq \frac{2}{3(b+c)} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}}\geq \frac{2}{3(a+c)}. \qquad (3)$$

Ако ги собереме неравенствата (1), (2) и (3) добиваме

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}}\geq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \qquad (4)$$

Сега, прво од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина, а потоа од условот $a+b+c=1$ следува

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 2\cdot\frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{a+b}}+\frac{1}{\frac{1}{b+c}}+\frac{1}{\frac{1}{c+a}}}=\frac{3}{a+b+c}=3. \qquad (5)$$

Конечно, од неравенствата (4) и (5) следува бараното неравенство. Јасно, знак за равенство следува ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$.

125. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи дека

$$\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2}+\frac{y^2+z^2+x}{y^2+2}+\frac{z^2+x^2+y}{z^2+2}\geq 3.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина и условот на задачата следува

$$\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2}+\frac{y^2+z^2+x}{y^2+2}+\frac{z^2+x^2+y}{z^2+2}\geq\frac{2xy+z}{x^2+2}+\frac{2yz+x}{y^2+2}+\frac{2zx+y}{z^2+2}$$

$$=\frac{2xyz+z^2}{z(x^2+2)}+\frac{2xyz+x^2}{x(y^2+2)}+\frac{2xyz+y^2}{y(z^2+2)}$$

$$=\frac{2+z^2}{z(x^2+2)}+\frac{2+x^2}{x(y^2+2)}+\frac{2+y^2}{y(z^2+2)}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{2+z^2}{z(x^2+2)}\cdot\frac{2+x^2}{x(y^2+2)}\cdot\frac{2+y^2}{y(z^2+2)}}$$

$$=3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=3.$$

126. Докажи, дека за позитивните реални броеви a, b, c и d важи:

а) $(\frac{a+b+c+d}{4})^3\leq\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}$;

б) $\frac{a^3}{2a^4+1}+\frac{b^3}{2b^4+1}+\frac{c^3}{2c^4+1}\leq 1$, ако $a+b+c=3$.

Решение. а) Ќе користиме, дека $(\frac{a+b}{2})^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$. Тогаш

$$(\frac{a+b}{2})^3=(\frac{a+b}{2})^2\cdot\frac{a+b}{2}\leq\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a+b}{2}=\frac{a^3+b^3}{2}-\frac{a^3+b^3-a^2b-ab^2}{4}$$

и бидејќи

$$\frac{a^3+b^3-a^2b-ab^2}{4}=\frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{4}=\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{4}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{4}\geq 0,$$

добиваме, дека $(\frac{a+b}{2})^3\leq\frac{a^3+b^3}{2}$. Значи,

$$(\frac{a+b+c+d}{4})^3=(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2})^3\leq\frac{(\frac{a+b}{2})^3+(\frac{c+d}{2})^3}{2}\leq\frac{\frac{a^3+b^3}{2}+\frac{c^3+d^3}{2}}{2}=\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}.$$

б) Бидејќи $(\frac{a+b+c}{3})^3=(\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4})^3$, од неравенството под а) за $d=\frac{a+b+c}{3}$ следува:

$$(\frac{a+b+c}{3})^3=(\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4})^3\leq\frac{a^3+b^3+c^3+(\frac{a+b+c}{3})^3}{4}$$

и затоа

$$4(\frac{a+b+c}{3})^3\leq a^3+b^3+c^3+(\frac{a+b+c}{3})^3,\text{ т.е. } 3(\frac{a+b+c}{3})^3\leq a^3+b^3+c^3,$$

што значи

$$(\frac{a+b+c}{3})^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме:

$$2a^4+1=a^4+a^4+1\geq 3\sqrt[3]{a^8}$$

и оттука $\frac{a^3}{2a^4+1} \leq \frac{a^3}{3\sqrt[3]{a^8}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{a}$. Тогаш

$$\frac{a^3}{2a^4+1}+\frac{b^3}{2b^4+1}+\frac{c^3}{2c^4+1} \leq \frac{1}{3}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}).$$

Сега од претходните разгледувања следува, дека

$$\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{3}} = 1,$$

со што неравенството е докажано.

127. Ако x, y и z се позитивни реални броеви, докажи дека

а) $(3x^2+2)(3y^2+2) \geq \frac{9}{2}(x+y)^2+3$;

б) $(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2) \geq 9(x+y+z)^2$.

Решение. а) После ослободувањето од заградите, префрлање на собирците на десната страна и нивно групирање го добиваме еквивалентното неравенство

$$(3x^2-6xy+3y^2)+(18x^2y^2-12xy+2)\geq 0,$$

од каде го добиваме очигледното неравенство

$$3(x-y)^2+2(3xy-1)^2 \geq 0.$$

б) Од а) следува, дека

$$(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2) \geq 3(3z^2+2)(1+\frac{3}{2}(x+y)^2)$$
$$=3((\sqrt{3}z)^2+(\sqrt{2})^2)(1^2+(\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}y}{\sqrt{2}})^2)$$

Сега, доволно е да го примениме неравенството

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq (ac+bd)^2,$$

каде a, b, c и d се позитивни броеви, кое лесно се проверува или може да се покаже дека е парцијален случај од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц) за броевите $a=\sqrt{3}z$, $b=\sqrt{2}$, $c=1$ и $d=\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}y}{\sqrt{2}}$,

од каде добиваме

$$(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2) \geq 3(\sqrt{3}z+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y)^2 = 9(x+y+z)^2.$$

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Кој е најголемиот природен број кој го задоволува следниот услов: било кои две соседни цифри во истиот редослед формираат двоцифрен број делив со 23?

   Решение. Двоцифрени броеви кои се деливи со 23 се 23, 46, 69 и 92. Најголем број кој го задоволува условот на задачата е 46923.

2. Определи ги сите природни броеви кои се деливи со 8, чиј збир на цифри е еднаков на 7, а производот на цифрите им е 6.

   Решение. Бараниот број е делив со 8, па затоа тој е парен. Производот на цифрите на бараниот број е 6, што значи дека секоја цифра на тој број е делител на бројот 6. Последното значи дека цифрите се кои е запишан бројот се од множеството $\{1,2,3,6\}$. Но, бројот е парен, па затоа цифрата на единиците е 2 или 6.

   Ако цифрата на единиците е 6, тогаш збирот на останатите цифри е $7-6=1$, па затоа бараниот број е 16.

   Нека цифрата на единиците е 2. Бидејќи производот на сите цифри е еднаков на 6, заклучуваме дека производот на преостанатите цифри е 3. Тоа значи дека цифрите со кои е запишан бараниот број се 2, 3, 1 и 1 (збирот на цифрите е 7). Но, 2 е цифрата на единиците, па можни се следниве случаи: 1132, 1312 и 3112. Но, бараниот број е делив со 8, па затоа решение на задачата се и броевите 1312 и 3112.

   Конечно, бараното множество броеви е $\{16,1312,3112\}$.

3. Низа од природни броеви започнува со бројот 6. Секој следен член во низата се добива по следното правило: ако членот a е парен број, тогаш нареден член е $\frac{1}{2}a$, а ако членот a е непарен број, тогаш нареден член во низата е $3a+1$. Кој број е 2018-ти член? Образложи го својот одговор!

   Решение. Да ги запишеме првите членови од низата. Имаме: $6\ 3\ 10\ 5\ 16\ 8\ 4\ 2\ 1\ 4\ 2\ 1\ \ldots$ Значи, по 6-тиот член, циклично се повторуваат $4\ 2\ 1$. Воочуваме дека на седмо, десетто, тринаесто, итн. место ќе биде 4, односно на место чиј реден број при делење со 3 дава остаток 1 ќе биде 4; на осмо, единаесто, четиринаесто, итн.

место ќе биде 2, односно на место чиј реден број при делење со 3 дава остаток 2 ќе биде 2; а на деветто, дванаесто, петнаесто, итн. место ќе биде 1, односно на место чиј реден број е делив со 3 ќе биде 1. Бидејќи $2018=3\cdot 672+2$, 2018-ти член во низата е 2.

4. Определи ги сите парови последователни природни броеви такви што едниот број може да се запише како производ $2(n-3)(n+1)$, а другиот како производ $(n-2)(2n-1)$ каде што n е природен број.

Решение. Разликата на два последователни природни броеви е 1, па во зависност од тоа кој број е поголем имаме два случаи:

1. $2(n-3)(n+1)-(n-2)(2n-1)=1$ од каде што $n=9$, а бараните броеви се 119 и 120.
2. $(n-2)(2n-1)-2(n-3)(n+1)=1$ од каде што $n=7$, а бараните броеви се 64 и 65.

5. Определи ги сите трицифрен броеви кои се 15 пати поголеми од збирот на цифрите со кои се запишани.

Решение. Ако бараниот број е $\overline{abc}$, тогаш

$$\overline{abc}=15(a+b+c).$$

Десната страна на последното равенство е делива со 15, што значи дека бројот $\overline{abc}$ е делив со 3 и со 5, па затоа цифрата на единиците мора да биде 0 или 5, т.е. $c=0$ или $c=5$.

Ако $c=0$, тогаш

$$100a+10b=15(a+b),$$

од каде добиваме $17a=b$, што не е можно бидејќи a и b се цифри.

Ако $c=5$, тогаш

$$100a+10b+5=15a+15b+75,$$

па затоа

$$17a=b+14.$$

Сега бидејќи a и b се цифри, мора да е $a=1$, па затоа $b=3$. Конечно, единствено решение на задачата е бројот 135. Навистина,

$$135=15\cdot 9=15\cdot(1+3+5).$$

6. Одреди ги сите трицифрени природни броеви кои се 12 пати поголеми од збирот на своите цифри.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот трицифрен број. Тогаш од условот на задачата добиваме дека

$$100a+10b+c=12(a+b+c)=12a+12b+12c\,,$$

од каде $88a-11c=2b$. Бидејќи левата страна е делива со 11, следува дека мора биде и десната, а тоа е можно само кога $b=0$ (b е цифра). Тогаш $11(8a-c)=0$, од каде следува дека $c=8a$, односно дека $c=8$, $a=1$. Според тоа, бараниот број е 108.

7. Никола купил тетратка од 100 листа и секоја страна на тетратката ја нумерирал со редните броеви од 1 до 200. Неговата сестра Маја произволно од тетратката скинала 24 листа и ги собрала редните броеви на страниците на скинатите листови. Дали добиениот збир може да биде:

а) 2018, б) 2019?

Решение. Секој лист има по две страници кои се нумерирани со два последователни природни броја $2k+1$ и $2k+2$, па нивниот збир е $4k+3$. Според тоа, збирот на броевите со кои се нумерирани страниците на скинатите листови е од облик

$$4k_1+3+4k_2+3+...+4k_{24}+3=4n+72=4(n+18)$$

и тој е делив со 4. Ниту еден од броевите 2018 и 2019 не е делив со 4, па затоа и во двата случаја одговорот на прашањето е негативен.

8. Остатокот при делењето на целиот број a со 4 е 3. Определи го остатокот при делењето на бројот a^2-a со 4.

Решение. Имаме $a=4k+3, k\in\mathbb{Z}$, па затоа

$$\begin{aligned}a^2-a&=(4k+3)^2-(4k+3)=16k^2+24k+9-4k-3\\&=16k^2+20k+6=4(4k^2+5k+1)+2,\end{aligned}$$

што значи дека го остатокот при делењето на бројот a^2-a со 4 е 2.

9. Збирот на квадратите на три непарни последователни природни броја е еднаков на четирицифрен број запишан со исти цифри. Определи ги овие броеви.

Решение. Од условот на задачата следува

$$(2n+1)^2+(2n+3)^2+(2n+5)^2=\overline{kkkk}$$

$$4n^2+4n+1+4n^2+12n+9+4n^2+20n+25=1111k$$

$$12n^2+36n+36=1111k+1$$

$$12(n^2+3n+3)=12\cdot 92k+7k+1.$$

Во последното равенство левата страна е делива со 12, па за да десната страна биде делива со 12 мора да биде $7k+1=12m$. Но, k е цифра, па тоа е можно само за $k=5$. Сега добиваме $n^2+3n+3=463$, од каде наоѓаме $(n-20)(n+23)=0$, односно $n=20$ или $n=-23$. Но, $n>0$, па затоа $n=20$ и бараните броеви се 41, 43 и 45.

10. Дали може броевите $2,2^2,2^3,2^4,...,2^{1995},2^{1996}$ да се поделат во две дисјунктни множества така што збирот на броевите од првото множество биде еднаков на збирот на броевите од другото множество?

Решение. Нека претпоставиме дека бараната поделба е можна и дека збирот на броевите во секое од множествата е S. Имаме

$$2S=2+2^2+2^3+2^4+...+2^{1995}+2^{1996},$$

па затоа

$$S=1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{1994}+2^{1995}.$$

Според тоа, S е непарен број. Значи, S е непарен број и треба да се добие како збир на парни броеви, што не е можно. Последното значи дека бараната поделба не е можна.

11. Определи ги сите природни броеви запишани само со помош на цифрата 2 и кои може да се запишат во вид на збир или разлика на квадрати на два природни броја.

Решение. Јасно, ако збирот или разликата на квадратите на два природни броја a и b е број од видот 222...22, тогаш броевите a и b се со иста парност. Ако броевите a и b се парни, тогаш квадратот на секој од нив е делив со 4, па со 4 се деливи и збирот и разликата на квадратите. Меѓутоа, број од видот 222...22 не е делив со 4. Затоа случајот кога a и b се парни броеви не е можен.

Нека $a=2k+1$ и $b=2m+1$, каде k и m се ненегативни цели броеви. Од условот $(2k+1)^2+(2m+1)^2=222...22$ следува

$$4k(k+1)+4m(m+1)=222...20.$$

Сега броевите $4k(k+1)$ и $4m(m+1)$ се деливи со 8, а бројот 222...20 е делив со 8 ако и само ако цифрата 2 не учествува во записот, и тогаш овој број е еднаков на 0, па затоа $k=m=0$ и $a=b=1$.

Разликата $(2k+1)^2-(2m+1)^2=4k(k+1)-4m(m+1)$ е делива со 8 и истата не може да биде еднаква на број од видот 222...22 бидејќи овие броеви не се деливи ниту со 4.

12. Докажи дека изразот $n^2-n+1987$ не е делив со 1986 за ниту еден природен број n.

    Решение. Имаме $n^2-n+1987=n(n-1)+1987$, па како производот на два последователн природни броја е парен број, заклучуваме дека $n^2-n+1987$ е непарен број. Но, 1986 е парен број, па затоа $n^2-n+1987$ не е делив со 1986 за ниту еден природен број n.

13. Ако n е природен број, тогаш $n^2-n+2019$ не е делив со 2018. Докажи.

    Решение. Имаме $n^2-n+2019=n(n-1)+2019$, па како производот на два последователни броја е парен број, заклучуваме дека за секој природен број n бројот $n^2-n+2019$ е непарен. Тоа значи, дека бројот $n^2-n+2019$ не е делив со бројот 2, па затоа не е делив и со бројот $2018=2\cdot 1009$.

14. Докажи дека $6\,|\,n^3-1987n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

    Решение. Имаме,
    $$n^3-1987n=n^3-n-1986n=n(n-1)(n+1)-1986n.$$
    Понатаму, од три последователни природни броја еден сигурно е делив со 3, а најмалку 1 е делив со 2, па затоа нивниот производ е делив со 6. Значи, $6\,|\,n(n-1)(n+1)$ и како $6\,|\,1986$, заклучуваме дека $6\,|\,n^3-1987n$.

15. Докажи дека за секој природен број n изразот $n^3+1988n$ е делив со 3. За кои вредности на n дадениот израз е делив со 6.

    Решение. Имаме,
    $$\begin{aligned}n^3+1988n&=n^3-n+1989n=n(n^2-1)+1989n\\&=(n-1)n(n+1)+3\cdot 663n.\end{aligned}$$
    Бидејќи производот на три последователни броја е делив со 3 заклучуваме дека првиот собирок во горниот израз е делив со 3, па како и вториот собирок е делив со 3, заклучуваме дека $3\,|\,n^3+1988n$. Јасно, за да изразот е делив со 6, потребно е изразот да е делив со 2, што значи бројот n треба да биде парен (производот на три последователни броја е делив со 2).

16. За секој природен број n бројниот израз $(9n+4)^2-(4-n)^2$ е делив со 160. Докажи!
Решение. Имаме
$$\begin{aligned}(9n+4)^2-(4-n)^2 &= (9n+4+4-n)(9n+4-4+n)\\ &= 10n(8n+8)\\ &= 80n(n+1).\end{aligned}$$
Производот на два последователни броја е парен број, т.е. е делив со 2, па затоа бројниот израз $(9n+4)^2-(4-n)^2$ е делив со $2\cdot 80=160$.

17. Докажи дека разликата на квадратите на било кои два непарни броја е делива со 8.
Решение. Нека $2m+1$ и $2n+1$ се произволни непрани броеви. Имаме
$$\begin{aligned}(2m+1)^2-(2n+1)^2 &= (2m+1+2n+1)(2m+1-2n-1)\\ &= 4(m-n)(m+n+1).\end{aligned}$$
Јасно, броевите $m+n$ и $m-n$ се со иста парност, што значи дека броевите $m-n$ и $m+n+1$ се со различна парност, па затоа $2|(m-n)(m+n+1)$, од каде следува дека $8|4(m-n)(m+n+1)$, што и требаше да се докаже.

18. Ако поголеминот од два последователни прирдони броја е квадрат на некој природен број, тогаш производот на овие два последователни природни броја е делив со 12. Докажи!
Решение. Нека k и $k+1$ се последователни природни броеви, при што $k+1=n^2$. Имаме,
$$k=n^2-1=(n-1)(n+1),$$
па затоа
$$k(k+1)=(n-1)(n+1)n^2.$$
Бидејќи $n-1,n,n+1$ се три последователни природни броеви еден од нив е делив со 3. Ако n е парен број, тогаш n^2 е делив со 4, па затоа $k(k+1)$ е делив со $3\cdot 4=12$. Ако n е непарен број, тогаш $n-1$ и $n+1$ се парни броеви, па затоа $k(k+1)$ е делив со $3\cdot 4=12$.

19. За целите броеви x,y е исполнето $90|x^2+xy+y^2$. Докажи дека $900|xy$.

Решение. Од условот $90 | x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy$ добиваме дека $3|(x-y)^2$, па затоа $9|(x-y)^2$. Од истиот услов следува дека $3|xy$ односно барем еден од броевите x и y е делив со 3. Меѓутоа, $3|x-y$ односно x и y имаат ист остаток при делење со 3, од што следува дека и двата мора да се деливи со 3.
Ќе докажеме $100|xy$. Од $90|x^2+xy+y^2$ и од $x^2+xy+y^2|x^3-y^3$ следува дека $10|x^3-y^3$. Остатоци при делење со 10 се 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Со директна проверка добиваме дека остатоци при делење на кубот од природен број со10 се 0, 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9, соодветно. Следува дека кубовите на два броја имаат ист остаток при делење со 10 ако и само ако двата броја имаат ист остаток при делење со 10. Добиваме $10|x-y$. Сега од $10|x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy$ добиваме $10|xy$ па затоа барем еден од броевите е делив со 10. Од $10|x-y$ добиваме дека $100|xy$. Конечно од $9|xy$ и $100|xy$ следува тврдењето на задачата.

20. Докажи дека за секој природен број n изразот $3^{2n}-1$ не е делив со $2^{2n}-1$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}2^{2n}-1&=(2^2)^n-14^n-1=(4-1)(4^{n-1}+4^{n-2}+...+1)\\&=3\cdot(4^{n-1}+4^{n-2}+...+1).\end{aligned}$$

Според тоа, 3 е делител на $2^{2n}-1$. Сега, ако $2^{2n}-1$ е делител на $3^{2n}-1$, тогаш мора 3 да е делител на $3^{2n}-1$, што не е точно, бидејќи при делење на $3^{2n}-1$ со 3 се добива остаток 2.

21. Ако $x=10^{2019}$, тогаш 54 е делител на x^2+x-2. Докажи!

Решение. Го трансформираме изразот x^2+x-2 и добиваме

$$\begin{aligned}x^2+x-2&=(x-1)(x+2)=(1\underbrace{000\ldots0}_{2019}-1)(1\underbrace{000\ldots0}_{2019}+2)\\&=\underbrace{999\ldots9}_{2019}\cdot1\underbrace{000\ldots0}_{2018}2.\end{aligned}$$

Првиот множител е делив со 9, а вториот со 6, од каде следува дека 54 е делител на x^2+x-2 кога $x=10^{2019}$.

22. Нека $x=\underbrace{444...444}_{11\,\text{четво}}$. Докажи дека бројот x^2-x-2 е делив со 270.

Решение. Важи

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)=\underbrace{444...44}_{10\,\text{четво}}2\cdot\underbrace{444...44}_{10\,\text{четво}}5.$$

Збирот на цифрите на првиот множител е $10\cdot4+2=42$, па затоа тој е делив со 3 и со 2, а збирот на цифрите на вториот множител е $10\cdot4+5=45$, па затоа тој е делив со 5 и со 9. Според тоа, за $x=\underbrace{444...444}_{11\,\text{четво}}$ бројот x^2-x-2 е делив со $2\cdot3\cdot5\cdot9=270$, што и требаше да се докаже.

23. Нека $x=\underbrace{1111...111}_{20\,\text{единици}}$. Докажи дека x^3-x^2-2x е делив со 1188.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}x^3-x^2-2x&=x(x+1)(x-2)\\&=\underbrace{1111...111}_{20}\cdot\underbrace{1111...111}_{19}2\cdot\underbrace{1111...11}_{18}09.\end{aligned}$$

Првиот множител е делив со 11, вториот е делив со 3 и со 4 и третиот е делив со 9 (Зошто?). Според тоа, дадениот производ е делив со $3\cdot4\cdot9\cdot11=1188$.

24. Даден е бројот $n=\underbrace{111..11}_{1994}\underbrace{222..22}_{1994}$. Докажи дека бројот n^3-3n^2-18n е делив со 13200.

Решение. Да забележиме дека

$$n^3-3n^2-18n=n(n^2-3n-18)=n(n+3)(n-6).$$

Според тоа, треба да докажеме дека $n(n+3)(n-6)$ е делив со 13200. Бидејќи $n=\underbrace{111..11}_{1994}\underbrace{222..22}_{1994}$ заклучуваме дека бројот n е делив со 2, делив е со 3 (збирот на цифрите $1994\cdot(1+2)$ е делив со 3) и е делив со 11, бидејќи збировите на цифрите кои се наоѓаат на парните и непарните места се еднакви. Освен тоа, бројот

$$n+3=\underbrace{111..11}_{1994}\underbrace{222..22}_{1994}5$$

е делив со 25, а бројот

$$n-6=\underbrace{111..11}_{1994}\underbrace{222..216}_{1994}$$

е делив со 8. Конечно $n(n+3)(n-6)$ е делив со $2\cdot3\cdot11\cdot25\cdot8=13200$..

25. Докажи дека за секој природен број n изразот $5^{2002}+7^{2002}+9^{2n}$ е делив со 5.

Решение. Јасно, $5|5^{2002}$, па затоа доволно е да докажеме дека за секој природен број n важи $5|7^{2002}+9^{2n}$. Имаме $9^2=81$, па затоа цифрата на единиците на бројот $9^{2n}=81^n$ е 1. Понатаму, $7^2=49$ и $7^4=2401$, па затоа цифрата на единиците на бројот

$$7^{2002}=7^2\cdot7^{2000}=7^2\cdot(7^4)^{500}=49\cdot2401^{500}$$

е 9. Според тоа, цифрата на единиците на збирот $7^{2002}+9^{2n}$ е еднава на цифрата на единиците на збирот $1+9=10$, т.е. е 0, што значи дека $5|7^{2002}+9^{2n}$.

26. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броја е делив со 9.

Решение. Нека $n-1,n,n+1$ се три последователни природни броја. Збирот на нивните кубови е

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n=3n(n^2+2)\,.$$

Имаме, $n=3k$ или $n=3k\pm1$. Ако $n=3k$, тогаш $3|3k=n$, па затоа $9|3n(n^2+2)$. Ако $n=3k\pm1$, тогаш $3|3(3k^2\pm2k+1)=n^2+2$, па затоа $9|3n(n^2+2)$.

27. Докажи, дека збирот на квадратите на 5 последователни природни броеви не може да биде точен квадрат на природен број.

Решение. Нека $n-2,n-2,n,n+1,n+2$ се пет последователни природни броеви. Тогаш

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=5(n^2+2)\,.$$

Производот на десната страна на последното равенство е точен квадрат на природен број ако и само ако $5|n^2+2$. Од деливоста со 5 следува дека цифрата на единиците на бројот n^2+2 треба да е 0 или 5, т.е. цифрата на единиците на бројот n^2 треба да е 8 или 3. Но, цифрата на единиците на квадрат на природен број е 0, 1, 4, 5, 6 или 9, што значи дека за секој природен број n бројот n^2+2 не е делив со 5.

Конечно, од претходно изнесеното следува дека за секој природен број n бројот $5(n^2+2)$ не е точен квадрат на природен број, т.е. збирот на квадратите на 5 последователни природни броеви не може да биде точен квадрат на природен број.

28. а) Докажи дека за секој природен број n бројот n^5-n е делив со 30.

б) Ако a и b се природни броеви такви што $a^5+b^5=2020$, тогаш збирот $a+b$ е делив со 5. Докажи.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} n^5-n &= n(n^4-1)n(n^2-1)(n^2+1) \\ &= n(n-1)(n+1)(n^2+1), \end{aligned}$$

па затоа $6\,|\,(n^5-n)$, бидејќи производот на три последователни цели броеви $n(n-1)(n+1)$ е делив со 6.

Понатаму, $n=5k, n=5k\pm 1$ или $n=5k\pm 2$.

- ако $n=5k$, тогаш е јасно дека $5\,|\,(n^5-n)$,
- ако $n=5k\pm 1$, тогаш $5\,|\,(n-1)(n+1)$, па затоа $5\,|\,(n^5-n)$ и
- ако $n=5k\pm 2$, тогаш $5\,|\,(n^2+1)$, па затоа $5\,|\,(n^5-n)$.

Според тоа, $5\,|\,(n^5-n)$ и $6\,|\,(n^5-n)$, па како $\mathrm{NZD}(5,6)=1$ добиваме $30\,|\,(n^5-n)$.

б) Ако $a^5+b^5=2920$, тогаш

$$2020=a^5+b^5=a^5-a+b^5-b+(a+b).$$

Сега, бидејќи $5\,|\,2020$, $5\,|\,(a^5-a)$ и $5\,|\,(b^5-b)$, заклучуваме дека $5\,|\,(a+b)$.

29. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот $8^n+8^{n+1}+8^{n+2}$ е делив со 584.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 8^n+8^{n+1}+8^{n+2} &= 8^n+8^n\cdot 8+8^n\cdot 8^2 \\ &= 8^n(1+8+8^2) \\ &= 73\cdot 8^n = 584\cdot 8^{n-1}, \end{aligned}$$

од каде следува $584 \mid 8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2}$.

30. Докажи дека бројот $2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{1999}+2^{2000}$ е делив со 30.

Решение. Дадениот збир има 2000 собирци. Затоа важи

$$\begin{aligned}
&2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{1999}+2^{2000}=\\
&\quad=2(1+2+2^2+2^3)+2^5(1+2+2^2+2^3)+...+2^{1997}(1+2+2^2+2^3)\\
&\quad=(1+2+2^2+2^3)(2+2^5+...+2^{1997})=15\cdot 2(1+2^4+...+2^{1996})\\
&\quad=30(1+2^4+...+2^{1996}),
\end{aligned}$$

од каде следува дека 30 е делител на $2+2^2+2^3+...+2^{1999}+2^{2000}$.

31. Нека $S=3+3^2+3^3+...+3^{2018}+3^{2019}$. Докажи дека $39 \mid S$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
S&=3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+...+3^{2017}+3^{2018}+3^{2019}\\
&=3(1+3+3^2)+3^4(1+3+3^2)+...+3^{2017}(1+3+3^2)\\
&=(1+3+3^2)\cdot(3+3^4+...+3^{2017})=13\cdot 3\cdot(1+3^3+...+3^{2016})
\end{aligned}$$

т.е. $39=3\cdot 13 \mid S$.

32. Докажи дека збирот $1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}+...+2018^{2019}+2019^{2019}$ е делив со 2019.

Решение. За секои $a,b\in\mathbb{R}$ и за секој $k\in\mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned}
&(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+a^{2k-2}b^2-...+a^2b^{2k-2}-ab^{2k-1}+b^{2k})=\\
&\quad=a^{2k+1}-a^{2k}b+a^{2k-1}b^2-...+a^3b^{2k-2}-a^2b^{2k-1}+ab^{2k}+\\
&\qquad\qquad+a^{2k}b-a^{2k-1}b^2+...-a^3b^{2k-2}+a^2b^{2k-1}-ab^{2k}+b^{2k+1}\\
&\quad=a^{2k+1}+b^{2k+1}.
\end{aligned}$$

Понатаму, од докажаното равенство следува дека ако $a,b\in\mathbb{N}$, тогаш за секој непарен број n важи $a+b \mid (a^n+b^n)$.

Да го разгледаме збирот

$$S=1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}+...+2018^{2019}+2019^{2019}.$$

Бидејќи

$$1+2018=2+2017=1009+1010=2019$$

од претходните разгледувања следува дека

$$2019\,|\,(1^{2019}+2018^{2019})$$
$$2019\,|\,(2^{2019}+2017^{2019})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2019\,|\,(1009^{2019}+1010^{2019})$$

и како $2019\,|\,2019^{2019}$ добиваме дека $2019\,|\,S$.

33. За природните броеви x,y и z важи $x^2+y^2=z^2$. Докажи дека $15\,|\,xyz$.

Решение. Ќе го докажеме следново тврдење:

Ако x,y и z се природни броеви такви што $x^2+y^2=z^2$, тогаш барем еден од броевите x,y и z е делив со 3, и барем еден од овие броеви е делив со 5.

Доказ. Ако природниот број a не е делив со 3, т.е. ако $a=3k\pm1$, тогаш $a^2=3k(3k\pm2)+1$, што значи квадрат на број кој не е делив со 3 при делење со 3 дава остаток 1. Сега, ако ниту еден од броевите x,y и z не е делив со 3, тогаш x^2+y^2 при делење со 3 дава остаток 2, а z^2 при делење со 3 дава остаток 1, што противречи на $x^2+y^2=z^2$.

Ако $a=5k$, тогаш при делење на a^2 со 5 се добива остаток 0, ако $a=5k\pm1$, тогаш при делење на $a^2=5k(5k\pm2)+1$ се добива остаток 1 и ако $a=5k\pm2$, тогаш при делење на $a^2=5k(5k\pm4)+4$ се добива остаток 4. Сега, ако ниту еден од броевите x,y и z не е делив со 5, тогаш x^2+y^2 при делење со 5 дава остаток 0, 2 или 3, а z^2 при делење со 5 дава остаток 1 или 4, што е противречност.

Конечно, од докажаното тврдење следува дека за броеви x,y и z за кои важи $x^2+y^2=z^2$ еден од броевите е делив со 3 и еден е делив со 5, па затоа $15\,|\,xyz$.

34. Определи го најмалиот природен број k за кој важи: збирот на квадратите на било кои k последователни природни броја е делив со 15.

Решение. Од

$$(5n)^2=5\cdot5n^2,\quad (5n\pm1)^2=5(5n^2\pm2n)+1,\quad (5n\pm2)^2=5(5n^2\pm4n)+4$$

следува дека квадратите на природните броеви при делење со 5 ги даваат остатоците 1, 4, 4, 1, 0, 1, 4, 4, 1, 0 итн. кои циклично се повторуваат во овој редослед. Според тоа, збирот на квадратите на било кои пет последователни природни броеви е делив со 5 и јасно $k_1 = 5$ е најмалиот природен број таков што важи: збирот на квадратите на било кои k_1 природни броеви е делив со 5.

Од

$$(3m)^2 = 3\cdot 3m^2, \quad (3m\pm 1)^2 = 3(3m^2 \pm 2m)+1,$$

следува дека квадратите на природните броеви при делење со 3 ги даваат остатоците 1, 1, 0, 1, 1, 0 итн. кои циклично се повторуваат во овој редослед. Значи, збир на било кои три последователни квадрати дава остаток 2, па затоа збир на било кои девет последователни квадрати ќе биде делив со 3 и јасно $k_2 = 9$ е најмалиот природен број таков што важи: збирот на квадратите на било кои k_2 природни броеви е делив со 3.

Од претходните разгледувања следува дека збирот на квадратите на било кои $5\cdot 9 = 45$ последователни природни броеви е еделив со 15. Бидејќи 45 е најмалиот заеднички содржател на 5 и 9, бројот $k = 45$ е бараниот најмал број. Имено, било кој број $m < 45$ или не е делив со 5 или не е делив со 9, па затоа збирот на квадратите на m природни броеви или нема да се дели со 5 или нема да се дели со 3, т.е. нема да е делив со 15.

35. Збирот на цифрите на бројот X е Y, а збирот на цифрите на бројот Y е Z. Ако $X+Y+Z=60$, определи го бројот X.

Решение. Ако бројот X е едноцифрен, тогаш збирот $X+Y+Z$ е помал или еднаков на 27, т.е. е помал од 60, а ако бројот X е трицифрен, тогаш збирот $X+Y+Z$ е поголем од 60. Според тоа, X е двоцифрен број, односно $X = 10a+b$. Значи, $Y = a+b$ и

$$Z = \begin{cases} a+b, & \text{ако } a+b \le 9 \\ a+b-9, & \text{ако } a+b > 9. \end{cases}$$

Во првиот случај со замена во $X+Y+Z=60$ добиваме $12a+3b=60$, т.е. $4a+b=20$. Сега, од деливоста со 4 и фактот дека b е цифра следува дека $b\in\{0,4,8\}$. Ако $b=0$, тогаш $a=5$; ако $b=4$, тогаш $a=4$ и ако $b=8$, тогаш $a=3$ што не е можно бидејќи $a+b=11>9$.

Во вториот случја со замена во $X+Y+Z=60$ добиваме $12a+3b=69$, т.е. $4a+b=23$. Од деливоста со 4 и фактот дека b е цифра следува дека $b\in\{3,7\}$. Ако $b=3$, тогаш $a=5$, но овој случај отпаѓа бидејќи $5+3<9$, а ако $b=7$, тогаш $a=4$.

Конечно, решение на задачата се броевите 44, 47 и 50.

36. Нека a,b,c се меѓусебно различни ненулти цифри. Дали може збирот

$$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{cab}+\overline{cba}+\overline{bca}+\overline{bac}$$

да биде еднаков на точен квадрат на некој природен број.?

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{cab}+\overline{cba}+\overline{bca}+\overline{bac}&=222a+222b+222c=222(a+b+c)\\&=2\cdot3\cdot37(a+b+c).\end{aligned}$$

Според тоа, за да збирот биде точен квадрат потребно е $a+b+c$ да е содржател на бројот $2\cdot3\cdot37$, што не е можно бидејќи $a+b+c\leq 27$.

37. Производот на два природни броја е 1176, а нивниот најмал заеднички содржател е 168. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека a и b се бараните броеви. Од условот на задачата следува $ab=1176$ и $\mathrm{NZS}(a,b)=168$.

Нека $d=\mathrm{NZD}(a,b)$. Тогаш $a=dm, b=dn$, каде $\mathrm{NZD}(m,n)=1$. Затоа важи

$$d^2mn=1176 \text{ и } dmn=168,$$

од каде добиваме $168d=1156$, т.е. $d=7$. Според тоа, $7mn=168$, односно $mn=24$. Но, $\mathrm{NZD}(m,n)=1$, па од последното равенмство следува $m=1, n=24$ или $m=3, n=8$, што значи дека задачата има две решенија, т.е. бараните броеви се 7 и 168, односно 21 и 56.

II.2. ПРОСТИ БРОЕВИ

38. Горјан го пресметал збирот на сите природни броеви од 1 до n и добил трицифрен број запишан со исти цифри. Колку природни броеви собрал Горјан?

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n&=(1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+...\\&=(n+1)+(n+1)+...+(n+1)=\tfrac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Според тоа, $\frac{n(n+1)}{2}=\overline{xxx}$, па затоа $n(n+1)=2x\cdot 111=x\cdot 2\cdot 3\cdot 37$. Левата страна на последното равенство е производ на два последователни броја, а десната страна во производот го има бројот 37 кој е прост број, па затоа вториот последователен број мора да е 36 или 38, при што вториот множител мора да е делив со 6. Јасно, тоа е бројот 36 и $x=36:6=6$. Значи, Горјан ги собрал првите 36 природни броја и притоа збирот кој го добил е 666.

39. Природниот број n има точно три делители. Докажи дека $\sqrt{n}$ е природен број.

Решение. Точно три делители имаат само квадратите на простите броеви. Навистина,

- ако $n=p^2$, тогаш делители на n се $1, p$ и p^2,
- ако $n=p^k, k\geq 3$, тогаш делители на n се $1, p, p^2, ..., p^k$, т.е. n има повеќе од три делители и
- ако $n=p^k q^m ... r^s$, каде $k,m,s\geq 1$, тогаш меѓу делителите на n се $1, p, q$ и pq, што значи дека n има повеќе од три делители.

Според тоа, $n=p^2$, па затоа $\sqrt{n}=\sqrt{p^2}=p$ е природен број.

40. Бројот $3a$ има точно 4 делители, а бројот $5a$ има точно 6 делители. Најди ја првата цифра на бројот $2019a$.

Решение. Бројот a, за кој важат условите на задачата е $a=9$, односно $3a=27$ има точно 4 делители, додека $5a=45$ има точно 6 делители. Затоа $2019a$ почнува со цифрата 1.

41. Докажи дека за секои природни броеви x и y бројот

$$x^2y^2+3x^2+2y^2+6$$

е сложен број.

Решение. Имаме

$$x^2y^2+3x^2+2y^2+6=x^2(y^2+3)+2(y^2+3)=(x^2+2)(y^2+3)$$

и како $x^2+2\geq 3$ и $y^2+3\geq 4$ заклучуваме дека за секои природни броеви x и y бројот $x^2y^2+3x^2+2y^2+6$ е сложен број.

42. Природниот број n е таков што броевите $2n+1$ и $3n+1$ се точни квадрати на природни броеви. Докажи дека бројот $5n+3$ е сложен.

Решение. Нека $2n+1=k^2$ и $3n+1=m^2$, за некои природни броеви k,m,n. Тогаш

$$5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4k^2-m^2=(2k+m)(2k-m).$$

Но, k и m се природни броеви, па затоа $2k+m>1$. Доволно е да докажеме дека $2k-m>1$. Нека претпоставиме дека $2k-m\leq 1$, т.е. $2k\leq m+1$, што значи $k\leq \frac{m+1}{2}$ и

$$2n+1=k^2\leq (\tfrac{m+1}{2})^2=\tfrac{(m+1)^2}{4}.$$

Според тоа, $8n+4\leq (m+1)^2$, па затоа

$$3(3n+1)+2n+1\leq (m+1)^2, \text{ т.е. } 2m^2+2n+2\leq (m+1)^2$$

и конечно $(m-1)^2\leq -2n<0$, што е противречност.

43. а) Изразот a^4+4b^4 запиши го како производ на два полиноми.

б) Докажи дека $2^{1994}+5^{1996}$ е сложен број.

Решение. а) Имаме:

$$a^4+4b^4=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$$
$$=(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab).$$

б) Од равенството под а) следува

$$2^{1994}+5^{1996}=(5^{499})^4+4\cdot(2^{498})^4$$
$$=(5^{998}+2^{997}-5^{499}\cdot 2^{499})(5^{998}+2^{997}+5^{499}\cdot 2^{499})$$

т.е. бројот $2^{1994}+5^{1996}$ е сложен.

44. Ако p е прост број поголем или еднаков на 3, тогаш 12 е делител на p^2+11. Докажи!

Решение. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш $p=6k\pm 1$, $k\in\mathbb{N}$. Според тоа,

$$p^2+11=(6k\pm 1)^2+11=36k^2\pm 12k+1+11=12(3k^2\pm k+1),$$

што значи дека $12\,|\,p^2+11$.

45. Нека p е прост број и нека $3p+10$ е збир на квадратите на 6 последователни природни броеви. Докажи дека $36\,|\,p-7$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$3p+10=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$$
$$=6n^2+6n+19,$$

од каде

$$3p=6n^2+6n+9,$$

односно

$$p=2n^2+2n+3=2n(n+1)+3.$$

Ако еден од броевите n или $n+1$ е делив со 3, тогаш имаме контрадикција со тоа дека p е прост број. Значи, мора да важи $n=3k+1$. Тогаш,

$$\begin{aligned} p &= 2(3k+1)(3k+1+1)+3 \\ &= 2(3k+1)(3k+2)+3 \\ &= 2(9k^2+9k+2)+3 \\ &= 18k(k+1)+7. \end{aligned}$$

Бидејќи $k(k+1)$ е парен број, добиваме дека $36\,|\,p-7$.

46. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $|n^2-100|$ е прост број.

Решение. Нека $m=|n^2-100|$. Имаме $m=|(n-10)(n+10)|$. Бројот m е прост ако и само ако еден од броевите $|n-10|$ и $|n+10|$ е еднаков на 1, а другиот е прост број. Јасно, не постојат природни броеви за кои $|n+10|=1$. Сега од $|n-10|=1$, следува $n=9$ и $n=11$. За $n=9$, добиваме $m=|(n-10)(n+10)|=19$, што е прот број. За $n=11$, добиваме $m=|(n-10)(n+10)|=21$, а тоа не е прост број. Според тоа, постои само еден природен број n за кој $|n^2-100|$ е прост број и тоа е $n=9$.

47. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот $5p+1$ е квадрат на природен број.

Решение. Од условот на задачата следува $5p+1=n^2$ за некој природен број n. Според тоа, $5p=(n-1)(n+1)$ и како 5 и p се прости броеви од последното равенство ги добиваме системите равенки:

$$\begin{cases} n-1=1 \\ n+1=5p \end{cases} \qquad \begin{cases} n-1=5p \\ n+1=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} n-1=5 \\ n+1=p \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} n-1=p \\ n+1=5 \end{cases}$$

Од првиот систем следува $n=2$, но не постои прост број p за кој $5p=3$. Од вториот систем следува $n=0$, што противречи на условот на задачата. Од третиот систем следува $n=6$, па затоа $p=7$. Од четвртиот систем следува $n=4$, па затоа $p=3$. Јасно, $p=3$ и $p=7$ се единствени решенија на задачата.

48. Нека p и q се дадени различни прости броеви. Определи ги сите подредени парови природни броеви (m,n) кои се решенија на равенката $pm+qn=mn$.

Решение. Јасно, $n\neq p$ и $m\neq q$, па дадената равенка е еквивалентна на равенката $m=\frac{qn}{n-p}$, т.е. на равенката $m=q+\frac{pq}{n-p}$. Броевите $m-q$ и $n-p$ мора да се со ист знак. Од почетната равенка следува дека не може да важи $m<q$ и $n<p$, бидејќи тогаш би добиле

$$mn=mp+nq>mn+mn=2mn,$$

т.е. $mn<0$, што противречи на претпоставката дека m и n се природни броеви. Затоа, во $m=q+\frac{pq}{n-p}$ можни се следниве случаи:

1) $n-p=1$ и тогаш $(m,n)=(pq+q,p+1)$,
2) $n-p=q$ и тогаш $(m,n)=(p+q,p+q)$,
3) $n-p=p$ и тогаш $(m,n)=(2q,2p)$,
4) $n-p=pq$ и тогаш $(m,n)=(q+1,pq+p)$.

49. Определи ги сите прости броеви p,q и r кои ја задоволуваат равенката

$$pqr-pq-pr-qr+p+q+r-33=0$$

Решение. Го трансформираме изразот

$$pqr-pq-pr-qr+p+q+r-33=0$$

и добиваме

$$(p-1)(q-1)(r-1)=2^5.$$

Без губење на општост можеме да претпоставиме дека $p\leq q\leq r$. Единствени делители на 2^5 се $1,2,2^2,2^3,2^4,2^5$. Со директна проверка се добива дека можни се само случаите кога $p-1=1,q-1=2,r-1=2^4$ и кога $p-1=2,q-1=2^2,r-1=2^2$. Според тоа, $(p,q,r)=(2,3,17)$ и

$(p,q,r)=(3,5,5)$ и сите нивни пермутации се броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

50. Најди ги сите природни броеви n такви што n има цифри колку што има различни прости делители и збирот на различните прости делители е еднаков со збирот на степените на истите делители.

Решение. Нека $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$. Од условот на задачата имаме

$$p_1+p_2+...+p_k=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k.$$

Го разгледуваме бројот на цифри на бројот n. Ако n има 4 цифри, тогаш има 4 различни прости делители. Тогаш $n\geq 2^{14}\cdot 3\cdot 5\cdot 7>10^4$ што не е можно. Ако n има $k>4$ цифри, тогаш

$$\begin{aligned}n&\geq 2^{2+3+5+7+p_5+...+p_k-(k-1)}\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot p_5\cdot ...\cdot p_k\\&=2^{14}\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 2^{p_5+...+p_k-(k-4)}p_5\cdot ...\cdot p_k\\&>10^4\cdot 10^{k-4}=10^k\end{aligned}$$

што повторно не е можно. Значи, n е најмногу трицифрен.

Нека n е трицифрен. Тогаш $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}$. Ако $5|n$, тогаш

$$n\geq 2^8\cdot 3\cdot 5>10^3.$$

Добиваме дека простите фактори на бројот n се помали или еднакви на 3. Но прости броеви помали или еднакви на 3 се 2 и 3, а во факторизацијата на n влегуваат 3 прости броеви, што е противречност.

Нека n е двоцифрен број. Тогаш $n=n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$. Ако $5|n$, тогаш $n\geq 2^6\cdot 5>10^2$. Останува $n=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$, каде $\alpha_1+\alpha_2=5$. Со директна проверка се добива дека $n=2^4\cdot 3=48, n=2^3\cdot 3^2=72$ се решенија.

Нека n е едноцифрен број. Тогаш само $n=2^2$ го исполнува условот на задачата.

51. Нека функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, е таква што за секој природен број $n>1$, постои прост делител p на n така што

$$f(n)=f(\tfrac{n}{p})-f(p).$$

Ако

$$f(2^{2007})+f(3^{2008})+f(5^{2009})=2006.$$

пресметај

$$f(2007^2)+f(2008^3)+f(2009^5)\,.$$

Решение. Ако $n=p$ е прост, тогаш

$$f(p)=f(\tfrac{p}{p})-f(p)=f(1)-f(p)$$

т.е

$$f(p)=\tfrac{f(1)}{2}\,. \tag{1}$$

Ако $n=pq$, p и q се прости броеви, тогаш

$$f(n)=f(\tfrac{n}{p})-f(p)=f(q)-f(p)=\tfrac{f(1)}{2}-\tfrac{f(1)}{2}=0\,.$$

Ако n е производ од три прости броеви, тогаш

$$f(n)=f(\tfrac{n}{p})-f(p)=0-f(p)=-f(p)=-\tfrac{f(1)}{2}\,.$$

Со индукција по број на прости множители, лесно се покажува дека ако n е производ од k прости броеви, тогаш

$$f(n)=(2-k)\tfrac{f(1)}{2}\,. \tag{2}$$

Понатаму од $f(2^{2007})+f(3^{2008})+f(5^{2009})=2006$ и (2) имаме

$$\begin{aligned}2006&=f(2^{2007})+f(3^{2008})+f(5^{2009})\\&=\tfrac{2-2007}{2}f(1)+\tfrac{2-2008}{2}f(1)+\tfrac{2-2009}{2}f(1)=-\tfrac{3\cdot 2006}{2}f(1),\end{aligned}$$

т.е

$$f(1)=-\tfrac{2}{3}\ . \tag{3}$$

Сега од $2007=3^2\cdot 223$, $2008=2^3\cdot 251$, $2009=7^2\cdot 41$, и од (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned}f(2007^2)+f(2008^3)+f(2009^5)&=\tfrac{2-6}{2}f(1)+\tfrac{2-12}{2}f(1)+\tfrac{2-15}{2}f(1)\\&=-\tfrac{27}{2}f(1)=-\tfrac{27}{2}\cdot(-\tfrac{2}{3})=9.\end{aligned}$$

II.3. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

52. Определи ги сите природни броеви a за кои бројот $\sqrt{\frac{a+64}{a-64}}$ е природен број.

Решение. Ако коренот е природен број, тогаш бројот под коренот мора да е природен број. Нека $\frac{a+64}{a-64}=x$. Последователно добиваме

$$ax - 64x = a + 64$$
$$a(x-1) = 64x + 64$$
$$a = \frac{64x+64}{x-1}$$
$$a = 64 + \frac{128}{x-1}.$$

Бројот a е природен ако и само ако $x-1|128$ и како x е природен број добиваме дека $x-1 \in \{1,2,4,8,16,32,64,128\}$, од каде добиваме $x \in \{2,3,5,9,17,33,65,129\}$. Меѓу добиените можни вредности за x само корен од бројот 9 е природен број. Значи, $x = 9$ и $a = 64 + \frac{128}{8} = 80$ е единствениот број со саканото својство.

53. Определи ги сите двоцифрени природни броеви n такви што бројот $\sqrt{\frac{n+24}{n-24}}$ исто така е природен број.

Решение. Квадратен корен е природен број ако и само ако поткореновиот израз е точен квадрат на природен број. Имаме:

$$k^2 = \frac{n+24}{n-24} = \frac{n-24+48}{n-24} = 1 + \frac{48}{n-24}.$$

Според тоа, потребно е $\frac{48}{n-24}$ да е природен број, па затоа $n-24|48$, од каде следува $n-24 \in \{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$. Последното значи $n \in \{25,26,27,30,32,36,40,48,72\}$, па затоа

$$k^2 \in \{49,25,17,13,9,7,5,4,3,2\},$$

односно $k^2 \in \{49,25,9,4\}$, што е можно за $n \in \{25,26,30,40\}$ и сите овие броеви се двоцифрени.

54. Определи го најголемиот природен број n за кој вредноста на изразот $\frac{\sqrt{666}+\sqrt{n}}{\sqrt{666}-\sqrt{n}}$ е природен број.

Решение. Имаме, $\frac{\sqrt{666}+\sqrt{n}}{\sqrt{666}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{666}{n}}+1}{\sqrt{\frac{666}{n}}+1} = \frac{k+1}{k-1}$, $k = \sqrt{\frac{666}{n}}$. Од $\frac{k+1}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1}$ следува $k-1 \in \{1,2\}$, т.е. $k \in \{2,3\}$.

За $k = 2$ добиваме $2 = \sqrt{\frac{666}{n}}$, т.е. $n = \frac{666}{4} = \frac{333}{2}$ и ова не е природен број.

За $k = 3$ добиваме $3 = \sqrt{\frac{666}{n}}$, т.е. $n = \frac{666}{9} = 74 \in \mathbb{N}$. Според тоа, решението на задачата е $n = 74$.

55. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}\,.$$

Решение. Ако x и y се природни броеви, тогаш од $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}$ следува $x<48$ и $y<48$. Од $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}$ следува $\sqrt{x}=\sqrt{48}-\sqrt{y}$ и ако квадрираме добиваме $x=48-2\sqrt{48y}+y$. Но, x,y се природни броеви, па затоа од последното равенство следува дека $48y$ мора да е квадрат на природен број. Од $48=4^2\cdot 3$, следува дека $y=3m^2$, при што $m\in\mathbb{N}$. За $m=1$ добиваме $y=3,x=27$. За $m=2$, добиваме $x=y=12$. За $m=3$ добиваме $y=27,x=3$. За $m\geq 4$, добиваме $y\geq 48$ што не е можно.

56. Ако на производот на два природни броја му го додадеме нивниот збир ќе го добиеме бројот 14. Кои се тие природни броеви?

Решение. Нека бараните броеви се m и n. Според условот на задачата последователно добиваме

$$mn+m+n=14$$
$$mn+m+n+1=15$$
$$m(n+1)+(n+1)=15$$
$$(m+1)(n+1)=15$$

и како $m+1,n+1>1$ од последното равенство следува

$$m+1=3,n+1=5 \text{ или } m+1=5,n=1=3.$$

Значи, $m=2,n=4$ и $m=4,n=2$, па бараните броеви се 2 и 4.

57. Ивана избрала два броја a и b од множеството $\{1,2,3,...,25,26\}$. Производот ab е еднаков на збирот на преостанатите 24 броја од ова множество. Определи ја вредноста на изразот $|a-b|$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a>b$ и дека нивниот производ е еднаков на збирот на преостанатите 24 броја. Важи

$$ab+a+b=1+2+3+...+25+26$$
$$ab+a+b=351$$
$$(a+1)(b+1)=352.$$

Сега, од $352=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 11$, $a,b\in\{1,2,3,...,25,26\}$ и $a>b$ следува $a+1=22$ и $b+1=16$, па затоа $a=21$ и $b=15$. Според тоа, Ивана ги избрала броевите 15 и 21.

58. Учителот и неговите ученици тргнале со автобус во градот во кој се одржувал Државниот натпревар по математика. Тие седеле на седишта чии броеви биле последователни природни броеви и нивниот збир бил 54. Колку ученици оделе на натпреварот, ако само еден од броевите на седиштата на кои седеле бил прост број?

Решение. Нека $k+1, k+2, ..., n$ се броевите на седиштата на кои седеле учениците и учителот, каде $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ и $n-k>1$. Бидејќи збирот на броевите на седиштата е 54, важи

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}=54, \text{ т.е. } (n-k)(n+k+1)=108.$$

Имаме $108=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3$ и $n-k>1$, а очигледно важи $n+k+1>n-k$, па затоа можни се пет случаи:

$$n+k+1=54, n-k=2;$$
$$n+k+1=36, n-k=3;$$
$$n+k+1=27, n-k=4;$$
$$n+k+1=18, n-k=6;$$
$$n+k+1=12, n-k=9.$$

Првиот и последниот систем немаат решенија во множеството природни броеви, додека на останатите три системи решенијата се: $n=19, k=16$; $n=15, k=11$; $n=10, k=1$. Во првиот случај броевите на седиштата се 17, 18 и 19 и како во случајот имаме два прости броја, ова решение отпаѓа. Во вториот случај броевите на седиштата се 12, 13, 14 и 15 и меѓу нив има само еден прост број. Во третиот случја броевите на седиштата се 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 и јасно овој случај отпаѓа. Конечно, учителот и учениците седеле на седиштата 12, 13, 14 и 15, што значи дека на Државниот натпревар учителот повел 3 ученика.

59. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$xy+x-3y=10.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$x(y+1)-3(y+1)=7,$$

т.е. на равенката

$$(x-3)(y+1)=7.$$

Бидејќи во множеството цели броеви важи $7=1\cdot 7=(-1)\cdot(-7)$, од последната равенка следуваат системите

$$\begin{cases} x-3=1 \\ y+1=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=7 \\ y+1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=-1 \\ y+1=-7 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=-7 \\ y+1=-1 \end{cases}$$

од каде добиваме $(x,y)\in\{(4,6),(10,0),(2,-8),(-4,-2)\}$.

60. Определи ги сите цели броеви n такви што $\sqrt{n^2+4n-5}$ е цел број.

Решение. Нека $\sqrt{n^2+4n-5}=m$, $m,n\in\mathbb{Z}$. Последното равенство последователно е еквивалентно со следните равенства

$$n^2+4n-5=m^2$$
$$n^2+4n+4=m^2+9$$
$$(n+2)^2=m^2+9$$
$$(n+2)^2-m^2=9$$
$$(n+2-m)(n+2+m)=9.$$

Последната равенка треба да ја решиме во множеството цели броеви, па затоа бидејќи $m\geq 0$, т.е. $n+m+2\geq n-m+2$ треба да ги решиме системите равенка

$$\begin{cases} n-m+2=1 \\ n+m+2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} n-m+2=-9 \\ n+m+2=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} n-m+2=3 \\ n+m+2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} n-m+2=-3 \\ n+m+2=-3 \end{cases}$$

од каде лесно добиваме дека бараните цели броеви се

$$n=-7, n=-5, n=1 \text{ и } n=3.$$

61. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2-1=y^2+104.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x-y)(x+y)=105.$$

Бидејќи $x+y>x-y$ и $105=3\cdot 5\cdot 7=1\cdot 105=3\cdot 35=5\cdot 21=7\cdot 15$, од последната равенка следува

1) $x-y=1, x+y=105$, па затоа $x=53, y=52$,
2) $x-y=3, x+y=35$, па затоа $x=19, y=16$,
3) $x-y=5, x+y=21$, па затоа $x=13, y=8$,
4) $x-y=7, x+y=15$, па затоа $x=11, y=4$.

62. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$x^2+y^2=2x.$$

Решение. Равенката $x^2+y^2=2x$ е еквивалентна на равенката

$$(x-1)^2+y^2=1.$$

Збир на два квадрати цели броеви е еднаков на 1 ако едниот е еднаков на 1, а другиот е еднаков на 0. Затоа се можни следниве два случаја:

1) $(x-1)^2=0, y^2=1$, од каде ги добиваме решенијата $(x,y)=(1,1)$ и $(x,y)=(1,-1)$.

2) $(x-1)^2=1, y^2=0$, од каде ги добиваме решенијата $(x,y)=(2,0)$ и $(x,y)=(0,0)$.

63. Во множеството природни броеви реши ја равенката:

$$x^2-1992=y^2.$$

Решение. Имаме $x^2-y^2=1992$, па затоа $(x-y)(x+y)=2^3\cdot 3\cdot 83$. Броевите $x-y$ и $x+y$ се со иста парност, па како нивниот производ е делив со 8, заклучуваме дека едниот е делив со 3, а другиот е делив со 4. Поголемиот од овие броеви, а тоа е бројот $x+y$ е делив со 83. Според тоа, $x-y\in\{2,4,6,12\}$ и со непосредна проверка на сите можности добиваме дека решениеја на дадената равенка се подредените парови: $(89,77),(169,163),(251,247)$ и $(499,497)$

64. На колку начини бројот 1991 може да се запише како збир на последователни природни броеви?

Решение. Нека $n+(n+1)+(n+2)+...+(n+k)=1991$. Тогаш

$$n(k+1)+1+2+...+k=1991$$

$$n(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}=1991$$

$$(k+1)(2n+k)=2\cdot 1991$$

$$(k+1)(2n+k)=2\cdot 11\cdot 181.$$

Од $2\cdot 11\cdot 181=(k+1)(2n+k)>k^2$ следува $k<64$, па затоа $k+1\in\{2,11,22\}$.

а) Ако $k+1=2$, тогаш $k=1$ и $n=995$, т.е. $995+996=1991$.

б) Ако $k+1=11$, тогаш $k=10$ и $2n+10=362$, т.е. $n=176$ и важи $176+177+178+...+186=1991$.

в) Ако $k+1=22$, тогаш $k=21$ и $2n+21=181$, т.е. $n=80$ и важи $80+81+82+...+101=1991$.

Конечно, бројот 1991 како збир на последователни природни броеви може да се запише на три начини.

65. Во множеството природни броеви реши ја равенката:

$$\frac{2x-5}{3}+\sqrt{x^2-8x+16}=\frac{2}{3}+\frac{x-2}{6}-\frac{x-4}{2}.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$\frac{2x-5}{3}+|x-4|=\frac{2}{3}+\frac{x-2}{6}-\frac{x-4}{2}.$$

За $x\geq 4$ равенката се сведува на равенката $x=4$, што е едно решение на почетната равенка. За $x<4$ равенката се сведува на $0=0$, што значи дека секој $x<4$ е решение на равенката. Од овие решенија на множеството природни броеви припаѓаат 1, 2 и 3. Конечно, бараните решеија на равенката се $x\in\{1,2,3,4\}$.

66. Во множеството природни броеви реши ја равенката:

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1).$$

Решение. Последователно добиваме

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1),$$
$$(x+y)^3-2xy(x+y)=8((x+y)^2-xy+1),$$
$$((x+y)^2-2xy)(x+y)=8((x+y)^2-xy+1).$$

Воведуваме смени $x+y=u$ и $xy=v$ и добиваме

$$u(u^2+2v)=8(u^2-v+1).$$

Од последното равенство следува дека u мора да биде парен, т.е. $u=2t, t\in\mathbb{N}$. Заменуваме во горната равенка и по средувањето добиваме

$$2t^3-tv=8t^2-2v+2,$$

од каде ја добиваме равенката

$$v=2t^2-4t-8-\frac{18}{t-2}, t\neq 2.$$

Понатаму, за да решенијата се целобројни мора $t-2|18$, т.е.

$$t-2\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18\},$$

од каде добиваме

$$t\in\{-16,-7,-8,-1,0,1,3,4,5,8,11,20\}.$$

Но, t е природен број, па затоа $t\in\{1,3,4,5,8,11,20\}$. Со замена на добиените вредности добиваме

t	1	3	4	5	8	11	20
u	2	6	8	10	16	22	40
v	8	–20	–1	16	85	188	711

Решенија за x и y во множеството природни броеви се добиваат единствено за $(t,u,v)=(5,10,16)$ и притоа $(x,y)\in\{(2,8),(8,2)\}$.

За $t=2$, добиваме $u=4$ и со замена во $u(u^2+2v)=8(u^2-v+1)$ добиваме $64=120$, што не е можно.

Конечно, единствени решенија на почетната равенка се

$$(x,y)\in\{(2,8),(8,2)\}.$$

67. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Решение. Броевите $\frac{x^2}{9}$ и $\frac{y^2}{25}$ се два ненегативни броја чиј збир е еднаков на 1. Затоа секој од нив е помал или еднаков на 1, т.е. $\frac{x^2}{9}\le 1$ и $\frac{y^2}{25}\le 1$. Последните неравенства се еквивалентни со неравенствата $x^2\le 9$ и $y^2\le 25$. Според тоа, $-3\le x\le 3$ и $-5\le y\le 5$.

За $x=\pm 3$, добиваме $\frac{(\pm 3)^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, па затоа $y=0$.

За $x=\pm 2$, добиваме $\frac{(\pm 2)^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, па е $y^2=\frac{125}{9}$ и во случјаов немаме целобројни решенија.

За $x=\pm 1$, добиваме $\frac{(\pm 1)^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, па е $y^2=\frac{200}{9}$ и во случјаов немаме целобројни решенија.

За $x=0$, добиваме $\frac{0^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, па затоа $y=\pm 5$.

Конечно, решенија на задачата се подредените парови: $(-3,0),(3,0),$ $(0,-5)$ и $(0,5)$.

68. Во множеството природни броеви реши ја равенката:

$$x^2+y^2=2017^2.$$

Решение. Нека x, y е решение на дадената равенка. Бидејќи 2017 е непарен број, броевите x и y се со различна парност. Нека $y=2k$, каде k е природен број. Тогаш

$$4k^2=2017^2-x^2=(2017-x)(2017+x).$$

Ако $d>1$ е заеднички делител на $2017-x$ и $2017+x$, тогаш d е делител и на $(2017-x)+(2017+x)=2\cdot 2017$. Но 2017 е прост број и заклучуваме, дека $d=2$, бидејќи $d=2017$ не е можно. Тогаш $2017-x=2m$ и $2017+x=2n$, каде m и n се заемно прости. Имаме $k^2=mn,$ од каде следува дека m и n се точни квадрати, т.е. $m=a^2$ и $n=b^2$. Значи, $k=ab$ и $y=2ab$. Од равенствата $2017-x=2m=2a^2$ и $2017+x=2n=2b^2$ после одземањето на првото од второто наоѓаме $x=b^2-a^2$. Оттука

$$2017^2=x^2+y^2=(b^2-a^2)^2+4a^2b^2=a^4+b^4+2a^2b^2=(a^2+b^2)^2$$

и значи $a^2+b^2=2017$.

Да ја разгледаме равеката $a^2+b^2=2017$. Забележуваме, дека бројот 2017 дава остаток 1 при делење со 3. Оттука следува дека еден од броевите a и b сигурно е делив со 3. Освен тоа, бројот 2017 дава остаток 2 при делење со 5. Тоа е можно само ако остатоците на a^2 и b^2 при делење со 5 се еднакви на 1. Нека a е делив со 3. Тогаш можните вредности на a се: 6, 9, 21, 24, 36 и 39, бидејќи $44^2<2017<45^2$. Од нив само 9 е решение. Останатите се отфрлаат со непосредна проверка. Оттука следува $9^2+44^2=2017$, т.е. $b=44$. Според тоа, претставувањето на 2017 като збир на два квадрата е единствено. Сега лесно наоѓаме дека

$$x=44^2-9^2=1855 \text{ и } y=2\cdot 44\cdot 9=792,$$

т.е. $1855^2+792^2=2017^2$.

69. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$2^x+1=y^2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$2^x=(y-1)(y+1).$$

Можни се два случаја.

1) $y+1=2^a$, $y-1=2^b$, ($a>b$), па затоа

$$2=y+1-(y-1)=2^a-2^b=2^b(2^{a-b}-1).$$

Оттука, бидејќи $2^{a-b}-1$ е непарен број следува $2^b=2$ и $2^{a-b}-1=1$, односно $b=1$ и $a=2$. Значи, $y+1=2^2$, т.е. $y=3$ и $2^x+1=9$, односно $x=3$.

2) $y+1=-2^a$, $y-1=-2^b$, ($a<b$), па затоа

$$2=y+1-(y-1)=2^b-2^a=2^a(2^{b-a}-1).$$

Оттука, бидејќи $2^{b-a}-1$ е непарен број следува $2^a=2$ и $2^{b-a}-1=1$, односно $b=2$ и $a=1$. Значи, $y+1=-2$, т.е. $y=-3$ и $2^x+1=9$, односно $x=3$.

Конечно, бараните броеви се $(x,y)\in\{(3,3),(3,-3)\}$.

II.4. КОНГРУЕНЦИИ

70. При делењето на бројот m со бројот 4 се добива остаток 2. Определи го остатокот кој се добива при делењето на бројот m^3-3m со бројот 4.

Решение. *Прв начин*. Имаме $m=4k+2$, па затоа

$$m^3-m=(4k+2)^3-3(4k+2)=64k^3+96k^2+48k+8-12k-6$$
$$=64k^3+96k^2+36k+2=4k(16k^2+24k+9)+2,$$

што значи дека остатокот при делењето на m^3-3m со 4 е 2.

Втор начин. Нека $m\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$. Тогаш

$$m^3\equiv 2^3\equiv 0(\mathrm{mod}\,4) \text{ и } 3m\equiv 6\equiv 2(\mathrm{mod}\,4),$$

па затоа $m^3-3m\equiv 0+2=2(\mathrm{mod}\,4)$.

71. Даден е бројот $M=19^{91}-91^{19}$.

а) Докажи дека $M>0$.

б) Докажи дека $72\,|\,M$.

Решение. а) Имаме

$$19^{91}>16^{91}=(2^4)^{91}=2^{364}=(2^7)^{52}=128^{52}>91^{52}>91^{19}.$$

б) Од $19\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$ и $91\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$ следува

$$19^{91}-91^{19}\equiv 1^{91}-1^{19}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,9), \text{ т.е. } 9\,|\,M.$$

Понатаму, $19\equiv 3(\mathrm{mod}\,8)$ и $91\equiv 3(\mathrm{mod}\,8)$, па затоа

$$19^{91}-91^{19}\equiv 3^{91}-3^{19}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,8), \text{ т.е. } 8\,|\,M.$$

Конечно, бидејќи $\mathrm{NZD}(8,9)=1$, од $9\,|\,M$ и $8\,|\,M$ следува $8\cdot 9\,|\,M$, т.е. $72\,|\,M$.

72. Нека $S=p_1^{1996}+p_2^{1996}+...+p_{1996}^{1996}$, каде $p_1,p_2,...,p_{1996}$ се првите 1996 прости броеви. Докажи дека $5|S$.

Решение. Збирот $S=p_1^{1996}+p_2^{1996}+...+p_{1996}^{1996}$ всушност е збирот

$$S=2^{1996}+3^{1996}+5^{1996}+7^{1996}+...+p_{1996}^{1996}.$$

Сите прости броеви, освен 2 и 5 завршуваат на цифрите 1, 3, 7 или 9. Понатаму, ако еден природен број n завршува на една од цифрите 1, 3, 7 или 9, тогаш $n^4\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,10)$, па затоа $n^{1996}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,10)$. Од друга страна $5^{1996}\equiv 5\,(\mathrm{mod}\,10)$ и $2^{1996}\equiv 6\,(\mathrm{mod}\,10)$, па затоа

$$S\equiv 6+5+(1996-2)\cdot 1\equiv 5\,(\mathrm{mod}\,10).$$

Според тоа, збирот S завршува на цифрата 5, па затоа тој е делив со 5.

73. Дали постои природен број n за кој бројот $n^2+n+2006$ е делив со 2005?

Решение. Имаме $2005=5\cdot 401$. Значи, ако бројот е делив со 2005, тој мора да е делив со 5. Но, тогаш бројот n^2+n+1 треба да е делив со 5. Меѓутоа,

- ако $n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $n^2+n+1\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,5)$,
- ако $n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $n^2+n+1\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,5)$,
- ако $n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $n^2+n+1\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,5)$,
- ако $n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $n^2+n+1\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,5)$,
- ако $n\equiv 4\,(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $n^2+n+1\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,5)$.

Според тоа, не постои природен број n за кој бројот $n^2+n+2006$ е делив со 5, па затоа не постои природен број n за кој бројот $n^2+n+2006$ е делив 2005.

74. Дали можат броевите $1^1,2^2,...,2008^{2008}$ да се запишат еден по друг, во произволен редослед, така што добиениот број да биде точен квадрат.

Решение. Ќе ги користиме следниве тврдења:

Лема 1. Ако $x\in\mathbb{N}$, тогаш $x^2\equiv 0$ или $1\,(\mathrm{mod}\,3)$.

Доказ. Нека $x\in\mathbb{N}$. Тогаш $x=3k$, $x=3k+1$ или $x=3k+2$, па затоа

$$x^2=9k^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),$$

$$x^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3),$$
$$x^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3),$$

соодветно.

Конечно, $x^2 \equiv 0$ или $1\,(\mathrm{mod}\, 3)$, за секој природен број $x \in \mathbb{N}$. ■

Лема 2. За секој природен број a, важи $a \equiv S(a)\,(\mathrm{mod}\, 3)$, каде $S(a)$ е збирот на цифри на бројот a.

Доказ. Нека $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$, тогаш

$$\begin{aligned} a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} &= 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10^1 a_1 + a_0 \\ &= (10^n - 1) a_n + (10^{n-1} - 1) a_{n-1} + ... + (10^1 - 1) a_1 + a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \quad (1) \\ &= (10^n - 1) a_n + (10^{n-1} - 1) a_{n-1} + ... + (10^1 - 1) a_1 + S(a). \end{aligned}$$

Од друга страна, за секој $k \in \mathbb{N}$ важи

$$10^k - 1 = (10 - 1)(10^{k-1} + 10^{k-2} + ... + 10^1 + 1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3). \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) имаме $a \equiv S(a)\,(\mathrm{mod}\, 3)$. ■

Понатаму имаме

$$\begin{aligned} &(6k+1)^{6k+1} = [(6k+1)^k]^2 \cdot (6k+1) \equiv 1\,(\mathrm{mod}\, 3) \\ &(6k+2)^{6k+2} = [(6k+2)^{3k+1}]^2 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\, 3) \\ &(6k+3)^{6k+3} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\, 3) \\ &(6k+4)^{6k+4} = [(6k+1)^{3k+2}]^2 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\, 3) \\ &(6k+5)^{6k+5} = [(6k+5)^{3k+2}]^2 \cdot (6k+5) \equiv 2\,(\mathrm{mod}\, 3) \\ &(6k+6)^{6k+6} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\, 3), \end{aligned} \qquad (3)$$

за секој $k = 1, 2, 3, ...$.

Броевите $1^1, 2^2, ..., 2008^{2008}$ да ги разделиме во групи од по шест броја $(6k+1)^{6k+1}, (6k+2)^{6k+2}, (6k+3)^{6k+3}, (6k+4)^{6k+4}, (6k+5)^{6k+5}, (6k+6)^{6k+6}$, $k = 1, 2, ...$, и да ставиме

$$\begin{aligned} s_k = (6k+1)^{6k+1} + (6k+2)^{6k+2} + (6k+3)^{6k+3} + \\ + (6k+4)^{6k+4} + (6k+5)^{6k+5} + (6k+6)^{6k+6} \end{aligned},$$

за $k = 1, 2, 3, ...$. Од равенствата (3) и од својствата на конгруенциите следува

$$s_k \equiv 1 + 1 + 0 + 1 + 2 + 0 \equiv 2\,(\mathrm{mod}\, 3). \qquad (4)$$

за секој $k = 1, 2, 3, ...$.

Нека бројот A е добиен со запишување еден по друг, во произволен распоред, на броевите $1^1, 2^2, ..., 2008^{2008}$. Тогаш збирот на цифрите $S(A)$, на бројот A, е еднаков на збирот од збировите на цифрите $S(i^i)$ на броевите i^i, $i = 1, 2, ..., 2008$, па од лема 2 следува дека:

$$A \equiv S(A) = S(1^1) + S(2^2) + ... + S(2008^{2008}) \equiv 1^1 + 2^2 + ... + 2008^{2008} \pmod 3.$$

Понатаму, $2008 = 334 \cdot 6 + 4$ и ако ги искористиме равенствата (3) и (4) од својствата на конгруенциите добиваме

$$\begin{aligned} A &\equiv 1^1 + 2^2 + ... + 2008^{2008} \\ &\equiv s_1 + s_2 + ... + s_{664} + 2005^{2005} + 2006^{2006} + +2007^{2007} + 2008^{2008} \\ &\equiv 334 \cdot 2 + 1 + 1 + 0 + 1 = 671 \equiv 2 \pmod 3. \end{aligned}$$

Конечно, од лема 1 следува дека A не е точен квадрат.

75. Дали постојат природни броеви x и y такви што

а) $x^3 + y^4 = 2^{2003}$, б) $x^3 + y^4 = 2^{2005}$.

Решение. а) Разгледувајќи остатоци на третиот и четвртиот степен по модул 13, се добива дека левата страна на даденото равенство може да дава остатоци 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12 по модул 13, а додека $2^{2003} \equiv 7 \pmod{13}$. Според тоа, не постојат природни броеви x и y такви што $x^3 + y^4 = 2^{2003}$.

б) Од равенството

$$2^{2005} = 2 \cdot 2^{2004} = 2^{2004} + 2^{2004} = (2^{668})^3 + (2^{501})^4$$

следува дека постојат природни броеви кои го задоволуваат даденото равенство.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Квадрат на природен број има цифра на единиците 5. Дали неговата цифра на стотките е парна или непарна?

Решение. Квадрат на природен број има цифра на единиците 5 ако и само ако самиот број има цифра на единиците 5. Значи, бројот е од видот $10a+5$, па затоа неговиот квадрат е од видот

$$100a^2+100a+25=100a(a+1)+25.$$

Сега бројот кој од квадратот се добива со бришење на последните две цифри е бројот $a(a+1)$, кој е парен број, што значи дека цифрата на стотките на бројот $(10a+5)^2$ е парна.

2. Броевите од 1 до 17 се запишани во низа, секој број по еднаш, така што збирот на било кои два соседни броја е точен квадрат. Кој број е запишан во средината на низата?

Решение. Најголемиот збир на два од дадените броеви е 33, а најмалиот е 3. Точни квадрати помали од 33, а поголеми од 3 се: 4, 9, 16 и 25. Бидејќи бројот 17 собран само со бројот 8 дава точен квадрат и бројот 16 собран само со бројот 9 дава точен квадрат заклучуваме дека овие броеви се на двата краја на формираната низа. Сега, од условот на задачата следува низата:

17, 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9, 16.

Според тоа, во средината на низата е бројот 12.

3. Збирот на два природни броја е 2018. Ако се прецрта цифрата на единиците на едниот, ќе се добие другиот број. Определи ги сите такви броеви.

Решение. Нека броевите се x и y и нека $x>y$. Тогаш $x=10y+k$, каде k е прецртаната цифра.

Сега имаме $x+y=10y+k+y=11y+k$, па $11y+k=2018$. Значи, k е остатокот од делењето на 2018 со 11, т.е. $k=5$.

Според тоа $11y+5=2018$, па $y=183$. Следува $x=1835$.

4. Цифрата на единиците на шестцифрен број е 7. Ако цифрата на единиците се премести на местото на стоилјадитите, тогаш се добива број кој е пет пати поголем од почетниот. Кој е тој број?

Решение. Според условот на задачата $5\cdot\overline{abcde7}=\overline{7abcde}$. Сега, ако ставиме $\overline{abcde}=x$, добиваме $5(10x+7)=700000+x$, од каде следува $x=14285$. Конечно, бараниот шестцифрен број е 142857.

5. Горјан замислил двоцифрен број кај кој цифрата на десетките е двапати помала од цифрата на единиците. Ако овој број се зголеми за 18 се добива бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед. Кој број го замислил Горјан?

Решение. Нека цифрата на десетките е a. Тогаш цифрата на единиците е $2a$ и затоа $10a+2a+18=20a+a$, од каде добиваме $a=2$. Според тоа, Горјан го замислил бројот 24.

6. Едноцифрен број x е зголемен за 10 и со тоа бројот x е зголемен за некој процент. Ако добиениот број го зголемиме за истиот процент како при првото зголемување, го добиваме бројот 72. Определи го бројот x.

Решение. Ако непознатиот број го означиме со x, тогаш од условот на задачата ја добиваме равенката

$$x+10+\frac{10}{x}(x+10)=72,$$

која е еквивалентна со равенката $x^2-52x+100=0$, т.е. со равенката $(x-2)(x-50)=0$. Решенијата на последната равенка се $x=2$ и $x=50$, па како бројот x е едноцифрен добиваме $x=2$.

7. Дадени се четири броја: $\overline{abbcd}, \overline{bac}, \overline{ac}, c$ (a,b,c се различни цифри). Почнувајќи од вториот, секој број е еднаков на производот од цифрите на претходниот. Определи ги броевите $\overline{abbcd}, \overline{bac}, \overline{ac}, c$.

Решение. Од $a\cdot c=c$ следува дека $c=0$ или $a=1$. Ако $c=0$, тогаш $a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot d=0$, што не е можно. Значи, $a=1$. Од $b\cdot c=\overline{1c}$ добиваме $(b-1)c=10$. Оттука добиваме дека $c\in\{1,2,5\}$. Јасно е дека $c\neq 1$ (бидејќи $a=1$). Ако $c=2$, тогаш $b=6$. Но, тогаш $a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot d=612$, што не е можно бидејќи $17\,|\,612$. Ако $c=5$, тогаш $b=3$. Следува дека $3\cdot 3\cdot 5\cdot d=315$, односно $d=7$. Значи бараните броеви се 13357, 315, 15, 5.

8. Определи ги сите трицифрени броеви со различни цифри кои се деливи со секој двоцифрен број кој се добива со изоставување на една негова цифра без да се менува редоследот на останатите цифри.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е број кој ги задоволува условите на задачата. Тогаш $a \neq b \neq c \neq a$ и $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}}$, $\frac{\overline{abc}}{\overline{bc}}$, $\frac{\overline{abc}}{\overline{ac}}$ се цели броеви. Бидејќи $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{ab0}+c}{\overline{ab}} = 10 + \frac{c}{\overline{ab}}$, следува дека $\frac{c}{\overline{ab}}$ е цел број што е можно само ако $c = 0$. Бидејќи $\frac{\overline{ab0}}{\overline{a0}} = \frac{\overline{ab}}{a} = 10 + \frac{b}{a}$, следува дека a е делител на b. Според тоа, $a \in \{1,2,3,4\}$. Од $\frac{\overline{ab0}}{\overline{b0}} = \frac{\overline{ab}}{b} = \frac{10a}{b} + 1$ следува дека b е делител на $10a$. Од претходната дискусија добиваме дека броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се: 120, 150, 240, 360, 480.

9. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што

$$4 \cdot \overline{abcd} + 30 = \overline{dcba}.$$

Решение. Равенството од условот на задачата последователно е еквивалелнтно со равенствата

$$4(1000a + 100v + 10c + d) + 30 = 1000d + 100c + 10b + a$$

$$3999a + 390b + 30 = 996d + 60c$$

$$1333a + 130b + 10 = 332d + 20c.$$

Ако $a \geq 3$, тогаш левата страна на последното равенство е поголема или еднаква на $3 \cdot 1333 = 3999$, а десната страна е помала или еднаква на $9 \cdot 332 + 9 \cdot 20 < 3999$, што е противречност. Значи, $a \leq 2$.

1) Нека $a = 2$. Тогаш

$$1333 \cdot 2 + 130b + 10 = 332d + 20c$$

$$1338 + 65b = 166d + 10c.$$

Ако $d \leq 7$, тогаш десната страна е помала или еднаква на $166 \cdot 7 + 10 \cdot 9 < 1338$, па затоа $d \geq 8$. За $d = 8$ добиваме

$$1338 + 65b = 166 \cdot 8 + 10c$$

$$10 + 65b = 10$$

$$2 + 13b = 2c$$

па затоа $b = 0, c = 1$. Според тоа, $\overline{abcd} = 2018$.

Ако $d = 9$, тогаш

$$1338 + 65b = 166 \cdot 9 + 10c$$

$$65b = 10c + 156$$

што не е можно, бидејќи 156 не е делив со 5.

2) Ако $a = 1$, тогаш

$$1333 + 130b + 10 = 332d + 20c$$

што не е можно, бидејќи во последното равенство 1333 е непарен број, а сите други броеви се парни.

Конечно, бројот 2018 е единствено решение на задачата.

10. Определи го шестцифрениот број n чии производи со 2, 3, 4, 5 и 6 исто така се шестцифрени броеви запишани со истите цифри како и бројот n.

Упатство. Ако $n=\overline{abcdef}$, тогаш бидејќи $6n$ шестцифрен број заклучуваме дека $a=1$, т.е. бројот е од видот $n=\overline{1bcdef}$. Размислувајќи на аналоген начин добиваме $n=142857$.

11. Определи ги природните броеви a и b, $a>b$, за кои збирот на броевите $a+b, a-b, ab$ и $\frac{a}{b}$ е еднаков на 245.

Решение. Од условот на задчата следува дека $\frac{a}{b}=k$ е природен број. Според тоа,

$$a+b+a-b+ab+\frac{a}{b}=245$$
$$2a+ab+\frac{a}{b}=245$$
$$2bk+kb^2+k=245$$
$$k(b+1)^2=245.$$

Сега од $245=5\cdot 7^2$ следува $k=5$ и $b+1=7$, па затоа $b=6$ и $a=30$.

12. Ако на бројот x му се одземе 7 или му се додаде 2, се добиваат точни квадрати на природни броеви. Определи го бројот x.

Решение. Нека $x+2=a^2$ и $x-7=b^2$. Тогаш $a^2-b^2=9$, односно $(a-b)(a+b)=9$, па затоа

$$\begin{cases} a-b=1, \\ a+b=9, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a-b=3, \\ a+b=3. \end{cases}$$

Од првиот систем добиваме $a=5, b=4$, па затоа $x=23$, а од вториот систем добиваме $a=3, b=0$, па затоа $x=7$.

13. Бројот 10 запиши го како збир на два броја чии квадрати се однесуваат како $1:16$.

Решение. Ако првиот број е x, тогаш вториот е $10-x$ и важи

$$x^2:(10-x)^2=1:16$$

$$16x^2 = (10-x)^2$$
$$16x^2 = 100-20x+x^2$$
$$15x^2+20x-100=0$$
$$3x^2+4x-20=0$$
$$(x-2)(3x+10)=0.$$

Од последната равенка добиваме $x-2=0$ или $3x+10=0$, што значи $x=2$ или $x=-\frac{10}{3}$. Конечно, решение на задачата се броевите $-\frac{10}{3}$ и $\frac{40}{3}$, односно 2 и 8.

14. Кој број треба да се додаде на броителот и именителот на дропката $\frac{34}{53}$ за да се добие дропка еднаква на $\frac{4}{5}$?

Решение. Бројот кој треба да се додаде на броителот и именителот на дропката $\frac{34}{53}$ да го означиме со x. Имаме $\frac{34+x}{53+x}=\frac{4}{5}$, од каде добиваме $170+5x=212+4x$, т.е. $x=42$.

15. Дадена е дропка чиј именител е за 2020 поголем од броителот. Ако оваа дропка се собере со $\frac{1}{3}$, се добива дропка која е трипати поголема од дадената дропка. Определи ги именителот и броителот на дадената дропка.

Решение. Нека дадента дропка е x. Според условот на задачата имаме $x+\frac{1}{3}=3x$, па затоа $x=\frac{1}{6}=\frac{k}{6k}$. Значи, $6k-k=2020$, од каде добиваме $k=404$. Според тоа, бараната дропка е $\frac{404}{2424}$.

16. Ако броителот на некоја дропка се зголеми за 3, а именителот се намали за 2, се добива 2. Но, ако броителот на истата дропка се намали за 2, а именителот се зголеми за 3, се добива $\frac{1}{3}$. Определи ја оваа дропка.

Решение. Нека $\frac{x}{y}$ е бараната дропка. Од условите на задачата следува $\frac{x+3}{y-2}=2$ и $\frac{x-2}{y+3}=\frac{1}{3}$, од каде добиваме

$$\begin{cases} x+3=2(y-2) \\ 3(x-2)=y+3 \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} x = 2y - 7 \\ 3x = y + 9. \end{cases}$$

Решението на последниот систем е $x = 5, y = 6$, што значи дека бараната дропка е $\frac{5}{6}$.

17. Во одделението на Горјан учат 25 ученици и тие постигнале просечна оценка од 2,8. Ако се изостави успехот на Петар, тогаш просечната оценка на останатите ученици е 2,78. Определи го успехот на Петар.

Решение. Од условот на задачата следува $\frac{x_1+x_2+...+x_{25}}{25} = 2{,}8$, па затоа $x_1 + x_2 + ... + x_{25} = 70$. Понатаму, $\frac{x_1+x_2+...+x_{24}}{24} = 2{,}78$, од каде добиваме $x_1 + x_2 + ... + x_{24} = 66{,}72$. Конечно,

$$x_{25} = x_1 + x_2 + ... + x_{25} - (x_1 + x_2 + ... + x_{24}) = 70 - 66{,}72 = 3{,}28.$$

18. Во едно одделение има 10 момчиња и 15 девојчиња. На крајот на учебната година одделението имало просечен успех 4,00. Просечниот успех на девојчињата бил 3,80. Определи го просечниот успех на момчињата.

Решение. Нека на крајот на годината збирот на оценките на девојчињата е d, а на момчињата е m. Тогаш $\frac{d+m}{25} = 4$, т.е. $d + m = 100$. Имаме 15 девојчиња и како просечната оценка на девојчињата е 3,80 заклучуваме дека $d = 15 \cdot 3{,}8 = 57$. Според тоа, $57 + m = 100$, па затоа $m = 43$ и просечната оценка на момчињата е $\frac{m}{10} = \frac{43}{10} = 4{,}3$.

19. Кога два трицифрени броја се запишат еден по друг се добива шестцифрен број кој е трипати поголем од нивниот производ. Определи ги овие трицифрени броеви.

Решение. Нека трицифрените броеви се x и y. Од условот на задачата следува $3xy = 1000x + y$, односно $\frac{y}{x} = 3y - 1000$. Бидејќи x и y се трицифрени броеви добиваме $0 < \frac{y}{x} < 10$, па затоа $0 < 3y - 1000 < 10$, од каде добиваме $333 < y < 337$. Според тоа, $y \in \{334, 335, 336\}$, па затоа $\frac{y}{x} \in \{2, 5, 8\}$, а $x \in \{\frac{334}{2}, \frac{335}{5}, \frac{336}{8}\} = \{167, 67, 42\}$. Но, x е трицифрен број, што значи $x = 167$ и $y = 334$, при што $3 \cdot 167 \cdot 334 = 167334$.

20. Дадени се четири природни броја. При пресметување на сите можни ненегативни разлики на броевите добиваме 0, 2, 3 и 5. Определи ги овие броеви ако се знае дека збирот на двата најголеми броја е три пати поголем од збирот на двата најмали броја.

Решение. Нека бараните броеви се $a \le b \le c \le d$. Тогаш разликите $b-a$, $c-a$, $d-a$, $c-b$, $d-b$ и $d-c$ припаѓаат на множеството $\{0,2,3,5\}$. Јасно, некои од овие броеви се еднакви и $d-a=5$, како разлика на најголемиот и најмалиот број. Можни се следниве случаи:

1) $a=b<c<d$. Тогаш $b-a=0$, $d-a=d-b=5$ и $3(a+b)=c+d$, односно $3(a+a)=c+a+5$. Отука $4a=c-a+5$, па затоа $c-a+5$ мора да е делив со 4,што значи дека $c-a=3$, од каде добиваме $a=2=b, c=5, d=7$.

2) $a<b=c<d$. Тогаш $b-c=0, d-a=5$ и $c-a=b-a$. Бидејќи $3(a+b)=c+d$, добиваме $3(a+b)=b+a+5$, па затоа $2(a+b)=5$, што не е можно.

3) $a<b<c=d$. Тогаш $d-c=0, d-a=c-a=5$ и $3(a+b)=c+d=2(a+5)$. Значи, $4b=b-a+10$, па $b-a+10$ мора да е делив со 4, што значи дека $b-a=2$, а $b=3$. Конечно, $a=1, b=3, c=d=6$.

21. Дадена е низа од неколку последователни природни броеви. Бројот на природните броеви во оваа низа е за 2 помал од двократната вредност на најмалиот број во низата, а нивната аритметичка средина е 12,5. Определи ги овие броеви?

Решение. Нека $n+1, n+2, ..., n+m$ се бараните последователни природни броеви. Според условот на задачата $m+2=2(n+1)$, т.е. $m=2n$. Понатаму, збирот на бараните последователни броеви е еднаков на $mn+\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m(2n+m+1)}{2}$, па затоа од условот на задачата следува $\frac{m(2n+m+1)}{2m}=12,5$, односно $2n+m+1=25$. Според тоа, $2n+2n+1=25$, па затоа $n=6$ и конечно $m=2\cdot 6=12$. Значи, бараните последователни природни броеви се 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 и 18.

22. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои збирот на дропките $\frac{a+1}{a+4}$ и $\frac{5}{a-7}$ ќе биде еднаков на нивниот производ.

Решение. Според условот на задачата добиваме

$$\frac{a+1}{a+4}+\frac{5}{a-7}=\frac{a+1}{a+4}\cdot\frac{5}{a-7}$$
$$\frac{(a+1)(a-7)+5(a+4)}{(a+4)(a-7)}=\frac{5(a+1)}{(a+4)(a-7)}$$
$$\frac{a^2-a+13}{(a+4)(a-7)}=\frac{5a+5}{(a+4)(a-7)}$$

од каде добиваме $a^2-a+13=5a+5$, односно $a^2-6a+8=0$, па затоа $a^2-4a-2a+8=0$, од каде следува $a(a-4)-2(a-4)=0$, т.е. $(a-2)(a-4)=0$. Од последната равенка добиваме $a-2=0$ или $a-4=0$, што значи дека бараните вредности се $a=2$ и $a=4$.

III.2. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

23. Во 4 часот наутро стрелките на часовникот зафаќаат агол од 120°. По колку време стрелките на часовникот за првпат повторно ќе зафаќаат агол од 120°?

Решение. За една минута големата стрелка поминува пат од $360^\circ:60=6^\circ$, а малата стрелка поминува пат од $(360^\circ:12):60=0{,}5^\circ$. Бидејќи по x минути големата стрелка треба да ја престигне малата стрелка и да направи разлика од 120°, добиваме $6^\circ x-0{,}5^\circ x=120^\circ+120^\circ$, т.е. $5{,}5^\circ x=240^\circ$, од каде наоѓаме $x=240:5{,}5=43\frac{7}{11}$ минути.

24. Павел тргнал за Прилеп неколку минути пред 9 часот, а кога стигнал, во неколку минути пред 12 часот, малата и големата стрелка на часовникот си ги замениле местата. Колку време Павел поминал на пат и кога тргнал за Прилеп?

Решение. Минутната (големата) стрелка поминува цел круг, додека часовната (малата) стрелка поминува $\frac{1}{12}$ од кругот (5 минути). Ако со x го означиме бројот на минутите кои Павел ги поминал на пат, тогаш дека за тоа време малата стрелка поминала $\frac{x}{12}$ минутни делови, па затоа $x-120+\frac{x}{12}=60$, т.е. $x=\frac{12}{13}\cdot180=2\,h\,46\frac{2}{3}\min$. Ако Павел тргнал во y минути пред 9, тогаш до 9 часот големата стрелка ќе помине y минутни делови, а малата $\frac{y}{12}$ минутни делови. Бидејќи растојанието меѓу стрелките е $\frac{180}{13}$ минутни делови, добиваме $\frac{180}{13}-\frac{y}{12}+y=15$, па затоа $y=\frac{12}{11}\cdot\frac{15}{13}$.

25. На прашањето „Колку е часот?“, Самоил му одговорил на Горјан: „Четвртина од изминатото време и половина од преостанатото време на овој ден го даваат точното време.“ Колку бил часот во тој момент?
Решение. Нека t е времето кое се бара. Имаме
$$\frac{t}{4}+\frac{24-t}{2}=t \quad\Leftrightarrow\quad t+2(24-t)=4t \quad\Leftrightarrow$$
$$5t=48 \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{48}{5}=9{,}6\,h=9\,h\,36\,\mathrm{min}.$$
Според тоа, во тој момент бил $9\,h\,36\,\mathrm{min}$.

26. Тројца пријатели Владо, Љубе и Божин копаат бунар. Владо и Љубе првиот ден ископале $\frac{1}{20}$ од бунарот, Љубе и Божин вториот ден ископале 7% од бунарот, а Владо и Божин третиот ден ископале $\frac{2}{25}$ од бунарот. Потоа бунарот го копале сите тројца заедно, при што секој работел исто како и претходните три дена. За колку дена, сметајќи ги и првите три дена, е завршено копањето на бунарот?
Решение. Секој од тројцата пријатели копал по два дена и тие заедно ископале $\frac{1}{20}+\frac{7}{100}+\frac{2}{25}=\frac{5+7+8}{100}=\frac{1}{5}$ од бунарот. Бидејќи им преостануваат $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ од бунарот тие тројцата заедно треба да копаат уште $4\cdot 2=8$ дена. Според тоа, копањето на бунарот е завршено за $3+8=11$ дена.

27. Молерот Киро молерисува двапати побрзо од својот помошник. Гарсоњерата на Петра заедно ја молерисале за 4 часа. Колку време на секој од нив му е потребно самостојно да ја молериса гарсоњерата на Петра?
Решение. Ако Киро ја завршува работата за x часови, тогаш неговиот помошник ја завршува работа за $2x$ часови. Затоа за 1 час двајцата заедно завршуваат $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{3}{2x}$ делови од работата. Според условот на задачата тие за 1 час заедно завршуваат $\frac{1}{4}$ од работата, па затоа $\frac{3}{2x}=\frac{1}{4}$, односно $x=6$ часа. Значи, Киро сам ќе ја молериса гарсоњерата за 6 часа, а неговиот помошник за 12 часа.

28. Еден работник сам може да заврши некоја работа за 20 дена, а друг работник истата таа работа сам може да ја заврши за 30 дена. Ако на првиот и вториот работник им се придружи трет работник, тогаш сите тројца работата заедно може да ја завршат за 8 дена. За кое време третиот работник сам може да ја заврши работата?

Решение. Нека x е бројот на деновите за кои третиот работник сам може да ја заврши работата. Првиот работник за еден ден завршува $\frac{1}{20}$ од работата, вториот работник за еден ден завршува $\frac{1}{30}$ од работа и третиот работник за еден ден завршува $\frac{1}{x}$ од работата. Сите тројца за еден ден завршуваат $\frac{1}{8}$ од работата, па затоа $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{x}=\frac{1}{8}$. Решението на последната равенка е $x=24$, што значи дека третиот работник сам ќе ја заврши работата за 24 дена.

29. Четириесет крави испасуваат една ливада за 50 дена. Истата ливада 60 крави ја испасуваат за 30 дена. За колку дена 20 крави ќе ја испасат оваа ливада? Колку крави можат да ја испасат оваа ливада за 75 дена? (Секоја крава пасе еднакво количество трева секој ден.)

Решение. Ако 40 крави на една ливада пасат 50 дена, тие испасуваат 2000 порции трева. На истата ливада 60 крави за 30 дена испасуваат 1800 порции трева. Значи, за 20 дена на ливадата расте трева за $2000-1800=200$ порции, т.е. секој ден растат $200:20=10$ порции трева. Бидејќи по 30 дена на ливадата имало 1800 порции трева, тоа значи дека на почетокот на ливадата имало $1800-30\cdot 10=1500$ порции. Нека 20 крави паселе x дена. Тогаш тие изеле $20x$ порции, а за x дена на ливадата вкупно ќе има $1500+10x$ порции. Според тоа, $20x=1500+10x$, т.е. $x=150$ дена.

Нека y крави ливадата ја испасдиле за 75 дена. Вкупниот број порции е $75y$, а количеството трева за 75 дена е $1500+75\cdot 10=2250$ порции. Затоа $y=2250:75=30$ крави.

30. Во езеро се влева поток кој секојдневно внесува исто количество вода. За 24 часа водата од езерото може да ја испијат 183 коњи, а 37 коњи, почнувајќи од денеска, целата вода може да ја испијат за 5 дена. За колку дена, почнувајќи од денес, еден коњ може да ја испие водата од езерото?

Решение. Нека x е количеството вода кое на почетокот се наоѓа во езерото, а y е количеството вода кое во текот на еден ден се влева во езерото и z е количеството вода кое за еден ден ја пие еден коњ. Тогаш $183z = x + y$ и $5 \cdot 37z = x + 5y$, од каде следува $5 \cdot 37z = 183z + 4y$, односно $z = 2y$ и $x = 183z - y = 183 \cdot 2y - y = 365y$. Ако почнувајќи од денес еден коњ ќе ја испие водата од езерото за n денови, тогаш $x + ny = nz$, па затоа $n = \frac{x}{z-y} = \frac{365y}{2y-y} = 365$ дена.

31. Тројца работници работејќи заедно една работа завршуваат за два дена. Првиот и вториот работник работејќи заедно истата работа ја завршуваат за три дена, а вториот и третиот работник работејќи заедно истата работа ја завршуваат за четири дена. За кое време секој од тројцата работници самостојно може да ја заврши оваа работа?

Решение. Нека првиот работник целата работа сам ја завршува за x денови, вториот за y денови и третиот за z денови. Првиот вториот и третиот работник за еден ден завршува $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$ делови од работата, соодветно. Затоа

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}.$$

Сега, ако од првата равенка ја одземеме втората равенка добиваме $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, а ако од првата равенка ја одземеме третата равенка добиваме $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Затоа, $\frac{1}{y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Конечно, првиот работник работата самостојно ја завршува за 4 дена, вториот за 12 дена и третиот за 6 дена.

32. Павел една работа ја завршил за 5 дена. Првиот ден завршил $\frac{1}{m}$ од работата, каде m е природен број. Вториот ден завршил $\frac{1}{n}$ од работата кој му останал по првиот ден, каде n е природен број поголем од m. Третиот ден завршил $\frac{1}{m}$ од остатокот од работата кој му останал по вториот ден, а четвртиот ден завршил уште $\frac{1}{n}$ од работата кој му останал по третиот ден. Петтиот ден Павел ја завршил останатата $\frac{1}{4}$ од целата работа. Определи ги броевите m и n.

Решение. Со O_1, O_2, O_3, O_4 да ги означиме деловите од работата кои останале да се завршат по првиот, вториот, третиот и четвртиот ден. Бидејќи Павел четвртиот ден завршил $\frac{1}{n}O_3$ од работата, за петтиот ден му останало да заврши $O_4 = O_3 - \frac{1}{n}O_3 = \frac{n-1}{n}O_3$ од работата. Слично, третиот ден завршил $\frac{1}{m}O_2$ од работата, па до завршување на работата му останало уште $O_3 = O_2 - \frac{1}{m}O_2 = \frac{m-1}{m}O_2$ од работата. Аналогно $O_2 = O_1 - \frac{1}{n}O_1 = \frac{n-1}{n}O_1$ и конечно, $O_1 = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$, бидејќи Павел првиот ден завршил $1m$ од работата. Според тоа,

$$O_4 = \frac{n-1}{n}O_3 = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{m-1}{m}O_2 = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{n-1}{n}O_1$$
$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{m-1}{m} = (\frac{(m-1)(n-1)}{mn})^2$$

и како $O_4 = \frac{1}{4}$, добиваме $(\frac{(m-1)(n-1)}{mn})^2 = \frac{1}{4}$, па затоа $\frac{(m-1)(n-1)}{mn} = \frac{1}{2}$, односно $2(m-1)(n-1) = mn$. Значи, $mn - 2m - 2n + 2 = 0$, од каде добиваме $m = 2 + \frac{2}{n-2}$. За да m е природен број потребно е $n-2=1$ или $n-2=2$, т.е. $n=3$ или $n=4$. За $n=3$ добиваме $m=4$, т.е. $m>n$, што противречи на условот на задачата, а за $n=4$, добиваме $m=3$. Според тоа, бараните броеви се $m=3$ и $n=4$.

33. Еден трактор може да изора една нива за 7 часа, а друг трактор истата нива може да ја изора за 5 часа. Ако двата трактори заедно ја ораат нивата, тогаш вториот трактор ќе изора 7 хектари повеќе од првиот трактор. Колку хектари има нивата?

Решение. Нека двата трактори ја ораат нивата за x часови. Првиот трактор за еден час ќе изора $\frac{1}{7}$ од нивата, што значи дека за x часови ќе изора $\frac{x}{7}$ од нивата. Слично, вториот трактор за x часови ќе изора $\frac{x}{5}$ од нивата. Затоа важи $\frac{x}{7} + \frac{x}{5} = 1$, од каде наоѓаме $x = \frac{35}{12}$.

Нека плоштината на нивата е y хектари. Првиот трактор изорува

$$\frac{x}{7}y = \frac{1}{7}\cdot\frac{35}{12}y = \frac{5}{12}y \text{ хектари,}$$

а вториот трактор изорува

$$\frac{x}{5}y = \frac{1}{5}\cdot\frac{35}{12}y = \frac{7}{12}y \text{ хектари.}$$

Затоа важи

$$\frac{7}{12}y-\frac{5}{12}y=7,$$

од каде наоѓаме дека $y=42$. Конечно, нивата има 42 хектари.

34. Колку литри чиста дестилирана вода треба да се измешаат со 4 литри петпроцентен раствор на алкохол за да се добие еднопроцентен раствор на алкохол?

Решение. Во 4 литри петпроцентен раствор има $2\,dl$ чист алкохол. Во новата смеша овие $2\,dl$ чист алкохол се 1%, што значи дека вкупниот волумен на растворот треба да биде $2\,dl\cdot 100=20\,l$. Значи, треба да дотуриме $20-4=16\,l$ дестилирана вода.

35. Колку литри вода треба да се дотурат во смеша од 40 литри 60% раствор на алкохол и 60 литри 40% раствор за да се добие 25% раствор на алкохол?

Решение. Во смешата има $40\cdot\frac{60}{100}+60\cdot\frac{40}{100}=48\,l$ алкохол, што значи дека има $100-48=52\,l$ вода. За да имаме 25% раствор на алкохол треба да имаме $3\cdot 48=144\,l$ вода. Тоа значи дека треба да се дотурат $144-52=92\,l$ вода.

36. Во една цистерна има 470 литри вода, а во друга има 240 литри вода. За еден час од првата цистерна истекува трипати повеќе вода отколку од втората. По пет часа во првата цистерна останале 20 литри вода помалку отколку во втората цистерна. Колку литри вода се одлеваат од секоја цистерна за 1 час?

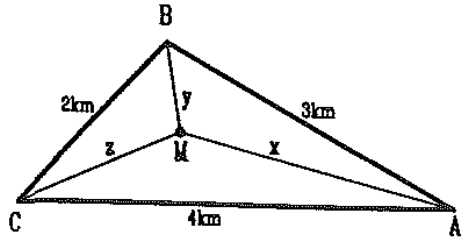
Решение. Нека од втората цистерна за 1 час истекува x литри вода. Тогаш од првата цистерна за 1 час истекуваат $3x$ литри вода. По 5 часа во првата цистерна остануваат $470-15x$ литри вода, а во втората цистерна остануваат $240-5x$ литри вода. Затоа

$$240-5x-20=470-15x$$

од каде добиваме $x=25\,l$. Конечно, од втората цистерна за 1 час истекуваат $25\,l$, а од првата истекуваат $75\,l$ вода.

37. Во селата A, B и C живеат 300, 200 и 100 ученици. Растојанијата меѓу селата се $\overline{AB}=3\,km, \overline{BC}=2\,km, \overline{AC}=4\,km$. Каде треба да се изгради заедничко училиште така што вкупниот број километри кој го минуваат сите ученици е најмал?

Решение. Нека M е точката во која треба да се изгради училиштето и нека се x,y и z растојанијата од точката M до точките A,B и C (цртеж десно). Тогаш вкупниот број километри кои од дома до училиштето го минуваат сите ученици е



$$S=300x+200y+100z=200(x+y)+100(x+z).$$

Понатаму, од неравенсвтото на триаголник следува $x+y\geq\overline{AB}=3$ и $x+z\geq\overline{AC}=4$, па затоа

$$S\geq 200\cdot 3+100\cdot 4=1000\,km.$$

Најмалата вредност за S е $1000\,km$ и се досигнува за $x+y=3\,km$ и $x+z=4\,km$, а тоа важи кога $x=0$. Според тоа, училиштето треба да се направи во местото A.

38. Турист поминал $105\,km$, при што секој ден поминувал еднаков цел број километри. Ако дневно поминувал $6\,km$ помалку, тогаш патувањето ќе траело два дена повеќе. Колку километри дневно поминувал туристот?

Решение. Нека туристот дневно поминувал по $x\,km$. Од условот на задачата следува $\frac{105}{x-6}-\frac{105}{x}=2$. Последната равенка е еквивалентна со равенката $x(x-6)=21\cdot 15$, од каде добиваме $x=21\,km$.

39. Воз се движел по угорнина со константна брзина. Во текот на движењето возот го сретнал Александар, кој се движи покрај пругата по удолнина со брзина од $6\,km/h$ и поминал покрај него за $12{,}6$ секунди. Малку покасно возот го стигнал Борис кој покрај пругата се движи по угорнина со брзина $3{,}6\,km/h$ и покрај него поминал за 15 секунди. Определи ја брзината на возот и неговата должина.

Решение. Ако v е брзината, а d е должината на возот, тогаш важи $d=(v+6)\cdot\frac{12{,}6}{3600}\,km$ и $d=(v-3{,}6)\cdot\frac{15}{3600}\,km$. Според тоа,

$$(v+6)\cdot\frac{12{,}6}{3600}=(v-3{,}6)\cdot\frac{15}{3600},$$

од каде наоѓаме $v=54\,km/h$, па затоа $d=(54+6)\cdot\frac{12{,}6}{3600}\,km=210\,m$

40. Возејќи со постојана брзина велосипедистот Киро за 15 минути го поминал половина од патот AB. Втората половина од патот ја возел со брзина за $6\,km/h$ помала од почетната брзина. Така целиот пат Киро го поминал за 33 минути. Определи ги брзините на движење на Киро и должината на патот AB.

Решение. Ако брзината на првата полвина од патот е v, тогаш брзината на втората половина од патот е $v-6$. Но втората половина од патот Киро ја поминал за $33-15=18$ минути, па затоа $\frac{15}{60}v=\frac{18}{60}(v-6)$, од каде добиваме $5v=6(v-6)$, односно $v=36\,km/h$. Според тоа, патот AB е долг $2\cdot\frac{15}{60}\cdot 36=18\,km$.

41. Местата A и B се поврзани со праволиниска пруга со должина $300\,km$. Од местото A кон местото B тргнува воз V_A со брзина $v_1=40\,km/h$. Истовремено од местото B кон местото A тргнува воз V_B со брзина $v_2=80\,km/h$. Во моментот на тргнување на возовите, од местото A кон возот V_B полетува ластовица. Кога ќе стигне до возот V_B, ластовицата лета назад кон возот V_A се додека не го сретне, па повторно лета кон возот V_B итн.

Ластовицата на овој начин лета меѓу возовите V_A и V_B со брзина од $120\,km/h$. Колку километри ќе прелета ластовицата до срећавањето на возовите V_A и V_B?

Решение. *Прв начин*. До моментот на средбата на возовите ќе поминат $t=\frac{300}{v_1+v_2}=\frac{300}{120}=2{,}5$ часа. За тоа време ластовицата ќе прелета $s=120\cdot 2{,}5=300\,km$.

Втор начин. До моментот на средбата возовите ќе поминат $300\,km$. Ластовицата лета со брзина од $120\,km/h$, а возовите се движат со вкупна брзина $v_1+v_2=80+40=120\,km/h$, т.е. со иста брзина како и ластовицата. Затоа ластовицата до моментот на средбата ќе го помине истиот пат како и возовите, т.е. ќе помине $300\,km$.

42. Бродовите A и B се движат по заемно нормални патеки кои се сечат во точката O. Бродот A од точката O е оддалечен $300\,km$ и се движи со брзина $40\,km/h$, а бродот B од точката O е оддалечен $100\,km$

и се движи со брзина $30\,km/h$. Определи кога растојанието меѓу бродовите ќе биде најмало и определи го тоа растојание.

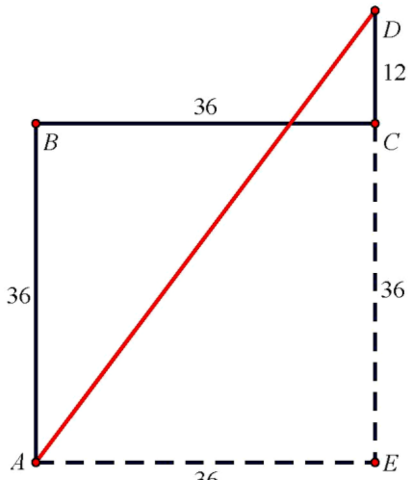
Решение. По x часови првиот брод од точката O е оддалечен од $300-40x$ километри, а вториот брод е оддалечен $100-30x$ километри. Бидејќи бродовите се движат по заемно нормални патеки, точките во кои се наоѓаат и точката O се темиња на правоаголен триаголник, па затоа растојанието меѓу бродовите е еднакво на

$$\sqrt{(300-40x)^2+(100-30x)^2}=50\sqrt{(x-6)^2+4}\,.$$

Според тоа, растојанието е најмало по 6 часа и тоа е еднакво на $50\cdot 2=100\,km$.

43. Брод од пристаниште испловил правоалиниски на север со брзина од $36\,km/h$. По еден час бродот свртел кон исток и праволиниски продолжил да плови со двојно поголема брзина. Откако го поминал истиот пат како од пристаништето до првото свртување, бродот со истата брзина уште 10 минути продолжил да се движи кон север. Колку бил во тој момент бродот оддалечен од пристаништето и со која просечна брзина пловел до тоа место?

Решение. Бродот прво пловел 1 час со брзина $36\,km/h$ и поминал $36\,km$ према север. Кон исток исто така поминал $36\,km$ со брзина $72\,km/h$, за што му требале $0{,}5\,h$. Понатаму, со брзина од $72\,km/h$ повторно пловел према север и тоа 10 минути или $\frac{1}{6}h$. Значи, во третата етапа бродот поминал $72\cdot\frac{1}{6}=12\,km$. Патеката по која се движел бродот е прикажана на цртежот десно. Растојанието на бродот до пристаништето е еднакво на $\overline{AD}=\sqrt{36^2+(36+12)^2}=60\,km$. Бродот патувал $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5}{3}h$ и поминал $36+36+12=84\,km$, што значи дека просечната брзина е еднаква на $84:\frac{5}{3}\,km/h=\frac{252}{3}\,km/h=50{,}4\,km/h$.



44. На кружна патека долга $1650\,m$ со различни постојани брзини од исто место тргнуваат два мотоциклисти. Ако се движат во спротивни насоки, тогаш тие се сретнуваат по 1 минута, а ако се движат во иста насока тогаш побрзиот мотоцклист ќе го стигне поспориот по 11 минути. Определи ги брзините на мотоциклистите.

Решение. Нека брзинта на побрзиот мтоциклист е x, а на поспориот е y. Кога тие се движат во спротивни насоки добиваме $(x+y)\cdot\frac{1}{60}=1650$ односно $x+y=99600$, а кога се движат во иста насока добиваме $(x-y)\cdot\frac{11}{60}=1650$, т.е. $x-y=9000$. Од добиениот систем равенки наоѓаме $x=54000\,m/h=54\,km/h$ и $y=45000\,m/h=45\,km/h$.

45. Воз се движи со брзина $4m/s$. Птица лета со брзина $12m/s$. За 60 секунди птица прелетала од крајот до почетокот на возот и назад. Колку е долг возот?

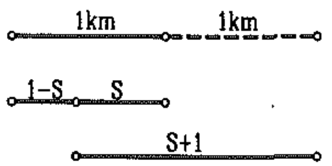
Решение. Кога птицата лета во насоката на движење на возот нејзината брзина во однос на возот изнесува $12-4=8m/s$. Кога птицата лета во насока спротивна од насоката на движење на возот, нејзинта брзина во однос на возот изнесува $12+4=16m/s$. Нека x е должината на возот во метри. Тогаш

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{16}=60$$
$$3x=960$$
$$x=320.$$

Значи, возот е долг $320m$.

46. Војничка колона има должина $1km$ и се движи рамномерно. Курир од чело на колоната дотрчува до крајот на колоната, предава порака и се враќа на чело на колоната. За тоа време колоната поминала пат од $1km$. Колкав пат поминал куририот?

Решение. Нека курирот се движи со брзина x, колоната се движи со брзина y и нека s е должината на патот кој курирот го поминува од челото на колоната до нејзиниот крај. Тогаш



$$\frac{s}{x}=\frac{1-s}{y},\ \frac{s+1}{x}=\frac{s}{y}.$$

Според тоа,

$$\frac{x}{y}=\frac{s}{1-s}=\frac{s+1}{s},\ s\neq 0,1,$$

па затоа $s=1-s^2$, т.е. $s=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значи, поминатиот пат на куририот е еднаков на $2s+1=(\sqrt{2}+1)\ km$.

47. Одејќи со постојана брзина пешак го поминал патот од местото A до местото B за 4 саати. Ако по една третина поминат пат пешакот ја зголеми брзината за $3km/h$, тогаш патот од A до B ќе го помине вкупно за 3 саати. Определи ја должината на патот од A до B.

Решение. Нека должината на патот е s. Тогаш брзината на пешакот е $\frac{s}{4}$. За поминување на третина од патот пешакот троши $\frac{s}{3}:\frac{s}{4}=\frac{4}{3}h$, па остануваат $3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}h$ да се движи со брзина $(\frac{s}{4}+3)\ km/h$ и притоа поминува $\frac{2s}{3}$. Значи, $(\frac{s}{4}+3)\frac{5}{3}=\frac{2s}{3}$, од каде добиваме $s=20\ km$.

48. Од местото A кон местото B тргнал велосипедист, кој се движел со брзина од $9km/h$. После 1 час и 15 минути од поаѓањето на велосипедистот, од местото B кон местото A тргнал моторциклист кој се движел со брзина од $21km/h$. На која оддалеченост од местото A се сретнале велосипедистот и моторциклистот, ако растојанието меѓу местата A и B е $81\frac{1}{4}km$.

Решение. Нека x е времето изразено во часови од поаѓањето на велосипедистот од местото A до средбата со моторциклистот. За тоа време велосипедистот поминал $9x$ километри. Бидејќи моторциклистот тргнал од местото B после 1 час и 15 минути, добиваме дека тој до средбата возел $x-\frac{5}{4}$ часови и поминал $21(x-\frac{5}{4})$ километри. Според тоа, $9x+21(x-\frac{5}{4})=81\frac{1}{4}$. Решение на последната равенка е $x=\frac{43}{12}h$. За тоа време велосипедистот поминал $9x=9\cdot\frac{43}{12}=32\frac{1}{4}km$. Според тоа, велосипедистот и моторциклистот се сретнале на $32\frac{1}{4}km$ од местото A.

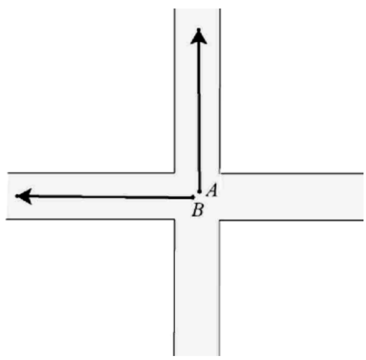
49. Автомобил го поминал патот од градот A до градот B за 5 часа, а во обратна насока од B до A за 4 часа. Притоа на угорнина се движел со брзина од $60\ km/h$, по рамен пат со брзина од $72\ km/h$ и по удолнина со брзина од $90\ km/h$. Колку е долг патот од A до B?

Решение. Нека x е должината на сите угорнини од A до B, y е должината на рамниот дел од патот и z е должината на сите удолнини од A до B. Тогаш z е должината на сите угорнини од B до A, y е должината на рамниот дел од патот и x е дожината на сите удолнини од B до A. Затоа важи $\frac{x}{60}+\frac{y}{72}+\frac{z}{90}=5$ и $\frac{x}{90}+\frac{y}{72}+\frac{z}{60}=4$. Според тоа, $6x+5y+4z=1800$ и $4x+5y+6z=1440$. Ако ги собереме последните две равенства и поделиме со 10 добиваме $x+y+z=324\,km$.

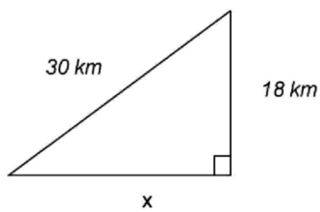
50. Двајца другари, Васко и Лазар, истовремено тргнале од Охрид и Битола во пресрет еден на друг со брзина $6\,km/h$. Истовремено од главата на Васко кон Лазар полетува мува со брзина од $50\,km/h$ и кога доаѓа до Лазар одма се враќа кон Васко. Движењето на мувата така продолжува се до среќавањето на Васко и Лазар. Колку километри поминала мувата ако растојанието од Охрид до Битола е $66\,km$.

Решение. Бидејќи Васко и Лазар се движат со брзини од $6\,km/h$, тие заедно за 1 час изминуваат $12\,km$, па до нивната средба ќе поминат $66:12=5,5$ часа. За тоа време мувата ќе помине $50\cdot 5,5=275\,km$.

51. На раскрсница се сретнале два автомобили, кои истовремено го продолжиле патот. Едниот автомобил тргнал на север со брзина од $54\,km/h$, а другиот на запад. По 20 минути автомобилите биле оддалечени еден од друг $30\,km$. Со која брзина се движел вториот автомобил?



Решение. Движењето на автомобилите е прикажано на цртежот десно. Од условот на задачата следува дека истото може да се скицира со помош на правоаголен триаголник. Ако автомобилот A се движи со брзина од $54\,km/h$, тогаш тој по 20 минути ќе помине



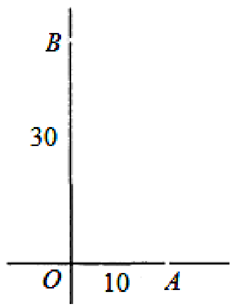
$54\cdot\frac{1}{3}=18\,km$ (цртеж лево).

За тоа време автомобилот B ќе помине пат $x=\sqrt{30^2-18^2}=24\,km$. Според тоа, вториот автомобил се дижел со брзина

$24:\frac{1}{3}=72\,km/h$.

52. Два прави пата се сечат во точка O под прав агол. По овие патишта кон O се движат двајца велоспедисти, првиот со брзина од $30/h$, а вториот со брзина од $40\,km/h$. Во еден момент првиот велосипедист на својот пат од раскрсницата O е оддалечен $10\,km$, а вториот на својот пат е оддалечен $30\,km$. За кое време од овој момент велосипедистите ќе бидат најмалку оддалечени еден од друг? Колкава е таа оддалеченост?

Решение. Нека t е бараното време, изразено во часови. За t часови првиот велосипедист од точката O ќе биде оддалечен $x=|10-30t|$ километри, а вториот ќе биде оддалечен $y=|30-40t|$ километри. Нека d е растојанието меѓу велосипедистите. Според условот на задачата по t часови тоа ќе биде најмало можно. Од Питагоровата теорема следува



$d^2=x^2+y^2$, односно $d^2=(10-30t)^2+(30-40t)^2$. Во последното равенство квадрираме и добиваме $d^2=2500t^2-3000t+1000$, односно $d^2=(50t-30)^2+100$. Бидејќи $(50t-30)^2\geq 0$ заклучуваме дека десната страна ќе прима најмала вредност ако $50t-30=0$, т.е. $t=\frac{3}{5}h$ и притоа $d^2=100$, односно $d=10\,km$.

Конечно, по $\frac{3}{5}h=36\min$ велосипедистите ќе бидат на најмало растојание еден од друг и тоа на $10\,km$.

53. Два автомобили тргнале истовремено еден од местото A за местото B, а другиот од местото B за местото A. Возејќи секој со постојана, но со меѓусебно различни брзини автомобилите се срenале по 8 часа возење. Ако брзината на автомобилот од местото A е за 14% поголема отколку што е, а брзината на автомобилот од местото B е за 15% поголема отколку што е, тогаш автомобилите ќе се сретнеле по 7 часа возење.

Кој автомобил бил побрз и колку пати неговата брзина е поголема од брзината на поспориот автомобил?

Решение. Брзината на автомобилот од местото A да ја означиме со x, а брзината на вториот автомобил со y. Тогаш важи $8x+8y=s$, каде s е должината на патот меѓу местата A и B. Ако брзината на првиот автомобил се зголеми за 14%, а брзината на induced вторито автомобил се зголеми за 15%, тогаш тие ќе имаат брзини $1{,}14x$ и $1{,}15y$, па затоа $7\cdot 1{,}14x+7\cdot 1{,}15y=s$. Според тоа, $8x+8y=7{,}98x+8{,}05y$, па затоа $x=2{,}5y$. Според тоа, брзината на автомобилот кој тргнал од местот B е 2,5 пати поголема од брзината на автомобилот кој тргнал од местото A.

54. Од местата *А* и *Б* оддалечени едно од друго 120 *km* истовремено тргнуваат еден кон друг двајца велосипедисти, првиот со брзина $10\frac{4}{5}km/h$, а вториот со 12,5 *km/h*. По колку време од тргнувањето велосипедистите ќе се сретнат?

Решение. Ако од местото *А* до местото на средба на велосипедистите има $x\,km$ (растојанието што го поминал првиот велосипедист), тогаш од местото *Б* до местото на средба на велосипедистите има $120-x\,km$ (растојанието што го поминал вториот велосипедист). Тие се движат ист временски период, па, имаме:

$$\frac{x}{10\frac{4}{5}}=\frac{120-x}{12{,}5} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5x}{54}=\frac{10(120-x)}{125} \quad\Leftrightarrow\quad 125x=108(120-x)$$

$$\Leftrightarrow\quad 125x+108x=12960 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{12960}{233}.$$

Времето кое се бара е:

$$t=\frac{\frac{12960}{233}}{10\frac{4}{5}}=\frac{\frac{12960}{233}}{\frac{54}{5}}=\frac{5\cdot 12960}{233\cdot 54}=1\frac{35}{233}h$$

55. Два велосипедисти тргнуваат од местата A и B во пресрет еден на друг. Секој од нив кога ќе стигне до целта се враќа назад кон местото од кое тргнал. Првпат велосипедистите се сретнале на $5\,km$ од A, а вториот пат се сретнале на $3\,km$ од B.Определи го растојанието од A до B.

Решение. Растојанието од A до B да го означиме со x, брзините на велосипедистите со v_1 и v_2, времето до првото среќавање со t_1, а времето до првото следно среќавање со t_2. Тогаш од условот на задачата следува $v_1t_1=5, v_2t_1=x-5, v_1t_2=3+(x-5)$ и $v_2t_2=5+(x-3)$.

Затоа $\frac{5}{x-2}=\frac{x-5}{x-2}$, од каде наоѓаме $12x-x^2=0$ и како $x>0$ добиваме $x=12\,km$.

56. На ист брег на една река се наоѓаат две места A и B, кои се меѓусебно оддалечени $80\,km$. Речен брод растојанието од местото A до местото B и назад до местото A го поминува за 8 часа и 20 минути. Брзината на бродот додека плови наспроти течението на реката е $16\,km/h$. Определи ја брзината на реката.

Решение. Нека v_b е брзината на бродот во мирна вода, а v_r е брзината на реката. Според условот на задачата $v_b-v_r=16\,km/h$, што значи дека кога бродот плови наспроти течението на реката тој растојанието од $80\,km$ го поминал за $80:16=5$ часа. Значи, кога плови по течението на реката тој пловел со брзина v_b+v_r и растојанието од $80\,km$ го поминал за 3 часа и 20 минути, т.е. за $3\frac{1}{3}$ часа. Затоа важи $v_b+v_r=\frac{80}{3\frac{1}{3}}=24\,km/h$. Според тоа, $2v_b=v_b+v_r+v_b-v_r=40$, т.е. $v_b=20\,km/h$ и $v_r=24-20=4\,km/h$.

57. Свежа трева содржи 80% вода, а сеното содржи 20% вода. Определи го количеството свежа трева кое е потребно за да се добие 1 тон сено.

Решение. Еден тон сено содржи $200\,kg$ вода и $800\,kg$ сува материја. Овие $800\,kg$ сува материја се само 20% во свежата трева. Значи, за да се добие 1 тон сено се потребни $5\cdot 800=4000\,kg=4\,t$ свежа трева.

58. Четири ученици, Ацо, Борис, Цветко и Дарко, собирале стара хартија. Заедно собрале $288\,kg$ хартија. Колку килограми собрал секојод нив, ако се знае дека Ацо собрал $36\,kg$ повеќе од Борис, односно $\frac{3}{4}$ од количеството хартија кое го собрале Борис и Цветко заедно, а Дарко собрал двапати повеќе од Цветко?

Решение. Нека a,b,c и d се количествата хертија кои ги собрале Ацо, Борис, Цветко и Дарко, соодветно. Тогаш

$$a=b+36,\ a=\tfrac{3}{4}(b+c),\ d=2c \text{ и } a+b+c+d=288.$$

Од $b+36=\frac{3}{4}(b+c)$, следува $b=3c-144$, а потоа $a=3c-108$. Сега, заменуваме во $a+b+c+d=288$ и добиваме

$$3c-108+3c-144+c+2c=288, \text{ т.е. } c=60.$$

Според тоа, $a=72$, $b=36$ и $d=120$.

III.3. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

59. Синот се наоѓа на 60 свои чекори пред таткото кој го стигнува. Додека синот направи 9 чекори, таткото прави 6 чекори, но 4 чекори на таткото се со иста должина како 7 чекори на синот. Колку чекори треба да направи таткото за да го стигне синот?

    Решение. Додека синот прави $9:3=3$ чекори, таткото прави $6:3=2$ чекори, па затоа додека синот прави $2\cdot 3=6$ чекори, таткото прави $2\cdot 2=4$ чекори кои се еднакви на 7 чекори на синот. Според тоа, со 4 свои чекори таткото го намалува растојанието за 1 чекор на синот. Бидејќи синот се наоѓа 60 свои чекори пред таткото, заклучуваме дека таткото треба да направи $60\cdot 4=240$ свои чекори.

60. Две шишиња со еднаков волумен се наполнети со смеша од вода и сок. Во првото шише односот на количествата вода и сок е $2:1$, а во второто шише е $4:1$. Ако содржините од двете шишиња ги прелееме во трето шише, колкав ќе биде во него односот на количествата вода и сок?

    Решение. Во првото шише има $\frac{1}{3}$ сок и $\frac{2}{3}$ вода, а во второто има $\frac{1}{5}$ сок и $\frac{4}{5}$ вода. Бидејќи волуменот на двете шишиња е еднаков, добиваме дека во третото шише е има $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{2}=\frac{4}{15}$ делови сок. Делот на водата е $\frac{11}{15}$, што значи дека односот на водата и сокот е $\frac{11}{15}:\frac{4}{15}=11:4$.

61. Во една чаша е направен сок од вода и сируп во однос $2:1$, а во друга во однос $3:2$. Сокот од двете чаши е прелеан во празен сад при што е добиен сок во кој односот на водата и сирупот е $27:17$. Определи го односот на количеството сок во двете чаши.

    Решение. Со x и y да го означиме количеството сок во првата и втората чаша, соодветно. Тогаш во третата чаша имаме $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y$ сируп и $\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y$ вода, па затоа

$$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y}{17}=\frac{\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y}{27}\text{, т.е. } \frac{5x+6y}{10x+9y}=\frac{17}{27}.$$

Конечно, од последното равенство следува $\frac{x}{y}=\frac{9}{35}$.

62. На еден остров $\frac{2}{3}$ од сите мажи се оженети, а $\frac{3}{5}$ од сите жени се омажени. Колкав дел од населението не е во брак?

Решение. Нека на островот има x мажи и y жени. Тогаш, според условот на задачата $\frac{2}{3}x=\frac{3}{5}y$, т.е. $y=\frac{10}{9}x$. Во брак не се $\frac{1}{3}x$ мажи и $\frac{2}{5}y$ жени. Според тоа,

$$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y}{x+y}=\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{9}x}{x+\frac{10}{9}x}=\frac{\frac{7}{9}}{\frac{19}{9}}=\frac{7}{19}$$

од населението не е во брак.

63. Јован има двапати повеќе браќа од сестри, а неговата сестра Мирјана има петпати повеќе браќа од сестри. Колку синови и колку ќерки има во ова семејство?

Решение. Нека во семејството има x браќа и y сестри. Тогаш имаме $x-1=2y$ и $x=5(y-1)$. Значи, $2y+1=5(y-1)$, т.е. $y=2$, па затоа $x=5$. Според тоа, во семејството има пет браќа и две сестри.

64. На еден училишен натпревар учествувале 240 ученици. Половината од учениците е еднаква на збирот на $\frac{3}{5}$ од девојчињата и $\frac{3}{7}$ од момчињата. Колку момчиња, а колку девојчиња учествувале на натпреварот?

Решение. Од условот на задачата следува дека $\frac{6}{5}$ од девојчињата и $\frac{6}{7}$ од момчињата е еднаков на бројот на учениците на натпреварот. Според тоа, $\frac{1}{5}$ од бројот на девојчињата е еднаква на $\frac{1}{7}$ од бројот на момчињата. Ако на натпреварот има x девочиња, тогаш има $240-x$ момчиња, па затоа $\frac{x}{5}=\frac{240-x}{7}$, односно $x=100$. Конечно, на натпреварот има 100 девојчиња и $240-100=140$ момчиња.

65. На промоција на нови книги во една книжарница на посетителите им се поделени џепни календари за 2020 година. Секој посетител добил еднаков број календари. Ако на промоцијата присуствувале 5 лица помалку, секој од нив ќе добиел по 2 календара повеќе, а ако присуству-

вале 4 лица повеќе, секој ќе добиел по 1 календар помалку. Колку лица присуствувале на промоцијата? Колку календари добило секое од присутните лица?

Решение. Нека x е бројот на лицата бна промоцијата, а n е бројот на календарите кои ги добило секое од присутните лица. Значи, поделени се вкупно nx календари. Ако на промоцијата имало 5 лица помалку, т.е. $x-5$ лица, тогаш секој од нив би добил 2 календари повеќе, т.е. $n+2$ календари. Значи, во случајов се поделени $(n+2)(x-5)$ календари, па затоа $nx=(n+2)(x-5)$, т.е. $2x-5n=10$.

Ако на промоцијата имало 4 лица повеќе, тогаш секое лице добива 1 календар помалку, па затоа се поделени $(n-1)(x+4)$ календари, што значи $(n-1)(x+4)=nx$, односно $x-4n=-4$. Со решавање на системот равенки

$$\begin{cases} 2x-5n=10 \\ x-4n=-4 \end{cases}$$

Добиваме $n=6, x=20$, што значи дека на промоцијата имало 20 лица и секое лице добило по 6 џебни календари.

66. Три девојки Ана, Маја и Александра, во шумата набрале 770 јаготки и одлучиле меѓусебно да ги поделат пропорционално со бројот на своите години. Секогаш кога Маја земала 4 јаготки, Ана земала по 3 јаготки, а на секои 6 јаготки кои ги земала Маја, Александра земала по 7 јаготки. Колку години има секоја од девојките, ако е познато дека тие заедно имаат 35 години? По колку јаготки добила секоја од нив?

Решение. Годините на Ана, Маја и Александра да ги означиме со x, y и z, соодветно. Од условот на задачата имаме,

$$\begin{cases} x+y+z=35 \\ y:x=4:3 \\ y:z=6:7 \end{cases}.$$

Следува $x=\frac{3}{4}y$ и $z=\frac{7}{6}y$, па со замена во $x+y+z=35$, имаме дека $x=9$, $y=12$ и $z=14$. Бидејќи $770:35=22$, добиваме дека Ана добила $9\cdot 22=198$ јаготки, Маја добила $12\cdot 22=264$ јаготки, а Александра добила $22\cdot 14=308$ јаготки.

67. Марија прочитала книга која има 480 страници така што секој ден таа читала еднаков број страници. Ако Марија секој ден читала по 16 страници повеќе, книгата ќе ја прочитала 5 дена порано. За колку дена Марија ја прочитала книгата?

Решение. Нека Марија ја прочитала книгата за x дена. Тогаш од условот на задачата следува равенката $\frac{480}{x}+16=\frac{480}{x-5}$, која е еквивалентна на равенката $480(x-5)+16x(x-5)=480x$, односно на равенката $x^2-5x-150=0$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $(x+10)(x-15)=0$, од каде добиваме $x=-10$ и $x=15$. Но, x мора да биде позитивен број, па затоа $x=15$, што значи дека Марија книгата ја прочитала за 15 дена.

68. Читајќи дневно еднаков број страници (освен последниот ден) Горјан прочитал книга од 264 страници. Ако тој читал дневно по 5 страници повеќе, тогаш книгата ќе ја прочитал 10 дена порано отколку во случај секој ден да читал по 5 страници помалку. Колку страници Горјан читал секој ден (освен последниот ден)?

Решение. Нека Горјан дневно читал x страници. Ако дневно читал 5 страници повеќе, тогаш книгата ќе ја приочитал за $\frac{264}{x+5}$ дена, а ако читал 5 страници помалку, ќе ја прочитал за $\frac{264}{x-5}$ дена. Затоа

$$\frac{264}{x-5}=\frac{264}{x+5}+10$$
$$264(x+5)=264(x-5)+10(x+5)(x-5)$$
$$2640=10(x^2-25)$$
$$x^2=289$$
$$x=17.$$

Значи, Горјан дневно читал 17 страници и бидејќи $264=17\cdot 15+9$ тој книгата ја прочитал за 16 дена, со тоа што последниот ден прочитал само 9 страници.

69. Јане прочитал пет книги. Од петте книги може да се формираат 5 множества од по четири книги. Четирите книги од секое од овие множества имале заедно 913, 973, 873, 1011 и 1002 страни. По колку страни имала секоја од петте книги?

Решение. Ако бројот на страните на книгите се a,b,c,d,e соодветно, тогаш треба да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} a+b+c+d=913 \\ a+b+c+e=973 \\ a+b+d+e=873 \\ a+c+d+e=1011 \\ b+c+d+e=1002 \end{cases}$$

Ако ги собереме сите равенки, се добива:

$$4(a+b+c+d+e)=4772$$
$$a+b+c+d+e=1193$$

Ако од оваа равенка се одземе секоја од петте равенки од системот, ќе се добие $a=182, b=191, c=320, d=220, e=280$ страни.

70. Во кутија се наоѓаат топчиња и коцки со црвена и зелена боја, при што топчињата се 48% од вкупниот број предмети во кутијата. Односот на бројот на црвените топчиња и бројот на зелените топчиња е еднаков на односот на сите црвени предмети и бројот на сите зелени предмети во кутијата. Определи го односот на бројот на црвените топчиња и бројот на црвените коцки во кутијата.

Решение. Нека a е бројот на црвените топчиња, b е бројот на зелените топчиња, c е бројот на црвените коцки и d е бројот на зелените коцки. Во кутијата има $a+b$ топчиња, $a+c$ црвени предмети, $b+d$ зелени предмети и вкупно $a+b+c+d$ предмети. Според условот на задачата

$$a+b=0,48(a+b+c+d) \qquad (1)$$

и

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}. \qquad (2)$$

Од (2) следува $\frac{a}{b}+1=\frac{a+c}{b+d}+1$, т.е. $\frac{a+b}{b}=\frac{a+b+c+d}{b+d}$. Сега од (1) следува $\frac{0,48(a+b+c+d)}{b}=\frac{a+b+c+d}{b+d}$, т.е. $\frac{b}{b+d}=0,48$. Ако (2) ја помножиме со b, тогаш од $\frac{b}{b+d}=0,48$ добиваме $a=\frac{a+c}{b+d}b=0,48(a+c)$. Според тоа, $0,52a=0,48c$, односно $\frac{a}{c}=\frac{0,48}{0,52}=\frac{12}{13}$.

71. Меѓу учениците на едно училиште спроведена е анкета – кој сака да гледа фудбал и кој – кошарка. Се покажало дека 90% од љубителите на фудбал сакаат и кошарка, а 72% од љубителите на кошарка сакаат и фудбал. Од анкетираните ученици 10% не сакаат ниту фудбал, ниту

кошарка. Колку проценти од анкетираните ученици сакаат само еден спорт? Кој е најмалиот можен број на анкетирани ученици?

Решение. Нека x% сакаат фудбал и y% – кошарка. Тогаш од условот го добиваме системот:

$$\begin{cases} 0,9x = 0,72y \\ 10 + y + (1-0,9)x = 100 \end{cases}$$

чие решение е $x = \frac{200}{3}\%$ и $y = \frac{250}{3}\%$. Процентот на оние, кои сакаат само еден спорт, е $0,1x + 0,28y = 30\%$. Бројот на анкетираните треба да се дели со 10 и 30. Најмалиот можен број анкетирани е 30. Навистина, ако се анкетирани 30 ученици, тогаш љубители на фудбал се $\frac{30 \cdot 200}{3 \cdot 100} = 20,$ лубители на кошарка се $\frac{30 \cdot 250}{3 \cdot 100} = 25,$ а 18 ги сакаат и двата спорта.

72. Марко одгледува лубеници и дињи. Секоја лубеница ја продава по 80 денари, а секоја диња ја продава по 60 денари. За да купи жица за оградување на градината, Марко мора да го продаден четвртина од родот на лубениците и половина од родот на дињите. Истата сума пари може да ја заработи со продажба на дванаесеттина од родот на лубениците и три четвртини од родот на дињите. Колку лубеници и колку дињи има Марко во својата градина ако вкупната вредност на лубениците е за 1920 денари поголема од вкупната вредност на дињите?

Решение. Нека во градината на Марко има x лубеници и y дињи. При продажбата на четвртина од бројот на лубениците и половина од бројот на дињите Марко ќе добие $\frac{x}{4} \cdot 80 + \frac{y}{2} \cdot 60 = 20x + 30y$ денари. При продажба на дванаесеттина од бројот на лубениците и три четвртини од бројот на дињите Марко ќе добие

$$\frac{x}{12} \cdot 80 + \frac{3y}{4} \cdot 60 = \frac{20x}{3} + 45y \text{ денари.}$$

Според условот на задачата важи

$$\begin{cases} 20x + 30y = \frac{20x}{3} + 45y \\ 80x - 60y = 1920. \end{cases}$$

Последниот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} 8x - 9y = 0 \\ 8x - 6y = 192 \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата добиваме $3y=192$, т.е. $y=64$. Со замена во првата равенка добиваме $8x=576$, т.е. $x=72$. Значи, Марко има 72 лубеници и 64 дињи.

73. Елена купила кујна што чинела 24000 денари. Таа платила 35% од вкупната цена. Остатокот требало да го плати на 24 еднакви месечни рати. Колку изнесува нејзината месечна рата?

Решение. Остатокот што требало да го плати Елена изнесува 65% од 24000 денари, односно $\frac{65}{100}\cdot 24000=15360$ денари. Таа сума треба да се подели на 24 еднакви месечни рати, и добиваме $15360:24=640$ денари. Според тоа, месечната рата изнесува 640 денари.

74. По намалувањето на цената за 20%, за 800 денари може да се купи една тетратка повеќе отколку што можело за 900 денари да се купат тетратки пред намалување на цената. Определи ја цената на една тетратка пред намалување на цената.

Решение. Нека x е цената на тетратката пред намалувањето. Намалената цена е $0{,}8x$. Од условот на задачата следува равенката $\frac{800}{0{,}8x}=\frac{900}{x}+1$, чие решение е $x=100$ денари.

75. Група пријатели поделиле определена сума пари така што првиот добил 10 евра и десеттина од остатокот, вториот добил 20 евра и десеттина од новиот остаток, третиот добил30 евра и десеттина од новиот остаток и така се додека не ја поделиле целата сума пари. На крајот се покажало дека сите добиле еднакви суми пари. Колку пријатели учествувале во поделбата на парите?

Решение. Нека x е сумата пари која пријателите ја поделиле. При поделбата првиот добил $10+\frac{1}{10}(x-10)=9+\frac{1}{10}x$ евра, по што останале $x-9-\frac{1}{10}x=\frac{9}{10}x-9$ евра. Понатаму, вториот добил

$$20+\frac{1}{10}(\frac{9}{10}x-9-20)=18-\frac{9}{10}+\frac{9}{100}x \text{ евра.}$$

Сите добиле еднакви суми пари, па затоа

$$9+\frac{1}{10}x=18-\frac{9}{10}+\frac{9}{100}x\text{, т.е. } x=810.$$

Секој од пријателите добил иста сума пари како и првиот кој добил $9+\frac{1}{10}\cdot 810=90$ евра. Значи, во поделбата учествувале $810:90=9$ пријатели.

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Дадени се три тврдења:
   1) Бројот $n+29$ е точен квадрат на некој природен број.
   2) Бројот n има цифра на единици 8.
   3) Бројот $n-60$ е точен квадрат на некој природен број.

   Определи го бројот n ако се знае дека две од трите тврдења се точни, а едно не е точно.

   Решение. Ако бројот n завршува на цифрата 8, тогаш броевите $n+29$ и $n-60$ завршуваат на цифрите 7 и 8, соодветно. Но квадрат на природен број не завршува на цифрите 7 и 8, па ако тврдењето 2) е точно следува дека две тврдења се неточни, што противречи на условот на задачата дека две тврдења се точни, а едно е неточно. Според тоа, точни е дека $n+29=x^2$ и $n-60=y^2$. Ако ги одземеме последните две равенства добиваме $x^2-y^2=89$, т.е. $(x-y)(x+y)=89$. Но, 89 е прост број, па затоа единствена можност е $x-y=1$ и $x+y=89$, од каде добиваме $x=45$ и $y=44$. Според тоа, $n=x^2-29=1996$.

2. Како со помош на садови од 3 литри и 5 литри во сад од 8 литри од чешма ќе туриш точно 7 литри вода?

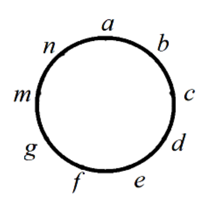
   Решение. Го полниме садот од $5l$ и водата ја претураме во садот од $8l$. Потоа повторно го полниме садот од $5l$ и од него го полниме садот од $3l$, по што ни остануваат $5-3=2l$. Оваа вода ја претураме во садот од $8l$ во кој ќе имаме $5+2=7l$.

3. Скакулците S_1, S_2, S_3 се наоѓаат на бројната оска во точките 1, 2, 3, соодветно. Секој скакулец скока преку еден од другите два скакулци така што доскокнува во точка која е централно симетрична со неговата положба во однос на скакулецот преку кој се изведува скокот. По неколку изведени скокови скакулците повторно се нашле во точките 1, 2, 3, но во редослед различен од претходниот. Докажи дека скакулците S_1 и S_3 меѓусебно ги замениле местата.

   Решение. Да забележиме дека во секој скок секој скакулец прескокнува растојание чиј мерен број е парен (тоа е удвоеното растојане до скакулецот кој го прескокнува). Затоа скакулецот кој на почетокот е во точката 2 при секоја примена се наоѓа во точка на која и соодветствува парен број, а останатте два скакулци во секој момент се наоѓаат во точки на кои им соодветствуваат непарни броеви. Затоа на крајот на прескокнувањата скакулецот S_2 кој бил во точката 2 повторно се наоѓа во оваа точка, а скакулците S_1 и S_3 меѓусебно ги замениле местата.

4. Во кутија се наоѓаат 10 бели, 20 црвени и 30 зелени топчиња. Определи го најмалиот број топчиња кои без гледање треба да се извлечат од кутијата за да сме сигурни дека имаме:
а) три црвени топчиња,
б) три топчиња од различна боја,
в) три топчиња со иста боја.
Решение. а) Најмалиот број топчиња кој треба да се извлече за да сигурно има 3 црвени е $10+30+3=43$ топчиња.
б) За сигурно да има три топчиња со различна боја најмалку треба да се извлечат $20+30+1=51$ топче.
в) За сигурно да има три топчиња во иста боја најмалку мора да се извлечат $2+2+2+1=7$ топчиња.

5. На кружницата се земени девет точки и на секоја од нив во произволен распоред им е придружена по една од цифрите 1, 2, 3,..., 8, 9 така што секоја цифра е запишана само по еднаш. Секои три последователни цифри, гледано во насоката на движењето на часовникот, формираат по еден трицифрен број. Определи го збирот на вака добиените девет броеви? Дали овој збир зависи од распоредот на цифрите на кружницата?
Решение. Нека a,b,c,d,e,f,m,n се деветте цифри запишани во редослед како што е прикажан на цртежот десно. Да разгледаме произволна цифра, да кажеме цифрата c. Лесно се забележува дека оваа цифра се појавува во три броја $\overline{abc},\overline{bcd},\overline{cde}$ и



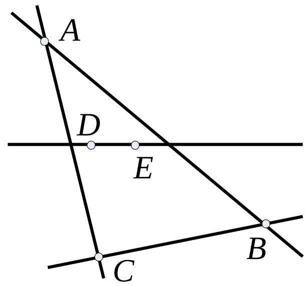
тоа на местото на единиците, десетките и стотките, соодветно. Јасно, ова важи за сите девет цифри, т.е. секоја од нив се јавува на три места и тоа на местото на единиците, десетките и стотките.
Од претходно изнесеното следува дека во сите 9 броеви на местото од стотките ќе се појави секоја од деветте цифри, на местото на десет-

ките ќе се појави секоја од деветте цифри и на местото на единиците ќе се појави секоја од деветте цифри. Затоа бараниот збир не зависи од распоредот на цифрите на кружницата. Бараниот збир е

$$100\cdot(1+2+...+8+9)+10\cdot(1+2+...+8+9)+1\cdot(1+2+...+8+9)=$$
$$=100\cdot45+10\cdot45+1\cdot45=4500+450+45=4995.$$

6. Дадени се пет точки во рамнината такви што било кои три од нив не лежат на права. Докажи дека од нив може да се изберат четири така што да бидат темиња на конвексен четириаголник!

Решение. Разгледуваме конвексна обвивка на тие пет точки, односно најмалото конвексно множество кое ги содржи тие точки. Ако тоа множество е петтаголник или четириаголник, тогаш доволно е да избереме четири од врвовите на множеството и добиваме решение. Ако тоа множество е триаголник, тогаш другите две мора да бидат внатре во триаголникот. Ако повлечеме права низ тие две точки, две од другите точки мора да лежат во една од полурамнините определени со таа права. Ги избираме тие две точки заедно со внатрешните две точки и добиваме конвексен четириаголник.



IV.2. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

7. На еден натпревар по математика биле зададени 5 задачи, а награда добивале оние ученици кои точно решиле најмалку две задачи. На натпреварот учествувале 32 ученика, а биле наградени 25% од учениците. Докажи дека меѓу зададените 5 задачи постои најмалку една задача која точно ја решиле најмногу 12 ученици.

Решение. Бидејќи 25% од 32 е 8, заклучуваме дека 8 ученици добиле награди. Секој од овие 8 ученици точно решил барем 2 задачи. Значи, секој од останатите 24 ученици точно решил најмногу 1 задача. Според тоа, најголемиот број точно решени задачи може да биде $8\cdot5+24=64$ и тоа е случај кога сите наградени ученици ги решиле сите задачи, а секој од останатите 24 ученици решил по 1 задача. Треба да покажеме дека постои задача која точно ја решиле најмногу 12 ученици. Навистина, ако секоја од петте задачи ја решиле најмалку по

13 ученици, тогаш вкупниот број решени задачи е најмалку $13\cdot 5=65$, што е противречност.

8. Нека a,b,c се непарни природни броеви. Докажи дека барем еден од броевите $ab-1, bc-1, ac-1$ е делив со 4.

Решение. Секој природен број има еден од облиците $4k, 4k+1,$ $4k+2, 4k+3$. Бидејќи броевите a,b,c се непарни природни броеви, тие имаат еден од облиците $4k+1, 4k+3$. Според принципот на Дирихле два од броевите a,b,c имаат ист облик. Без ограничување на општоста, можеме да претпоставиме дека a и b имаат ист облик. Според тоа, $a=4k_1+1, b=4k_2+1$ или $a=4k_1+3, b=4k_2+3$.

Во случајот $a=4k_1+1, b=4k_2+1$ имаме

$$\begin{aligned} ab-1 &= (4k_1+1)(4k_2+1)-1 \\ &= 16k_1k_2+4k_1+4k_2+1-1 \\ &= 4(4k_1k_2+k_1+k_2). \end{aligned}$$

Во случајот $a=4k_1+3, b=4k_2+3$ имаме

$$\begin{aligned} ab-1 &= (4k_1+3)(4k_2+3)-1 \\ &= 16k_1k_2+12k_1+12k_2+9-1 \\ &= 4(4k_1k_2+3k_1+3k_2+2). \end{aligned}$$

Според тоа, $4\,|\,ab-1$, односно еден од броевите $ab-1, bc-1, ac-1$ е делив со 4.

9. На првенство во фудбал во едно училиште учествуваат 8 екипи. Секоја екипа игра само по еден натпревар со секоја од останатите екипи. Докажи дека во секој момент за време на првенството, постојат барем две екипи кои дотогаш одиграле еднаков број на натпревари.

Решение. Ако секоја екипа одиграла некој натпревар, тогаш секоја од екипите одиграла 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 7 натпревари. Бидејќи имаме седум можности, а осум екипи, според принципот на Дирихле, следува дека има барем две екипи кои одиграле еднаков број на натпревари.

Ако во некој момент има некоја екипа (барем една) која сè уште не одиграла ниту еден натпревар, тогаш сигурно не постои екипа која ги одиграла сите натпревари. Јасно, во тој момент секоја од екипите можела да одигра: 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6 натпревари. Бидејќи имаме осум екипи, а седум можности повторно според принципот на Дирихле, две екипи одиграле еднаков број на натпревари.

10. Докажи дека е можно од било кои 2014 природни броја да се изберат 35 броја така што разликата на секои два избрани броја да е делива со 59?

Решение. Множеството природни броеви го делиме во 59 класи, според остатокот при делење со 59 (првата класа се броевите деливи со 59, втора класа се броевите кои при делење со 59 даваат остаток 1, ..., педесет и деветтата класа се броевите кои при делење со 59 даваат остаток 58). Бидејќи $2014 = 59 \cdot 34 + 8$ од принципот на Дирихле следува дека постои барем една класа во која има најмалку 35 броја од дадените 2014 броја.

Нека има најмалку 35 броја кои при делење со 59 даваат остаток k, $0 \le k \le 58$. Нека n_1 и n_2 се броеви од оваа класа. Важи

$$n_1 = 59m_1 + k, m_1 \in \mathbb{N}$$
$$n_2 = 59m_2 + k, m_2 \in \mathbb{N},$$

па затоа $n_1 - n_2 = 59(m_1 - m_2)$, т.е. $59 \,|\, (n_1 - n_2)$, од што следува тврдењето на задачата.

11. Во рамнината низ точката S минуваат 11 различни прави. Докажи дека меѓу аглите определени со овие 11 различни прави постојат најмалку два кои се помали од 17°.

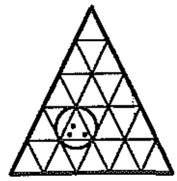
Решение. Дадените прави ја делат рамнината на 22 агли со заемно дисјунктни внатрешни области. Ако сите овие агли се поголеми или еднакви на 17°, тогаш нивната унија ќе биде поголема или еднаква на $22 \cdot 17^\circ = 374^\circ$, што не е можно бидејќи унијата на овие области е полниот агол. Значи, најмалку еден агол е помал од 17°, а како тој агол е еднаков на накрсниот агол добиваме дека најмалку два агли се помали од 17°.

12. Во внатрешноста на квадрат со страна 1 на произволен начин се распоредени 51 точка. Докажи дека постои круг со радиус помал од $\frac{1}{7}$, кој содржи најмалку три од дадените точки.

Решение. Дадениот квадрат да го поделиме на 25 квадрати со должина на страна $\frac{1}{5}$. Имаме 51 точка, па од принципот на Дирихле следува дека во еден од овие 25 мали квадрати има најмалку три точки. Радиусот на кругот опишан околу овој квадрат е $r = \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$.

13. Даден е рамностран триаголник со должина на страна $31\,dm$, во кој на произволен начин се распоредени 1989 точки. Докажи дека постои круг со радиус $6\,cm$ во кој се наоѓаат најмалку три од дадените точки.

Решение. Дадениот рамностран триаголник го делиме на помали рамнострани триаголници со должина на страна $1\,dm$ (цртеж десно). Вакви триаголници има $1+3+5+...+61=31^2=961$. Во триаголникот се зададени 1989 точки и како $1989=2\cdot 961+67$ од



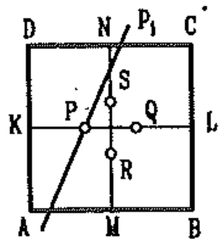
принципот на Дирихле следува дека постои мал триаголник во кој се наоѓаат најмалку три точки од даденото множество точки. Бидејќи радиусот на кругот опишан околу малиот триаголник е $\frac{\sqrt{3}}{3}\,dm<6\,cm$, заклучуваме дека постои круг со радиус $6\,cm$ во кој се наоѓаат најмалку три од дадените точки.

14. Даден е квадрат и 9 различни прави во неговата рамнина. Секоја од овие прави го дели квадратот на два трапези чии плоштини се однесуваат како $2:3$. Докажи дека меѓу дадените прави постојат три кои минуваат низ иста точка.

Решение. Дадениот квадрат да го означиме со $ABCD$ и да ја разгледаме една од дадените прави p_1. Ако се P_1 и P_2 плоштините на трапезите на кои правата p_1 го дели квадратот, а m_1 и m_2 се нивните средни лини, тогаш

$$P_1:P_2=m_1:m_2=2:3,$$

бидејќи висините на двата трапези се еднакви на страната на квадратот. Според тоа, правата p_1 минува низ една од точките P,Q,R и S, кои средните линии на дадениот квадрат ги делат во однос $2:3$ (види цртеж). Според тоа, девет прави минуваат низ овие четири точки, па од принципот на Дирихле следува дека постојат три



прави кои минуваат низ една од овие точки, што и трбаше да се докаже.

IV.3. ПРЕБРОЈУВАЊА

15. Определи го бројот на четирицифрените броеви чија прва цифра е парен број, втора цифра е прост број, трета цифра е непарен број и четврта цифра е сложен број.

Решение. Првата цифра може да биде 2, 4, 6 или 8, втората може да биде 2, 3, 5 или 7, трета може да биде 1, 3, 5, 7 или 9, четвртата може да биде 4, 6, 8 или 9. Според тоа, за првата цифра имаме 4 можности, за втората имаме 4 можбости, за третата имаме 5 можности и за четвртата имаме 4 можности, па затоа постојат $4\cdot 4\cdot 5\cdot 4=320$ четирицифрени броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

16. Определи го бројот на петцифрените броеви кои може да се запишат со помош на цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6 такви што:

а) цифрите може да се повторуваат,

б) цифрите не може да се повторуваат,

в) цифрите може да се повторуваат, но бројот не е делив со 4.

Решение. а) Во овој случај за цифрите на едеиниците, десетките, стотките и илјадитите имаме 7 можности, а за цифрата на десетилјадитите имаме 6 можности. Значи, постојат $6\cdot 7^4=14406$ броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

б) Во случајот за цифрата на десетилјадитите имаме 6 можности, за цифрата на илјадитите 6 ножности, за цифрата на стотките 5 можности, за цифрата на десетките 4 можности и за цифрата на единиците 3 можности, па бараниот број броеви е $6\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=2160$.

в) За цифрите на десетките, стотките, илјадитите и десетилјадитите бројот на можностите е како под а), но за цифрата на единиците имаме 5 можност. Според тоа, бараниот број броеви е $6\cdot 7^3\cdot 5=10290$.

17. а) Определи го бројот на шестцифрените броеви кои може да се запишат со помош на цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, такви што не мора да се користи секоја цифра.

б) Определи го бројот на шестцифрените броеви кои може да се запишат со помош на цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, такви што секоја цифра мора да се користи барем еднаш.

Решение. а) За секоја од шесте цифри имаме по 5 можности. Затоа имаме $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=5^6=15625$ такви броеви.

б) Ако секоја цифра се користи барем еднаш, тогаш една цифра се користи точно двапати, а сите останати се користат по еднаш. За тоа имаме 5 можности, бидејќи двапати може да се појави секоја од цифрите 1, 2, 3, 4 или 5. За направен избор на цифри, на пример 1, 1, 2, 3, 4 и 5, за цифрата која се појавува двапати можеме на $\frac{6\cdot5}{2}=15$ начини да ги избереме местата на кои ќе се појави. Потоа, за секој направен избор преостанатите четири цифри можеме да ги распореди-ме на $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ начини. Конечно, од претходно изнесеното следу-ва дека имаме $5\cdot15\cdot24=1800$ броеви такви што секоја цифра мора да се користи барем еднаш.

18. Колку петцифрени броеви постојат такви што првата цифра е парна, третата непарна, а последната прост број?

Решение. Првата цифра на броевите кои го задоволуваат условот на задачата е од множеството $\{2,4,6,8\}$, втората е од множеството од $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, третата цифра е од множеството $\{1,3,5,7,9\}$ четвртата цифра е од множеството $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и последната цифра е од множеството $\{2,3,5,7\}$. Значи, има $4\cdot10\cdot5\cdot10\cdot4=8000$ броеви со саканите својства.

19. Колку парови природни броеви (x,y) постојат такви што

$$3x+8y=1996\,?$$

Решение. Едно од можните решенија на равенката $3x+8y=1996$ во множеството природни броеви е $x_0=660, y_0=2$. Тогаш општото ре-шение на дадената равенка е определено со релациите $x=660-8k$ и $y=2+3k$. Бидејќи $y=3k+2$ и како $0\le y=3k+2\le1996:8<250$, од неравенството $-2\le3k\le248$ следува дека $0\le k\le82$, што значи дека има вкупно 83 решенија во множеството природни броеви.

20. На една од две паралелни прави се земени 8 точки. Колку точки се зе-мени на другата права, ако сите точки се темиња на вкупно 640 три-аголници?

Решение. Нека x е бројот на точките на втората права. На правата права има 8 точки и тие формираат $\frac{8\cdot7}{2}=28$ отсечки. Секоја од овие отсечки со секоја од x-те точки од втората права формираат $28x$ триаголници. Понатаму, точките од втората права формираат $\frac{x(x-1)}{2}$

отсечки и секоја од овие отсечки се секоја од 8-те точки од првата права формира $8\cdot\frac{x(x-1)}{2}=4x^2-4x$ триаголници. Вкупниот број триаголници треба да биде 640, па затоа

$$4x^2-4x+28x=640$$
$$x^2+6x-160=0$$
$$x^2+16x-10x-160=0$$
$$x(x+16)-10(x+16)=0$$
$$(x+16)(x-10)=0$$

од каде добиваме $x_1=10$ и $x_2=-16$. Но, бројот на точките не може да биде негативен, па затоа решение на задачата е $x_1=10$.

21. Во рамнината е даден конвексен четириаголник и во неговата внатрешност 1996 точки, такви што никои три од нив не лежат на иста права. Во произволен редослед поврзуваме по две точки со отсечки кои не се сечат меѓусебно. Оваа постапка ја продолжуваме се додека постои барем еден пар точки кој може да се поврзе со помош на отсечка која не сече ниту една од претходно повлечените отсечки. Колку отсечки кои не се сечат меѓусебно сме поврзале?

   Решение. По повлекување на сите отсечки кои може да се повлечат дадениот четириаголник $ABCD$ е поделен на определен број триаголници. Збирот на аглите на сите овие триаголници е еднаков на $1996\cdot360^\circ+360^\circ$, бидејќи збирот на аглите во секоја од 1996 точки внатре во четириаголникот е 360°, а збирот на аглите во четириаголникот е 360°. Затоа бројот на добиените триаголници е еднаков на

$$\frac{1996\cdot360^\circ+360^\circ}{180^\circ}=3992+2=3994.$$

   Добиените 3994 триаголници имаат $3994\cdot3$ страни. Четирите страни на дадениот четириаголник $ABCD$ не ги повлековме, а секоја од останатите повлечени отсечки е заедничка за два триаголника. Затоа бројот на повлечените отсечки кои не се сечат е еднаков на

$$\frac{3994\cdot3-4}{2}=1997\cdot3-2=5991-2=5989.$$

22. Дадени се 10 точки. Определи ги најголемиот број прави и најголемиот број рамнини определени со овие точки.

Решение. Најмногу прави се определени ако меѓу дадените точки не постојат три точки кои се колинеарни и тогаш со точките се определени $\frac{10\cdot9}{2}=45$ прави. Најмногу рамнини се определени ако секои четири точки не се компланарни (не лежат во иста рамнина). Тогаш секоја од добиените 45 прави со секоја од преостанатите 8 точки формира $45\cdot8=360$ рамнини. Меѓутоа, бидејќи рамнините $(AB)C, (AC)B$ и $(BC)A$ е една иста рамнина , добиваме дека бројот на рамнините е $\frac{360}{3}=120$.

Да забележиме дека бројот на рамнините всушност се определува со $\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2}=120$.

23. Дадени се разминувачки прави a и b, точките A_1, A_2, A_3 на правата a, точките B_1, B_2, B_3, B_4 на правата B и точка C надвор од овие прави. Определи го најголемиот број рамнини определени со овие точки.

Решение. Правата a со секоја од точките B_1, B_2, B_3, B_4, C оределува 5 рамнини, а правата b со секоја од точките A_1, A_2, A_3, C определува 4 рамнини. Тоа се вкупно $5+4=9$ рамнини. Сега, тројките точки C, A_i, B_k, $i=1,2,3; k=1,2,3,4$ определуваат 12 рамнини. Конечно, дадените точки определуваат вкупно $9+12=21$ рамнина.

24. На разминувачки прави p и q се дадени точките $A,B,C\in p$ и $D,E\in q$. Колку рамнини се определени до точките A,B,C,D,E,F ако точката F не припаѓа на ниту една од правите определени со точките A,B,C,D,E?

Решение. Со една од правите p или q и точка од другата права се определени $2+3=5$ рамнини. Правите p и q со точката F определуваат две рамнини, а $2\cdot3=6$ рамнини се определени со точката F и по една точка од правите p и q. Според тоа, со точките $A,B,C,$ D,E,F вкупно се определени $5+2+6=13$ рамнини.

25. Дали постои многуаголник кој има

а) 1710 дијагонали б) 1988 дијагонали.

Колку страни има многуаголникот ако истиот постои?

Решение. а) Бројот на дијагоналите на многуаголник со n страни е еднаков на $\frac{n(n-3)}{2}$. Ако постои многуаголник со 1710 дијагонали, тогаш $n(n-3)=2\cdot 1710=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 57=60\cdot 57$, што значи дека постои многуаголник со 1710 дијагонали и тој има 60 страни.

б) Во вториот случај имаме $n(n-3)=2\cdot 1988=2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 71$. Бидејќи 71 е прост број, а $2\cdot 2\cdot 2\cdot 7=56$ заклучуваме дека последната равенка нема решение во множеството природни броеви, што значи дека не постои многуаголник со 1988 дијагонали.

26. Односот на бројот на дијагоналите и бројот на отсечките чии крајни точки се темињата на даден многуаголник е 0,8. Кој е тој многуаголник?

Решение. Од условот на задачата следува $\frac{n(n-3)}{2}:\frac{n(n-1)}{2}=0{,}8$, од каде добиваме $10(n-3)=8(n-1)$, т.е. $n=11$. Значи, бараниот многуаголник е единаесетаголник.

27. Бројот на темињата на многуаголникот P е за 3 поголем од бројот на темињата на многуаголникот M, додека бројот на сите дијагонали на многуаголникот P е три пати поголем од бројот на сите дијагонали на многуаголникот M. Определи го бројот на страните на многуаголниците P и M.

Решение. Нека n е бројот на темињата на многуаголникот P. Тогаш $S(n)=\frac{n(n-3)}{2}$ е бројот на дијагоналите на многуаголникот P, а бројот на дијагоналите на многуаголникот M е $S(n-3)=\frac{(n-3)(n-6)}{2}$. Од условот на задачата следува $\frac{n(n-3)}{2}=\frac{3(n-3)(n-6)}{2}$, од каде добиваме $n=3(n-6)$, односно $n=9$. Според тоа, многуаголникот P е деветаголник, а многуаголникот M е шестаголник.

28. Ако бројот на страните на конвексен многуаголник се зголеми за 5, тогаш бројот на дијагоналите се зголемува за 100. Колку страни има тој многуаголник?

Решение. Нека бројот на страни на многуаголникот е n. Тогаш, бројот на дијагонали во тој многуаголник е $\frac{n(n-3)}{2}$. Од условот на задачата добиваме

$$\frac{n(n-3)}{2}+100=\frac{(n+5)(n+2)}{2},$$

од каде што $n=19$. Значи, многуаголникот има 19 страни.

29. Ако бројот на страните на еден многуаголник се зголеми за 4, тогаш бројот на неговите дијагонали ќе се зголеми за 30. Кој е тој многуаголник?

Решение. Бројот на дијагоналите на $n-$голник е $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Понатаму, $d_{n+4} = \frac{(n+4)(n+1)}{2}$. Од условот на задачата следува $d_n + 30 = d_{n+4}$, па затоа $\frac{n(n-3)}{2} + 30 = \frac{(n+4)(n+1)}{2}$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $n^2 - 3n + 60 = n^2 + 5n + 4$, т.е. на равенката $8n = 56$, чие решение е $n = 7$.

30. Ако бројот на страните на конвексниот многуаголник се зголеми за 5, тогаш бројот на неговите дијагонали се зголемува за 45. Определи го бројот на страните на почетниот многуаголник.

Решение. Нека бројот на страните на конвексниот многуаголник е n. Тогаш бројот на неговите дијагонали е еднаков на $\frac{n(n-3)}{2}$. Кога бројот на страните е $n+5$, тогаш бројот на дијагоналите е $\frac{(n+5)(n+2)}{2}$, па од условот на задачата следува

$$\frac{n(n-3)}{2} + 45 = \frac{(n+5)(n+2)}{2}, \text{ т.е. } n^2 - 3n + 90 = n^2 + 7n + 10,$$

од каде добиваме $n = 8$.

31. Ако бројот на страните на конвексен многуаголник се зголеми за 5, тогаш бројот на неговите дијагонали се зголемува за 1990. Колку страни има многуаголникот со ова својство?

Решение. Нека n е бројот на страните на многуаголникот. Тогаш бројот на неговите дијагонали е $\frac{n(n-3)}{2}$. Ако бројот на страните е $n+5$, тогаш бројот на дијагоналите е $\frac{(n+5)(n+2)}{2}$, па од условот на задачата добиваме

$$\frac{(n+5)(n+2)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 1990, \text{ т.е. } n^2 + 7n + 10 = n^2 - 3n + 3980,$$

од каде наоѓаме $n = 397$.

32. Дадени се n точки такви што никои четири од нив не лежат во една рамнина. Бројот на рамнините определен со овие точки е 35 пати поголем од бројот на точките. Колку прави се определени со овие точки?

Решение. Дадените n точки такви што никои четири од нив не лежат во една рамнина определуваат $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ рамнини, па од условот на задачата следува $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=35n$. Според тоа,

$$(n-1)(n-2)=6\cdot 35=14\cdot 15,$$

од каде добиваме $n=16$. Конечно, со дадените точки се определени $\frac{16\cdot 15}{2}=120$ прави.

33. Дадени се n различни точки такви што не постојат четири точки кои лежат во иста рамнина. Определи го бројот на точките ако се знае дека дадените точки определуваат двапати повеќе различни рамнини отколку што определуваат различни прави.

Решение. Бидејќи не постојат четири точки кои лежат во иста рамнина, заклучуваме дека не постојат три точки кои се колинеарни. Затоа бројот на правите кои се определени со овие n е еднаков на бројот на двоелементните подмножества точки кои може да се формираат од дадените n точки. За првиот елемент имаме n можности, при што за секој избор вториот елемент може да се избере на $n-1$ начини и притоа секој избор е броен двапати. Значи, бројот на правите е еднаков на $\frac{n(n-1)}{2}$. Аналогно се покажува дека бројот на рамнините определени со овие n точки е еднаков на $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, па затоа $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=2\frac{n(n-1)}{2}$, од каде добиваме $n=8$.

34. На еден состанок на група луѓе требало секој со секого да се ракува. По 30 ракувања преостанало секој од присутните да се ракува уште по 16 пати. Колку луѓе биле на состанокот?

Решение. Нека n е бројот на присутните луѓе на состанокот. Секој требало да се ракува со преостанатите $n-1$ луѓе, па како секое ракување е броено двапати (A со B и B со A е едно ракување) вкупниот број ракувања е еднаков на $\frac{n(n-1)}{2}$. Во моментот кога преостанало секој да се ракува по 16 пати, преостанале вкупно $\frac{16n}{2}=8n$ ракувања. Понатаму, од условот на задачата следува $\frac{n(n-1)}{2}=30+8n$, односно $n^2-17n-60=0$. Последната равенка е еквивалентна со равенката

$(n-20)(n+3)=0$, од каде следува $n=20$ или $n=-3$. Но, $n>0$, па заклучуваме дека во групата имало 20 луѓе. ,

35. На една вечера пристигнале поранешни ученици од едно одделение. Сите мажи меѓусебно се ракувале, а сите жени меѓусебно се бациле (една со друга во образ), а секој маж по еднаш ја бацил раката на секоја жена. Колку лица биле на вечерата ако вкупно имало 78 ракувања и 288 бацувања?

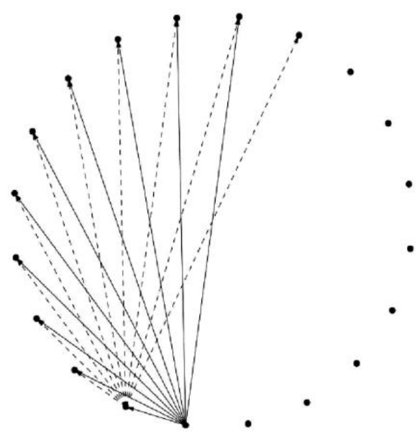
Решение. Нека имало m мажи и n жени. Бројот на ракувањата е еднаков на $\frac{m(m-1)}{2}$, па затоа $\frac{m(m-1)}{2}=78$, т.е. $m(m-1)=13\cdot 12$, од каде добиваме $m=13$. Значи, имало 13 мажи.

Бројот на бацувањата меѓу жените е еднаков на $n(n-1)$, а бројот на бацувањата на рака на жена од страна на маж е еднаков на $13n$. Затоа $n(n-1)+13n=288$, од каде добиваме $n(n+12)=12\cdot 24$, па затоа $n=12$. Според тоа, на вечерата биле 12 жени, што значи дека биле вкупно $12+13=25$ лица.

36. Дваесет ученици кои учествувале на математичка олимпијада одлучиле меѓусебно да се испратат пораки и тоа секој од нив да прати порака на точно 10 од останатите ученици. Определи го најмалиот можен број заемни пораки, т.е. најди пример на распоред на праќање пораки во кој бројот на заемните пораки е најмал можен и докажи дека не е можно да се постигне помал број заемни пораки.

(За пораката меѓу учениците A и B велиме дека е заемна ако ученикот A му пратил порака на ученикот B и ученикот B му пратил порака на ученикот A.)

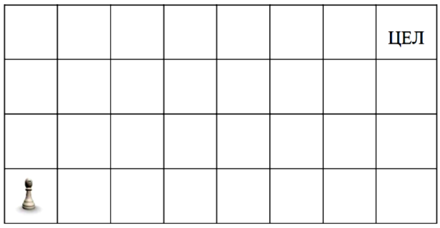
Решение. Вкупно се испратени $20\cdot 10=200$ пораки, а имаме $\frac{20\cdot 19}{2}=190$ парови ученици. Затоа најмалку $200-190=10$ пораки мора да се испратени меѓу исти парови ученици, што значи дека бројот на заемните пораки е најмалку 10.



Ќе конструираме распоред на испратени пораки во кој бројот на заемните пораки е точно 10.

Нека учениците се распоредени во круг и нека секој испратил порака на десет ученици кои се наоѓаат во кругот одма по него во насока на стрелката на часовникот. Да забележиме дека во овој распоред на испраќање пораки само учениците кои се дијаметрално спротивни испратиле заемни пораки. Имаме 10 дијаметрално спротивни парови, што значи дека со тоа сме го конструирале распоредот на испраќање пораки во кој имаме точно 10 заемни пораки.

37. Фигурата на цртежот десно треба во повеќе потези да се поместува од полето на кое се наоѓа до целта. Во секој чекор фигурата може да се помести на соседно поле (соседни се полињата со заедничка страна) и тоа или надесно или нагоре. На колку различни начини фигурата мооже да се помести до целта?



Решение. Од стартот до целта се потребни 10 поместувања и тоа 7 поместувања десно и 3 поместувања горе. Ако со D означиме едно поместување десно, а со G едно поместување горе, тогаш патот од стартот до целта меже да се опише со низа од 10 букви, од кои 7 се D и 3 се G. Значи треба да ги преброиме низите букви со ова својство.

Прв начин. Положбата на првата буква G можеме да ја избереме на 10 начини, на втората буква G на 9 начини и на третата буква G на 8 начини. Тоа се вкупно $10\cdot 9\cdot 8=720$ начини. Меѓутоа, бидејќи не е важно која буква G е прва избрана, која втора и која трета, бројот 720 треба да го поделиме со 6, бидејќи секоја можна тројка е броена $3\cdot 2\cdot 1=6$ пати. Значи, вкупниот број патишта е еднаков на $720:6=120$.

Втор начин. Десет различни букви на 10 места можеме да ги распоредиме на $10\cdot 9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ начини. Понатаму, секој распоред на седумте букви D кои се вкупно $7\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ и секој распоред на трите букви G кои ги има $3\cdot 2\cdot 1$ дава иста подредена десетторка од седум букви D и три букви G, па затоа вкупниот број птишта е еднаков на $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{7\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=120$.

Трет начин. Во полињата на долниот ред и левата колона на шемата го запишуваме бројот 1. Потоа последователно во секое поле го запишуваме збирот на броевите кои се запишани во полето лево од него и полето под него (цртеж десно). На овој начин ги пребројуваме патиштата по кои фигурата може да се стигне до тоа поле. Во горното десно поле е запишан бројот 120, што значи дека вкупниот број патишта е еднаков на 120.

1	4	10	20	35	56	84	120
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1

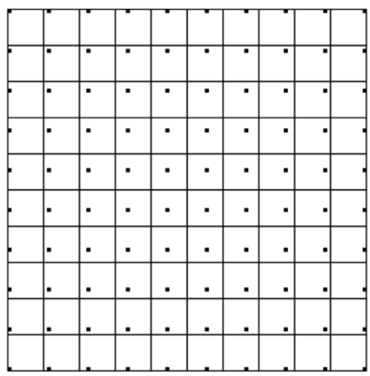
38. На колку различни начини на шаховска табла може да се постават 8 топови така што тие меѓусебно нема да се напаѓаат?

Решение. Првиот топ може да се постави на секое поле од таблата, што значи на 8^2 начини. Ако ги покриеме редот и колоната во кои е поставен првиот топ, тогаш вториот топ може да се постави на секое од преостанатите полиња, односно на 7^2 начини. Со аналогни размислувања добиваме дека третиот топ може да се постави на 6^2 начини, четвртиот топ на 5^2 начини, ..., седмиот топ на 2^2 начини и осмиот топ на 1 начин. Според тоа, вкупниот број начини на поставување на топовите е еднаков на

$$8^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot 2^2 \cdot 1^2 = (8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1)^2 = 40320^2 .$$

39. Нека $ABCD$ е квадрат со должина на страната 10. Да се определи максималниот број точки, кои можат да бидат распоредени во внатрешноста на квадратот, така што секој квадрат со должина на страна 1 и страни, паралелни на страните на $ABCD$, да содржи (заклучно со неговата граница) најмногу 4 точки.

Решение. Да разгледаме координатен систем со почеток во точката A и таков што точката B има координати $(10,0)$, точката C има координати $(10,10)$, и точката D има координати $(0,10)$. Да ги разгледаме квадратите со темиња во точките со координати (i, j), $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$ и $(i, j+1)$, $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \le i, j \le 9$. Тие квадрати се со должина



на страна еднаква на 1 и страните им се паралелни на страните на квадратот $ABCD$. Затоа секој од овие квадрати може да содржи најмногу 4 од точките. Бидејќи имаме вкупно 100 квадрати кои целосно го покриваат $ABCD$, во $ABCD$ не може да се распоредат повеќе од 400 точки, кои го задоволуваат условот на задачата.

Ќе докажеме, дека во $ABCD$ можат да бидат распоредени 400 точки, кои го задоволуваат условот на задачата. Да забележиме, дека еден квадрат со должина на страната 1 и страни паралелни на страните на $ABCD$, содржи две точки E и F со координати соодветно (x_E, y_E) и (x_F, y_F) ако и само ако

$$|x_E - x_F| \le 1 \text{ и } |y_E - y_F| \le 1.$$

Да ги разгледаме квадратчињата со темиња во точките со координати,

$$(i+\tfrac{i}{10}, j+\tfrac{j}{10}),\ (i+\tfrac{i+1}{10}, j+\tfrac{j}{10}),\ (i+\tfrac{i+1}{10}, j+\tfrac{j+1}{10})$$

$$\text{и}\,(i+\tfrac{i}{10}, j+\tfrac{j+1}{10}), i, j \in \mathbb{N}, 0 \le i,\ \ j \le 9$$

Овие квадратчиња се вкупно 100 и имаат должина на страната $\frac{1}{10}$. Нека избереме по 4 точки од внатрешноста на секое од овие квадратчиња. Така сме избрале вкупно 400 точки од внатрешноста на $ABCD$.

Да допуштиме, дека квадрат со должина на страна 1 и страни паралелни на страните на $ABCD$, содржи повеќе од 4 точки. Тогаш тој содржи точка E со координати (x_E, y_E) од квадратче со темиња

$$(i+\tfrac{i}{10}, j+\tfrac{j}{10}),\ (i+\tfrac{i+1}{10}, j+\tfrac{j}{10}),\ (i+\tfrac{i+1}{10}, j+\tfrac{j+1}{10}) \text{ и } (i+\tfrac{i}{10}, j+\tfrac{j+1}{10}),$$

и точка F со координати (x_F, y_F) од квадратче со темиња

$$(k+\tfrac{k}{10}, s+\tfrac{s}{10}),\ (k+\tfrac{k+1}{10}, s+\tfrac{s}{10}),\ (k+\tfrac{k+1}{10}, s+\tfrac{s+1}{10}) \text{ и } (k+\tfrac{k}{10}, s+\tfrac{s+1}{10}),$$

каде i, j, k и s се цели броеви и $(i, j) \ne (k, s)$. Според тоа, точни се неравенствата:

$$i+\tfrac{i}{10} < x_E < i+\tfrac{i+1}{10},\ j+\tfrac{j}{10} < y_E < j+\tfrac{j+1}{10}, k+\tfrac{k}{10} < x_F < k+\tfrac{k+1}{10},$$

$$s+\tfrac{s}{10} < y_F < s+\tfrac{s+1}{10},\ |x_E - x_F| \le 1 \text{ и } |y_E - y_F| \le 1.$$

Од првите 4 неравенства добиваме

$$i-k+\tfrac{i-k-1}{10} < x_E - x_F < i-k+\tfrac{i-k+1}{10}$$

$$j-s+\tfrac{j-s-1}{10} < y_E - y_F < j-s+\tfrac{j-s+1}{10}.$$

Оттука и од неравенствата $|x_E - x_F| \le 1$ и $|y_E - y_F| \le 1$, добиваме $|11(i-k)| < 11$ и $|11(j-s)| < 11$, од каде следува $i = k$ и $j = s$, што противречи на $(i,j)\neq(k,s)$. Според тоа, овие 400 избрани точки го задоволуваат условот на задачата.

40. Во низа се запишани броевите $a_1,a_2,...,a_8$. На почетокот $a_k=(-1)^k$, за $k=1,2,...,8$. Во еден чекор се избира некој k и оние од броевите a_{k-1} и a_{k+1}, кои постојат, се заменуваат со броевите $a_{k-1}a_k$ и $a_k a_{k+1}$. Ќе велиме дека една низа е достижна ако може од почетната низа да се добие со помош на конечен број чекори. Определи го бројот на достижните низи.

Решение. Нека броевите $b_1,b_2,...,b_9$ на почетокот се определени со: $b_1=1, b_2=b_3=-1, b_4=b_5=1, b_6=b_7=-1, b_8=b_9=1$. Така $b_k b_{k+1}=a_k$ за секој $k=1,2,...,8$. Ако е направен чекор со $a_k=1$, тогаш ништо не се менува. Ако е направен чекор со $a_k=-1$ (т.е. $b_k=-b_{k+1}$), тогаш во во низата $b_1,b_2,...,b_9$ ги разменуваме вредностите на b_k и b_{k+1}. По замената повторно важи $b_k b_{k+1}=a_k$ за секој $k=1,2,...,8$. Според тоа, на секоја достижна низа и соодветствува низа $b_1,b_2,...,b_9$ во која точно 4 од броевите се еднакви на -1, останатите се еднакви на 1 и важи $b_k b_{k+1}=a_k$ за секој $k=1,2,...,8$. Секоја низа од четири броеја еднакви на -1 и пет броја еднакви на 1 може да се добие од друга таква низа со помош на размена на соседните броеви, така што низата $a_1,a_2,...,a_8$ која и соодветствува е достижна. Равенствата $b_k b_{k+1}=a_k$ еднозначно ги определуваат $b_2,b_3,...,b_9$ ако се знаат $b_1,a_1,a_2,...,a_8$. Според тоа, секоја достижна низа соодветствува на две низи $b_1,b_2,...,b_9$, едната од кои е добиена според горните правила (така што има четири броја еднакви на -1 и пет броја еднакви на 1), а во другата секој број се заменува со неговиот спротивен број (така што има четири броја еднакви на 1 и пет броја еднакви на -1). Значи, бројот на достижните низи $a_1,a_2,...,a_8$ е еднаков на бројот на низите $b_1,b_2,...,b_9$ кои содржат четири броја -1 и пет броја 1, т.е. тој е еднаков на $9!:(4!\cdot 5!)=126$.

41. На кружница во насока на движењето на стрелките на часовникот се запишани сите природни броеви од 1 до 2000. Прво е пречкртан бројот 1, потоа бројот 16, па бројот 31 итн. секој петнаесетти број во иста насока. Кој број прв ќе биде пречкртан два пати? Колку броеви во тој момент останале непречкртани?

Решение. Бидејќи $2000=15\cdot133+5$ последниот пречкртан број во првиот круг ќе биде $133\cdot15+1=1996$. Од $1996+16=2011$ заклучуваме дека во вториот круг ќе бидат пречкртани последователно броевите 11, 26, 41, ..., 1991, бидејќи $132\cdot15+11=1991$. Сега, $1991+15=2006$ па заклучуваме дека во третиот круг последователно ќе бидат пречкртани броевите 6, 21, 36, ..., 1986, бидејќи $132\cdot15+6=1986$. Сега, од $1986+15=2001$ заклучуваме дека во четвртиот кру прв ќе биде пречкртан бројот 1, што значи дека првиот број кој двапати ќе биде пречкртан е бројот 1. Од претходните разгледувања следува дека сите пречкртани броеви во првиот круг се од видот $15k+1=5\cdot3k+1$, во вториот круг се од видот $15k+11=5(3k+2)+1$ и во третиот круг се од видот $15k+6=5(3k+1)+1$. Заради различните остатоци при делење со 15 не е можно во секој од првите три круга пред бројот 1 да е пречкртна по втор пат некој друг број.

Значи, сите пречкртани броеви се од видот $5n+1$, каде $n\in\{0,1,2,...,399\}$. Бидејќи вакви броеви помали од 2000 се вкупно 400, заклучуваме дека непречкртани ќе останат $2000-400=1600$ броеви.

42. На колку начини продавач точно може да измери диња тешка $1,67\,kg$ ако има на располагање само тегови од $20\,g$ и $50\,g$?

Решение. Нека x е бројот на теговите од $20\,g$, а y е бројот на теговите од $50\,g$. Имаме, $20x+50y=1670$, односно $2x+5y=167$. Значи, $2x=2(83-2y)+1-y$, па како левата страна на последната равенка е делива со 2 и едниот собирок на десната страна е делив со 2, потребно е и другиот собирок да е делив со 2, т.е. $1-y=2k$, за некој $k\in\mathbb{Z}$. Според тоа, $x=81+5k$, за некој $k\in\mathbb{Z}$. Бидејќи $x\geq0$, од последната равенка следува $k\geq-16$, а како $y\geq0$, од $y=1-2k$ следува $k\leq0$. Значи, сите можни вредности за k се $0,-1,-2,...,-16$ и нив ги има 17. Последното значи дека постојат точно 17 начини за да маса од $1,67\,kg=1670\,g$ се измери само со тегови од $20\,g$ и $50\,g$. Конкретно овие начини се дадени во долната табела:

k	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	81
y	33	31	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1

43. 650 топчиња со еднаков радиус се поделени на два дела. Од едниот дел е направена „права пирамида“ со основа квадрат, а од другиот дел е направена „права пирамида“ со основа рамностран триаголник. Двете „пирамиди“ во висина имаат еднаков број редови. По колку топчиња има во секоја „пирамида“?

Решение. Нека бојот на редовите во секоја од пирамидите е n. На врвот на четиристраната има едно топче, во претпоследниот ред има $2^2=4$ топчиња, во следниот ред има $3^2=9$ топчиња итн. но последниот ред има n^2 топчиња. Значи, бројот на топчињата во четиристраната пирамида е

$$S_4=1^2+2^2+3^2+...+n^2.$$

На врвот на тристраната пирамида има едно топче. Во претпоследниот ред има $1+2$ топчиња, во следниот ред има $1+2+3$ топчиња итн. во послдниот ред има $1+2+3+...+n$ топчиња. Според тоа, бројот на точшињата во тристраната пирамида е

$$\begin{aligned}S_3&=1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+...+n)\\&=n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 3+...+[n-(n-1)]\cdot n]\\&=n+2n+3n+...+n\cdot n-[1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)\cdot n]\\&=n(1+2+...+n)-[1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+...+(n-1)((n-1)+1)]\\&=n\cdot\frac{n(n+1)}{2}-[1^2+1+2^2+1+3^2+1+...+(n-1)^2+(n-1)]\\&=\frac{n^2(n+1)}{2}-(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+n^2-(1+2+...+(n-1))\\&=\frac{n^2(n+1)}{2}-S_4+n^2-\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$S_3+S_4=\frac{n^2(n+1)}{2}+n^2-\frac{n(n-1)}{2},$$

а како $S_3+S_4=605$ добиваме

$$\frac{n^2(n+1)}{2}+n^2-\frac{n(n-1)}{2}=605$$

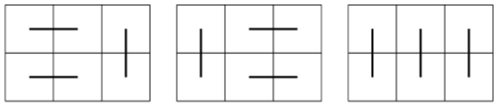
$$n(n+1)^2=1210$$

па како $10\cdot 11^2=1210$ заклучуваме дека $n=10$. Според тоа бројот на топчињата во пирамидите се

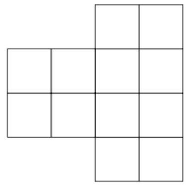
$$S_4=1^2+2^2+3^2+...+10^2=385 \text{ и } S_3=605-S_4=220.$$

IV.4. БОЕЊА, ПОКРИВАЊА И РАСЕКУВАЊА

44. Правоаголник 3×2 може да биде покриен со домина на 3 различни начини (цртеж десно).



На колку начини фигурата прикажана на цртеж од десно може да биде покриена со домина?



Решение. Можеме да поставиме две вертикални или хоризонтални домина најлево, потоа исто така две домина за квадратот горе и две домина за квадратот долу. Според тоа, до сега имаме 8 можности за покривање на дадената фигура со домина.

Потоа две можности имаме ако квадратот најлево го покриеме со хоризонтални или вертикални домина, горниот и долниот десен правоаголник ги покриеме со хоризонтални домина и централниот десен квадрат го покриеме со вертикални домина.

Уште една можност е ако од лево кон десно прво ставиме вертикално домино, па две две хоризонтални домина и потоа едно вертикално домино, а горниот и долниот правоаголник ги покриеме со хоризонтални домина.

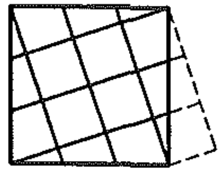
Според тоа, дадената фигура со домина може да се покрие на 11 начини.

45. Квадрат со плоштина $10\,dm^2$ поплочи го со 10 квадратни плочки со плоштина по $1\,dm^2$. Дозволено е некои од плочките со едно праволиниско сечење да се поделат на два еднакви делови.

Решение. Должината на страната на квадратот е

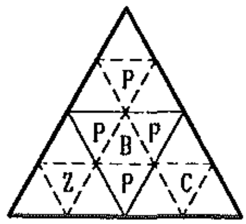
$$\sqrt{10}=\sqrt{1^2+3^2}\ dm,$$

што значи дека страната на квадратот е еднаква на дијагоналата на правоаголникот со страни $1\,dm$ и $3\,dm$. Ако два вакви правоаголници расечеме по дијагонала и земеме четири квадрати со плоштина $1\,dm^2$, тогаш покривањето на дадениот квадрат можеме да го направиме на начин како што е прикажано на горниот цртеж.



46. Секоја од четирите страни на правилен тетраедар со помош на средните линии е поделена на четири рамнострани триаголници. За боење на тетраедарот се користат бела (Б), портокалова (П), црвена (Ц) и зелена (З) боја. Определи го бројот на различните боења на тетраедарот ако на секоја страна на тетраедарот се користат само по две бои, со секоја боја се обоени точно по четири триаголници и секои два триаголника со заедничка страна се обоени со различни бои?
(Страните на тетраедарот не се означени. Различни се боењата кои даваат различно обоен тетраедар независно од неговото вртење и превртување.)

Решение. На цртежот десно е прикажа мрежата на ова тело. Нека средниот триаголник е „база“ на телото. Очигледно на секоја страна централниот триаголник е обоен со една боја, а останатите три триаголника се обоени со друга боја (на цртежот базата е обоена со B и трипати P).



За база, чиј централен триаголник е B постојат вкупно три можности. Тогаш за секоја од нив за централниот триаголник на останатите страни имаме по две можности: PCZ (како на цртежот) или PZC. За секоја од овие можности, постојат три различни боења на останатите страни (за случајот од цртежот тоа се: (PB,CZ,ZC) или (PC,CZ,ZP) или (PZ,CP,ZC). Затоа вкупно постојат $3\cdot 2\cdot 3=18$ различни боења.

47. Во квадратна мрежа се дадени два квадрати кои не се сечат и кои се составени од m^2 и n^2 единечни квадратчиња на мрежата, соодветно. Ако $m^2+n^2=2017$ докажи дека

а) такви квадрати постојат;

б) единичните квадратчиња на точно еден од двата квадрати можат да се обојат во црвена или сина боја така што секое квадратче има непарен број соседни квадратчиња обоени во истата боја. (Две единечни квадратчиња се соседни, ако имаат барем едно заедничко теме.)

Решение. а) Забележуваме, дека бројот 2017 дава остаток 1 при делење со 3. Оттука следува дека еден од броевите m и n сигурно е делив со 3. Освен тоа, бројот 2017 дава остаток 2 при делење со 5. Тоа е можно само ако остатоците на m^2 и n^2 при делење со 5 се еднакви на 1. Нека n е делив со 3. Тогаш можните вредности на n се: 6, 9, 21, 24, 36 и 39, бидејќи $44^2<2017<45^2$. Од нив само 9 е решение.

Останатите се отфрлаат со непосредна проверка. Оттука следува $9^2+44^2=2017$, т.е. $m=44$. Според тоа, претставувањето на 2017 като збир на два квадрата е единствено.

б) Квадратот со 44^2 единечни квадратчиња може да се обои на саканиот начин. Доволно е да ги обоиме со црвена боја редовите со броевите1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14 итн. преку два реда. Останатите редови ги боиме во сино.

Да допуштиме дека и вториот квадрат може да се обои на саканиот начин. Тогаш во една од боите се обоени непарен број единечни квадратчиња. Нека на пример имаме непарен број црвени единечни квадратчиња. Да го разгледаме множеството од подредени парови различни црвени квадратчиња, кои немаат црвени соседи. Јасно, ова множество има парен број елементи (паровите се подредени). Од друга страна, за секое црвено квадратче бројот на црвените квадратчиња, кои не му се соседни, е непарен број, т.е. секое квадратче учествува како прв елемент во непарен број парови. Но, тоа значи дека имаме непарен број подредени парови, што е противречност.

48. Дадена е коцка со должина на раб $13cm$. Подели ја дадената коцка на 1988 помали коцки чии рабови се со целобројни должини.

Решение. Ќе докажеме дека дадената коцка може да се подели на коцки со должини на рабови $1cm, 2cm$ и $3cm$. Нека x е бројот на коцките со раб $1cm$, y е бројот на коцките со раб $2cm$ и z е бројот на коцките со раб $3cm$. Тогаш

$$x+y+z=1988 \text{ и } x+8y+27z=13^3=2197.$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата ја добиваме равенката $7y+26z=209$. Решаваме по y и добиваме $y=30-4z+\frac{2z-1}{7}$. Бидејќи y и z се цели броеви, мора $2z-1$ да е делив со 7, а тоа е можно само ако $2z-1\in\{7,14,21,28,35,...\}$, односно $2z\in\{8,15,22,29,36,...\}$. Но, z е цел број, па затоа $z\in\{4,11,18,...\}$. Од друга страна $26z<209$, па затоа $z<9$, што значи $z=4$. Сега добиваме $y=15$ и $x=1969$. Според тоа, едно од можните решенија на задачата е поделбата на коцки со должини на рабови $1cm, 2cm$ и $3cm$, при која имаме 1969 коцки со раб $1cm$, 15 коцки со раб $2cm$ и 4 коцки со раб $3cm$.

49. Коцка со раб $13cm$ е расечена на 1994 коцки со целобројни должини на рабовите. Определи ги димензиите на добиените коцки. Колку коцки има од секоја димензија?

Решение. Нека претпоставиме дека при расекувањето има коцки со раб $6cm$. x е бројот на коцките со раб $1cm$, y е бројот на коцките со раб $2cm$, z е бројот на коцките со раб $3cm$, u е бројот на коцките со раб $4cm$, v е бројот на коцките со раб $5cm$ и t е бројот на коцките со раб $6cm$. Тогаш

$$x+y+z+u+v+t=1994$$

$$x+8y+27z+64u+125v+216t=13^3=2197$$

Ако ги одземеме горните равенки добиваме

$$7y+26z+63u+124v+215t=203,$$

па затоа $t=0$, што значи дека во расекувањето не може да има коцки со должина на раб $6cm$. Аналогно се докажува дека во расекувањето не може да има коцки со раб со должина поголема од $6cm$.

Значи, во расекувањето должината на работ на мала коцка може да биде најмногу $5cm$ и важи

$$x+y+z+u+v=1994 \qquad (1)$$

$$x+8y+27z+64u+125v=2197. \qquad (2)$$

Ако од (2) ја одземеме (1) добиваме $7y+26z+63u+124v=203$, па затоа $v=0$ или $v=1$.

1) Ако $v=0$, тогаш $7y+26z+63u=203$, па затоа $z=\frac{7}{26}(29-y-9u)$.

Но, z е ненегативен цел број, па затоа $29-y-9u\in\{0,26\}$, односно $29-y-9u=0$ или $29-y-9u=26$. Според тоа, $y+9u=29$ или $y+9u=3$, од каде добиваме

$$(y,u)\in\}(2,3),(11,2),(20,1),(29,0),(3,6)\}.$$

Соодветните решенија на системот равенки (1) и (2) се дадени во следнава табела:

x	y	z	u	v
1965	29	0	0	0
1984	3	7	0	0
1973	20	0	1	0
1981	11	0	2	0
1989	2	0	3	0

2) Ако $v=1$, тогаш $7y+26z+63u=79$. Јасно, $u=0$ или $u=1$. Ако $u=0$, тогаш $7u+26v=79$ и оваа равенка нема решенија во множеството ненегативни цели броеви. Ако $u=1$, тогаш $7u+26v=16$ и оваа равенка нема решенија во множеството ненегативни цели броеви.

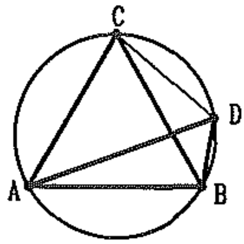
Од досега изнесеното следува дека единствените решенија се дадени во горната табела.

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ЕЛЕМЕНТИ НА ТРИАГОЛНИК. СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

1. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle CAB=50^\circ$. Нека D е точка надвор од триаголникот таква што A и D се на различни страни од правата BC, при што важи $\measuredangle CBD=30^\circ$ и $\measuredangle BAD=20^\circ$. Определи го $\measuredangle BCD$.

Решение. Аголот при врвот на рамнокракиот $\triangle ABC$ е еднаков на 80° (цртеж десно). Имаме:



$$\measuredangle ADB=180^\circ-\measuredangle BAD-\measuredangle ABD$$
$$=180^\circ-20^\circ-(50^\circ+30^\circ)=80^\circ$$

па затоа од својствата на периферниот агол над иста тетива следува дека точката D припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Конечно, $\triangle BCD = \triangle BAD = 20^\circ$.

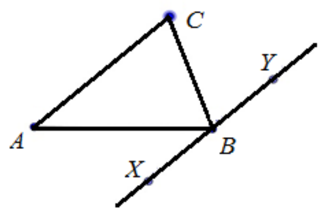
2. Даден е триаголник ABC. Низ точката B повлекуваме права паралелна со страната AC. На оваа права избираме две точки X и Y така што X и A лежат во иста полурамнина определена со правата BC, а Y и C лежат во иста полурамнина определена со правата AB. За аглите $\measuredangle XBA, \measuredangle ABC$ и $\measuredangle YBC$ важи $\measuredangle XBA : \measuredangle ABC : \measuredangle YBC = 3:10:5$. Определи ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Од

$$\measuredangle XBA : \measuredangle ABC : \measuredangle YBC = 3:10:5$$

имаме

$$\measuredangle XBA=3k,\ \measuredangle ABC=10k \text{ и } \measuredangle YBC=5k.$$



Од друга страна

$$\measuredangle XBA+\measuredangle ABC+\measuredangle YBC=180^\circ$$
$$3k+10k+5k=180^\circ$$
$$18k=180^\circ \Leftrightarrow k=10.$$

Следува $\measuredangle XBA=30^\circ$, $\measuredangle ABC=100^\circ$ и $\measuredangle YBC=50^\circ$. Тогаш

$$\measuredangle BAC=\measuredangle XBA=30^\circ,\ \measuredangle ACB=\measuredangle YBC=50^\circ$$

како наизменични агли над трансверзала.

3. Даден е $\triangle ABC$ со симетрала на агол $AL\,(L\in BC)$. Точката $M\in AC$ е таква што $ML\parallel AB$. Нека β' е надворешниот агол при темето B на $\triangle ABC$ и $\measuredangle ACB:\beta'=5:11$.

а) Определи го односот $\measuredangle CAB:\measuredangle ACB$.

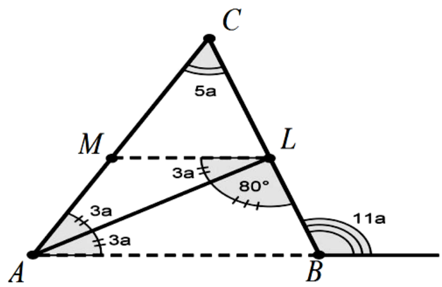
б) Ако $\measuredangle ALB=80^\circ$, определи го $\measuredangle ALM$.

Решение. а) Според условот на задчата имаме $\measuredangle ACB=5a$ и $\beta'=11a$, па затоа

$$\measuredangle BAC+5a=11a,$$

односно $\measuredangle BAC=6a$. Значи,

$$\measuredangle CAB:\measuredangle ACB=6a:5a=6:5.$$



б) Од условот на задачата следува:

$\measuredangle BAL=\measuredangle LAM=3a$ (симетрала),

$\measuredangle BAL=\measuredangle ALM=3a$ (накрсни агли),

$\measuredangle ALB=\measuredangle LAC+\measuredangle ACL$ (надворешен агол за $\triangle ALC$).

Според тоа, $80^\circ=3a+5a$, па затоа $a=10^\circ$ и $\measuredangle ALM=3a=30^\circ$.

4. Даден е триаголник ABC така што $\measuredangle BAC=60^\circ$. Нека O е центар на опишаната кружница околу триаголникот, и нека D е произволна точка на лакот BC. Докажи дека $\measuredangle BOC+\measuredangle OCD=120^\circ$.

Решение. Важи $\measuredangle BOC=2\cdot\measuredangle BAC=120^\circ$, бидејќи централниот агол е двапати поголем од периферниот. Сега, бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен следува дека

$$\measuredangle BDC=180^\circ-\measuredangle BAC=180^\circ-60^\circ=120^\circ.$$

Од четириаголникот $BDCO$ добиваме

$$\measuredangle BOC+\measuredangle OCD+\measuredangle CDB+\measuredangle DBO=360^\circ$$

односно

$$120^\circ+\measuredangle OCD+120^\circ+\measuredangle DBO=360^\circ,$$

од каде следува дека

$$\measuredangle OCD+\measuredangle DBO=120^\circ.$$

5. Определи ги аглите на $\triangle ABC$ кај кој центарот на опишаната и центарот на впишаната кружница се симетрични во однос на правата BC.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница и S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Точката S е внатрешна точка за $\triangle ABC$, па заради симетријата во однос на правата BC точката O е надворешна за $\triangle ABC$ и важи $\measuredangle BOC = 2(180^\circ - \measuredangle A)$. Понатаму,

$$\measuredangle BSC = 180^\circ - \frac{\measuredangle B + \measuredangle C}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \measuredangle A}{2} = 90^\circ - \frac{\measuredangle A}{2}.$$

Сега, заради симетрија во однос на правата BC важи $\measuredangle BOC = \measuredangle BSC$, па добиваме $90^\circ - \frac{\measuredangle A}{2} = 2(180^\circ - \measuredangle A)$, т.е. $\measuredangle A = 108^\circ$. Но, $\overline{OB} = \overline{OC}$, па затоа $\overline{SB} = \overline{SC}$, од каде следува дека $\triangle ABC$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle B = \measuredangle C = 36^\circ$.

6. Триаголникот ABC е впишан во кружница k. Точката K е внатрешна за $\triangle ABC$ и лежи на симетралата на $\measuredangle BAC$. Правата CK по втор пат ја сече кружницата k во точката M. Кружницата k_1 која минува низ A и ја допира MC во точката K по втор пат ги сече отсечката AB и кружницата k во точките P и Q, соодветно. Ако $\measuredangle ACQ = 20^\circ$ и $\measuredangle BCM = 30^\circ$, определи го $\measuredangle AKQ$.

Решение. Нека k_1 по втор пат ја сече отсечката AC во точката R. Имаме:

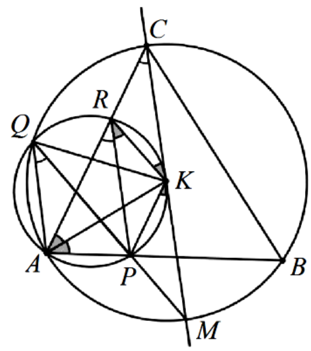
$$\measuredangle PAK = \measuredangle KAC = \measuredangle PKM = \measuredangle RKC = \measuredangle KRP,$$

па затоа $RP \| CM$. Понатаму,

$$\measuredangle MCA = \measuredangle ARP = \measuredangle AQP = \measuredangle AQM$$

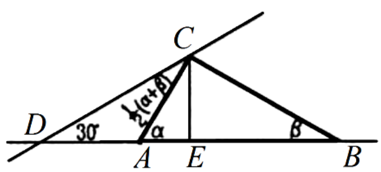
па затоа P, Q, M лежат на една права. Сега

$$\begin{aligned}\measuredangle AKQ &= \measuredangle APQ = \measuredangle AMQ + \measuredangle MAB \\ &= \measuredangle ACQ + \measuredangle MCB = 50^\circ.\end{aligned}$$



7. Во остроаголниот $\triangle ABC$ ($\overline{BC} > \overline{AC}$) е дадена висината CE. Симетралата на надворешниот агол во темето C ја сече правата AB во точката D, така што $\overline{CD} = 2\overline{CE}$. Докажи дека $\alpha - \beta = 60^\circ$, каде α, β се аглите во темињата A, B, соодветно.

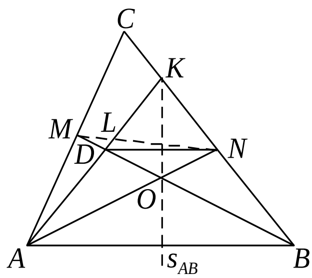
Решение. Бидејќи $\overline{CD} = 2\overline{CE}$ и $\triangle CDE$ е правоаголен добиваме дека тој е половина од рамностран триаголник, па затоа $\measuredangle CDE = 30^\circ$.



Понатаму, надворешниот агол во темето C е еднаков на $\alpha+\beta$, па затоа $\measuredangle DCA=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Јасно, $\measuredangle BAC=\alpha$ како надворешен за $\triangle DAC$ е еднаков на збирот на аглите $\measuredangle ADC=30^\circ$ и $\measuredangle DCA=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, односно $\alpha=30^\circ+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Конечно, од последното равенство добиваме дека $\alpha-\beta=60^\circ$.

8. Даден е $\triangle ABC$ и точки M и N, соодветно на страните AC и BC такви што $\overline{CM}=\overline{CN}$. Нека O е пресечната точка на AN и BM. Ако $\overline{AO}=\overline{BO}$ и еден од аглите на триаголникот е еднаков на $40°$, определи ги другите два агли.

Решение. Нека s_{AB} е симетралата на страната AB. Можни се три случая: s_{AB} ја сече страната BC во внатрешна точка, s_{AB} ја сече страната AC во внатрешна точка, s_{AB} минува низ темето C.



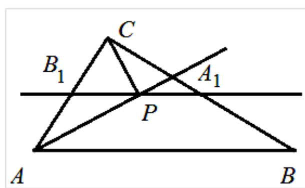
<u>*Случај* 1</u>. s_{AB} ја сече страната BC во внатрешна точка K. Нека $AK\cap BM=D$ и $AK\cap MN=L$. Тогаш $\triangle ANK\cong\triangle BDK$ ($\overline{AK}=\overline{BK}$, $\measuredangle AKB-$ заеднички агол и $\measuredangle KAN=\measuredangle KBD$ како разлики на еднакви агли.) Од тука следува $\overline{KN}=\overline{KD}$ и затоа $\measuredangle KND=\measuredangle KDN$. Имаме $\measuredangle CMN>\measuredangle MLD$ (надворешен агол за $\triangle ALD$) $=\measuredangle KLN>\measuredangle KDN$ (надворешен агол за $\triangle DNL$) $=\measuredangle KND>\measuredangle KNM=\measuredangle CMN$, т.е. $\measuredangle CMN>\measuredangle CMN$, што не е можно.

<u>*Случај* 2</u>. s_{AB} ја сече страната AC во внатрешна точка. Се разгледува на ист начин.

<u>*Случај* 3</u>. s_{AB} минува ни темето C. Значи, $\overline{AC}=\overline{BC}$. Ако $\measuredangle ACB=40°$, тогаш $\measuredangle ABC=\measuredangle BAC=70°$. Ако $\measuredangle ABC=\measuredangle BAC=40°$, тогаш $\measuredangle ACB=100°$.

9. Даден произволен триаголник ABC. Нека P е пресечната точка на симетралата на аголот $\measuredangle BAC$ и правата која ги преполовува отсечките AC и BC.

Докажи дека $\measuredangle APC$ е прав агол.

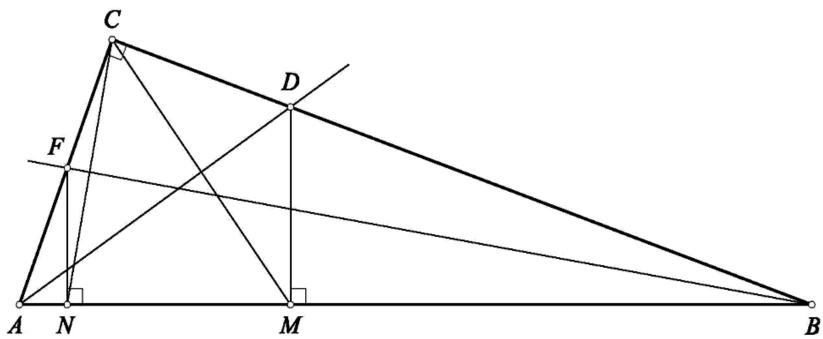


Решение. Нека $\measuredangle BAC=\alpha$ и B_1, A_1 се средините на отсечките AC, BC, соодветно.

Бидејќи отсечката A_1B_1 е средна линија на триаголникот ABC, следува дека $B_1P \| AB$. Тогаш $\measuredangle BAP = \measuredangle APB_1 = \frac{\alpha}{2}$ (агли со паралелни краци) и $\measuredangle BAP = \measuredangle B_1AP = \frac{\alpha}{2}$ (правата AP е симетрала на α). Од тука следува дека $\measuredangle APB_1 = \measuredangle B_1AP = \frac{\alpha}{2}$, односно дека триаголникот APB_1 е рамнокрак. Според тоа, $\overline{AB_1} = \overline{B_1P} = \overline{B_1C}$, односно AC е дијаметар на кружница опишана околу триаголникот APC. Од Талесовата теорема следува дека $\measuredangle APC = 90^\circ$.

10. Даден е правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето C и агол во темето B еднаков на 20°. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече катетата BC во точка D, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече катетата AC во точка F. Од точките D и F повлечени се нормали на хипотенузата и тие хипотенузата ја сечат во точките M и N. Пресметај го $\measuredangle MCN$.

Решение. Триаголникот FCN е рамнокрак, бидејќи од својството на симетралата BF имаме $\overline{CF} = \overline{FN}$. Триаголникот CDM е рамнокрак, бидејќи од својството на симетралата AD имаме $\overline{CD} = \overline{DM}$. Затоа важи $\measuredangle FCN = \measuredangle CNF$ и $\measuredangle DCM = \measuredangle DMC$.



Имаме, $\measuredangle A = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$, па затоа $\measuredangle AFN = 20^\circ$. Аналогно наоѓаме $\measuredangle BDM = 70^\circ$. Затоа

$$\measuredangle FCN = \measuredangle CNF = \frac{\measuredangle AFN}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ.$$

Аналогно наоѓаме

$$\measuredangle DCM = \measuredangle DMC = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ.$$

Конечно, за бараниот агол наоѓаме

$$\measuredangle MCN = 90^\circ - (10^\circ + 35^\circ) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ .$$

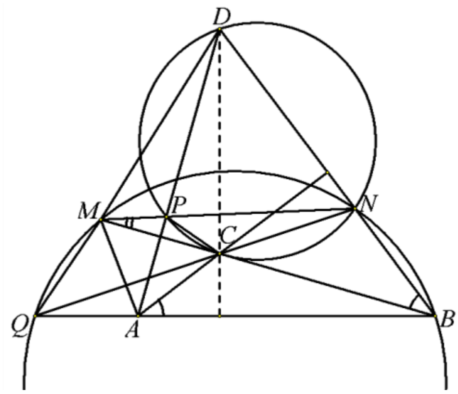
11. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\measuredangle BAC = 37^\circ$ и $\measuredangle ABC = 16^\circ$. На продолжението на страната *BC* е земена точка *M* таква што $\overline{AM} = \overline{AC}$, каде *C* е меѓу *B* и *M*, а во полурамнината во однос на правата *BC*, која не ја содржи *A*, е земена точка *N* така што $\measuredangle CBN = 2\measuredangle CMN = 37^\circ$. Определи ги:

а) $\measuredangle CNM$;

б) односот $\overline{AQ} : \overline{AC}$, каде *Q* е пресечната точка на правите *AB* и *CN*.

Решение. а) Нека симетралата на отсечката *CM* ги сече *MN* и правата *BN* во точките *P* и *D*, соодветно. Тогаш *BM* е нормална на *AD*. Ќе докажеме дека *AC* е нормална на *BD*, од каде ќе следува, дека точката *C* е ортоцентар на $\triangle ABD$. Последното е точно, бидејќи

$\measuredangle BAC + \measuredangle ABN = 37^\circ + 16^\circ + 37^\circ = 90^\circ$.



Тогаш *DC* е нормална на *AB* и затоа

$\measuredangle CDB = 90^\circ - (16^\circ + 37^\circ) = 37^\circ$.

Од друга страна,

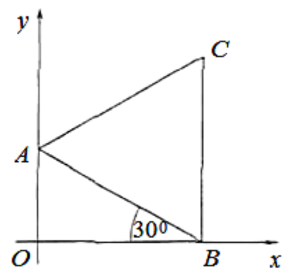
$$\measuredangle CPN = 2\measuredangle CMN = 37^\circ$$

како надворешен агол за рамнокракиот $\triangle MCP$. Добиваме дека $\measuredangle CDN = \measuredangle CPN$, од каде следува, дека точките *P*, *C*, *N* и *D* лежат на една кружница.

Но тогаш $\measuredangle CNM = \measuredangle ADC = \measuredangle ABC = 16^\circ$.

б) Бидејќи $\measuredangle QBM = \measuredangle QNM = 16°$, точките Q, B, N и M лежат на една кружница. Оттука следува, дека $\measuredangle NQB = \measuredangle NMB = 18{,}5°$. Освен тоа $\measuredangle QAC = 143°$. Затоа во $\triangle QCA$ имаме $\measuredangle QCA = 18{,}5°$. Според тоа, $\overline{AQ} = \overline{AC}$, т.е. $\overline{AQ} : \overline{AC} = 1$.

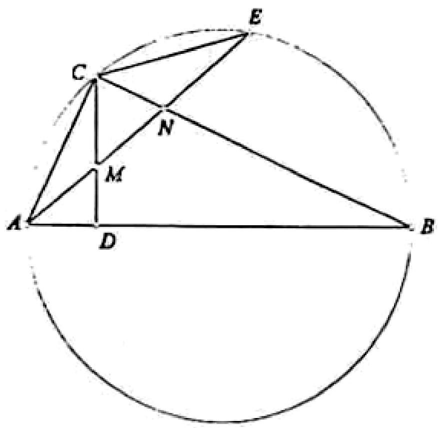
12. Во правоаголен координатен систем е нацртан рамностран триаголник ABC како на цртежот десно. Ако $\overline{AB} = a$, определи ги координатите на темињата на триаголникот ABC.



Решение. Нека O е кординатниот почеток.

Триаголникот AOB е правоаголен, а еден негов агол е еднаков на 30°. Значи, тој е половина од рамностран триаголник чија основа е $\overline{AB}=a$. Затоа $\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{a}{2}$, па точката A има координати $A(0,\frac{a}{2})$. Понатаму, OB е висина на рамностраниот триаголник со основа $\overline{AB}$, па затоа $\overline{OB}=\frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Затоа координатите на точката B се $B(\frac{a\sqrt{3}}{2},0)$. Сега $\overline{BC}=a$, па затоа координатите на точката C се $C(\frac{a\sqrt{3}}{2},a)$.

13. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C, таков што $\overline{BC}>\overline{AC}$. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето C кон хипотенузата AB. На помалиот лак BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ избрана е точка E таква што $\overline{CA}=\overline{CE}$. Правата AE ја сече висината CD во точката M, а страната BC ја сече во точката N. Докажи дека $\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{MC}$.



Решение. Важи $\measuredangle ABC=\measuredangle AEC$ како периферни агли над иста тетива AC. Понатаму, $\overline{CA}=\overline{CE}$, па затоа $\triangle AEC$ е рамнокрак, т.е. $\measuredangle CAE=\measuredangle AEC$. Според тоа, $\measuredangle ABC=\measuredangle AEC=\measuredangle CAE$. Од друга страна, $\measuredangle ACD=\measuredangle ABC$ како агли со нормални краци. Според тоа,

$$\measuredangle CAM=\measuredangle CAE=\measuredangle ABC$$
$$=\measuredangle ACD=\measuredangle ACM,$$

па затоа $\triangle ACM$ е рамнокрак. Оттука следува $\overline{AM}=\overline{MC}$.
Триаголниците ANC и BCD се правоаголни и важи

$$\measuredangle CAN=\measuredangle CAE=\measuredangle ABC=\measuredangle DBC,$$

па затоа важи $\measuredangle ANC=\measuredangle DCB$. Оттука следува

$$\measuredangle MNC=\measuredangle ANC=\measuredangle DCB=\measuredangle MCN,$$

т.е. $\triangle CNM$ е рамнокрак, па затоа важи $\overline{MN}=\overline{MC}$.
Конечно,

$$\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{MC},$$

што и требаше да се докаже.

14. Дадени се два рамнострани триаголници ABC и CDE кои се наоѓаат од иста страна на правата AE и имаат само една заедничка точка, точката C. Притоа точките A, C и D не се колинеарни, а исто така и точките B, C и E не се колинеарни . Нека M е средина на BD, N е средина на AC и нека K е средина на CE. Докажи дека $\triangle MNK$ е рамностран.

Решение. Нека P и Q се средини на BC и CD соодветно. Бидејќи P и N се средини на BC и AC, соодветно, следува

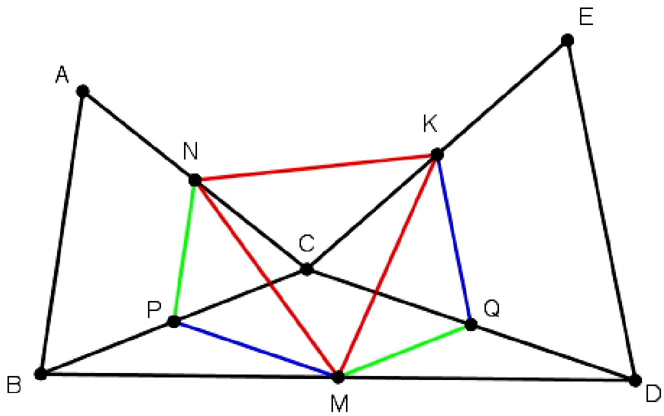
$$\overline{PN} = \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{PC} \qquad (1)$$

Бидејќи M и Q се средини на BD и CD следува

$$\overline{MQ} = \frac{\overline{BC}}{2} = \overline{PC} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $\overline{PN} = \overline{MQ}$. Аналогно се докажува дека $\overline{PM} = \overline{QK}$. Имаме

$$\measuredangle MPN = \measuredangle MPC + \measuredangle CPN = \measuredangle MQC + 60^\circ = \measuredangle MQC + \measuredangle CQK = \measuredangle KQM$$



Следува дека $\triangle MPN \cong \triangle KQM$. Значи $\overline{MN} = \overline{MK}$. Нека $\measuredangle BCD = \alpha$. Тогаш

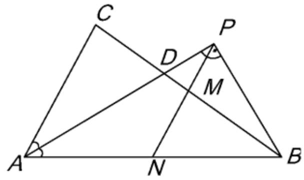
$$\measuredangle NMK = \measuredangle PMQ - \measuredangle PMN - \measuredangle QMK = \alpha - 180^\circ + \measuredangle NPM$$
$$= \alpha - 180^\circ + \measuredangle NPC + \measuredangle CPM$$
$$= \alpha - 180^\circ + 60^\circ + (180^\circ - \alpha) = 60^\circ$$

Следува $\triangle MNK$ е рамностран.

15. Нека M и N се средините на страните BC и AB на триаголникот ABC, соодветно и точката D лежи на страната BC . Докажи, дека ако

$P = AD \cap MN$, тогаш $AP \perp BP$ ако и само ако AD е симетрала на аголот $\measuredangle CAB$.

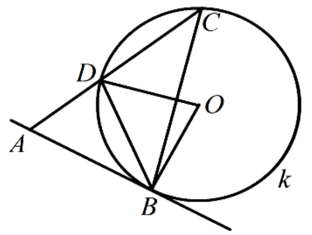
Решение. Нека $AP \perp BP$. Тогаш триаголникот ABP е правоаголен и PN е тежишна линија повлечена кон хипотенузата. Значи, $\overline{PN} = \overline{AN} = \overline{BN}$, од каде следува дека $\measuredangle PAN = \measuredangle APN$. Освен тоа, бидејќи MN е



средна линија за триаголникот ABC добиваме дека $\measuredangle APN = \measuredangle PAC$. Според тоа, $\measuredangle CAP = \measuredangle PAN$, т.е. AD е симетрала на аголот $\measuredangle CAB$.
Нека AD е симетрала на аголот $\measuredangle CAB$. Тогаш од $\measuredangle CAP = \measuredangle PAN = \measuredangle APN$ следува, дека $\overline{PN} = \overline{AN}$, што значи дека триаголникот ABP е правоаголен, т.е. $AP \perp BP$.

16. Нека D е точка на страната на триаголникот ABC таква да правата AB е тангента во точката B на кружницата опишана околу триаголникот BCD и нека притоа важи $\overline{BD} = \overline{CD}$. Докажи дека правата BD е симетрала на аголот $\measuredangle CBA$.

Решение. Од $\overline{BD} = \overline{CD}$ следува дека триаголникот BCD е рамнокрак, па затоа $\measuredangle DCB = \measuredangle CBD$. Понатаму, од својствата на централниот и периферниот агол над иста тетива добиваме



$$\measuredangle DOB = 2\measuredangle DCB = 2\varphi.$$

Но, $\overline{DO} = \overline{BO} = r$, па затоа триаголникот BSD е рамнокрак, што значи

$$\measuredangle BDO = \measuredangle OBD = \frac{180^\circ - \measuredangle DOB}{2} = \frac{180^\circ - 2\varphi}{2} = 90^\circ - \varphi.$$

Бидејќи правата AB е тангента во точката B на кружницата опишана околу триаголникот BCD важи $\measuredangle OBA = 90^\circ$. Понатаму,

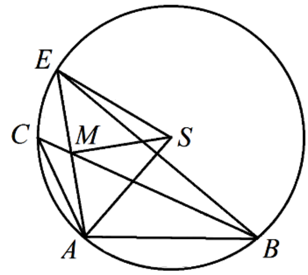
$$\measuredangle DBA = \measuredangle OBA - \measuredangle OBD = 90^\circ - (90^\circ - \varphi) = \varphi,$$

што значи дека $\measuredangle CBD = \measuredangle DBA$, со што тврдењето е докажано.

17. Даден е триаголник ABC.
а) Ако $\measuredangle BAC$ е тап агол, определи ги сите точки M на страната BC такви што $\overline{AM} = \sqrt{\overline{BM} \cdot \overline{CM}}$.

б) За кој видови триаголници точката M од задачата под а) не може да се најде на ниту една од страните на траиголникот? Одговорот да се образложи!

Решение. Нека M е точка на страната BC за која важи равенството $\overline{AM}=\sqrt{\overline{BM}\cdot\overline{CM}}$. Тогаш $\overline{AM}^2=\overline{BM}\cdot\overline{CM}$. Околу триаголникот ABC да опишеме кружница и нека S е нејзиниот центар. Понатаму, нека S е пресечната точка на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и правата точката AM. Имаме,



$\measuredangle AMC=\measuredangle BME$ (накрсни агли) и $\measuredangle ACM=\measuredangle BEM$ (периферни агли над тетивата AB), па затоа $\triangle AMC\sim\triangle BME$. Според тоа,

$$\overline{AM}:\overline{CM}=\overline{BM}:\overline{ME},$$

од каде следува дека

$$\overline{AM}\cdot\overline{ME}=\overline{CM}\cdot\overline{BM},$$

па како

$$\overline{AM}^2=\overline{BM}\cdot\overline{CM}$$

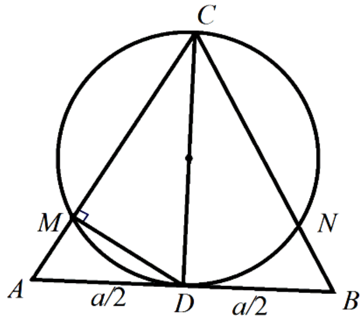
следува $\overline{AM}=\overline{ME}$, што значи дека точката M е средина на тетивата AE. Но, тоа значи дека $SM\perp AE$, т.е. $\measuredangle AMS=90^\circ$. Сега од теоремата на Талес следува дека точката M лежи на кружницата со дијаметар AS, па значи бараната точка M е пресек на кружницата со дијаметар AS и страната BC на триаголникот ABC.

а) Ако $\measuredangle BAC>90^\circ$, т.е. триаголникот е тапоаголен, тогаш задачата има две решенија, т.е. на страната BC можеме да определиме две точки M_1 и M_2 со саканото својство. Тоа се пресеците на кружницата со дијаметар AS и страната BC.

б) Задачата нема решение ако кружницата со дијаметар AS не ја сече страната BC, што е случај кога $\measuredangle BAC$ е остар агол, т.е. кога триаголникот е остроаголен.

18. Докажи дека кружницата чиј дијаметар е висината на рамностраниот триаголник ги сече неговите две страни во точки кои овие страни ги делат во однос $1:3$.

Решение. Имаме $\measuredangle DMC=90^\circ$, како агол над дијаметар на кружница, што значи дека $\triangle DCM$ е правоаголен. Затоа и $\triangle ADM$ е правоаголен.



Од $\measuredangle ADM = 90^\circ$ и $\measuredangle DAC = 60^\circ$ следува дека $\triangle ADM$ е половина од рамностран триаголник со страна $\frac{a}{2}$. Затоа $\overline{AM} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{a}{4}$. Тогаш $\overline{MC} = \frac{3a}{4}$, па затоа

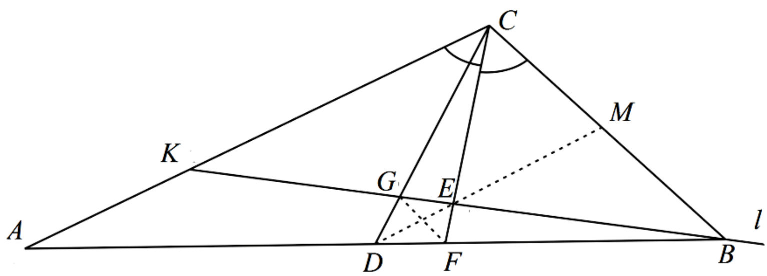
$$\overline{AM} : \overline{MC} = \frac{a}{4} : \frac{3a}{4} = 1:3 .$$

Аналогно се докажува дека

$$\overline{BN} : \overline{NC} = 1:3 .$$

19. Даден е триаголникот ABC, $(BC < AB)$. Низ точката C е повлечена права l, нормална на симетралата BE на аголот $\measuredangle B$. Правата l ја сече BE во точка F, а тежишната линија BD во точка G. Да се докаже дека отсечката DF ја преполовува отсечката EG.

Решение. Нека $CF \cap AB = \{K\}$ и $DF \cap BC = \{M\}$. Бидејќи $BF \perp KC$ и BF е симетрала на $\measuredangle KBC$ следува дека $\triangle KBC$ е рамнокрак, т.е $\overline{BK} = \overline{BC}$, и уште F е средина на KC. Според тоа, DF е средна линија за $\triangle ACK$, односно $DF \| AK$, од каде јасно M е средина на BC. Ќе покажеме дека $GE \| BC$. Доволно е да покажеме дека $\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}$.



Од $DF \| AK$ и $\overline{DF} = \frac{\overline{AK}}{2}$ имаме

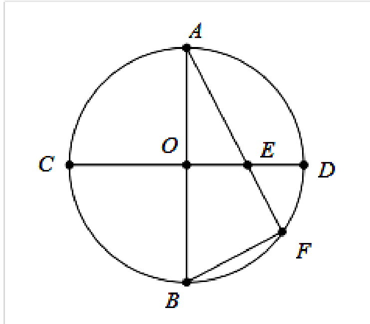
$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{AK}} \qquad (1).$$

Понатаму

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CD} - \overline{DE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AE} - \overline{DE}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} - 2$$
$$= \frac{\overline{AB}}{\overline{DF}} - 2 = \frac{\overline{AK} + \overline{BK}}{\frac{\overline{AK}}{2}} - 2 = 2 + 2\frac{\overline{BK}}{\overline{AK}} - 2 = \frac{2\overline{BK}}{\overline{AK}} \qquad (2)$$

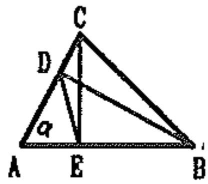
Од (1) и (2) добиваме $\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}$, па следува $GE\|BC$, и бидејќи M е средина на BC, следува DF ја преполовува GE.

20. На цртежот десно, дијаметрите $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ се заемно нормални. Докажи дека $\triangle ABF\sim\triangle AEO$!



Решение. Од условот на задачата следува $\measuredangle AOE=90^{\circ}$ и $\measuredangle AFB=90^{\circ}$, како периферски над дијаметарот $\overline{AB}$. Од друга страна, $\measuredangle BAF=\measuredangle EAO$. Според тоа, $\triangle ABF\sim\triangle AEO$.

21. Отсечките BD и CE се висини на остроаголниот $\triangle ABC$. Докажи дека $\measuredangle ADE=\measuredangle ABC$.

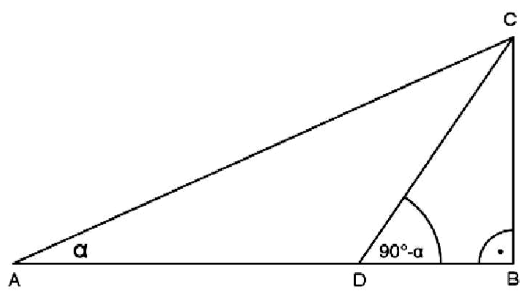


Решение. Правоаголните триаголниците ABD и ACE имаат заеднички $\measuredangle CAB$, па затоа се слични. Од оваа сличност следува $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AD}:\overline{AE}$. Според тоа, триаголниците ABC и ADE имаат заеднички агол и пропорционални страни кои го зафаќаат тој агол, па затоа тие се слични. Оттука следува $\measuredangle ADE=\measuredangle ABC$.

22. Од точката A, која е $120\,m$ оддалечена од подножјето на вертикалната кула BC, врвот C се гледа под агол α. Од точката D, која е за $90\,m$ поблиску до подножјето на кулата B, врвот на кулата се гледа под агол $90^{\circ}-\alpha$. Определи ја висината на кулата BC.

Решение. Според условот на задачата важи $\measuredangle DCB=\alpha=\measuredangle BCA$, па затоа правоаголните триаголници ABC и CBD се слични. Од сличноста следува

$$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{BD},$$

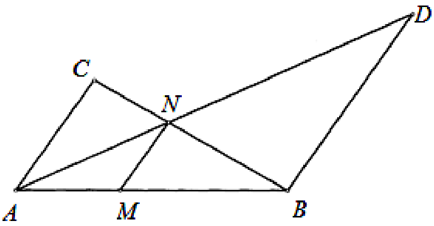


па затоа

$$120:\overline{BC}=\overline{BC}:(120-90)\text{, т.е. } \overline{BC}=60\,m.$$

23. Во рамнината се дадени точките A, B, C, D, M и N (цртеж десно) при што $AC \parallel MN \parallel BD$. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{MN}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{BD}}.$$



Решение. Од $MN \parallel AC$ следува дека $\triangle MBN \sim \triangle ABC$, а од $MN \parallel BD$ следува дека $\triangle AMN \sim \triangle ABD$. Од докажаните сличности следува дека

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MN}}{\overline{AC}} \text{ и } \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MN}}{\overline{BD}}.$$

Ако ги собереме последните равенства добиваме

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{MN}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MA}+\overline{MB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}=1, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{\overline{MN}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{BD}}.$$

24. Во триаголник ABC важи $\overline{AB}=30\,mm$ и $\overline{AC}=60\,mm$. Од точката D на страната AC е повлечена права која страната E ја сече во точка E така што важи $\measuredangle ADE=\measuredangle CBA$. Определи ги должините на отсечките AD и AE ако $\overline{AE}=\overline{AD}+6\,mm$.

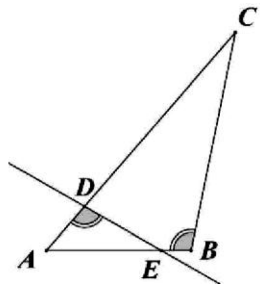
Решение. Според условот $\measuredangle ADE=\measuredangle CBA$ и бидејќи $\measuredangle EAD=\measuredangle BAC$, заклучуваме дека $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Од сличноста следува

$$\overline{AE}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AB}=2:1,$$

па затоа $\overline{AE}=2\overline{AD}$. Значи,

$$2\overline{AD}=\overline{AD}+6,$$

т.е.

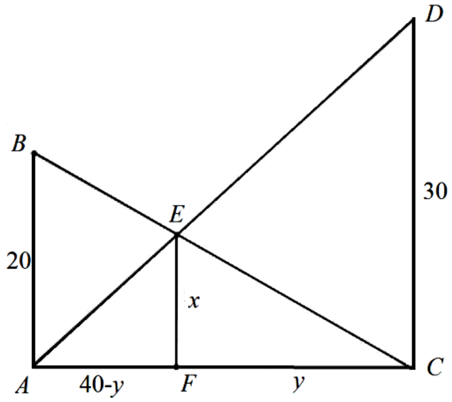


$$\overline{AD}=6\,mm \text{ и } \overline{AE}=\overline{AD}+6=12\,mm.$$

25. Два столба се високи $20\,m$ и $30\,m$. Со затегнато јаже врвот на секој столб е поврзан со дното на другиот столб. На која висина од подлогата се сечат двете јажиња ако столбовите се наоѓаат на растојание од $40\,m$?

Решение. Триаголниците ACB и FCE имаат еднакви агли, што значи дека тие се слични. Од сличноста следува

$$20:x=40:y,$$



односно $y=2x$. Аналогно, триаголниците ACD и AFE се слични, па затоа

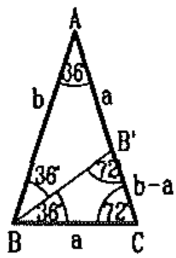
$$30:x=40:(40-y),$$

односно

$$30:x=40:(40-2x),$$

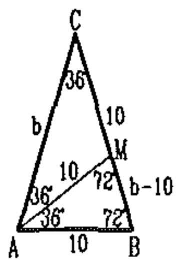
па затоа $x=12$. Според тоа, јажињата се сечат на висина од $12m$ од подлогата.

26. Во рамнокрак триаголник со основа a и крак b аголот при основата е еднаков на 72°. Докажи дека $b=\sqrt{a(a+b)}$.



Решение. Нека во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle B=\measuredangle C=72^\circ$. Ја повлекуваме симетралата BB' на $\measuredangle B$. Тогаш $\measuredangle ABB'=36^\circ$, $\measuredangle CBB'=36^\circ$ и $\measuredangle CB'B=72^\circ$, па затоа $\triangle ABB'$ е рамнокрак и $\triangle CBB''$ и важи $\overline{AB'}=\overline{BB'}$ $=\overline{AB}=a$. Понатаму $\triangle ABC\sim BCB'$, па затоа $a:b=(b-a):a$, односно $a^2=b^2-ab$. Ос последното равенство добиваме $b^2=a^2+ab$, т.е. $b=\sqrt{a(a+b)}$.

27. Во рамнокрак $\triangle ABC\,(\overline{AC}=\overline{BC})$ важи $\overline{AB}=10\,cm$ и $\measuredangle ACB=36^\circ$. Определи ја должината на кракот на $\triangle ABC$.



Решение. Нека M е точката во која симетралата на $\measuredangle A$ ја сече страната BC (цртеж десно). Од $\measuredangle A=\measuredangle B=72^\circ$ следува $\measuredangle BAM=36^\circ$, па затоа $\measuredangle AMB$ $=72^\circ$. Значи, рамнокраките триаголници ABC и BMA се слични. Понатаму, $\measuredangle BAC=\measuredangle C=36^\circ$, па затоа $\triangle CAM$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AM}=\overline{CM}$. Според тоа, $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BM}:\overline{AB}$, т.е. $10:b=(b-10):10$. Од последната равенка последователно добиваме

$$b(b-10)=100,$$

$$b^2-10b+25=125,$$

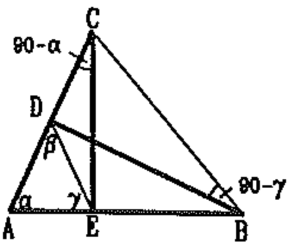
$$(b-5)^2=(5\sqrt{5})^2$$

и како како $b>0$ наоѓаме $b-5=5\sqrt{5}$, т.е. $b=5+5\sqrt{5}\,cm$.

28. Симетралата на аголот β во $\triangle ABC$ ја сече страната AC во точката D. Нормалата на BD низ средината M на отсечката BD ја сече правата AC во точката E. Докажи дека $\overline{AE}\cdot\overline{CE}=\overline{DE}^2$.

Решение. Според условот на задачата важи $\measuredangle ABD=\measuredangle CBD$ (направи цртеж). Триаголникот BDE е рамнокрак и $\measuredangle BDE=\measuredangle DBE$. За триаголникот BCD аголот $\measuredangle BDE$ е надворешен, па затоа $\measuredangle BDE-\measuredangle CBD$ $=\gamma$. Освен тоа, $\measuredangle ABE=\measuredangle DBE-\measuredangle DBA=\measuredangle BDE-\measuredangle CBD=\gamma$. Значи, $\triangle ABE\sim\triangle BCE$, па затоа $\overline{BE}:\overline{CE}=\overline{AE}:\overline{BE}$ и како $\overline{BE}=\overline{DE}$, добиваме $\overline{DE}:\overline{CE}=\overline{AE}:\overline{DE}$, т.е. $\overline{AE}\cdot\overline{CE}=\overline{DE}^2$.

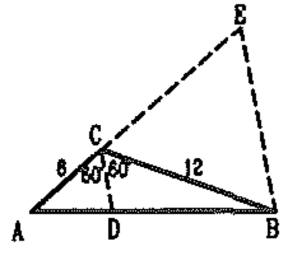
29. Во триаголникот ABC дадени се висините BD и CE ($B\in AC$, $E\in AB$). Докажи дека $\measuredangle ADE=\measuredangle ACE+\measuredangle CBD$.



Решение. Правоаголните триаголници ACE и ABD имаат заеднички агол во темето A, па затоа тие се слични. Од сличноста следува $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AD}:\overline{AE}$. Сега триаголниците ABC и ADE имаат заеднички агол во темето A и пропорционални страни $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AD}:\overline{AE}$, па затоа тие се слични. Од сличноста следува $\measuredangle ADE=\measuredangle ABC=\beta$ и $\measuredangle AED=\measuredangle ACB=\gamma$. Бидејќи $\measuredangle ACE=90^\circ-\alpha$ и $\measuredangle CBD=90^\circ-\gamma$ добиваме

$$\measuredangle ACE+\measuredangle CBD=90^\circ-\alpha+90^\circ-\gamma=180^\circ-(\alpha+\gamma)=\beta=\measuredangle ADE.$$

30. Даден е триаголник ABC, $\overline{BC}=12\,cm$, $\overline{AC}=6\,cm$ и $\measuredangle ACB=120^\circ$. Ако симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката D, определи ја должината на отсечката CD.

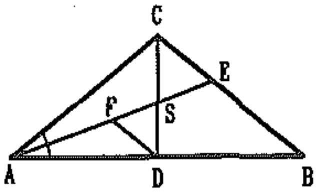


Решение. Нека $BE\parallel CD$. Тогаш $\measuredangle BCE=60^\circ$ (како суплементен на $\measuredangle BCA$) и $\measuredangle AEB=60^\circ$ (како агол со паралелни краци со $\measuredangle ACD$). Според тоа, $\triangle BCE$ е рамностран, па затоа $\overline{BC}=\overline{CE}=\overline{EB}=12\,cm$. Сега $\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=$

$18\,cm$ и од Талесовата теорема следува $\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{AE}:\overline{EB}$, односно $6:\overline{CD}=18:12$. Конечно, $\overline{CD}=4\,cm$.

31. Во рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AC}=\overline{BC}$) аголот при врвот е еднаков на 108°. Докажи дека симетралата на аголот при основата AE е двапати подолга од висината CD.

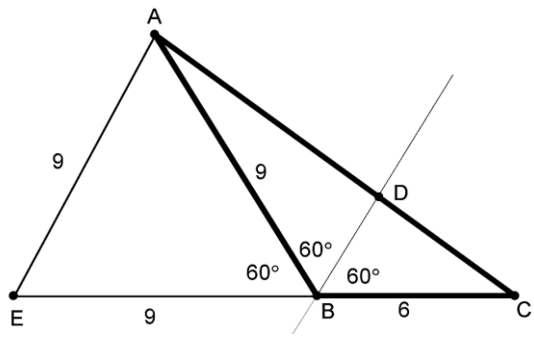
Решение. Нека $FD \| BC$. Тогаш бидејќи $\overline{AD}=\overline{DB}$, добиваме дека FD е средна линија на $\triangle ABE$, па затоа $\overline{AF}=\overline{FE}=\frac{1}{2}\overline{AE}$.



Од $\measuredangle ACD=\measuredangle BCD=54^\circ$ и $\measuredangle BAE=\measuredangle CAE=18^\circ$ следува $\measuredangle CES=180^\circ-108^\circ-18^\circ=54^\circ$, што значи дека $\triangle CES$ е рамнокрак и важи $\overline{CS}=\overline{ES}$. Понатаму, $\measuredangle SFD=\measuredangle SEC$ и $\measuredangle SDF=\measuredangle SCE$ како агли со паралелни краци, па затоа $\triangle FDS$ е рамнокрак и важи $\overline{FS}=\overline{DS}$. Конечно, $\overline{CD}=\overline{CS}+\overline{SD}=\overline{SE}+\overline{SF}=\overline{FE}=\frac{1}{2}\overline{AE}$.

32. За $\triangle ABC$ важи $\overline{AB}=9\,dm, \overline{BC}=6\,dm$ и $\measuredangle ABC=120^\circ$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AC во точката D. Определи ја должината на отсечката BD.

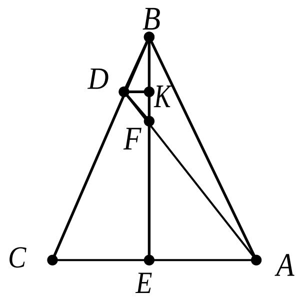
Решение. Ја повлекуваме симетралата на $\measuredangle ABC$ и низ темето A повлекуваме права паралелна на оваа симетрала, па во пресекот со правата BC ја добиваме точката E. Понатаму, $\measuredangle EBA=60^\circ$ и



$\measuredangle BEA=\measuredangle CBD=60^\circ$ (агли со паралелни краци), па затоа $\triangle AEB$ е рамностран со должина на страна $9\,dm$. Имаме $\measuredangle BEA=\measuredangle CBD=60^\circ$ и $\measuredangle BCD$ е заеднички, па затоа $\triangle AEC \sim \triangle DBC$. Според тоа,

$$\overline{BC}:\overline{EC}=\overline{BD}:\overline{EA}$$
$$6:(6+9)=\overline{BD}:9$$
$$15\overline{BD}=54$$
$$\overline{BD}=3,6\,dm.$$

33. На страната BC од рамнокракиот триаголник ABC $(\overline{AB}=\overline{BC})$ е избрана точка D таква што $\overline{BD}:\overline{DC}=1:4$. Во кој однос правата AD ја дели висината BE сметајќи од темето B?



Решение. Пресекот на BE и AD да го означиме со F. Нека $K\in BE$ е таква што $DK \parallel CA$. Според тоа, $\triangle BCE \sim \triangle BDK$ и $\frac{\overline{BK}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{KD}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{5}$, односно $\overline{BK}=\frac{1}{5}\overline{BE}$ и $\overline{KD}=\frac{1}{5}\overline{CE}$. Бидејќи триаголниците DKF и AEF имаат еднакви агли, тие се слични, па според тоа $\frac{\overline{KD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{KF}}{\overline{FE}}=\frac{1}{5}$. Ако воведеме ознака $\overline{KF}=x$, тогаш $\overline{FE}=5x$, па од равенството

$$\overline{BK}+\overline{KF}+\overline{FE}=\overline{BE},$$

добиваме $\overline{BK}=\frac{3}{2}x$. Бидејќи

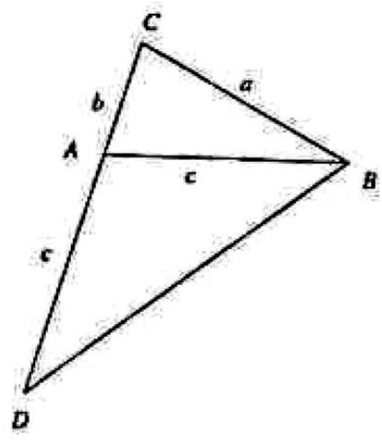
$$\overline{BF}=\overline{BK}+\overline{KF}=\frac{3}{2}x+x=\frac{5}{2}x,$$

од равенството $\overline{FE}=5x$ добиваме

$$\overline{BF}:\overline{FE}=\frac{5}{2}x:5x=1:2.$$

34. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle CAB=2\measuredangle ABC$. Ако $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$ се должините на страните на $\triangle ABC$, докажи дека

$$a^2=b(b+c).$$



Решение. Нека $\measuredangle ABC=\beta$. Според условот на задачата $\measuredangle CAB=2\beta$. На продолжението на страната AC преку темето A земаме точка D таква што $\overline{AD}=\overline{AB}=c$. Тоа значи дека $\triangle BDA$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle ADB=\measuredangle ABD$ (агли при основата). Аголот $\measuredangle CAB$ е надворешен за $\triangle BDA$, па затоа важи

$$2\beta=\measuredangle CAB=\measuredangle ABD+\measuredangle ADB=2\measuredangle ABD$$

т.е. $\measuredangle ABD=\beta$. Според тоа,

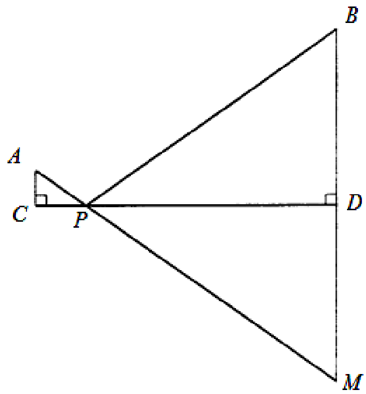
$$\measuredangle ABC=\measuredangle ABD=\measuredangle ADB=\beta.$$

Сега $\measuredangle DBC = \measuredangle DBA + \measuredangle ABC = 2\beta$, т.е. $\measuredangle DBC = \measuredangle CAB = 2\beta$. Оттука следува дека триаголниците ABC и BDC се слични. Навистина имаме $\measuredangle DBC = \measuredangle CAB$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle ADB = \measuredangle CDB$, а аголот $\measuredangle ACB = \measuredangle DCB$ е заенички. Од докажана сличност следува $a:b=(b+c):a$, односно $a^2 = b(b+c)$, што и требаше да се докаже.

35. На правата p се земени точки C и D така што $\overline{CD} = 114$. Од иста страна на правата p се земени точки A и B такви што $AC \perp p$ и $BD \perp p$, при што $\overline{AC} = 13$ и $\overline{BD} = 65$. На отсечката CD избрана е точка P така што збирот $\overline{AP} + \overline{PB}$ е најмал можен. Определи ги должините на отсечките CP и PD?

Решение. Нека точката M е симетрична на точката B во однос на правата p и нека P е пресечната точка на правите AM и p. Тогаш $\triangle PDB \cong \triangle PDM$ (PD е заедничка страна, $\overline{BD} = \overline{DM}$ и $\measuredangle PDB = \measuredangle PDM = 90^\circ$), па затоа $\overline{PB} = \overline{PM}$ и $\measuredangle DPB = \measuredangle DPM$. Тоа значи дека

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PM}.$$



Бидејќи точките A, P, M лежат на иста права, заклучуваме дека збирот

$$\overline{AP} + \overline{PM} = \overline{AP} + \overline{PB}$$

е најмал можен, што значи дека точката P е бараната точка. Од $\measuredangle CPA = \measuredangle DPM$, како накрсни агли, и $\measuredangle DPB = \measuredangle DPM$ следува $\measuredangle DPB = \measuredangle CPA$, па затоа $\triangle ACP \sim \triangle BDP$.

Нека $\overline{CP} = x$. Тогаш $\overline{PD} = 114 - x$, па од $\triangle ACP \sim \triangle BDP$ следува

$$\overline{AC} : \overline{CP} = \overline{BD} + \overline{PD}, \text{ т.е. } 13 : x = 65 : (114 - x),$$

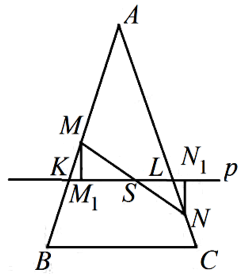
од каде добиваме $x = 19$.

Според тоа, $\overline{CP} = 19$ и $\overline{PD} = 114 - 19 = 95$.

36. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. На кракот AB земена е точка M, а на кракот AC земена е точка N така што правата MN не е паралелна со правата BC. Правата p која минува низ средината S на отсечката MN ги сече краците AB и AC во точките K и L, соодветно. Нека

M_1 и N_1 се подножјата на нормалите повлечени од точките M и N кон правата p, соодветно. Ако $\overline{KL}=\overline{M_1N_1}$, докажи дека $p \parallel BC$.

Решение. Имаме $\overline{MS}=\overline{SN}$, $\measuredangle MSM_1=\measuredangle NSN_1$ (накрсни агли и $\measuredangle SMM_1=\measuredangle SNN_1$ (остри агли со паралелни краци), па затоа $\triangle MSM_1 \cong \triangle NSN_1$. Од докажаната складност следува $\overline{MM_1}=\overline{NN_1}$. Сега, од $\overline{KL}=\overline{M_1N_1}$ и следува



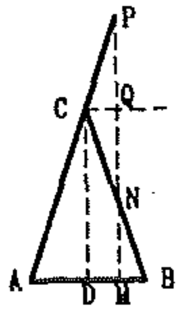
$$\overline{KM_1}=\overline{KN_1}-\overline{M_1N_1}=\overline{KN_1}-\overline{KL}=\overline{LN_1}$$

и како $\overline{MM_1}=\overline{NN_1}$ и $\measuredangle KM_1M=\measuredangle LN_1N=90^\circ$ и $\overline{MM_1}=\overline{NN_1}$ добиваме дека $\triangle KM_1M \cong \triangle LN_1N$. Од складноста следува $\measuredangle MKM_1=\measuredangle N_1LN$ и како $\measuredangle N_1LN=\measuredangle ALK$ (накрсни нагли), добиваме $\measuredangle MKM_1=\measuredangle ALK$, т.е. $\triangle AKL$ е рамнокрак и важи $\overline{AK}=\overline{AL}$.

Понатаму, бидејќи $\overline{AK}:\overline{AL}=\overline{AB}:\overline{AC}$ и $\measuredangle BAC$ е заеднички агол добиваме дека $\triangle AKL \sim \triangle ABC$, па затоа $\measuredangle AKL=\measuredangle ABC$, што значи дека $p \parallel BC$.

37. Даден е рамнокрак триаголник ABC и точка M на основата AB. Права n која ја содржи точката M е нормална на основата AB и го сече кракот BC во точка N, а продолжението на кракот AC го сече во точка P. Докажи дека збирот $\overline{MN}+\overline{MP}$ не зависи од положбата на точката M.

Решение. Нека CD е висината на $\triangle ABC$, а точката Q е средината на отсечката NP. Имаме



$$\measuredangle CPN=\measuredangle ACD=\measuredangle DCN=\measuredangle CNP$$

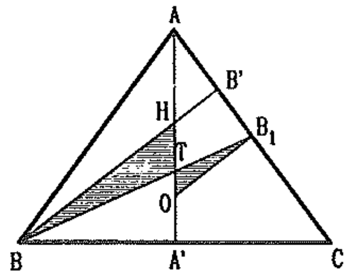
па затоа $\triangle CNP$ е рамнокрак. Тоа значи дека CQ е симетрала на PN, па затоа $CQ \perp PM$. Според тоа, четириаголникот $CDMQ$ е правоаголник и важи $\overline{CD}=\overline{MQ}=h$. Според тоа,

$$\overline{MN}+\overline{MP}=\overline{MN}+(\overline{MN}+\overline{NQ}+\overline{QP})=\overline{MN}+(\overline{MN}+\overline{NQ}+\overline{NQ})$$
$$=2\overline{MN}+\overline{NQ}=2\overline{MQ}=2h,$$

што значи дека збирот $\overline{MN}+\overline{MP}$ не зависи од положбата на точката M.

38. Основата AB на рамнокрак триаголник ABC има должина $24cm$, а кракот има должина $20cm$. Определи го растојанието меѓу ортоцентарот H и тежиштето T на овој триаголник.

Решение. Нека A' и B' се подножјата на висините повлечеи од темињата A и B, соодветно, B_1 е средината на страната AC и O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ (цртеж десно). Од $\overline{A'B}=\overline{A'C}=12\,cm$, добиваме



$$\overline{AA'}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BA'}^2}=\sqrt{20^2-12^2}=14\,cm.$$

Плоштината на $\triangle ABC$ е $\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AA'}}{2}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BB'}}{2}$, т.е. $\overline{BB'}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AA'}}{\overline{AC}}=\frac{96}{5}\,cm$.

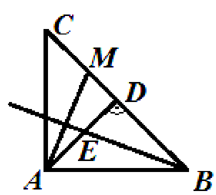
Понатаму, добиваме

$$\overline{AB'}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BB'}^2}=\frac{28}{5}\,cm \text{ и } \overline{CB'}=\frac{52}{5}\,cm.$$

Бидејќи $\triangle AB'H\sim\triangle AA'H$, добиваме $\overline{AH}:\overline{AB'}=\overline{AB}:\overline{AA'}$. Оттука $\overline{AH}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AB'}}{\overline{AA'}}=7\,cm$, па затоа $\overline{A'H}=13\,cm$. Слично $\triangle AOB_1\sim\triangle ACA'$, па затоа $\overline{AB_1}:\overline{AO}=\overline{AA'}:\overline{AC}$ и $\overline{AO}=\frac{\overline{AB_1}\cdot\overline{AC}}{\overline{AA'}}=\frac{25}{2}\,cm$. Понатаму добиваме $\overline{OH}=\overline{AO}-\overline{AH}=\frac{11}{2}\,cm$. Сега од сличноста $\triangle B_1OT\sim\triangle BHT$ добиваме $\overline{HT}:\overline{TO}=\overline{BT}:\overline{TB_1}=2:1$, па затоа $\overline{HT}=2\overline{TO}$, т.е. $\overline{HT}=2\frac{\overline{OH}}{3}=\frac{11}{3}\,cm$.

39. Нека ABC е рамнокрак правоаголен триаголник со прав агол во темето C, и нека D е подножјето на висината повлечена од C. Ако симетралата на аголот CAB ја сече висината CD во точката E, докажи дека $\overline{BC}+\overline{CE}=\overline{AB}$.

Решение. Нека M е точка од хипотенузата таква што $\overline{AC}=\overline{AM}$. Тогаш триаголникот AMC е рамнокрак со основа CM и



$$\measuredangle ACM=\measuredangle AMC=\frac{180^\circ-45^\circ}{2}=67^\circ 30',$$

па следува дека

$$\measuredangle BCM=90^\circ-67^\circ 30'=22^\circ 30'.$$

Бидејќи

$$\measuredangle CAE = \measuredangle BCM = 22^\circ 30', \ \overline{AC} = \overline{BC} \text{ и } \measuredangle ACE = \measuredangle CBM = 45^\circ,$$

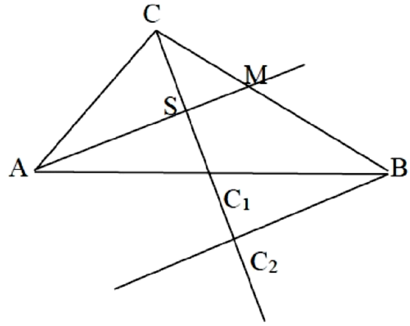
следува дека триаголниците CAE и BCM се складни.

Значи, $\overline{BM} = \overline{CE}$, па добиваме дека

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AC} + \overline{CE}.$$

40. Низ темето A на $\triangle ABC$ е повлечена права која ја сече страната BC во точка M таква што $\overline{BM} : \overline{CM} = 2016 : 2015$. Тежишната линија CC_1 ја сече правата AM во точка S. Определи го односот на должините на отсечките SC и CC_1.

Решение. Низ точката B повлекуваме права паралелна со правата AM и нека C_2 е пресечната точка на оваа права со правата CC_1. Тогаш $\triangle AC_1S \cong \triangle BC_1C_2$, па затоа $\overline{C_2C_1} = \overline{SC_1}$. Сега, од Талесовата теорема следува $\overline{CM} : \overline{BM} = \overline{CS} : 2\overline{SC_1}$, па затоа $\overline{CS} : \overline{SC_1} = 2015 : 1008$.



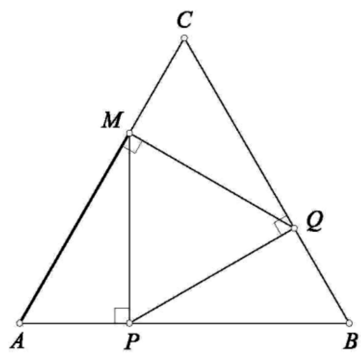
41. Даден е рамностран триаголник ABC, при што $\overline{AB} = 9cm$. Нека M е точка на страната AC, точката P е подножје на нормалата спуштена од M на AB, точката Q е подножје на нормалата спуштена од точката P на страната BC и нормалата спуштена од Q на AC ја сече AC во точката M. Пресметај ја должината на отсечката AM.

Решение. Триаголникот ABC е рамностран, па затоа

$$\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BCA = 60^\circ.$$

Бидејќи $\measuredangle APM = 90^\circ$, добиваме

$$\begin{aligned} \measuredangle PMA &= 180^\circ - \measuredangle APM - \measuredangle MPA \\ &= 180^\circ - \measuredangle APM - \measuredangle CAB \\ &= 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \end{aligned}$$



Аналогно, $\measuredangle QPB = 30^\circ, \measuredangle MQC = 30^\circ$.

Тоа значи дека триаголниците $\triangle APM, \triangle BPQ$ и $\triangle CMQ$ се половина од рамностран триаголник. Понатаму, важи

$$\measuredangle APM + \measuredangle MPQ + \measuredangle QPB = 180^\circ$$

односно $\measuredangle MPQ = 60^0$. Аналогно, $\measuredangle PQM = \measuredangle QMP = 60^0$, што значи дека триаголникот $\triangle PQM$ е рамностран.

Од

$$\overline{MP} = \overline{PQ} = \overline{QM}\,,\ \ \measuredangle APM = \measuredangle BQP = \measuredangle QMC = 90^0 \text{ и}$$

$$\measuredangle PMA = \measuredangle QPB = \measuredangle MQC = 30^\circ$$

според признакот за складност АСА следува $\triangle APM \cong \triangle BQP \cong \triangle CMQ$.

Понатаму, $\overline{AP} = \overline{CM}$ и $\overline{AP} = \frac{\overline{AM}}{2}$ следува

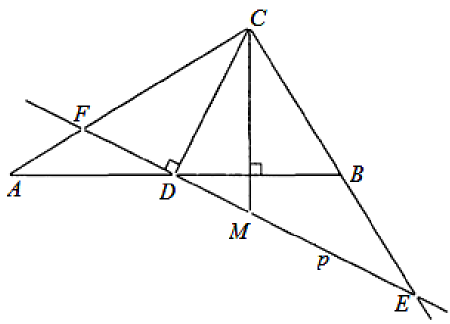
$$\overline{AM} + \overline{MC} = 9$$

$$2\overline{AP} + \overline{AP} = 9$$

$$\overline{AP} = 3.$$

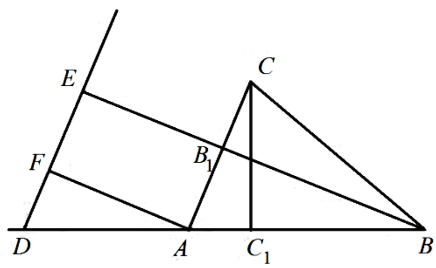
42. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и $\overline{AC} > \overline{BC}$. Нека D е средина на хипотенузата AB, а правата p минува низ D и е нормална на правата CD. Правата p ја сече правата BC во точката E, а отсечката AC ја сече во точката F. Докажи дека нормалата од темето C на хипотенузата AB ја полови отсечката EF.

Решение. Нека $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$ и $\overline{AC} > \overline{BC}$ и нека точката M е пресекот на нормалата повлечена од темето C на хипотенузата AB и правата EF. Точката D е средина на хипотенузата AB, па затоа таа е центар на опишаната кружница околу правоаголниот $\triangle ABC$. Според тоа, $\overline{DC} = \overline{DA}$. Значи, $\triangle ADC$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle DCA = \measuredangle CAD = \measuredangle CAB = \alpha$. Понатаму, $\measuredangle CEM = \measuredangle CED = \measuredangle DCA = \alpha$, како остри агли со нормални краци. Исто така $\measuredangle MCB = \measuredangle BAC = \alpha$, бидејќи тоа се остри агли со нормални краци. Значи, $\measuredangle CEM = \measuredangle MCB = \measuredangle MCE = \alpha$, што значи дека $\triangle MEC$ е рамнокрак, па затоа $\overline{MC} = \overline{ME}$.



Понатаму, $\measuredangle MCF = \measuredangle MCA = \measuredangle ABC = \beta$, бидејќи тоа се остри агли со нормални краци. Бидејќи $\measuredangle CMF$ е надворешен агол за $\triangle MEC$ добиваме $\measuredangle CMF = 2\alpha$. За $\triangle MCF$ важи $\measuredangle MFC + \measuredangle MCF + \measuredangle CMF = 180^\circ$, односно $\measuredangle MFC + \beta + 2\alpha = 180^\circ$ и бидијќи важи $\alpha + \beta = 90^\circ$, добиваме $\measuredangle MFC = 90^\circ - \alpha = \beta$. Сега е јасно дека $\triangle MCF$ е рамнокрак, а тоа значи дека $\overline{MC} = \overline{MF}$, па затоа $\overline{MF} = \overline{MC} = \overline{ME}$, т.е. точката M ја полови отсечката EF, што и требаше да се докаже.

43. Даден е триаголник ABC со остар агол $\measuredangle BAC$. На продолжението на страната AB преку темето A избрана е точка D таква што $\overline{AD} = \overline{AC}$. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од темето B на правата која минува низ точката D и е паралелна на правата AC, точката B_1 е подножјето на висината повлечена од темето B кон страната AC и C_1 е подножјето на висината повлечена од темето C кон страната AB. Докажи дека $\overline{BE} = \overline{B_1B} + \overline{C_1C}$.



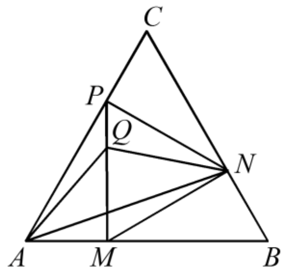
Решение. Нека F е подножјето на нормалата повлечена од точката A кон правата DE. Ќе докажеме дека триаголниците AFD и CC_1A се складни. Навистина, овие триаголници се правоаголни, $\overline{AD} = \overline{AC}$ и $\measuredangle FDA = \measuredangle CAC_1$, како агли на трансферзала. Од складноста следува дека $\overline{AF} = \overline{C_1C}$.

Понатаму, од $AC \parallel EF$ и $\measuredangle AFD = \measuredangle B_1EF = 90^\circ$ следува дека четириаголникот AB_1EF е правоаголник, па затоа $AF \parallel BB_1$, што значи $\overline{AF} = \overline{B_1E}$. Конечно, бидејќи $\overline{BE} = \overline{B_1B} + \overline{B_1E}$, а како $\overline{B_1E} = \overline{AF} = \overline{C_1C}$ следува $\overline{BE} = \overline{B_1B} + \overline{C_1C}$, што и требаше да се докаже.

44. Над страните AB, BC и AC на рамностраниот триаголник ABC земени се соодветно точки M, N и P такви што $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{1}{2}$.

На отсечката PM земена е точка Q таква што $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QM}} = \frac{1}{2}$. Определи ги аглите на триаголникот AQN.

Решение. *Прв начин.* Означуваме $\overrightarrow{AM} = x$. Разгледуваме ротација $\rho(A, +60^\circ)$. Нека $\rho(x) = x_1$ и следствено $\overrightarrow{AB} = 3x$, $\overrightarrow{AP} = 2x_1$ и $\overrightarrow{AC} = 3x_1$.



Пресметуваме $\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AP}}{3} = \frac{x + 4x_1}{3}$ и $\overrightarrow{AN} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} = \frac{6x + 3x_1}{3}$. Следствено

$$\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AQ} = \frac{5x - x_1}{3}.$$

Тогаш

$$\rho(\overrightarrow{QN}) = \frac{5\rho(x) - \rho(x_1)}{3} = \frac{5x_1 - (x_1 - x)}{3} = \frac{4x_1 + x}{3} = \overrightarrow{AQ}.$$

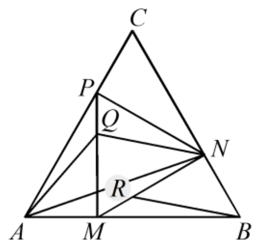
Добиваме дека триаголникот AQN е рамностран со агли 120°, 30° и 30°.

Втор начин. На отсечката MN избираме точка R таква што $\frac{\overline{MR}}{\overline{RN}} = \frac{1}{2}$. Нека $PM_1 \perp AB$ ($M_1 \in AB$). Од $\measuredangle APM_1 = 30^\circ$ следува, дека $\overline{AM}_1 = \frac{1}{2}\overline{AP} = \overline{AM}$ и следствено $M_1 \equiv M$. Аналогно $MN \perp BC$ и $NP \perp AC$. Добиваме дека $\triangle AMP \cong \triangle BNM \cong \triangle CPN$, од каде

$$\overline{PM} = \overline{MN} = \overline{NP} \text{ и } \sphericalangle AQM = \sphericalangle BRN.$$

Следствено $\triangle AMQ \cong \triangle BNR$, т.е. $\overline{AQ} = \overline{BR}$. Пресметуваме,

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MR} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{NB}$$



и заклучуваме, дека $RBNQ$ е паралелограм, па затоа $\overline{QN} = \overline{BR} = \overline{AQ}$. Од друга страна

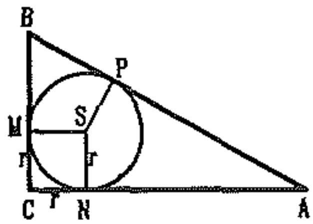
$$\measuredangle NQR = \measuredangle NBR = 90^0 - \measuredangle BRN.$$

Оттука

$$\measuredangle AQM + \measuredangle NQR = \measuredangle BRN + 90^\circ - \measuredangle BRN = 90^\circ.$$

Нека $QR_1 \perp MN$ ($R_1 \in MN$). От $\measuredangle MQR_1 = 30^\circ$ следува, дека $\overline{MR}_1 = \frac{1}{2}\overline{MQ} = \frac{1}{2}\overline{RN} = \overline{MR}$ и значи $R_1 \equiv R$. Следствено $\measuredangle AQN = 120^\circ$, а другите два агли се по 30°.

45. Докажи дека во произволен правоаголен триаголник збирот на катетите е еднаков на збирот на дијаметрите на опишаната и впишаната кружница.



Решение. Нека центарот на впишаната кружница во правоаголниот $\triangle ABC$ е S, радиусот на кружницата е r, радиусот на опишаната кружница е R, катетите се a и b, хипотенузата е $c=2R$, а M,N и P се допирните точки на кружницата со катетите BC,CA и хипотенузата AB. Четириаголникот $CNSM$ е квадрат. Понатаму, тангентните отсечки повлечени од иста точка кон кружница се еднакви па затоа $\overline{AN}=\overline{AP}$, $\overline{BP}=\overline{BM}$ и $\overline{CM}=\overline{CN}$, од каде добиваме

$$a+b=(r+\overline{BM})+(r+\overline{AN})=2r+(\overline{BP}+\overline{AP})=2r+c=2r+2R,$$

што и требаше да се докаже.

V.2. ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

46. Нека a и b се катетите, c е хипотенузата и h е визината повлечена кон хипотенузата во правоаголен триаголник. Докажи дека триаголникот чии страни се $a+b, h$ и $c+h$ исто така е правоаголен.

Решение. Според условот на задачата $a^2+b^2=c^2$ и $2ab=4P=2ch$, па затоа

$$(a+b)^2+h^2=a^2+2ab+b^2+h^2=c^2+2ch+h^2=(c+h)^2.$$

Сега од обратната Питагорова теорема следува дека триаголникот со должини на страни $a+b, h$ и $c+h$ е правоаголен

47. За природните броеви a,b,c,d важи

$$a+b=c \text{ и } a+d=2c.$$

Докажи, дека постои правоаголен триаголник со плоштина $abcd$ и чии должини на страни се изразени со природни броеви.

Решение. Имаме $a=c-b$ и $d=2c-a=b+c$. Според тоа,

$$abcd=(c-b)\cdot b\cdot c\cdot(b+c)=bc(c^2-b^2)=\tfrac{1}{2}(2bc)(c^2-b^2).$$

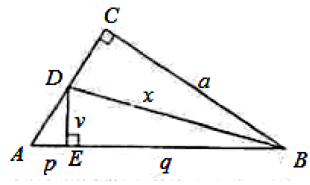
Бидејќи b и c се природни броеви и $c>b$ (a е природен број) добиваме дека $c^2-b^2>0$. Според тоа, $abcd$ е плоштина на правоаголен триаголник со катети со должини $2bc$ и c^2-b^2. Должината на хипотенузата е еднаква на

$$\sqrt{(2bc)^2+(c^2-b^2)^2}=\sqrt{c^4+2b^2c^2+c^4}=\sqrt{(b^2+c^2)^2}=b^2+c^2.$$

Јасно, бидејќи b и c се природни броеви и $c>b$, добиваме дека должините на сите три страни $2bc$, c^2-b^2 и c^2+b^2 се природни броеви.

48. Од средината на едната катета на правоаголен триаголник е повлечена нормала на хипотенузата. Докажи дека разликата на квадратите на должините на отсечките што таа нормала ги формира на хипотенузата е еднаква на квадратот на должината на другата катета.

Решение. Со примена на Питагоровата теорема на $\triangle BDE$ добиваме $v^2=x^2-q^2$, а со примена на истата теорема на $\triangle AED$ добиваме $v^2=\overline{AD}-p^2$. Значи,



$\overline{AD}-p^2=x^2-q^2$, т.е. $x^2=\overline{AD}^2-p^2+q^2$.

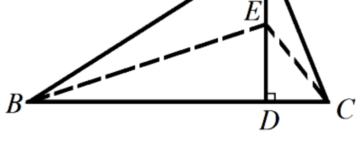
Понатаму, повторно заради Питагоровата теорема од $\triangle BCD$ следува $x^2=a^2+\overline{CD}^2$. Според тоа, $a^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2-p^2+q^2$. Но точката D е средина на катетата AC, па затоа $\overline{CD}=\overline{AD}$ и од последното равенство следува $a^2=q^2-p^2$, што и требаше да се докаже.

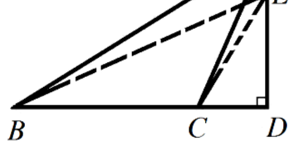
49. Даден е триаголник ABC и точка E на висината AD. Докажи дека

$$\overline{AC}^2-\overline{CE}^2=\overline{AB}^2-\overline{EB}^2.$$

Решение. Можни се два случаја: триаголникот ABC е остроаголен или е тапоаголен. На долните цртежит воочуваме четири правоаголни триаголници BDE, EDC, BDA и ADC. Со примена на Питагоровата теорема на триаголниците BDA и BDE добиваме $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$ и $\overline{EB}^2=\overline{ED}^2+\overline{BD}^2$, па затоа

$$\overline{AB}^2-\overline{EB}^2=\overline{AD}^2-\overline{ED}^2. \quad (1)$$





Со примена на Питагоровата теорема на триаголниците ADC и EDC добиваме $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2$ и $\overline{EC}^2=\overline{ED}^2+\overline{DC}^2$, па затоа

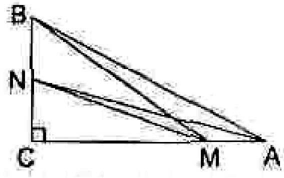
$$\overline{AC}^2-\overline{EC}^2=\overline{AD}^2-\overline{ED}^2. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува дека $\overline{AC}^2-\overline{CE}^2=\overline{AB}^2-\overline{EB}^2$.

50. Во правоаголен $\triangle ABC$ на катетите AC и BC земени се точки M и N, соодветно. Докажи го равенството

$$\overline{AN}^2+\overline{BM}^2=\overline{MN}^2+\overline{AB}^2.$$

Решение. Од правоаголниот $\triangle ANC$ добиваме $\overline{AN}^2=\overline{AC}^2+\overline{NC}^2$. Од правоаголниот $\triangle BMC$ добиваме $\overline{BM}^2=\overline{BC}^2+\overline{CM}^2$. Ако ги собереме добиените равенства и ја примениме Питагоровата теорема на триаголниците ABC и MNC наоѓаме



$$\overline{AN}^2+\overline{BM}^2=\overline{AC}^2+\overline{NC}^2+\overline{BC}^2+\overline{CM}^2=\overline{MN}^2+\overline{AB}^2,$$

што и требаше да се докаже.

51. Ако a е должината на сновата, а b должината на кракот на рамнокрак триаголник со агол при врвот еднаков на 150°, докажи дека $a^2=b^2(2+\sqrt{3})$.

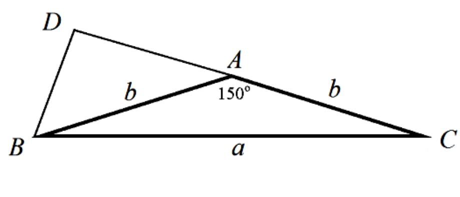
Решение. Нека D е подножната точка на висината на триаголникот ABC повлечена од темето B кон страната AC. Имаме,

$$\measuredangle BAD=180^\circ-150^\circ=30^\circ,$$

па затоа $\measuredangle ABD=60^\circ$, што значи дека $\triangle ABD$ е половина од рамностран триаголни со должина на страна b. Затоа $\overline{BD}=\frac{b}{2}$ и $\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}b$.

Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle BCD$ добиваме

$$a^2=(\tfrac{b}{2})^2+(b+\tfrac{\sqrt{3}}{2}b)^2$$
$$a^2=\tfrac{b^2}{4}+b^2+b^2\sqrt{3}+\tfrac{3}{4}b^2$$
$$a^2=b^2(2+\sqrt{3}).$$



52. Даден е $\triangle ABC$ со должини на страни $a=15\,cm, b=13\,cm$ и $c=14\,cm$. На страната AB земена е точка D таква што CD е висина на $\triangle ABC$.

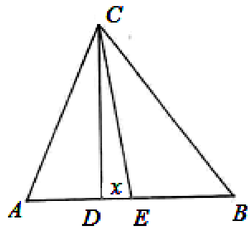
Точката E е средина на страната AB. Определи ја должината на отсечката DE.

Решение. Триаголниците ADC и CDB се правоаголни, па ако означиме $\overline{DE}=x$, од Питагоровата теорема следува

$$b^2=(7-x)^2+h^2 \text{ и } a^2=(7+x)^2+h^2.$$

Значи,

$$b^2-(7-x)^2=a^2-(7+x)^2$$
$$13^2-(7-x)^2=15^2-(7+x)^2$$
$$169-49+14x-x^2=225-49-14x-x^2$$
$$28x=56$$
$$x=2\,cm.$$



53. Ако должината на катетата AC на правоаголниот $\triangle ABC$ ја намалиме за $3\,cm$, а должината на катетата BC ја зголемиме за $9\,cm$, добиваме правоаголен триаголник чија хипотенуза е еднаква на хипотенузата AB на $\triangle ABC$. Исто важи и ако должината на катетата AC ја намалиме за $20\,cm$, а должината на катетата BC ја зголемиме за $40\,cm$. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$.

Решение. Нека a и b се должините на катетите AC и BC на $\triangle ABC$, соодветно. Од условот на задачата следува системот равенки

$$\begin{cases}(a-3)^2+(b+9)^2=a^2+b^2\\(a-20)^2+(b+40)^2=a^2+b^2\end{cases}$$

кој е еквивалентен на системот равенки

$$\begin{cases}a-3b=15,\\a-2b=50,\end{cases}$$

од каде добиваме $a=120\,cm$ и $b=35\,cm$.

54. Разликата на должините на катетите на правоаголниот триаголник е $6\,cm$, а должината на висината спуштена од темето на правиот агол е $8\,cm$. Пресметај ја должината на хипотенузата на триаголникот.

Решение. Нека се должините на катетите a и b, $a>b$. Тогаш $a-b=6$. Од $P=\frac{ab}{2}=\frac{ch_c}{2}$ следува $ab=ch_c$. Ако го квадрираме равенството $a-b=6$ и ја искористиме Питагоровата теорема и условот $h_c=6$ последователно добиваме

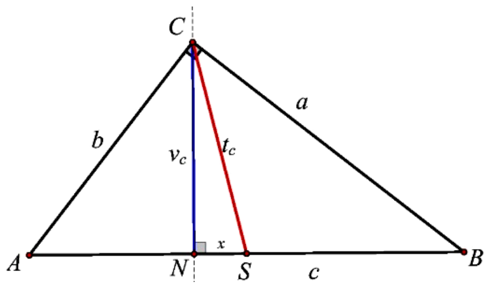
$$a^2-2ab+b^2=36$$
$$a^2-2ch_c+b^2=36$$
$$c^2-2ch_c=36$$
$$c^2-16c=36$$
$$(c-8)^2=100.$$

а) Од $c-8=10$ следува $c=18$,

б) Од $c-8=-10$ следува $c=-2$, што не е можно.

Конечно, должината на хипотенузата е $18cm$.

55. Во правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето C, односот на висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол е еднаков на $12:13$. Определи го односот на катетите на триаголникот $a:b$, ако $a>b$.



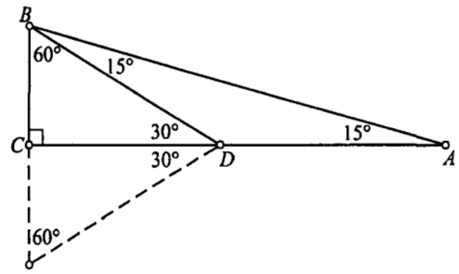
Решение. При ознаки како на цртежот десно, според условот на задачата важи $v_c:t_c=12:13$, па затоа постои k таков што $v_c=12k, t_c=13k$. Со N да го означиме подножјето на висината повлечена од темето C, а со S средината на хипотенузата. Бидејќи $\triangle ABC$ е правоаголен, важи $\frac{c}{2}=t_c=13k$. Да означиме $\overline{NS}=x$. Во правоаголниот триаголник NSC важи $x^2=t_c^2-h_c^2=25k^2$, па затоа $x=5k$. Според тоа, $\overline{AN}=\frac{c}{2}-x=8k$. Сега триаголниците ABC и ACN се правоаголни и имаат еден заеднички остар агол ($\measuredangle BAC=\measuredangle NAC$), па затоа тие се слични. Според тоа, $a:b=v_c:\overline{AN}$, т.е. $a:b=12k:8k=3:2$.

56. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle BCA=90^\circ$ и $\measuredangle CAB=15^\circ$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.

Решение. Имаме

$$\measuredangle ABC=180^\circ-\measuredangle BCA-\measuredangle CAB=180^\circ-90^\circ-15^\circ=75^\circ.$$

Нека D е точка на страната AC таква што $\measuredangle DBC=60^\circ$. Тогаш



$\measuredangle ABD = \measuredangle ABC - \measuredangle DBC = 15^\circ$, т.е. триаголникот ABD е рамнокрак и $\overline{AD} = \overline{BD}$. Од друга страна триаголникот CDB е правоаголен, со агли

$$\measuredangle DBC = 60^\circ,\ \measuredangle BCD = 90^\circ \text{ и}$$

$$\measuredangle CDB = 30^\circ.$$

Според тоа, триаголникот CDB е половина од рамностран триаголник со должина на страна $\overline{BD}$, а точката C е средина на една страна на тој рамностран триаголник, т.е. е подножје на висината повлечена од темето D. Затоа

$$a = \overline{BC} = \tfrac{1}{2}\overline{BD}, \text{ т.е. } \overline{BD} = 2a,$$

а според Питагоровата теорема важи

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

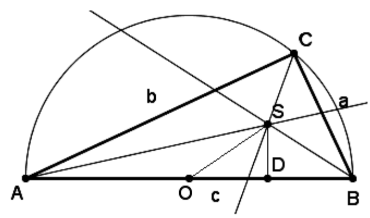
Сега,

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD} = \overline{BD} + \overline{CD} = 2a + a\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})a$$

и

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{(2+\sqrt{3})a}{a} + \frac{a}{(2+\sqrt{3})a} = 2+\sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4.$$

57. Во функција од катетите изрази го растојанието меѓу центрите на впишаната и опишаната кружница во правоаголен триаголник.



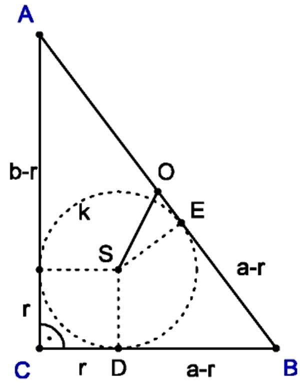
Решение. Нека су a и b должините на катетите на правоаголниот триаголник, O е центарот на опишаната, а S центарот на впишаната кружница на правоаголниот триагоник ABC (цртеж десно). Ако D е подножјето на нормалата повлечена од S на хипотенузата, тогаш $\overline{SD} = \frac{a+b-c}{2}$, $\overline{BO} = \frac{c}{2}$ и $\overline{BD} = \frac{a+c-b}{2}$. Значи, $\overline{OD} = \frac{b-a}{2}$.

Триаголникот ODS е правоаголен, па затоа $\overline{OS}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{SD}^2$. Значи:

$$\overline{OS} = \sqrt{(\tfrac{b-a}{2})^2 + (\tfrac{a+b-c}{2})^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3(a^2+b^2) - 2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}.$$

58. Определи го растојанието меѓу центрите на опишаната и впишаната кружница на правоаголен триаголник со катети $\overline{AC}=4\,cm$ и $\overline{BC}=3\,cm$.

Решение. Нека S е центарот на впишаната, а O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ (цртеж десно). Должината на хипотенузата на $\triangle ABC$ е



$$\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5\,cm.$$

Според тоа, полупериметарот на $\triangle ABC$ е $s=\frac{a+b+c}{2}=6\,cm$, па за плоштината на триаголникот добиваме $P=\frac{ab}{2}=rs$, т.е. $4r=6$. Значи $r=1cm$. Понатаму,

$$\overline{AO}+\overline{OE}+\overline{BE}=\overline{AB}\text{, т.е. } \frac{c}{2}+\overline{OE}+a-r=c,$$

па затоа $\overline{OE}=\frac{1}{2}\,cm$. Конечно, од правоаголниот $\triangle OSE$ следува

$$\overline{SO}=\sqrt{\overline{SE}^2+\overline{OE}^2}=\sqrt{1^2+(\tfrac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm.$$

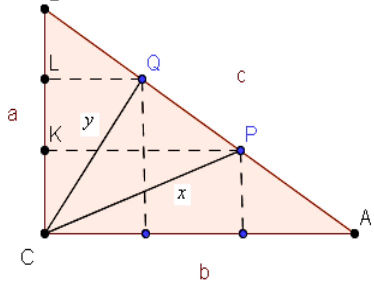
Забелешка. Задачата можеда се реши ако директно ја примениме формулата добиена во претходната задача.

59. На хипотенузата AB на правоаголниот $\triangle ABC$ се дадени точки P и Q такви што $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}=\frac{1}{3}\overline{AB}$. Нека $\overline{CQ}=y$ и $\overline{CP}=x$. Докажи дека $x^2+y^2=\frac{5}{9}c^2$.

Решение. Нека се K и L подножјата на нормалите повлечени од P и Q на катетата BC (цртеж десно). Тогаш од Питагоровата теорема следува:

$$y^2=\overline{CQ}^2=\overline{CL}^2+\overline{LQ}^2=(\tfrac{2}{3}a)^2+(\tfrac{1}{3}b)^2,$$

$$x^2=\overline{CP}^2=\overline{CK}^2+\overline{KP}^2=(\tfrac{1}{3}a)^2+(\tfrac{2}{3}b)^2.$$



Последните две равенства ги собираме и со примена на Питагоровата теорема добиваме:

$$x^2+y^2=\frac{5}{9}(a^2+b^2)=\frac{5}{9}c^2.$$

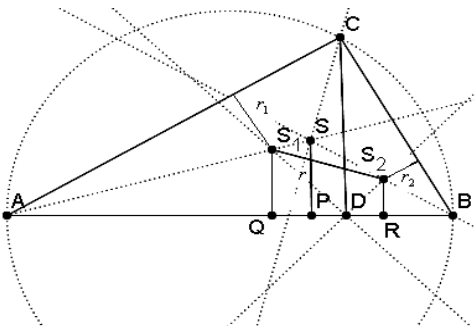
60. Во правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C повлечена е висната CD. Во триаголниците ABC, ACD, BCD се впишани полукружници со радиуси r, r_1, r_2 и центри S, S_1, S_2, соодветно.

а) Докажи дека $r^2 = r_1^2 + r_2^2$

б) Пресметај ја должината на S_1S_2.

в) Докажи дека $S_1S_2 \perp CS$. .

Решение. а) Триаголниците ABC, ACD и BCD се слични (цртеж десно), па затоа важи $\frac{r}{c} = \frac{r_1}{b} = \frac{r_2}{a}$. Според тоа, $a = \frac{cr_2}{r}$ и $b = \frac{cr_1}{r}$, па ако замениме во $a^2 + b^2 = c^2$ добиваме $(\frac{cr_2}{r})^2 + (\frac{cr_1}{r})^2 = c^2$, од каде



ако помножиме со $\frac{r^2}{c^2}$, добиваме $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

б) Важи $\overline{SC} = r\sqrt{2}, \overline{S_1D} = r_1\sqrt{2}$ и $\overline{S_2D} = r_2\sqrt{2}$. Понатаму, триаголникот S_1DS_2 е правоаголен, бидејќи симетралите на два напоредни агли се заемно нормални. Сега од Питагоровата теорема следува

$$\overline{S_1S_2}^2 = \overline{S_1D}^2 + \overline{S_2D}^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 = 2r^2,$$

т.е. $\overline{S_1S_2} = r\sqrt{2} = \overline{SC}$.

в) Аглите $\measuredangle CAB$ и $\measuredangle DCB$ се еднакви како агли со нормални краци, па затоа и симетралите на овие агли се заемно нормални. Според тоа, $AS \perp CS_2$ и аналогно $BS \perp CS_1$. Точката S е пресечната точка на нормалите повлечени од темињата S_1 и S_2 на спротивните страни на триаголникот CS_1S_2, што значи дека таа е ортоцентар на овој триаголник. Затоа $S_1S_2 \perp CS$.

61. Нека симетралата на аголот α ја сече страната BC на триаголникот ABC во точката E. Ако важи равенството $\frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AC}} = \sqrt{\frac{1}{\overline{BE}^2} + \frac{1}{\overline{CE}^2}}$, тогаш α е прав агол.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со равенството

$$\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\frac{\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{CE}^2}}{\overline{BE}\cdot\overline{CE}}. \qquad (1)$$

Бидејќи отсечоците кои симетралата на аголот ги прави на спротивната страна се пропорционални на соседните страни (теорема за симетрала на агол), добиваме $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{CE}$, па затоа

$$\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BE}+\overline{CE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}. \qquad (2)$$

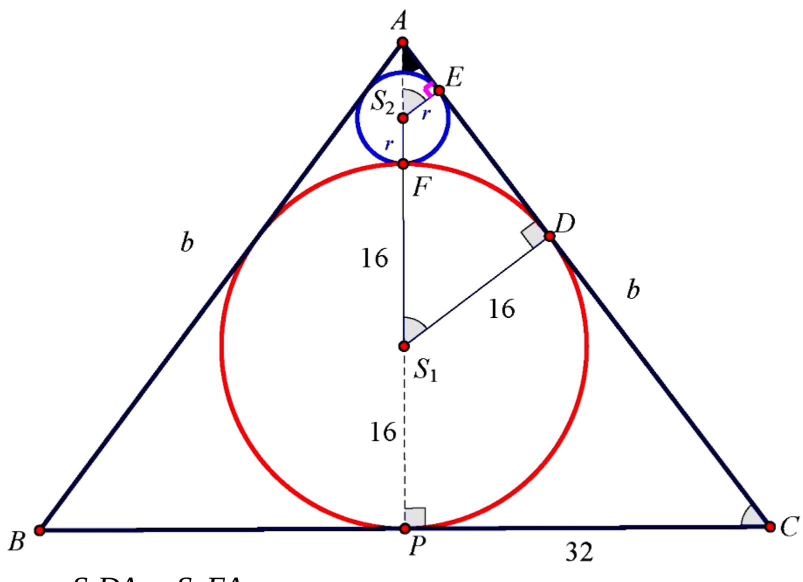
Ако ги поделиме соодветните страни на (1) и (2) добиваме $\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{CE}^2}}{\overline{BE}\cdot\overline{BC}}$. Затоа

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}=1+\frac{\overline{CE}^2}{\overline{BE}^2}=1+\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2},$$

односно $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$, па затоа од обратната Питагорова теорема следува дека α е прав агол во триаголникот ABC.

62. Во рамнокрак $\triangle ABC$, со теме A наспроти основата, е впишана кружница со радиус $16\,cm$. Во внатрешноста на овој триаголник нацртана е друга кружница со радиус r која ги допира краците на триаголникот и впишаната кружница. Должината на основата на $\triangle ABC$ е еднаква на $64\,cm$. Определи го радиусот r.

Решение. При ознаки како на долниот цртеж нека $\overline{AP}=h$.



Имаме $\triangle S_1DA\sim\triangle S_2EA$, па затоа

$$16:r=(h-16):(h-r-2\cdot 16),$$

од каде добиваме $h=\frac{512}{16-r}$. Понатаму, $\triangle S_1DA\sim\triangle CPA$, па затоа $32:16=b:(h-16)$, од каде добиваме $b=2h-32$. Според тоа,

$$b=2h-32=2\cdot\frac{512}{16-r}-32,$$

од каде добиваме $b=\frac{32(16+r)}{16-r}$. Со примена на Питагоровата теорема на $\triangle CPA$ имаме $b^2=h^2+32^2$, од каде последователно добиваме

$$(\tfrac{32(16+r)}{16-r})^2=(\tfrac{512}{16-r})^2+32^2,$$

$$32^2\frac{(16+r)^2}{(16-r)^2}=\frac{512^2}{(16-r)^2}+32^2,$$

$$\frac{(16+r)^2}{(16-r)^2}=\frac{16^2}{(16-r)^2}+1,$$

$$(16+r)^2=256+(16-r)^2,$$

$$256+32r+r^2=256+256-32r+r^2,$$

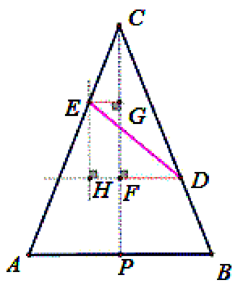
$$64r=256,$$

$$r=4\,cm.$$

Значи, радиусот на втората кружница е $r=4cm$.

63. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB со должина $10\,cm$ и крак со должина $13cm$. Нека D е точка на страната BC таква што $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$ и нека E е точка на CA таква што $\overline{CE}:\overline{EA}=1:2$. Пресметај ја должината на отсечката DE.

Решение. Нека P е средината на основата AB, Триаголникот ABC е рамнокрак, па затоа $CP\perp AB$. Од точките E и D повлекуваме нормали на CP и нека G и H се подножјата на истите, соодветно. Ја продолжуваме DF преку точката F и нека H е подножјето на нормалата повлечена од E кон DF. Тогаш $HFGE$ е правоаголник, а $\triangle HDE$ е правоаголен со хипотенуза DE. Од условите кои ги задоволуваат точките E и D, $\overline{CE}:\overline{EA}=1:2$ и $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$, следува



$$\overline{CE}:\overline{CA}=1:3 \text{ и } \overline{DC}:\overline{BC}=2:3, \text{ т.е. } \overline{CE}=\tfrac{13}{3}\,cm \text{ и } \overline{DC}=\tfrac{26}{3}\,cm,$$

а важи и $\overline{AP} = 5\,cm$. Сега од правоаголниот триаголник APC следува

$$\overline{PC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AP}^2} = 12\,cm.$$

Понатаму, триаголниците EGC и APC се слични, па затоа

$$\overline{EG} : \overline{AP} = \overline{CE} : \overline{CA} = 1:3,$$

односно $\overline{EG} = \frac{\overline{AP}}{3} = \frac{5}{3}\,cm$ и $\overline{GC} : \overline{PC} = 1:3$, односно $\overline{GC} = \frac{\overline{PC}}{3} = 4\,cm$.

Триаголниците DFC и PBC се слични и затоа

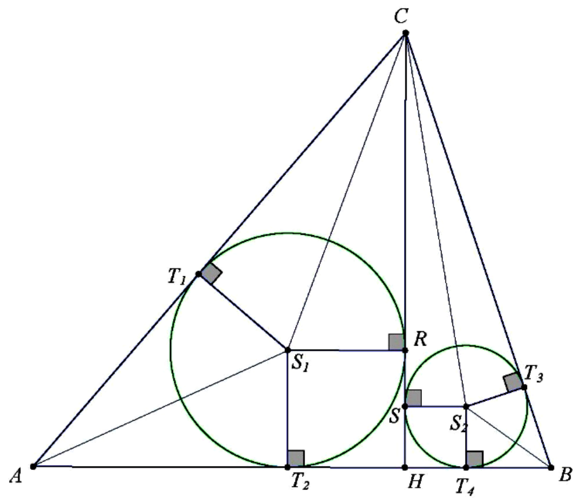
$$\overline{FD} : \overline{PB} = \overline{DC} : \overline{BC} = 2:3, \text{ т.е. } \overline{FD} = \frac{2\overline{PB}}{3} = \frac{10}{3}\,cm \text{ и } \overline{FC} : \overline{PC} = 2:3,$$

односно $\overline{FC} = \frac{2\overline{PC}}{3} = 8\,cm$. Конечно, со примена на Питагоровата теорема на триаголникот EHD добиваме

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{HD}^2 + \overline{EH}^2} = \sqrt{(\overline{HF} + \overline{FD})^2 + \overline{FG}^2}$$
$$= \sqrt{(\overline{EG} + \overline{FD})^2 + (\overline{FC} - \overline{GC})^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}\,cm.$$

64. Нека H е подножјето на висината на $\triangle ABC$ повлечена од темето C. Нека R и S се точките во кои опишаните кружници во $\triangle AHC$ и $\triangle BCH$ соодветно ја допираат страната CH. Ако $\overline{AB} = 2018$, $\overline{AC} = 2017$ и $\overline{BC} = 2016$, определи ја должината на отсечката RS.

Решение. Нека T_1 е допирната точка на кружницата впишана во $\triangle AHC$ и страната AC, T_2 е допирната точка на кружницата впишана во $\triangle AHC$ и страната AH и R е допирната точка на кружницата впишана во $\triangle AHC$ и страната CH. Од својствата ма тангентните отсечки следува $\overline{AT_1} = \overline{AT_2}$, $\overline{CT_1} = \overline{AR}$ и $\overline{HT_2} = \overline{HR}$. Според тоа,



$$\overline{AC} = \overline{AT_1} + \overline{CT_1} = \overline{AT_2} + \overline{CR} = \overline{AH} - \overline{HT_2} + \overline{CH} - \overline{RH} = \overline{AH} + \overline{CH} - 2\overline{RH},$$

па затоа

$$\overline{RH}=\frac{\overline{AH}+\overline{CH}-\overline{AC}}{2}=\frac{\overline{AH}+\overline{CH}-2017}{2}. \qquad (1)$$

Аналогно, со помош на точките T_3 и T_4 добиваме

$$\overline{SH}=\frac{\overline{BH}+\overline{CH}-\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{BH}+\overline{CH}-2016}{2}. \qquad (2)$$

Сега, од Питагоровата теорема следува

$$2017^2-\overline{AH}^2=\overline{CH}^2=2016^2-\overline{BH}^2,$$

па затоа

$$\overline{AH}^2-\overline{BH}^2=2017^2-2016^2,$$

односно

$$\overline{AH}-\overline{BH}=\frac{2017^2-2016^2}{\overline{AH}+\overline{BH}}=\frac{2017+2016}{\overline{AB}}=\frac{4033}{2018}. \qquad (3)$$

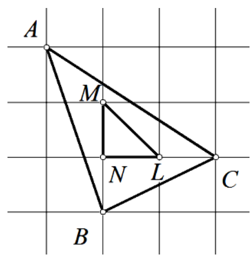
Конечно, од (1), (2) и (3) следува

$$\overline{RH}-\overline{SH}=\frac{\overline{AH}+\overline{CH}-2017}{2}-\frac{\overline{BH}+\overline{CH}-2016}{2}=\frac{\overline{AH}-\overline{BH}-1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{4033}{2018}-1\right)=\frac{2015}{4036}.$$

65. Дали постои триаголник чии висини се еднакви на $2cm, 3cm$ и $4cm$?

Решение. Нека a,b и c се должините на страните кои соодветствуваат на висините со должини $2cm, 3cm$ и $4cm$. Тогаш за плоштината на триаголникот добиваме $\frac{2a}{2}=\frac{3b}{2}=\frac{4c}{2}=6k$, од каде наоѓаме $a=6k$, $b=4k$ и $c=3k$. Сега, бидејќи добиените страни го задоволуваат неравенството на триаголник заклучуваме дека постои триаголник чии висини се еднакви на $2cm, 3cm$ и $4cm$.

66. Во квадратна мрежа сместени се два триаголници ABC и MNL (види цртеж). Најди го односот на плоштините на тие триаголници.



Решение. Нека x е должината на страната на најмалиот квадрат од квадратната мрежа. Тогаш важи

$$P_{\triangle MNL}=\frac{x\cdot x}{2}=\frac{1}{2}x^2 \text{ и}$$

$$P_{\triangle ABC}=3x\cdot 3x-\left(\frac{x\cdot 3x}{2}+\frac{x\cdot 2x}{2}+\frac{2x\cdot 3x}{2}\right)=9x^2-\frac{11}{2}x^2=\frac{7}{2}x^2.$$

Според тоа,

$$P_{\triangle ABC}:P_{\triangle MNL}=\frac{7}{2}x^2:\frac{1}{2}x^2=7:1.$$

67. Во правоаголен триаголник висината над хипотенузата ја дели хипотенузата на два дела со должини 9 и 16. Одреди ги периметарот и плоштината на триаголникот.

Решение Нека катетите на триаголникот се a и b, а висината над хипотенузата е h. Исполнети се равенствата

$$a^2 = h^2 + 16^2,\ b^2 = h^2 + 9^2,\ a^2 + b^2 = 25^2$$

Ако ги собереме првите две равенства, добиваме дека

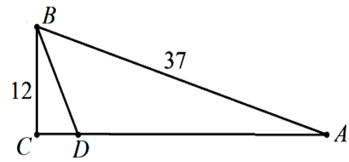
$$25^2 = 2h^2 + 16^2 + 9^2.$$

од каде $h = 12$, $a = 20$, $b = 15$. Оттука добиваме дека периметарот е $L = 60$, а плоштината $P = 150$.

68. Во правоаголен триаголник ABC должината на катетата BC е $12cm$, а на хипотенузата AB е $37cm$. На другата катета се наоѓа точка D така да $\overline{CD}:\overline{DA} = 1:6$. Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголникот ABD.

Решение. Ако Питагоровата теорема ја примениме на триаголникот ABC добиваме

$$\overline{CA} = \sqrt{37^2 - 12^2} = 35\,cm.$$



Ставаме $\overline{CD} = x$ и добиваме $\overline{DA} = 6x$, па затоа $\overline{CA} = 7x$. Според тоа, $\overline{CD} = 5\,cm$, а $\overline{DA} = 30\,cm$. Со примена на Питагоровата теорема за триаголникот BCD добиваме

$$\overline{BD} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13cm.$$

Конечно,

$$P_{\triangle ABD} = \frac{\overline{DA}\cdot\overline{BC}}{2} = \frac{30\cdot 12}{2} = 180cm^2 \text{ и}$$

$$O_{\triangle ABD} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DA} = 37 + 13 + 30 = 80cm.$$

69. На страната AB на триаголникот ABC дадена е точка D, а на страната AC точка E така да искршената линија DEB го дели триаголникот ABC на три триаголници со еднакви плоштини. Во кој однос точката D ја дели страната AB, а во кој однос точката E ја дели страната AC?

Решение. Триаголниците ADE и DEB имаат еднакви висини кои соодветствуваат на страните AD и DB (направи цртеж). Бидејќи плоштините им се еднакви добиваме $\overline{AD} = \overline{DB}$, па затоа $\overline{AD}:\overline{DB} = 1:1$.

Триагониците EBC и AEB имаат еднакви висини кои соодветствуваат на страните EC и AE. Бидејќи плоштините им се однесуваат како $1:2$ добиваме $\overline{EC}:\overline{AE}=1:2$.

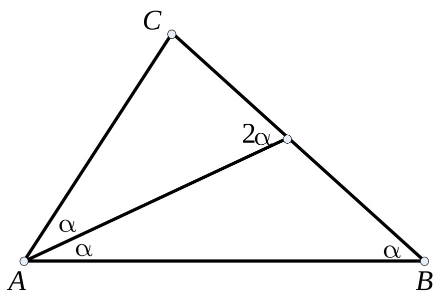
70. Во триаголникот ABC каде $\measuredangle BAC=2\measuredangle ABC$, симетралата на аголот $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точка D, така што $\overline{BD}=5\,cm$ и $\overline{DC}=4\,cm$. Пресметај го периметарот на овој триаголник.

Решение. Од $\measuredangle DAB=\measuredangle ABD=\alpha$ следува дека $\triangle ABD$ е рамнокрак, па затоа $\overline{BD}=\overline{AD}=5\,cm$. Ги разгледуваме триаголниците ABC и DAC. Бидејќи

$$\measuredangle CDA=2\alpha=\measuredangle CAB \text{ и } \measuredangle CAD=\alpha=\measuredangle ABC$$

според признакот АСА имаме дека $\triangle ABC\sim\triangle DAC$. Од сличноста следува

$$\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{CD}:\overline{AC}$$
$$\overline{AC}:9=4:\overline{AC}$$
$$\overline{AC}=6\,cm$$



односно,

$$\overline{BC}:\overline{AB}=\overline{AC}:\overline{AD}$$
$$9:c=6:5$$
$$c=\frac{9\cdot5}{6}=7\tfrac{1}{2}$$

Конечно,

$$L=a+b+c=9+6+7\tfrac{1}{2}=22{,}5,$$

т.е. периметарот на триаголникот ABC е $22{,}5\,cm$.

71. Ако a и b се катетите и h е висината која соодветствува на хипотенузата на правоаголен триаголник, тогаш

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}.$$

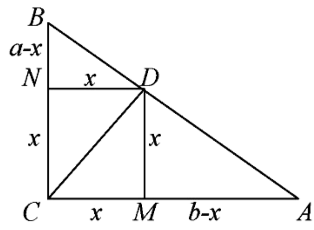
Докажи!

Решение. За правоаголен триаголник важи $ab=ch$, од каде добиваме $h=\frac{ab}{c}$. Последното равенство го квадрираме, и ако земеме реципрочна вредност по примена на Питагоровата теорема добиваме:

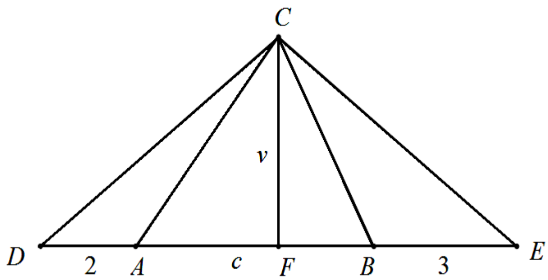
$$\frac{1}{h^2}=\frac{c^2}{a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

72. Должините на катетите на правоаголен $\triangle ABC$ се a и b. Симетралата на правиот агол во темето C ја сече хипотенузата во точката D. Определи ја должината на отсечката CD?

Решение. Нека M и N се подножјата на нормалите повлечени од точката D кон катетите AC и BC (цртеж десно). Четириаголникот $CMDN$ е квадрат (Зошто?). Сега имаме $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle CDB} + P_{\triangle CDA}$, па затоа $\frac{ab}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{bx}{2}$, односно $x = \frac{ab}{a+b}$. Конечно, бидејќи CD е дијагонала на квадрат со должина на страна x добиваме $\overline{CD} = x\sqrt{2} = \frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$.



73. Даден е триаголник ABC. Ако страната AB се продолжи за $2cm$ преку темето A и за $3cm$ преку темето B, тогаш добиениот триаголник ќе има двапати поголема плоштина од почетниот триаголник. Ако во почетниот триаголник ABC висината над страната AB се продолжи преку темето C за $4cm$, повторно ќе се добие триаголник со двапати поголема плоштина од почетниот триаголник. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC.



Решение. Важи

$$P_{\triangle ABC} = \frac{cv}{2} \text{ и } P_{\triangle DEC} = \frac{(c+5)v}{2}.$$

Бидејќи

$$P_{\triangle DEC} = 2P_{\triangle ABC}$$

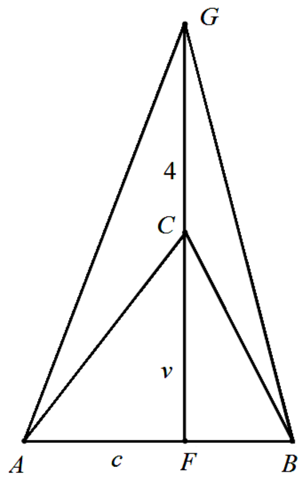
следува

$$c+5 = 2c,$$

од каде добиваме $c = 5cm$. Важи

$$P_{\triangle ABC} = \frac{cv}{2} \text{ и } P_{\triangle ABG} = \frac{c(v+4)}{2}.$$

Бидејќи $P_{\triangle ABG} = 2P_{\triangle ABC}$ следува



$v+4=2v$, од каде што добиваме $v=4\,cm$. Конечно, за плоштината на триаголникот ABC добиваме

$$P_{\triangle ABC}=\frac{cv}{2}=\frac{5\cdot4}{2}=10\,cm^2\,.$$

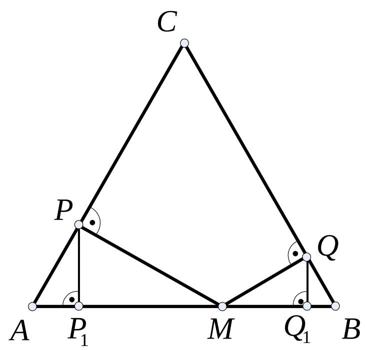
74. На страната AB на рамностраниот триаголник ABC дадена е произволна точка M. Нека P и Q се подножја на висините повлечени од точката M кон страните AC и BC. Нека P_1 и Q_1 се подножјата на нормалите повлечени од точките P и Q кон страната AB. Докажи дека $\overline{P_1Q_1}=\frac{3}{4}\overline{AB}$.

Решение. Плоштината на триаголникот ABC е еднаква на збирот од плоштините на триаголниот AMC и MBC, т.е.

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a\cdot\overline{MP}}{2}+\frac{a\cdot\overline{MQ}}{2},$$

од каде добиваме

$$\frac{a\sqrt{3}}{4}=\overline{MP}+\overline{MQ} \qquad (1)$$

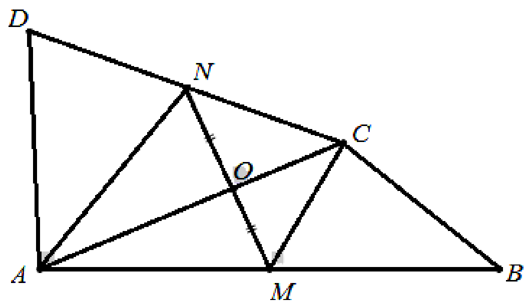


Правоаголниот триаголник P_1MP има агли од 30° и 60°, па тој е половина од рамностран триаголник. Затоа, P_1M е висина на рамностраниот триаголник со страна PM, па имаме $\overline{P_1M}=\frac{\overline{PM}\sqrt{3}}{2}$. Слично, правоаголниот триаголник Q_1MQ е половина од рамностраниот триаголник, па затоа $\overline{Q_1M}=\frac{\overline{QM}\sqrt{3}}{2}$. Конечно, од (1) имаме

$$\begin{aligned}\overline{P_1Q_1}&=\overline{P_1M}+\overline{MQ_1}=\frac{\overline{PM}\sqrt{3}}{2}+\frac{\overline{QM}\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}(\overline{PM}+\overline{QM})\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}a=\frac{3}{4}\overline{AB}.\end{aligned}$$

75. Даден е четириаголник $ABCD$. Отсечката која ги сврзува средините на страните AB и CD, со дијагоналата AC е поделена на два еднакви дела. Докажи дека $P_{\triangle ABC}=P_{\triangle ADC}$.

Решение. Нека M е средина на AB, а N е средина на CD, а пресечната точка на AC и MN е O (види цртеж).



Тогаш триаголниците AMO и AON имаат иста плоштина, бидејќи $\overline{MO}=\overline{ON}$ и висината спуштена од темето A е еднаква. Слично триаголниците OMC и NOC имаат иста плоштина, па

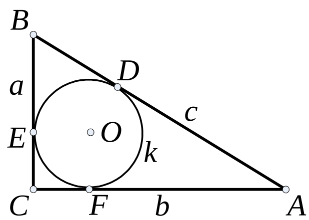
$$P_{\triangle ACN}=P_{\triangle AMC}.$$

Бидејќи M е средина на AB, а N е средина на CD следува дека

$$P_{\triangle AMC}=P_{\triangle MBC} \text{ и } P_{\triangle ACN}=P_{\triangle AND}$$

од каде следува дека $P_{\triangle ABC}=P_{\triangle ADC}$.

76. Нека P е плоштина, а R и r се радиуси на опишаната и впишаната кружница во правоаголен триаголник. Докажи дека $P=r^2+2Rr$.



Решение. *Прв начин.* Нека k е впишаната кружница во правоаголниот триаголник ABC, која страните AB, BC, CA ги допира во точките D, E, F соодветно (види цртеж). Ако a и b се должини на катетите, а c е должина на хипотенузата, тогаш $c=2R$ и

$$a+b=\overline{CE}+\overline{EB}+\overline{CF}+\overline{FA}=r+r+\overline{BD}+\overline{AD}=2r+2R$$

и

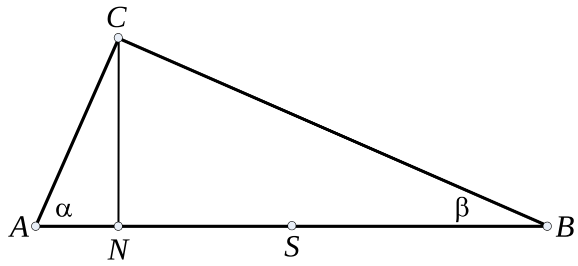
$$P=\frac{\overline{AC}\cdot r}{2}+\frac{\overline{BC}\cdot r}{2}+\frac{\overline{AB}\cdot r}{2}=\frac{a+b+c}{2}r=\frac{2r+4R}{2}r=(r+2R)r=r^2+2rR.$$

Втор начин. Во правоаголен триаголник важи $R=\frac{c}{2}$ и $r=\frac{a+b-c}{2}$. Сега од Питагоровата теорема следува

$$a^2+b^2=c^2$$
$$(a+b)^2=c^2+2ab$$
$$4P=(a+b)^2-c^2$$
$$4P=(a+b-c)(a+b+c)$$
$$P=\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b-c}{2}\left(\frac{a+b-c}{2}+2\frac{c}{2}\right)$$
$$P=r(r+2R).$$

77. Во правоаголен триаголник со хипотенуза c, острите агли се однесуваат како $1:5$. Изрази ја плоштината на триаголникот со помош на хипотенузата c.

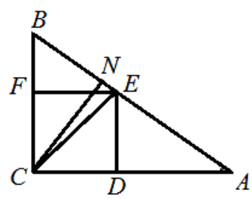
Решение. Нека S е средина на хипотенузата AB и N е подножје на висината повлечена од темето C. Тогаш S е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC и важи $\overline{CS}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{c}{2}$. Од $\beta:\alpha=1:5$ и $\alpha+\beta=90°$ следува дека $\alpha=75°$, $\beta=15°$. Важи и уште дека $\angle ASC=2\cdot\angle ABC=30°$. Тоа значи дека триаголникот $\triangle CNS$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{CN}=\frac{1}{2}\overline{CS}=\frac{c}{4}$. Конечно, за плоштината на овој триаголник имаме



$$P=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CN}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{c}{4}=\frac{c^2}{8}.$$

78. Во правоаголен $\triangle ABC$, со прав агол во темето C, впишан е квадрат $CDEF$, така што темето D лежи на катетата AC, темето F на катетата BC, а темето E на хипотенузата AB, при што $\overline{CE}=4cm$. Должината на висината повлечена од темето C кон хипотенузата е еднаква на $3cm$. Определи ја плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c$ и нека N е подножјето на висината повлечена од темето C кон хипотенузата AB. Тогаш $\overline{CN}=3cm$. За квадратот $CDEF$ важи $\overline{CE}=4$ и како $\overline{CE}=\overline{ED}\sqrt{2}$, добиваме $\overline{ED}=2\sqrt{2}$. Понатаму, за плоштината на $\triangle ABC$ важи $\frac{ab}{2}=P=\frac{3c}{2}$, па затоа $ab=3c$, т.е. $2ab=6c$.

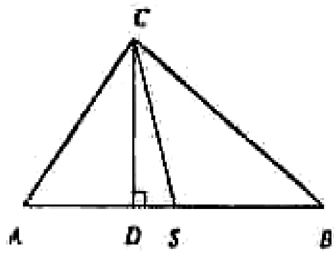


Отсечките EF и ED се висини на триаголниците BCE и CAE соодветно, за кои важи $P_{BCE}+P_{CAE}=P$, па затоа $\frac{2a\sqrt{2}}{2}+\frac{2b\sqrt{2}}{2}=\frac{3c}{2}$, т.е. $2(a+b)\sqrt{2}=3c$. Последното равенство го квадрираме и добиваме

$8(a^2+2ab+b^2)=9c^2$, а бидејќи $a^2+b^2=c^2$ и $2ab=6c$ имаме $8(c^2+6c)=9c^2$, од каде наоѓаме $c=48$. Конечно, за плоштината на $\triangle ABC$ добиваме $P=\frac{3c}{2}=\frac{3\cdot 48}{2}=72cm^2$.

79. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и должина на хипотенузата $c=16\,cm$. Определи ја должината на висината повлечена кон хипотенузата на тој триаголник, ако должината на неговата тежишна линија повлечена од темето C е еднаква на $\sqrt{ab}$, каде a и b се должините на катетите на $\triangle ABC$.

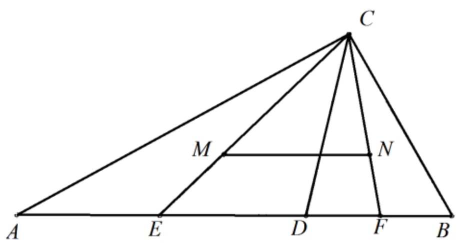
Решение. Нека $\overline{BC}=a$ и $\overline{AC}=b$ се должините на катетите, $\overline{AB}=c$ е должината на хипотенузата, точката S е средина на хипотенузата AB и точката D е подножјето на висината повлечена кон хипотенузата (цртеж десно). Нека h_c е бараната висина,



т.е. $h_c=\overline{CD}$. Бидејќи CS е тежишна линија повлечена кон хипотенузата важи $\overline{SC}=\overline{SA}=\overline{SB}=\frac{c}{2}$. Според претпоставката $\overline{SC}=\sqrt{ab}$, па затоа $\sqrt{ab}=\frac{c}{2}$, т.е. $ab=\frac{c^2}{4}$. Понатаму, $\frac{ab}{2}=\frac{ch_c}{2}$, па затоа $ch_c=ab$, односно $ch_c=\frac{c^2}{4}$, од каде добиваме $h_c=\frac{c}{4}=\frac{16}{4}=4\,cm$.

80. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со катекати $\overline{AC}=7$ и $\overline{BC}=4$. Точката D припаѓа на хипотенузата AB, а точките M и N се тежиштата на триаголниците ADC и BCD, соодветно. Определи ја плоштината на $\triangle CMN$.

Решение. Нека точката E е средина на страната AD и точката F е средина на страната BD. Тогаш CE е тежишна линија на $\triangle ADC$ и CF е тежишна линија на $\triangle BCD$. Од $\overline{AE}=\overline{ED}$ и $\overline{DF}=\overline{FB}$ следува



$$\overline{EF}=\overline{ED}+\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{AB},$$

што значи дека

$$P_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{4\cdot7}{4}=7\,.$$

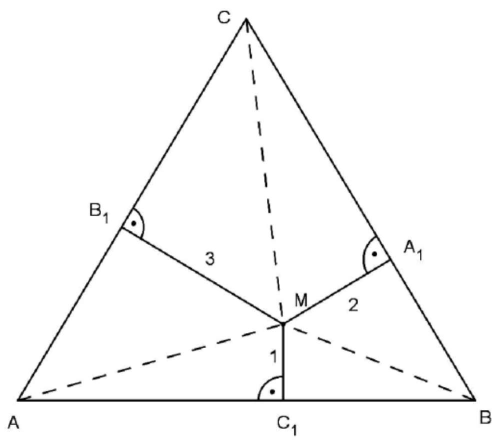
Понатаму, бидејќи тежиштето ја дели тежишната линија во однос 1:2, добиваме дека $\frac{\overline{CM}}{\overline{CE}}=\frac{2}{3}=\frac{\overline{CN}}{\overline{CF}}$ и како $\measuredangle MCN=\measuredangle ECF$, добиваме дека $\triangle CMN\sim\triangle CEF$. Од докажаната сличност следува дека $\frac{P_{\triangle CMN}}{P_{\triangle CEF}}=(\frac{2}{3})^2$, па затоа $P_{\triangle CMN}=\frac{4}{9}P_{\triangle CEF}=\frac{4}{9}\cdot7=\frac{28}{9}$.

81. Во внатрешноста на рамностран $\triangle ABC$ земена е точка M која од страните на $\triangle ABC$ е оддалечена $1cm, 2\,cm$ и $3\,cm$. Определи ја плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се подножјата на нормалите повлечени од точката M кон страните BC, CA, AB, соодветно (цртеж десно). Имаме

$$\overline{MC_1}=1\,cm,\quad \overline{MB_1}=2\,cm,$$

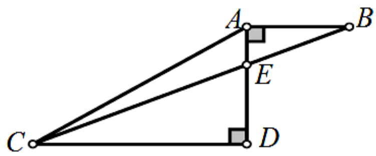
$$\overline{MA_1}=3\,cm\,.$$



Нека должината на страната на рамностраниот триаголник е a. Тогаш неговата плоштина е $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и

$P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{MC_1}}{2}+\frac{\overline{BC}\cdot\overline{MA_1}}{2}+\frac{\overline{CA}\cdot\overline{MB_1}}{2}=\frac{6a}{2}=3a$, па затоа $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3a$, т.е. $a=\frac{12}{\sqrt{3}}cm$. Конечно, $P=3\cdot\frac{12}{\sqrt{3}}=12\sqrt{3}\,cm^2$.

82. Ако $\overline{AD}=4\,cm,\ \overline{AB}=3\,cm,\ \overline{CD}=9\,cm$, определи ја плоштината на триаголникот AEC на цртежот десно.



Решение. Во триаголникот AEC отсечката CD е висина повлечена кон страната AE, што значи дека висината на триаголникот AEC повлечена кон страната AE има должина $9\,cm$. Нека $x=\overline{AE}$. Тогаш

$\overline{ED}=4-x$. Понатаму, триаголниците BAE и CDE се слични, па затоа $\overline{AE}:\overline{ED}=\overline{AB}:\overline{CD}$, односно $x:(4-x)=1:3$, од што следува дека $x=1$.

Конечно, за плоштината P на триаголникот AEC добиваме

$$P=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{CD}}{2}=\frac{1\cdot 9}{2}=4,5\,cm^2.$$

83. Должините на страните на $\triangle ABC$ се природни броеви, а најмалата е $2\,cm$. Определи ја плоштината P на $\triangle ABC$ ако $h_c=h_a+h_b$, каде h_a,h_b,h_c се должините на висините соодветни на страните a,b,c.

Решение. Од равенството $h_c=h_a+h_b$ следува дека h_c е најголема висина, па затоа страната c е најмала, т.е. $c=2\,cm$. Имаме $h_a=\frac{2P}{a}$, $h_b=\frac{2P}{b}$ и $h_c=\frac{2P}{c}$, па затоа со замена во $h_c=h_a+h_b$ по скратувањето добиваме $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, т.е. $\frac{1}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Последното равенство е еквивалентно на равенство $(a-2)(b-2)=4$ и како a и b се природни броеви можни се следниве случаи:

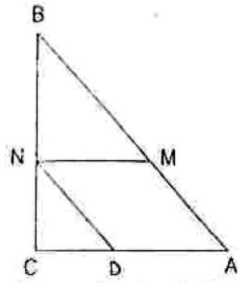
$$a-2=2, b-2=2; a-2=1, b-2=4; a-2=4, b-2=1.$$

Во последните два случаи добиваме дека должините на страните се $3\,cm, 6\,cm$ и $2\,cm$, при што не е исполнето неравенството на триаголник, па затоа во овие случаи немаме решение. Во првиот случај за должините на страните добиваме $4\,cm, 4\,cm, 2\,cm$. Значи, триаголникот е рамнокрак, па од Питагоровата теорема следува дека должината на висината на страната $c=2\,cm$ е $h_c=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{5}\,cm$. Конечно, плоштината на триаголникот е $P=\frac{2\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}\,cm^2$.

84. Во рамнокрак правоаголен триаголник е впишан ромб така што едното темена ромбот е теме на остриот агол на правоаголниот триаголник, а секое од останатите три темиња лежи на по една страна на триаголникот. Должината на страната на ромбот е еднаква на $3(\sqrt{2}-1)\,cm$. Определи го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.

Решение. Нека во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ACB=90^\circ$. Тогаш $\measuredangle CAB=\measuredangle CBA$ $=45^\circ$. Нека A е темето на ромбот, темето кое се наоѓа на хипотенузата AB да го означиме со M, на катетата BC со N и на катетата

AC со D. Правите MN и AC се паралелни, па затоа $\measuredangle MNB = 90^\circ$, што значи дека $\measuredangle NMB = \measuredangle NBM = 45^\circ$, т.е. $\triangle NMB$ е рамнокрак правоаголен. Должината на страната на ромбот е $3(\sqrt{2}-1)\,cm$, па како $\triangle NMB$ е половина квадрат добиваме



$$\overline{MB} = \overline{MN}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 6 - 3\sqrt{2}\ cm,$$

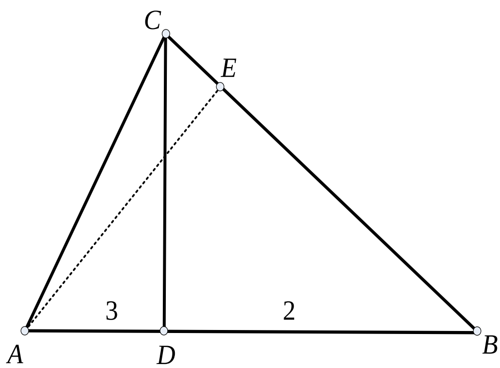
$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = 3(\sqrt{2}-1) + 6 - 3\sqrt{2} = 3\,cm.$$

Конечно, бидејќи радиусот на опишаната кружница е еднаков на половината од хипотенузата на правоаголниот триаголни, добиваме дека бараниот радиус е еднаков на $1,5\,cm$.

85. Во остроаголен триаголник ABC висината од врвот C ја дели спротивната страна на два дела AD и DB со должини $\overline{AD} = 3\,cm$ и $\overline{DB} = 2\,cm$. Аголот при темето A изнесува 60°. Одреди ги должините на страните на триаголникот ABC како и должината на висината на триаголникот ABC спуштена од темето A.

Решение. Јасно, $\overline{AB} = 5\,cm$. Бидејќи аголот кај темето A изнесува 60° и бидејќи триаголникот ADC е правоаголен имаме дека аголот $\angle DCA$ изнесува 30° од каде пак се добива дека

$$\overline{AC} = 2\overline{AD} = 6\,cm.$$



Од Питагоровата теорема кај триаголникот ADC имаме

$$\overline{DC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5cm$$

Од Питагоровата теорема кај триаголникот BDC имаме

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{29}cm.$$

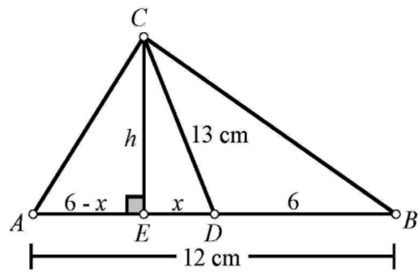
Следно, за плоштината на триаголникот ABC имаме

$$P_{ABC} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2} = \frac{5\cdot 5}{2} = \frac{25}{2}.$$

Од друга страна $P_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AE}}{2}$, па затоа $\frac{25}{2}=\frac{\sqrt{29}\cdot\overline{AE}}{2}$. Конечно, висината од темето A изнесува $\overline{AE}=\frac{25}{\sqrt{29}}cm$.

86. Плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на $72\,cm^2$. Должината на страната AB е еднаква на $12\,cm$, а должината на тежишната линија повлечена од темето C е еднаква на $13\,cm$. Определи ги должините на другите две страни на $\triangle ABC$.

Решение. Нека CE е висината на триаголникот повлечена кон страната AB и со D да ја означиме средината на страната AB (цртеж десно). Тогаш CD е тежишна линија на $\triangle ABC$ и важи $\overline{AD}=\overline{DB}=\frac{1}{2}\overline{AB}=6\,cm$. Плоштината на $\triangle ABC$ е $72\,cm^2$, па затоа $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CE}=72$, т.е. $\frac{1}{2}\cdot 12h=72$, од каде наоѓаме $h=12\,cm$. Понатаму, $\triangle CED$ е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува $x^2=13^2-h^2=13^2-12^2=25$, т.е. $x=5\,cm$. Значи, $\overline{AE}=\overline{AD}-x=1\,cm$ и $\overline{BE}=\overline{BD}+x=11\,cm$. Триаголникот BCE е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува $\overline{BC}^2=\overline{CE}^2+\overline{BE}^2=12^2+11^2=265$, односно $\overline{BC}=\sqrt{265}\,cm$. Триаголникот ACE е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува $\overline{AC}^2=\overline{CE}^2+\overline{AE}^2=12^2+1^2=145$, односно $\overline{AC}=\sqrt{145}\,cm$.

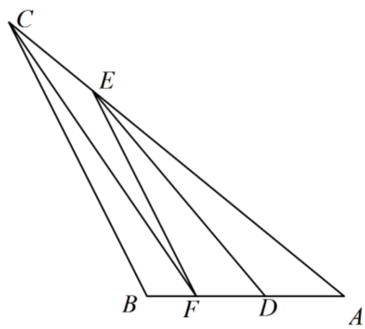


87. Триаголникот ABC е поделен со отсечките DE, EF и CF на четири триаголници чии плоштини се еднакви (цртеж десно). Определи го односот на $\overline{AF}:\overline{BD}$.

Решение. Да забележиме дека

$$P_{\triangle FDE}=P_{\triangle DAE},$$

од каде следува $\overline{FD}=\overline{AD}$. Понатаму, важи $P_{\triangle ABC}=4P_{\triangle BFC}$, од каде следу-



ва $\overline{AB}=4\overline{BF}$. Исто така $P_{\triangle FAE}=2P_{\triangle CEF}$, па затоа $\overline{AE}=2\overline{CE}$. Сега, од $h_C:h_E=\overline{CA}:\overline{EA}$, добиваме $h_C:h_E=3\overline{EC}:2\overline{EC}$, односно $h_C=\frac{3}{2}h_E$. Сега, $P_{\triangle ABC}=2P_{\triangle FEA}$, па затоа $\frac{\overline{AB}\cdot h_c}{2}=2\frac{\overline{AF}\cdot h_E}{2}$. Од последниот израз, имајќи предвид дека $h_C=\frac{3}{2}h_E$, добиваме дека $\overline{AF}=\frac{3}{4}\overline{AB}$ и $\overline{AD}=\overline{FD}=\frac{\overline{AF}}{2}=\frac{3}{8}\overline{AB}$. Значи,

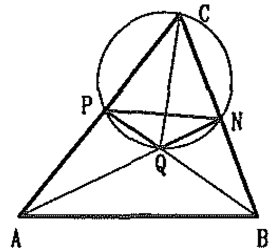
$$\overline{BF}=\overline{AB}-\overline{AF}=\tfrac{1}{4}\overline{AB} \text{ и } \overline{BD}=\overline{BF}+\overline{FD}=\tfrac{1}{4}\overline{AB}+\tfrac{3}{8}\overline{AB}=\tfrac{5}{8}\overline{AB}.$$

Конечно,

$$\overline{AF}:\overline{BD}=\tfrac{3}{4}\overline{AB}:\tfrac{5}{8}\overline{AB}=\tfrac{3}{4}:\tfrac{5}{8}=6:5.$$

88. Во $\triangle ABC$ симетралата на $\measuredangle CAB$ ја сече страната BC во точката N, а симетралата на $\measuredangle CBA$ ја сече страната AC во точката P и важи $\overline{PN}=1$. Нека $Q=AN\cap BP$ и нека точката C припаѓа на кружницата која минува низ точките P,Q и N. Определи ја плоштината на $\triangle NPQ$.

Решение. Ќе ги корстиме стандардните ознаки α,β и γ за аглите на триаголникот. Имаме, $\measuredangle PQN=\measuredangle AQB=180^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$. Од друга страна од тетивниот четириаголник $PQNC$ следува $\measuredangle PQN=180^\circ-\gamma$, па затоа $180^\circ-\gamma=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$, односно $\gamma=60^\circ$. Поната-

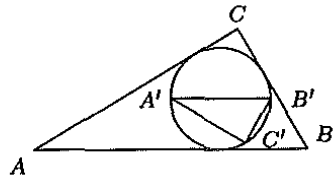


му, $\measuredangle QNP=\measuredangle QCP=\frac{\gamma}{2}=30^\circ$ и слично добиваме $\measuredangle NPQ=30^\circ$, што значи дека $\triangle NPQ$ е рамнокрак, со агол при основата еднаков на 30°. Со симетралата QC на основата PN овој триаголник е поделен на два складни правоаголни триаголника од кои може да се состави рамностран триаголник со висина $\frac{\overline{PN}}{1}=\frac{1}{2}$, па затоа неговата страна има должина $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Затоа $P_{\triangle NPQ}=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

89. Даден е правоаголен триаголник ABC со катетити $a=15\,cm$ и $b=20\,cm$. Во триаголникот ABC е впишана кружница, а во неа е

впишан триаголник $A'B'C'$ кој е сличен на триаголникот ABC. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот $A'B'C'$.

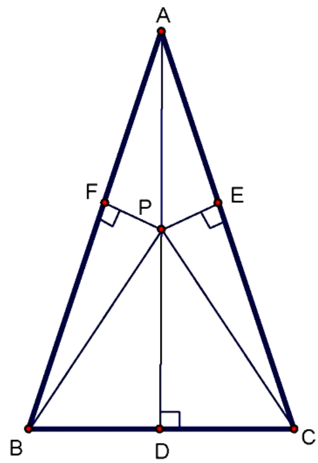
Решение. Од Питагоровата теорема за хипотенузата да дадениот триаголник добиваме $c=25\,cm$, а радиусот на вписаната кружница е $r=\frac{20+15-25}{2}=5\,cm$. Понатаму триаголникот $A'B'C'$ е правоаголен со хипотенуза еднаква на дијаметарот на впишаната кружница во триаголникот ABC, т.е. еднаков на $10\,cm$. Значи, коефициентот на сличност е $25:10=2{,}5$, па затоа периметарот на триаголникот $A'B'C'$ е еднаков на $(15+20+25):2{,}5=24\,cm$, а неговата плоштина е еднаква на $\frac{15\cdot 20}{2}:2{,}5^2=24\,cm^2$.



90. Даден е рамнокрак триаголник со краци со должина $2\sqrt{2}\,cm$. Нека P е средината на висината повлечена кон основата на овој триаголник. Оддалеченоста на точката P до кракот е трипати помала од нејзината оддалеченост до основата. Определи ја плоштината на овој триаголник.

Решение. Нека D е подножјето на висината повлечена кон основата на триаголникот, E е подножјето на нормалата повлеченаод точката P кон кракот AC (цртеж десно), $\overline{BC}=a$ и $\overline{AC}=\overline{AB}=2\sqrt{2}\,cm$. Ако $\overline{AD}=h_a$ и $\overline{PE}=k$, тогаш од условот на задачата следува $\overline{AP}=\overline{PD}=3\overline{PE}=3k$ и $h_a=6k$. Со примена на Питагоровата теорема на $\triangle APE$ добиваме

$\overline{AE}^2=\overline{AP}^2-\overline{PE}^2=8k^2$, т.е. $\overline{AE}=2k\sqrt{2}$.



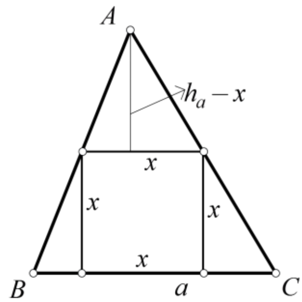
Триаголниците ADC и APE се правоаголни и имаат заеднички агол $\measuredangle PAE$, па затоа се слични, што значи $\overline{AP}:\overline{AC}=\overline{AE}:\overline{AD}$, односно $3k:2\sqrt{2}=2k\sqrt{2}:6k$, од каде добиваме $k=\frac{4}{9}$. Според тоа, $h_a=6\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{3}\,cm$. Сега, од Питагоровата теорема применета на $\triangle ADC$ следува

$$(\tfrac{a}{2})^2 = b^2 - h_a^2 = 8 - \tfrac{64}{9} = \tfrac{8}{9},$$

од каде добиваме $\frac{a}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, т.е. $a = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,cm$. Конечно,

$$P = \tfrac{ah_a}{2} = \tfrac{16\sqrt{2}}{9}\,cm^2.$$

91. Во триаголник ABC со должини на страни a,b,c впишани се три квадрати со должини на страни x,y,z, така што по две темиња на тие квадрати лежат на страните AB,BC,CA соодветно. Ако $x=y=z$, тогаш $a=b=c$. Докажи!



Решение. Нека ABC е триаголник со должини на страни a,b и c во стандардни ознаки. Со P ќе ја означиме плоштината на триаголникот. Од условот на задачата $\overline{BC}=a$, а квадратот што е впишан во триаголникот и две негови темиња лежат на страната BC има должина на страната x. Тогаш не е тешко да се види дека е точно равенството

$$P = x^2 + \tfrac{1}{2}(a-x)x + \tfrac{1}{2}(h_a - x)x.$$

Со средување на ова равенство добиваме $x = \frac{2P}{a+h_a}$. На потполно аналоген начин ако y и z се должини на страните на квадратите чии две темиња лежат на страните AC и AB соодветно, тогаш $y = \frac{2P}{b+h_b}$, $z = \frac{2P}{c+h_c}$. Од условот на задачата добиваме дека $\frac{2P}{a+h_a} = \frac{2P}{b+h_b} = \frac{2P}{c+h_c}$, односно

$$a + h_a = b + h_b = c + h_c.$$

Ќе претпоставиме дека не се исполнети равенствата $a=b=c$. Нека на пример $a \neq b$. Тогаш $a \neq c$ или $b \neq c$. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $a \neq c$. Но, тогаш

$$a-b = h_b - h_a = \tfrac{2P}{b} - \tfrac{2P}{a} = \tfrac{2P(a-b)}{ab},$$

од каде добиваме дека $P = \frac{1}{2}ab$, т.е. $\gamma = 90^\circ$, и

$$a-c = h_c - h_a = \tfrac{2P}{c} - \tfrac{2P}{a} = \tfrac{2P(a-c)}{ac},$$

од каде пак добиваме дека $P=\frac{1}{2}ac$, т.е. $\beta=90^\circ$. Но, во еден триаголник не може да има два прави агли, па според тоа $a=b=c$.

92. Пресметај го радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник со плоштина $480\,cm^2$ чии катети се однесуваат како $5:12$.

Решение. Нека a и b се катетите на правоаголниот триаголник. Од условот на задачата имаме $a:b=5:12$ и $ab=2\cdot 480$. Од правата равенка $a=\frac{5}{12}b$ и ако замениме во втората добиваме $\frac{5}{12}b^2=960$, т.е. $b=48\,cm$. Според тоа, $a=\frac{5}{12}b=20\,cm$. Од Питагоровата теорема за хипотенузата c добиваме $c=\sqrt{a^2+b^2}=52\,cm$, па затоа неговиот полупериметар е $s=\frac{a+b+c}{2}=60\,cm$.

Конечно,со замена во формулата $P=sr$ за радиусот на впишаната кружница наоѓаме $480=60r$, т.е. $r=8cm$.

93. Даден е рамнокрак триаголник со основа $a=8cm$ и крак $b=5cm$. Пресметај го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.

Решение. За висината на триаголникот соодветна на основата a наоѓаме

$$h_a=\sqrt{b^2-(\tfrac{a}{2})^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3\,cm.$$

Според тоа, плоштината на триаголникот е $P=\frac{ah_a}{2}=12\,cm^2$. Понатаму, ако се има предвид дека $c=b$, за радиусот R на опишаната кружница имаме $R=\frac{ab^2}{4P}=\frac{25}{6}\,cm$.

94. Нека a,b,c се должините на страните на триаголникот ABC, $s=\frac{a+b+c}{2}$ и P е плоштината на триаголникот. Со помош на Питагорова теорема докажи ја познатата Херонова формула за плоштината на триаголникот:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,. \qquad (1)$$

Решение. Нека H е подножјето на висината повлкечена од темето B Ако аголот во темето A е остар (направи цртеж), тогаш $a^2=b^2+c^2-2b\cdot\overline{AH}$. Од друга страна во правоаголниот триаголник AHB важи $\overline{BH}^2=c^2-\overline{AH}^2$. Од овие равенства следува:

$$\begin{aligned}\overline{BH}^2 &= c^2-(\tfrac{b^2+c^2-a^2}{2b})^2\\ &=(c-\tfrac{b^2+c^2-a^2}{2b})(c+\tfrac{b^2+c^2-a^2}{2b})\\ &=\tfrac{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)}{4b^2}\\ &=\tfrac{(a^2-(b+c)^2)((b+c)^2-a^2)}{4b^2}\\ &=\tfrac{(a-c+b)(a+c-b)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2}.\end{aligned}$$

Сега, ако искористимедека $s=\frac{a+b+c}{2}$, од последното равенство добиваме

$$\frac{b^2\cdot\overline{BH}^2}{4}=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

и како $P=\frac{b\cdot\overline{BH}}{2}$, од последното равенство следува формулата (1). Случајот кога аголот во темето A е тап се разгледува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

95. Пресметај ја плоштината на триаголникот зададен со страните $a=25cm$, $b=39cm$ и $c=56cm$.

Решение. Полупериметарот на триаголникот е $s=\frac{a+b+c}{2}=60cm$. Ако ја искористиме Хероновата формула за плоштината на триаголникот добиваме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b(s-c)}=\sqrt{60(60-25)(60-39)(60-56)}=420\,cm^2.$$

96. Пресметај ги радиусите на впишаната и опишаната кружница за $\triangle ABC$ зададен со страните $a=12cm$, $b=35cm$ и $c=37cm$.

Решение. Полупериметарот на триаголникот е $s=\frac{a+b+c}{2}=42cm$. Ако ја искористиме Хероновата формула за плоштината на триаголникот добиваме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b(s-c)}=\sqrt{42(42-12)(42-35)(42-37)}=210cm^2.$$

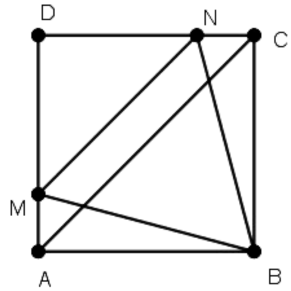
Сега, со замена во $P=sr$ за радиусот на впишаната кружница добиваме $r=\frac{P}{s}=5cm$, а со замена во $P=\frac{abc}{4R}$ за радиусот на опишаната кружница добиваме

$$R=\frac{abc}{4P}=\frac{37}{2}cm.$$

V.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

97. Нека даден е квадрат $ABCD$ и нека M и N се точки од страните AD и DC, соодветно такви што $\triangle BMN$ е рамностран. Докажи дека $AC \| MN$.

Решение. Триаголниците $\triangle ABM$ и $\triangle BNC$ се складни (имаат еднакви хипотенузи и еднакви катети), па затоа $\measuredangle AMB = \measuredangle CNB$. Значи

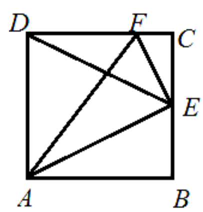


$$\begin{aligned}\measuredangle DMN &= 180^\circ - (\measuredangle AMB + \measuredangle BMN)\\ &= 180^\circ - (\measuredangle CNB + \measuredangle BNM)\\ &= \measuredangle DNM = 45^\circ = \measuredangle DAC\end{aligned}$$

Според тоа, $AC \| MN$.

98. Даден е квадрат $ABCD$. Точката E е средина на страната BC. Ако F е точка на страната CD таква што EF е нормална на AE, докажи дека $\measuredangle EAB = \measuredangle FAE$.

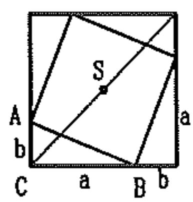
Решение. Точките D и E лежат на кружница со дијаметар AF и центар во средината на отсечката AF. Аглите FDE и FAE се еднакви како периферни агли над кружниот лак EF. Од друга страна, $\Delta ABE \cong \Delta DCE$ (САС), од каде се добива дека $\measuredangle CDE = \measuredangle EAB$. Според тоа,



$$\measuredangle EAB = \measuredangle CDE = \measuredangle FAE.$$

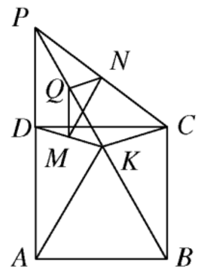
99. Над хипотенузата во надворешноста на правоаголен триаголник со катети a и b е конструиран квадрат. Определи го растојанието од центарот на квадратот до темето на правиот агол на триаголникот.

Решение. Нека над хипотенузата AB на правоаголниот $\triangle ABC$ е конструиран квадрат чиј центар е S. Ако добиената фигура ја дополниме до квадрат како што е прикажано на цртежот десно, тогаш центарот S е центар и на новиот квадрат чија страна има должина $a+b$. Значи дијагоналата на новиот квадрат има должина $(a+b)\sqrt{2}$, што значи дека $\overline{SC} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$.



100. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран триаголник ABK. Правите BK и AD се сечат во точка P. Докажи, дека должината на отсечката која ги поврзува средините на отсечките KD и CP е еднаква на половината од должината на страната на квадратот.

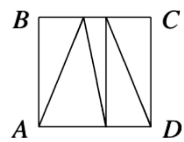
Решение. Триаголникот ABP е правоаголен и $\measuredangle APB = 30^\circ$, па затоа $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BP}$, од каде следува дека $\overline{PK} = \overline{AB}$. Нека M, N,Q се средините на DK, PC, PK, соодветно. Тогаш QM е средна линија во $\triangle DPK$, па затоа $QM \parallel DP$ и $\overline{QM} = \frac{1}{2}\overline{DP}$. Аналогно $QN \parallel KC$ и $\overline{QN} = \frac{1}{2}\overline{KC}$. Освен тоа



$$\measuredangle MQN = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ.$$

Понатаму $\triangle DKC$ е рамнокрак и $\measuredangle KDC = 15^\circ$, па затоа $\measuredangle KDP = 105^\circ$. Значи, $\triangle QMN \sim \triangle DPK$ со коефициент на сличност $\frac{1}{2}$, па затоа $\frac{\overline{MN}}{\overline{PK}} = \frac{1}{2}$, т.е. $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

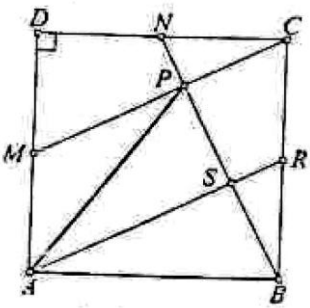
101. Во квадратот $ABCD$ со страна 1 ги поврзуваме A и D со искршена линија која ја допира страната BC двапати и страната AD еднаш (види цртеж). Определи ја должината на најкратката искршена линија.



Решение. За да должината биде минимална, потребно е двата допири на страната BC бидат на растојание $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ од точката B, соодветно, додека допирната точка на страната AD потребно е да биде на растојание $\frac{1}{2}$ од точката A (Зошто?). Да забележиме дека во овој случај отсечките што поврзуваат две точки кои лежат на страните AD и BC се еднакви. Сега, од Питагоровата теорема за должината на една отсечка од искршената линија имаме дека $x^2 = 1^2 + (\frac{1}{4})^2$, од каде $x = \frac{\sqrt{17}}{4}$. Бидејќи искршената линија е составена од четири вакви отсечки, заклучиме дека должината на искршената линија е $4x = \sqrt{17}$.

102. Даден е квадрат $ABCD$. Ако точката M е средина на страната AD, точката N е средина на страната CD, а точката P е пресек на отсечките BN и CM, тогаш $\overline{AP} = \overline{AB}$. Докажи!

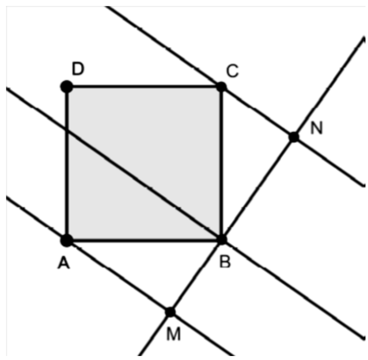
Решение. Прво да забележиме дека од $\overline{BC}=\overline{CD}$, $\overline{CN}=\overline{DM}$ и $\measuredangle BCN=\measuredangle CDM$ следува $\triangle BCN\cong\triangle CDM$. Од докажаната складност следува $\measuredangle BNC=\measuredangle CMD$. Да ги разгледаме триаголниците CNP и CDM. Од $\measuredangle BNC=PNC=\measuredangle CMB$ и $\measuredangle PNC=\measuredangle MCD$ следува $\triangle CNP\sim\triangle CDM$, па затоа $\measuredangle CPN=\measuredangle CDM=90^\circ$. Со R да



ја означиме средината на отсечката BC. Од $AM\parallel CR$ и $\overline{AM}=\overline{CR}$ следува дека четириаголникот $ARCM$ е паралелограм, т.е. $AR\parallel MC$. Сега, од $BN\perp CM$ следува $BN\perp AR$. Нека S е пресекот на отсечките BN и AR. Од $\overline{BR}=\overline{CR}$ и $RS\parallel CP$ следува дека SR е средна линија на $\triangle BCP$, па затоа $\overline{BS}=\overline{PS}$. Според тоа, правата AR е симетрала на отсечката BP, па затоа $\overline{AB}=\overline{AP}$.

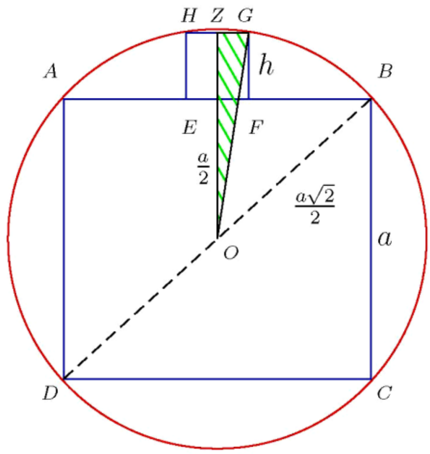
103. Во темињата A, B и C на квадратот $ABCD$ повлекуваме три паралелни прави a, b и c, соодветно, така што b е меѓу a и c. Нека растојанието меѓу a и b е $5cm$, а меѓу b и c е $7cm$. Пресметај ја плоштината на квадратот.

Решение. Од темето B ги повлекуваме нормалите кон правите a и c. Нека нормалата кон a ја сече a во точка M, а нормалата кон c ја сече c во точка N. Тогаш правоаголните триаголници AMB и BNC се складни, т.е. нивните катети имаат должини $5cm$ и $7cm$. Затоа, страната на квадратот има должина $\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}\,cm$, односно плоштината на квадратот изнесува $74cm^2$.



104. Даден е квадрат $ABCD$ околу кој е опишана кружница. Конструирај нов квадрат $EFGH$ таков што темињата E и F лежат на страната AB, а темињата G и H на лакот AB на опишаната кружница. Определи го односот на плоштините на двата квадрата.

Решение. Нека a е должината на страната на квадратот $ABCD$ и h е дожината на страната на квадратот $EFGH$. Нека точката Z е подножјето на нормалата на страната HG повлечена од центарот O на кружницата опишана околу квадратот $ABCD$. Од $\triangle OGZ$ следува



$$\overline{OG}^2 = \overline{ZG}^2 + \overline{OZ}^2,$$

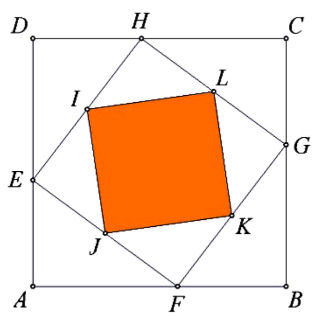
односно

$$(\tfrac{a\sqrt{2}}{2})^2 = (\tfrac{h}{2})^2 + \overline{OZ}^2.$$

Покрај тоа $\overline{OZ} = \frac{a}{2} + h$, па затоа $(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 = (\frac{h}{2})^2 + (\frac{a}{2} + h)^2$, од каде добиваме $a^2 = 5h^2 + 4ah$, односно $\frac{a^2}{h^2} - 4\frac{a}{h} = 5$. Затоа, $\frac{a^2}{h^2} - 4\frac{a}{h} + 4 = 9$, т.е. $(\frac{a}{h} - 2)^2 = 9$, од каде следува $\frac{a}{h} = 5$, односно $\frac{a^2}{h^2} = 25$. Конечно, $\frac{P_{ABCD}}{P_{EFGH}} = 25$.

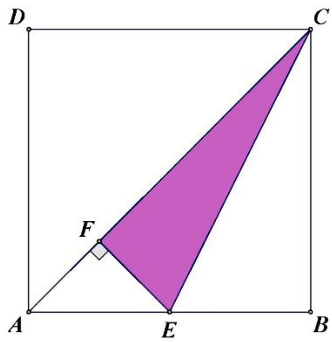
105. Даден е квадрат $ABCD$. Точките E, F, G, H ги делат страните на квадратот DA, AB, BC, CD, соодветно во однос $4:3$. Точките I, J, K, L се средини на страните на четириаголникот $EFGH$. Плоштината на четириаголникот $IJKL$ е еднаква на $200\,dm^2$. Определи ја плоштината на квадратот $ABCD$.

Решение. Триаголниците AFE, BGF, CHG и DEH се складни (Зошто?), па бидејќи се правоаголни заклучуваме дека четириаголникот $EFGH$ е квадрат. Слично, четириаголникот $IJKL$ е квадрат. Нека должината на страната на квадратот $IJKL$ е y. Имаме, $y^2 = 200$, па затоа $y = 10\sqrt{2}\,dm$. Ако должината на страната на квадратот



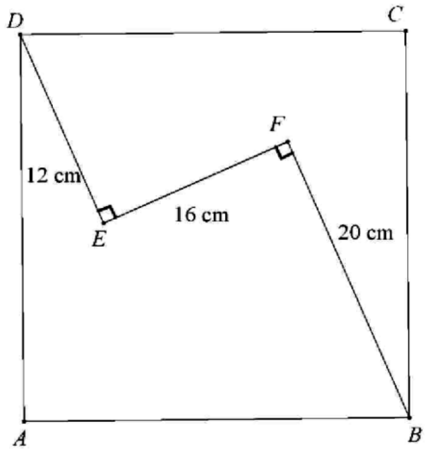
$EFGH$ ја означиме со x, тогаш $\frac{x}{2}\sqrt{2} = y$, па затоа $x = 20\,dm$. Сега од условот на задачата следува дека осносот на катетите на правоаго лниот триаголник FEA е $4:3$. Нека $\overline{EA}=3k, \overline{FA}=4k$. Од Питагорова-та теорема следува $(3k)^2+(4k)^2=20^2$, па затоа $25k^2=400$, односно $k=4$. Значи, должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на $\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{FB}=\overline{AF}+\overline{AE}=28\,dm$. Кончно, за бараната плоштина добиваме $P_{ABCD}=28\cdot 28=784\,dm^2$

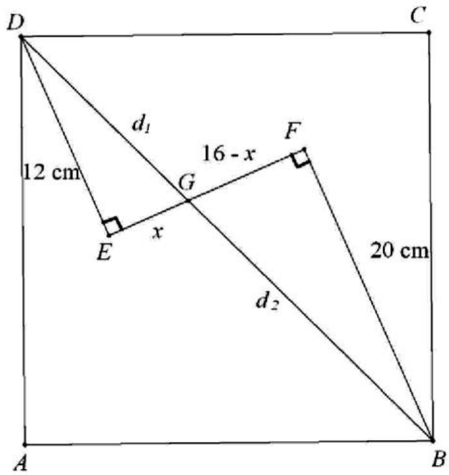
106. Определи го односот на плоштините на триаголникот ECF и квадратот $ABCD$, ако точката E е средина на страната AB и отсечката EF е нормална на дијагоналата AC.



Решение. Нека a е должината на страната квадратот $ABCD$. Точката E е средина на страната AB, па затоа $\overline{AE}=\frac{a}{2}$. Во правоаголниот $\triangle AEF$ важи $\measuredangle FAE=45^\circ$, па затоа тој е рамнокрак. Нека $\overline{AF}=\overline{FE}=x$. Сега од Питагорова-та теорема приоменета на $\triangle AEF$ следува дека $x=\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Должината на дијагоналата на квадратот е $a\sqrt{2}$, т.е. $\overline{AC}=a\sqrt{2}$. Значи, $\overline{CF}=a\sqrt{2}-\frac{a\sqrt{2}}{4}=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$, па затоа $P_{\triangle EFC}=\frac{\frac{3a\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4}}{2}=\frac{3}{16}a^2$. Но, $P_{ABCD}=a^2$, што значи $P_{\triangle EFC}:P_{ABCD}=3:16$.

107. Пресметај ја плоштината на квадратот прикажан на долниот цртеж.





Решение. Дијагоналата BD ја дели отсечката EF на два дела. Да ги означиме со x и $16-x$. Имаме $\measuredangle EDG=\measuredangle FGB$, како накрсни агли, па затоа правоаголните триаголници DEG и BFG се слични. Затоа важи $12:x=20:(16-x)$, од каде добиваме $x=6\,cm$. Сега од Питагоровата теорема следува

$d_1=\sqrt{12^2+6^2}=6\sqrt{5}$ и

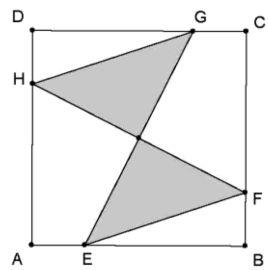
$d_2=\sqrt{10^2+20^2}=10\sqrt{5}$,

па затоа $d=d_1+d_2=16\sqrt{5}$ и $a=\frac{d\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{10}\,cm$. Конечно, плоштината на квадратот е $P=a^2=640\,cm^2$.

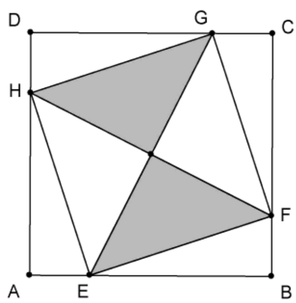
108. Квадрат $ABCD$ има плоштина $80\,cm^2$. Точките E,F,G,H се наоѓаат на страните AB,BC,CD,DA, соодветно и важи

$$\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}.$$

Ако $\overline{BE}=3\overline{EA}$, определи ја плоштината на сивиот дел од фигурата прикажана на цртежот десно.



Решение. Нека a е должината на квадратот. Тогаш $\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}=\frac{a}{4}$ и $\overline{BE}=\overline{CF}=\overline{DG}=\overline{AH}=\frac{3a}{4}$. Триаголниците $\triangle HAE$, $\triangle EBF$, $\triangle FCG$ и $\triangle GDH$ се правоаголни и имаат еднакви катети, па затоа тие се складни. Од докажаната складност следува $\overline{BE}=\overline{GF}=\overline{HG}=\overline{EH}=x$ и како $\measuredangle HEF=180^\circ-(\measuredangle AEH+\measuredangle FEB)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$ добиваме дека четириаголникот $EBGH$ е квадрат. Должината на страната на страната на квадратот $ABCD$ е $a=\sqrt{80}\,cm$, па затоа

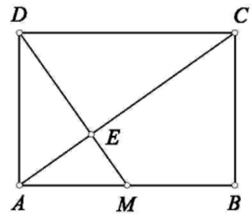


$$x=\sqrt{(\frac{a}{4})^2+(\frac{3a}{4})^2}=\frac{a\sqrt{10}}{4}=\frac{\sqrt{10}\sqrt{80}}{4}=5\sqrt{2}\ cm.$$

Имаме, $P_{EFGH}=(5\sqrt{2})^2=50\,cm^2$, па затоа плоштината на сивиот дел од фигурата е $\frac{1}{2}P_{EFGH}=25\,cm^2$.

109. Во правоаголник $ABCD$ точката M е средина на отсечката AB, а точката E е пресек на дијагоналата AC и отсечката DM. Ако $\overline{AB}=2\sqrt{2}cm$ и $\overline{BC}=2cm$, докажи дека $\measuredangle CED=90^\circ$.

Решение. Имаме $\measuredangle AEM=\measuredangle DEC$, како накрсни и $\measuredangle EAM=\measuredangle ECD$, како агли со паралелни краци, па затоа $\triangle AME\sim\triangle CDE$. Од сличноста следува $\overline{DE}=2\overline{EM}$ и $\overline{CE}=2\overline{AE}$. Од Питагоровата теорема следува $\overline{AC}^2=(2\sqrt{2})^2+2^2$, т.е. $\overline{AC}=2\sqrt{3}$, односно $\overline{AE}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, а исто така и



$\overline{DM}^2=(\sqrt{2})^2+2^2=6$, т.е. $\overline{DM}=\sqrt{6}$, односно $\overline{EM}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Во $\triangle AMF$ имаме $\overline{AM}=\sqrt{2},\ \overline{AE}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \overline{ME}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Според тоа,

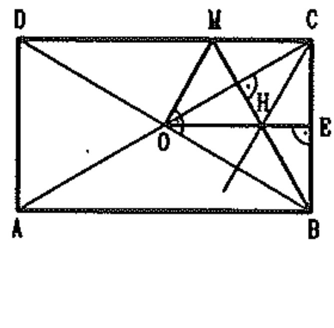
$$\overline{AM}^2=2=(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{\sqrt{6}}{3})^2=\overline{AE}^2+\overline{ME}^2,$$

па од обратната Питагорова теорема следува дека $\triangle AME$ е правоаголен, односно дека

$$\measuredangle MEA=\measuredangle CED=90^\circ.$$

110. Во правоаголник $ABCD$ точката M припаѓа на страната CDE и важи $\overline{DM}=2\overline{CM}$. Правите AC и BM се сечат под прав агол и O е пресекот на дијагоналите на правоаголникот. Определи го $\measuredangle BOM$.

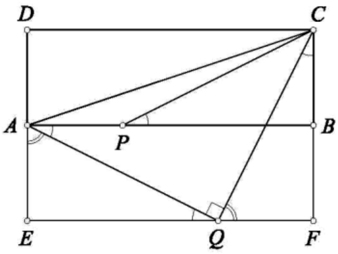
Решение. Нека E е средината на страната BC. Тогаш $OE\perp BC$ и $H=OE\cap BM$ е ортоцентар на $\triangle OBC$, па затоа $CH\perp BO$. Меѓутоа, OH е средна линија на $\triangle DBM$, па затоа $\overline{OH}=\frac{1}{2}\overline{DM}=\overline{MC}$. Затоа четириаголникот $OHCM$ е паралелограм и $OM\parallel CH$, а оттука следува дека $OM\perp BO$.



111. Даден е правоаголник $ABCD$ таков да $\overline{AB}=3\overline{BC}$. На страната AB дадена е точка P таква да $\overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AB}$. Докажи дека

$$\measuredangle CAB+\measuredangle CPB=45^{\circ}.$$

Решение. Да го дополниме правоаголникот $ABCD$ со складен правоаголник како на вртежот десно. Понатаму, на страната EF земаме точка Q така да $\overline{EQ}=\frac{2}{3}\overline{EF}$.



Да означиме $\overline{BC}=x$. Сега да ги разгледаме правоаголните триаголници AEQ и QFC. Од $\overline{AE}=\overline{QF}=x$ и $\overline{EQ}=\overline{CF}=2x$, следува дека овие триаголници се складни. Понатаму, од складноста следува

$$\overline{AQ}=\overline{QC} \tag{1}$$

и

$$\measuredangle EAQ=\measuredangle CQF,\quad \measuredangle EQA=\measuredangle QCF. \tag{2}$$

Сега од (1) и (2) следува дека триаголникот AQC е рамнокрак правоаголен.

Понатаму, бидејќи $\overline{PB}=2x$ и $\overline{BC}=x$, следува дека правоаголните триаголници PBC и AEQ се складни. Од складноста на овие триаголници следува дека $\measuredangle CPB=\measuredangle EQA$. Бидејќи $\measuredangle EQA$ и $\measuredangle QAB$ се агли на трансферзалата, добиваме дека $\measuredangle EQA=\measuredangle QAB$.

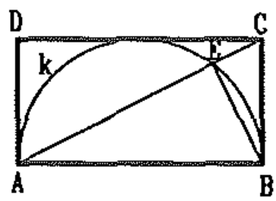
Конечно,

$$\measuredangle CAB+\measuredangle CPB=\measuredangle CAB+\measuredangle EQA=\measuredangle CAB+\measuredangle QAB=\measuredangle QAC.$$

Бидејќи триаголникот QAC е рамнокрак правоаголен, следува дека $\measuredangle QAC=45^{\circ}$, со што доказот е завршен.

112. Во правоаголник $ABCD$, $\overline{AB}=10\,cm, \overline{BC}=5\,cm$ впишана е полукружница со дијаметар AB. Во кој однос полукружницата ја дели дијагоналата на правоаголникот?

Решение. Нека E е пресечната точка на дијагоналата и полукружницата k. Тогаш $\measuredangle AEB=90^{\circ}$ и правоаголните триаголници ABE и ACB имаат заеднички остар агол.

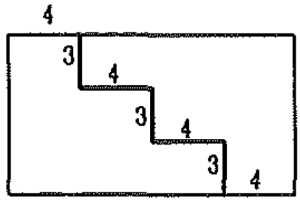


Значи, $\triangle ABE \sim \triangle ACB$, па затоа $\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AC}$, т.е. $\overline{AE}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}}$.

Слично, $\overline{CE}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{AC}$, па затоа $\overline{CE}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}$. Сега добиваме

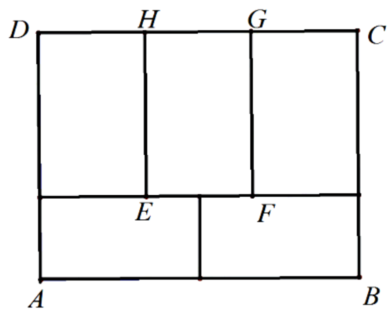
$$\overline{AE}:\overline{CE}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}}:\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}=\overline{AB}^2:\overline{BC}^2=100:25=4:1.$$

113. Правоаголник со должини на страни $9cm$ и $16cm$ расечи го на два дела од кои може да се состави квадрат.

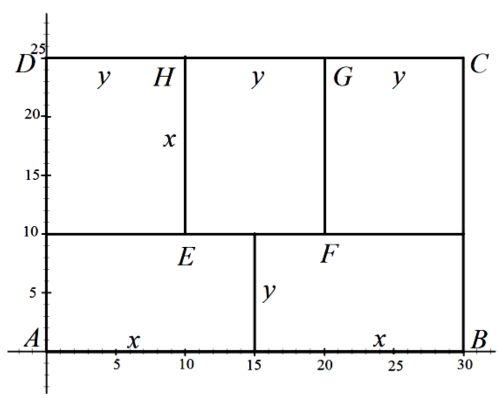


Решение. Дадениот правоаголник има плоштина $9\cdot 16=144cm^2$. Затоа кавдратот кој треба да се состави треба да има должина на страна $12cm$. Тоа значи дека малата страна на правоаголникот треба да се зголеми за $3cm$, а големата треба да се намали за $4cm$. Бараното расекување е дадено на цртежот десно.

114. Даден е правоаголник $ABCD$ чија плоштина е $750cm^2$. Правоаголникот $ABCD$ е поделен на пет складни правоаголници (види цртеж). Смести го правоаголникот $ABCD$ во првиот квадрант на координатниот систем така што точката A е во координатниот почеток, а точката B лежи на апцисата. Определи ги координатите на темињата на правоаголникот $EFGH$.



Решение. Бидејќи правоаголникот $ABCD$ е поделен на пет складни правоаголници, секој од малите правоаголници има плоштина еднаква на $150cm^2$. Со x и y да ги означиме должините на подолгата и покусата страна на помалиот правоаголник, соодветно. Тогаш за

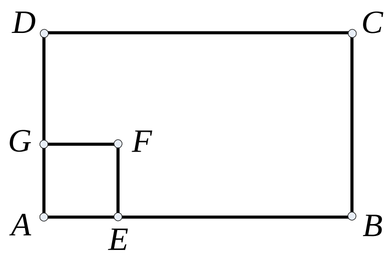


плоштината на малиот правоаголник важи $xy=150$ при што $2x=3y$. Од последните две равенки наоѓаме $x=15$ и $y=10$.

Според тоа, координатите на темињата на правоаголникот $EFGH$ се
$$E(10,10), F(20,10), G(20,25), H(10,25).$$

115. Од правоаголникот $ABCD$ отсечен е квадрат $AEFG$ така што плоштината на новодобиениот многуаголник е $216\,cm^2$. Ако $\overline{EB}=0{,}8\,dm$, $\overline{GD}=6\,cm$, пресметај ја плоштината на квадратот $AEFG$?

Решение. Нека страната на квадратот $AEFG$ има должина a, плоштината на квадратот $AEFG$ е P и плоштината на правоаголникот $ABCD$ е P_1. Од условот на задачата добиваме дека $P_1-P=216$ т.е.

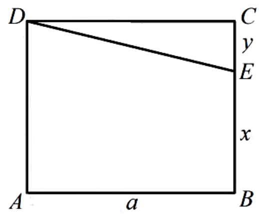


$$(a+8)(a+6)-a^2=216.$$

Решението на последната равенка е $a=12\,cm$. Конечно, плоштината на квадратот $AEFG$ е еднаква на
$$P=a^2=144cm^2.$$

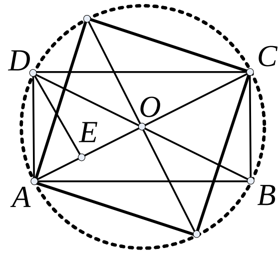
116. Даден е правоаголник $ABCD$ и точка E на страната BC. Отсечката DE го дели правоаголникот $ABCD$ на два дела чии плоштини се однсуваат како $6:1$. Определи го односот $\overline{CE}:\overline{BE}$.

Решение. Нека $\overline{AB}=\overline{DC}=a$, $\overline{BE}=x$ и $\overline{CE}=y$. Тогаш $\overline{AD}=\overline{BC}=x+y$. Отсечката DE го дели правоаголникот на правоаголен триаголник и правоаголен трапез, па затоа $P_{ECD}=\frac{ay}{2}$ и $P_{ABED}=\frac{(2x+y)a}{2}$. Од $P_{ABED}:P_{ECD}=6:1$ следува $\frac{(2x+y)a}{2}=6\cdot\frac{ay}{2}$, т.е. $2x+y=6y$, од каде добиваме дека $2x=5y$, т.е. $\overline{CE}:\overline{BE}=y:x=2:5$.



117. Од сите правоаголници со должина на дијагонала еднаква на 4 определи го оној кој има најголема плоштина.

Решение. *Прв начин.* Нека k е кружница со дијаметар $d=4$. За секој правоаголник со дијагонала 4 можеме да сметаме дека впишан во k.



Нека $ABCD$ е таков правоаголник а DE е висина на триаголникот ACD (види цртеж). Тогаш

$$P=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{DE}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\overline{DE}=2\cdot\overline{DE}.$$

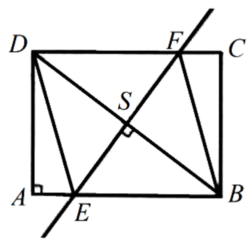
Сега плоштината ќе биде најголема ако $\overline{DE}$ е најголемо, а најголема можна вредност е ако DE е радиус. Во тој случај правоаголникот е квадрат.

Втор начин. Ако a и b се должини на страните на правоаголникот, тогаш $a^2+b^2=4$. Плоштината на правоаголникот е $P=ab$. За секои позитивни реални броеви a и b важи $a^2+b^2\geq 2ab$, па затоа

$$P=ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Вредноста 2 се достигнува за $a=b$, односно ако правоаголникот е квадрат.

118. Даден е правоаголник $ABCD$ со должини на страни $16cm$ и $12cm$. Симетралата на дијагоналата BD ги сече страните AB и CD во точките E и F соодветно. Пресметај ја должината на отсечката EF.



Решение. Од условот на задачата следува дека $\overline{AB}=16cm, \overline{AD}=12cm$ и нека $\overline{AE}=x$. Тогаш бидејќи точката E лежи на симетралата на дијагоналата BD важи

$$\overline{BE}=\overline{DE}=16-x.$$

Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle ABD$ имаме

$$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=16^2+12^2=400, \text{ т.е. } \overline{BD}=20.$$

Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle DAE$ имаме

$$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2, \text{ т.е. } (16-x)^2=12^2+x^2.$$

Решение на последната равенка е $x=3{,}5cm$, т.е. $\overline{BE}=\overline{DE}=12{,}5cm$.

Нека S е пресекот на дијагоналата BD и нејзината симетрала. Тогаш $\overline{DS}=\overline{BS}=10cm$. Од друга страна, бидејќи правоаголникот е централно симетричен во однос на S важи $\overline{SE}=\overline{SF}$. Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle ESD$ добиваме

$$\overline{SE}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{SD}^2 = 12{,}5^2 - 10^2 \text{, т.е. } \overline{SE} = 7{,}5cm.$$

Според тоа,

$$\overline{EF} = \overline{ES} + \overline{SF} = 2 \cdot \overline{ES} = 2 \cdot 7{,}5 = 15cm.$$

119. Нека е даден $\triangle ABC$ и нека AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишни линии во триаголникот кои се сечат во точка T и притоа важи $\overline{BA_1} = \overline{A_1T}$. На продолжението на CC_1 избираме точка C_2 таква што $\overline{C_1C_2} = \frac{\overline{CC_1}}{3}$, а на продолжението на BB_1 избираме точка B_2 таква што $\overline{B_1B_2} = \frac{\overline{BB_1}}{3}$. Докажи дека четириаголникот TB_2AC_2 е правоаголник.

Решение. Бидејќи AA_1 е тежишна линаја во $\triangle ABC$ и $\overline{BA_1} = \overline{A_1T}$ добиваме дека $\overline{A_1T} = \frac{\overline{BC}}{2}$ т.е. A_1 е центар на опишана кружница околу $\triangle BCT$. Сега од Талесова теорема имаме $\measuredangle BTC = 90^\circ$. Понатаму, $\measuredangle B_2TC_2 = 90^\circ$ (како накрсни агли). Бидејќи T е тежиште во $\triangle ABC$ имаме $\overline{C_1T} = \frac{\overline{CC_1}}{3} = \overline{C_1C_2}$. Од $\overline{BC_1} = \overline{C_1A}$ следува дека четириаголникот $BTAC_2$ е паралелограм, па затоа $BT \parallel AC_2$, од каде добиваме

$$\measuredangle TC_2A = \measuredangle CTB_2 = 180^\circ - \measuredangle B_2TC_2 = 90^\circ$$

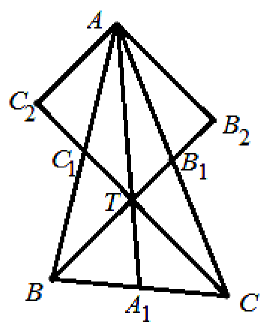
(како агли над трансферзала).
Аналогно се докажува дека четириаголникот TCB_2A е паралелограм, т.е.

$$\measuredangle TB_2A = \measuredangle C_2TB_2 = 90^\circ$$

(како агли над трансферзала). Според тоа,

$$\measuredangle C_2AB_2 = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

т.е. четириаголникот е правоаголник.



120. Збирот на дијагоналите на еден ромб е еднаков на $8cm$, а неговата плоштина е еднаква на $7cm^2$. Определи го периметарот на ромбот?

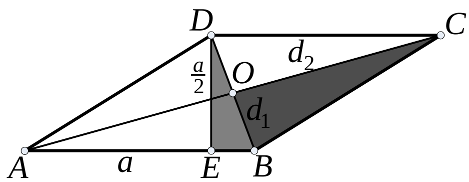
Решение. Нека a е должината на страната, а d_1 и d_2 се должините на дијагоналите на ромбот. Од $d_1 + d_2 = 8$ и $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 7$, следува

$$64 = (d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 = d_1^2 + d_2^2 + 28,$$

односно $d_1^2+d_2^2=36$. Значи, $a^2=\frac{d_1^2+d_2^2}{4}=\frac{36}{4}=9$, односно $a=3$. Значи, периметарот на ромбот е $L=4a=12cm$.

121. Даден е ромб со остар агол еднаков на 30°. Докажи дека должината на неговата страна е геометриска средина од должините на неговите дијагонали.

Решение. Нека $ABCD$ е ромб во кој што $\measuredangle DAB=30^\circ$ (види цртеж). Нека DE е негова висина. Значи триаголникот AED е правоаголен во кој што $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{a}{2}$. Сега триаголникот DEB е правоаголен со страни катета $\overline{DE}=\frac{a}{2}$, хипотенуза d_1 и агли 15° и 75°. Нека O е пресек на дијагоналите. Тогаш $\triangle COB$ е правоаголен со агли 15° и 75°, и катета d_2 и хипотенуза a. Од сличноста $\triangle DEB\sim\triangle AOB$ имаме



$$\frac{\frac{a}{2}}{d_1}=\frac{\frac{d_2}{2}}{a}\text{, т.е. } a^2=d_1d_2$$

што требаше да се докаже.

122. Периметарот на еден ромб е еднаков на $68cm$, а неговите дијагонали се однесуваат како $15:8$. Определи ја плоштината на ромбот кој е сличен на дадениот и чија страна е со должина $34cm$.

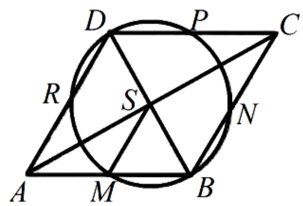
Решение. Ако периметарот на ромбот е $68cm$, тогаш должината на неговата страна е еднаква на $68:4=17cm$. Бидејќи дијагоналите се однесуваат како $15:8$, заклучуваме дека и половините на дијагоналите се однесуваат како $15:8$. Ако со $15x$ и $8x$ ги означиме половините на дијагоналите, тогаш $(15x)^2+(8x)^2=17^2$, од каде добиваме $289x^2=289$, односно $x=1$, а дијагоналите се со должини $d_1=16cm$ и $d_2=30cm$. Од $34:17=2$ заклучуваме дека коефициентот на сличност на ромбовите е 2, па затоа должините на дијагоналите на новиот ромб се $m=32cm$ и $n=60cm$. Конечно, плоштината на новиот ромб е еднаква на $\frac{32\cdot 60}{2}=960cm$.

123. Периметарот на ромбот е $52\,cm$, а периметарот на еден од триаголниците кој се добил со повлекување на дијагоналите е $30\,cm$. Определи ја плоштината на ромбот.

Решение. Од условот на задачата следува дека должината на страната на ромбот е $a=52:4=13\,m$. Со повлекување на дијагоналите на ромбот добиваме четири складни правоаголни триаголници со должини на страни $a,\frac{e}{2},\frac{f}{2}$, па затоа $a+\frac{e}{2}+\frac{f}{2}=30$, т.е. $\frac{e}{2}+\frac{f}{2}=17$, односно $e+f=34$. Сега од Питагоровата теорема следува $a^2=(\frac{e}{2})^2+(\frac{f}{2})^2$, односно $e^2+f^2=676$. Понатаму, $f=34-e$, па затоа со замена во втората равенка добиваме $e^2+(34-e)^2=676$, т.е. $e^2-34e+240=0$. Од последната равенка следува $(e-17)^2=49$, односно $e-17=\pm 7$, па затоа решенијата се $e_1=10$ и $e_2=24$, при што добиваме $f_1=24$ и $f_2=10$. Во двата случаја плоштината на ромбот е $P=\frac{ef}{2}=120\,cm^2$.

124. Даден е ромб $ABCD$ со остар агол 60°. Докажи, дека кружницата со центар во пресекот на дијагоналите и дијаметар еднаков на малата дијагонала ги полови страните на ромбот.

Решение. Нека во ромбот $ABCD$ важи $\measuredangle BAD=60^\circ$ и нека кружницата со центар во S и дијаметар BD ги сече страните AB,BC,CD,DA во точките M,N,P,R соодветно (цртеж десно). Од $\measuredangle BAD=60^\circ$



следува дека $\measuredangle ABC=120^\circ$. Бидејќи дијагоналите на ромбот се воедно и симетрали на аглите на ромбот добиваме дека $\measuredangle SAB=30^\circ$ и $\measuredangle SBA=60^\circ$. Од $\overline{SM}=\overline{SB}=r$, следува дека триаголникот MBS е рамностран, па затоа

$$\measuredangle BMS=\measuredangle MBS=\measuredangle ABS=60^\circ,$$

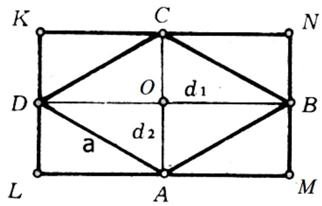
од што следува $\measuredangle MSB=60^\circ$. Според тоа, триаголникот MBS е рамностра и затоа $\overline{MS}=\overline{BM}$.

Аголот $\measuredangle BMS$ е надворешен за триаголникот AMS, па затоа од својството на надворешен агол следува $30^\circ+\measuredangle AMS=60^\circ$, т.е.

$\measuredangle AMS = 30^\circ$. Понатаму, бидејќи $\measuredangle SAM = \measuredangle SAB = 30^\circ$ добиваме дека триаголникот AMS е рамнокрак, па затоа $\overline{MS} = \overline{AM}$. Конечно, $\overline{AM} = \overline{MS} = \overline{BM}$, што значи дека M е средина на AB.
Аналогно се докажува дека N, P, R се средини на BC, CD, DA соодветно.

125. Пресметај ја плоштината на ромбот зададен со страни $a = 13\,cm$ и дијагонала $d_2 = 10\,cm$.

Решение. Од правоаголниот $\triangle AOD$ (цртеж десно), добиваме



$$\frac{d_1}{2} = \sqrt{a^2 - (\tfrac{d_2}{2})^2} = \sqrt{13^2 - (\tfrac{10}{2})^2} = 12\,cm,$$

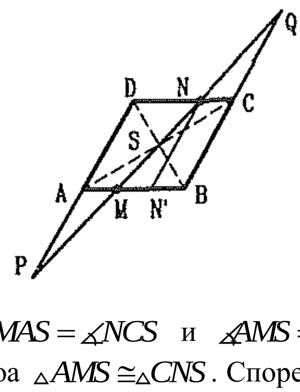
т.е. $d_1 = 24\,cm$. Сега, ако ја примениме формулата (4) за плоштината на ромбот наоѓаме

$$P = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120\,cm^2.$$

126. На страните AB и CD на ромбот $ABCD$ се дадени точки M и N такви што $\overline{AM} : \overline{AB} = \overline{CN} : \overline{CD} = 1:3$. Правата MN ги сече продолженијата на страните AD и BC во точките P и Q. Докажи дека пресекот на дијагоналите на ромбот лежи на правата MN и дека $\overline{MP} = \overline{MN} = \overline{NQ}$.

Решение. Нека $NN' \parallel BC$ (цртеж десно). Тогаш $\overline{AM} = \overline{MN'} = \overline{NC} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ и бидејќи

$$\measuredangle NMN' = \measuredangle AMP = \measuredangle QNC \text{ и}$$
$$\measuredangle PAM = \measuredangle MN'N = \measuredangle NCQ$$

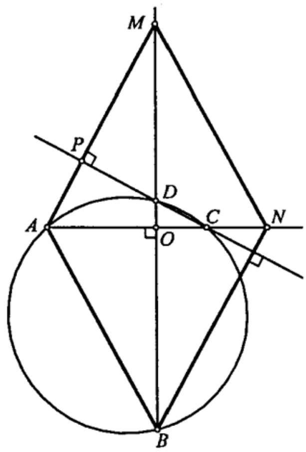


(агли со паралелни краци), од признакот АСА следува $\triangle AMP \cong \triangle N'MN \cong \triangle CNQ$, па од складноста следува $\overline{MP} = \overline{MN} = \overline{NQ}$.

Нека $MN \cap AC = S$. Имаме $\overline{AM} = \overline{CN}$, $\measuredangle MAS = \measuredangle NCS$ и $\measuredangle AMS = \measuredangle CNS$, како агли со паралелни краци, па затоа $\triangle AMS \cong \triangle CNS$. Според тоа, $\overline{AS} = \overline{CS}$, што значи дека S е пресекот на дијагоналите на ромбот и истиот припаѓа на MN.

127. Отсечките AC и BD се две заемно нормални тетиви на кружница. Нормалата повлечена од точката A на правата CD ја сече правата BD во точката M, а нормалата од точката B на правата CD ја сече правата AC во точката N. Докажи дека четириаголникот $ABNM$ е ромб.

Решение. Јасно, дијагоналите AN и BM на четириаголникот $ABNM$ се заемно нормални. За да докажеме дека тој е ромб доволно е да докажеме дека $\overline{AB}=\overline{BN}=\overline{NM}=\overline{MA}$. Имаме, $\measuredangle ABD=\measuredangle ACD$ (перифериски агли над тетивата AD) и $\measuredangle ACD=\measuredangle DBN$ (агли со нормални краци), па затоа



$$\measuredangle ABO=\measuredangle ABD=\measuredangle DBN=\measuredangle OBN.$$

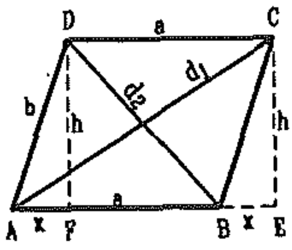
За триаголниците AOB и NOB имаме $\measuredangle ABO=\measuredangle OBN$, OB е заедничка страна и $\measuredangle AOB=\measuredangle NOB=90^\circ$, па затоа тие се складни, што значи $\overline{AB}=\overline{BN}$. Исто така $\overline{AO}=\overline{ON}$, што значи дека правата BM е симетрала на отсечката AN, па затоа $\overline{NM}=\overline{MA}$. Останува уште да докажеме дека $\overline{AB}=\overline{AM}$. Нека P е подножјето на нормалата од точката A на правата CD. Тогаш $\triangle AOB \sim \triangle APC$ ($\measuredangle ABO=\measuredangle ACD=\measuredangle ACP$ и $\measuredangle APC=\measuredangle AOB$), па затоа $\measuredangle MAO=\measuredangle PAC=\measuredangle BAO$. Затоа $\triangle AOM \cong \triangle AOB$ ($\measuredangle MAO=\measuredangle BAO$, AO е заедничка страна и $\measuredangle MOA=\measuredangle BOA=90^\circ$), т.е. $\overline{AB}=\overline{AM}$.

Конечно, $\overline{AB}=\overline{BN}=\overline{NM}=\overline{MA}$, т.е. четириаголникот $ABNM$ е ромб.

128. Нека a и b се должините на страните, а d_1 и d_2 се должините на дијагоналите на произволен паралелограм. Докажи дека

$$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2).$$

Решение. Нека висините ва паралелограмот се $\overline{CE}=\overline{DF}=h$ и $\overline{AF}=\overline{BE}=x$ (цртеж десно). Тогаш $h^2=b^2-x^2$, па затоа



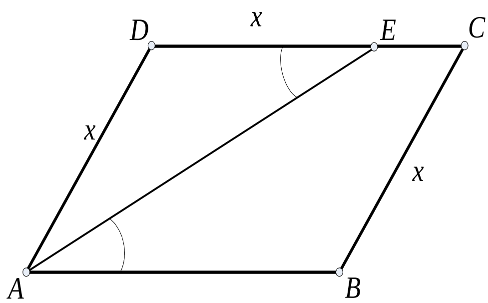
$$d_1^2=(a+x)^2+h^2=a^2+2ax+x^2+b^2-x^2$$
$$=a^2+2ax+b^2,$$

$$d_2^2 = (a-x)^2 + h^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2 - x^2$$
$$= a^2 - 2ax + b^2,$$

па затоа

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + 2ax + b^2 + a^2 - 2ax + b^2 = 2(a^2 + b^2).$$

129. Даден паралелограм $ABCD$ со страна $\overline{AB} = a$ и агол $\measuredangle DAB = 60^\circ$. Ако симетралата на аголот $\measuredangle DAB$ ја сече страната CD во точка E и важи $P_{ABCE} = 2 \cdot P_{\Delta AED}$, пресметај ја плоштинатана на паралелограмот $ABCD$.

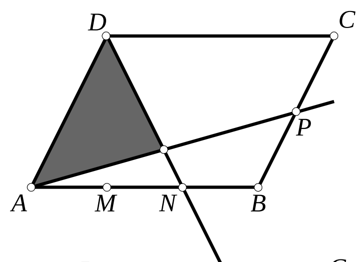


Решение. Нека $\overline{DE} = x$. Тогаш $\overline{CE} = a - x$. Од условот на задачата добиваме дека $\frac{a+(a-x)}{2} \cdot h = P_{ABCE}$

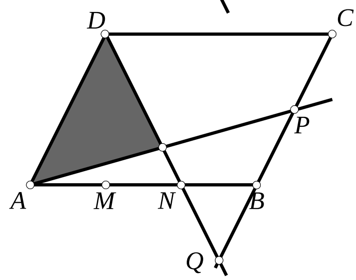
$$= 2 \cdot P_{\Delta AED} = 2 \cdot \tfrac{x}{2} h$$

односно дека $2a - x = 2x$. Следува дека $x = \frac{2a}{3}$. Тогаш лесно се добива дека $h = \frac{\sqrt{3}}{3} a$ и $P = \frac{\sqrt{3}}{3} a^2$.

130. Точките M и N ја делат страната AB од паралелограмот $ABCD$ на три еднакви дела. Точката P е средина на страната BC. Колкава е плоштината на осенчената површина на цртежот десно?



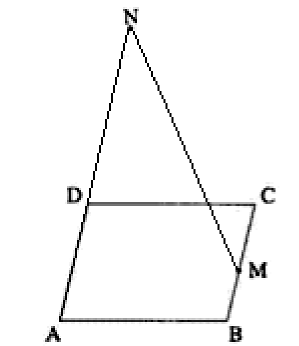
Решение. Нека пресекот на правите DN и CB е точката Q (види цртеж). Јасно, триаголниците ΔDAN и ΔQBN се слични, со коефициент на сличност $k = 2$. Затоа $\overline{BQ} = \frac{1}{2}\overline{DA}$. Но, тогаш $\overline{PQ} = \overline{AD}$, па според тоа $AQPD$ е паралелограм, а осенчениот дел е $\frac{1}{4}$ од неговата површина.



Од друга страна $P_{ABCD} = P_{AQPD}$ (имаат иста страна и еднаква соодветна висина). Според тоа, плоштината на осенчениот дел е $\frac{1}{4}$ од плоштината на паралелограмот $ABCD$.

131. Даден е паралелограм $ABCD$ со плоштина 28. На страната BC е избрана точка M таква што $\overline{BM}:\overline{MC} = 3:4$, а на продолжението на страната AD преку темето D е избрана точка N таква што $\overline{AD}:\overline{DN} = 2:3$. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABMN$.

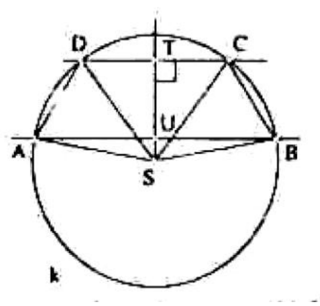
Решение. Јасно, $\overline{BM} = \frac{3}{7}\overline{BC}$ и од $\overline{AD} = \overline{BC}$ следува $\overline{BM} = \frac{3}{7}\overline{AD}$. Аналогно $\overline{AD} = \frac{2}{5}\overline{AN}$, т.е. $\overline{AN} = \frac{5}{2}\overline{AD}$. Нека v е висината на паралелограмот $ABCD$ повлечена кон страната AD. Имаме $v \cdot \overline{AD} = 28$, т.е. $v = \frac{28}{\overline{AD}}$. Четириаголникот $ABMN$ е трапез со основи BM и AN. Според тоа,



$$P = \frac{\overline{AN}+\overline{BM}}{2}v = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\overline{AD} + \frac{3}{7}\overline{AD}\right)\frac{28}{\overline{AD}} = 14\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{7}\right) = 41.$$

132. Две паралелни прави сечат дадена кружница во четири точки. Докажи дека овие точки се темиња на рамнокрак трапез.

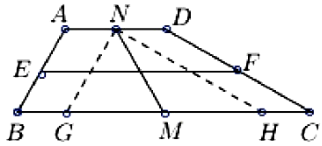
Решение. Нека A и B се пресечните точки на едната права со кружницата, а C и D се пресечните точки на другата права со кружницата. Од $AB \| CD$ следува дека четириаголникот $ABCD$ е трапез. Ја повлекуваме нормалата од центарот на S на кружницата на основите AB и CD. Нека U и T се пресечните точки на нормалата со основите AB и CD, соодветно. Триаголникот SCD е рамнокрак, па затоа висината повлечена кон основата CD е ST, што значи дека ST ја полови основата CD. На потполно аналоген начин заклучуваме дека SU ја преполовува AB.



Да разгледаме осна симетрија во однос на оската ST. Тогаш C е слика на D при оваа осна симетрија, а исто така и B е слика на A при истата симетрија. Значи, BC е слика на AD при осната симетрија, па затоа $\overline{BC}=\overline{AD}$, што значи дека трапезот $ABCD$ е рамнокрак.

133. Во трапезот $ABCD$ важи $AD\|BC$, $\measuredangle ABC=60^\circ$, $\measuredangle BCD=30^\circ$ и $\overline{BC}=7$. Нека E,M,F,N се средини на страните AB,BC,CD,DA, соодветно и $\overline{MN}=3$. Определи ја должината на отсечката EF.

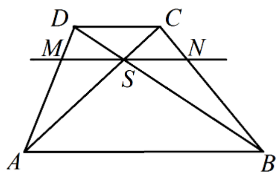
Решение. Отсечката EF е средна линија на трапезот, па затоа $\overline{EF}=\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}$. Но, $\overline{BC}=7$, па затоа треба да се најде $\overline{AD}$.



Низ точката N повлечкуваме прави паралелни со AB и DC и нека G и H се пресечните точки на овие прави со BC. Имаме, $\measuredangle NGH=\measuredangle ABC=60^\circ$ и $\measuredangle GHN=\measuredangle BCD=30^\circ$, што значи дека $\triangle GHN$ е правоаголен со хипотенуза GH. Но, M е средина на BC и како $\overline{BG}=\overline{AN}=\overline{ND}=\overline{HC}$ добиваме дека M е средина на GH. Последното значи дека $\overline{GM}=\overline{MH}=\overline{MN}=3\,cm$, т.е. $\overline{GH}=6\,cm$. Според тоа, $\overline{AD}=\overline{AN}+\overline{ND}=\overline{BG}+\overline{HC}=\overline{BC}-\overline{GH}=1\,cm$. Конечно, $\overline{EF}=\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}=\frac{7+1}{2}=4\,cm$.

134. Нека точката S е пресек на дијагоналите на трапезот $ABCD$ и нека правата која минува низ точката S и е паралелна на основите AB и CD ги сече краците на трапезот AD и BC во точките M и N, соодветно. Докажи, дека $\overline{SM}=\overline{SN}$.

Решение. Од $\triangle ASM \sim \triangle ACD$ следува дека $\overline{AM}:\overline{AD}=\overline{SM}:\overline{CD}$. Од $\triangle BSN \sim \triangle BCD$ следува дека



$$\overline{SN}:\overline{CD}=\overline{BS}:\overline{BD}.$$

Од $\triangle MSD \sim \triangle ABD$ следува дека

$$\overline{AM}:\overline{AD}=\overline{BS}:\overline{BD}.$$

Од горните равенства следува

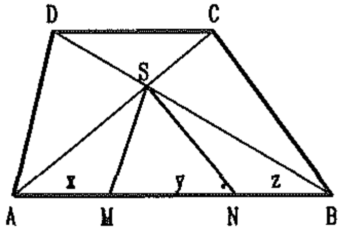
$$\overline{SN}:\overline{CD}=\overline{BS}:\overline{BD}=\overline{AM}:\overline{AD}=\overline{SM}:\overline{CD},$$

па затоа $\overline{SN}=\overline{SM}$, што и требаше да се докаже.

135. Нека S е пресекот на дијагоналите AC и BD во трапезот $ABCD$. Низ точката S се повлечени прави паралелни со краците AD и BC,

кои основата AB ја сечат во точките M и N, соодветно. Докажи дека $\overline{AM}=\overline{BN}$.

Решение. Од $\triangle ABS \sim \triangle CDS$, следува $\frac{\overline{AS}}{\overline{CS}}=\frac{\overline{BS}}{\overline{DS}}$. Нека $\overline{AM}=x$, $\overline{MN}=y$ и $\overline{BN}=z$. Тогаш бидејќи $SN \parallel BC$, од Талесовата теорема следува $\frac{\overline{AS}}{\overline{CS}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}=\frac{x+y}{z}$. Слични, $SM \parallel AD$ и $\frac{\overline{BS}}{\overline{DS}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}=\frac{z+y}{x}$. Според тоа, $\frac{x+y}{z}=\frac{z+y}{x}$, од каде добиваме $(x-z)(x+y+z)=0$. Но, $x+y+z=\overline{AB}\neq 0$, па од последното равенство следува $x=z$, односно $\overline{AM}=\overline{BN}$.

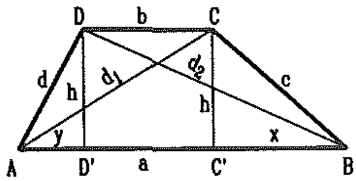


136. Докажи дека збирот на квадратите на дијагоналите на произволен трапез е еднаков на збирот на квадратите на краците зголемен за двојниот производ на основите.

Решение. При ознаки како на цртежот десно важи

$$d_1^2=(a-x)^2+h^2=(a-x)^2+c^2-x^2 \quad (1)$$

$$d_2^2=(a-y)^2+h^2=(a-y)^2+d^2-y^2 \quad (2)$$



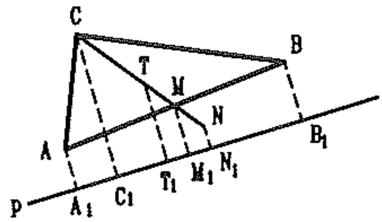
Ако ги собреме равенствата (1) и (2) и земеме предвид дека $a-x-y=b$ добиваме

$$\begin{aligned} d_1^2+d_2^2 &= (a-x)^2+c^2-x^2+(a-y)^2+d^2-y^2 \\ &= a^2-2ax+x^2+c^2-x^2+a^2-2ay+y^2+d^2-y^2 \\ &= 2a^2-2ax-2ay+c^2+d^2=2a(a-x-y)+c^2+d^2 \\ &= 2ab+c^2+d^2, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

137. Даден е $\triangle ABC$ и во неговата рамнина е дадена права p, која не го сече $\triangle ABC$. Ако A_1, B_1, C_1, T_1 се подножјата на нормалите повлечени од A, B, C, T на правата p, соодветно (T е тежиштето на $\triangle ABC$), докажи дека

$$\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=3\overline{TT_1}.$$



Решение. Нека M е средината на страната AB на $\triangle ABC$ и N е точка на правата CM (различна од T) таква што $\overline{MN}=\overline{TM}$. Сега,

$$\overline{CT}=2\overline{TM}=\overline{TM}+\overline{MN}=\overline{TN}.$$

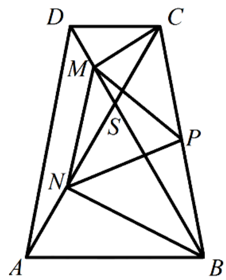
Нека M_1 и N_1 се подножјата на нормалите повлечени од M и N на правата p. Од трапезот CC_1N_1N следува равенството $\overline{NN_1}+\overline{CC_1}=2\overline{TT_1}$, од трапезот TT_1N_1N следува равенството $\overline{TT_1}+\overline{NN_1}=2\overline{MM_1}$ и од трапезот AA_1B_1B следува равенството $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}=2\overline{MM_1}$. Од последните три равенства добиваме

$$(\overline{NN_1}+\overline{CC_1})+(\overline{AA_1}+\overline{BB_1})+2\overline{MM_1}=2\overline{MM_1}+2\overline{TT_1}+(\overline{TT_1}+\overline{NN_1}),$$

од каде следува $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=3\overline{TT_1}$, штои требаше да се докаже.

138. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со основи AB и CD. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката S и важи $\measuredangle ASB=60^\circ$. Докажи дека средините на отсечките DS, AS и BC се темиња на рамностран триаголник.

Решение. Нека точките M, N и P се средини на отсечките DS, AS и BC, соодветно. Од $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{BD}=\overline{AC}$ и AB е заедничка страна, следува дека $\triangle ABD\cong\triangle ABC$. Затоа $\measuredangle ABD=\measuredangle CAB$ и како $\measuredangle ASB=60^\circ$, добиваме дека $\triangle ABS$ е рамностран. Сега, бидејќи $\measuredangle BAC=\measuredangle ACD=60^\circ$ (агли на трансферзала) и $\measuredangle CSD=60^\circ$ следува дека $\triangle CSD$ е рамностран.

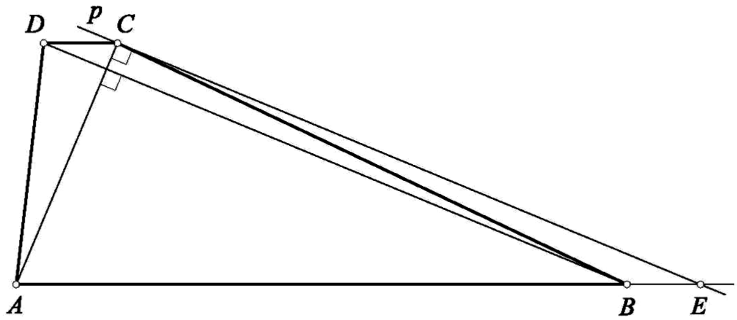


Во рамностраниот $\triangle ABS$ важи $\overline{AN}=\overline{SN}$, па затоа BN е висина на $\triangle ABS$, т.е. $BN\perp AC$, што значи дека $\triangle BNC$ е правоаголен. На ист начин се докажува дека $CM\perp BD$м т,е, дека $\triangle BMC$ е правоаголен. Точката P е средина на отсечката BC, а според Талесовата теорема точките M и N лежат на кружница со дијаметар BC, па затоа $\overline{PM}=\overline{PN}=\overline{PB}=\overline{PC}$.

Во $\triangle ASD$ отсечката MN е средна линија, што значи дека $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AD}$, па како $\overline{AD}=\overline{BC}$ добиваме дека $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$, т.е. $\overline{MN}=\overline{PB}=\overline{PC}$. Конечно, од претходните равенства добиваме дека $\overline{PM}=\overline{PN}=\overline{MN}$, т.е. $\triangle PMN$ е рамностран, што и требаше да се докаже.

139. Даден е трапез со заемно нормални дијагонали. Колкава е должината на средната линија на трапезот, ако должините на дијагоналите се $2{,}5\,cm$ и $6\,cm$.

Решение. Низ точката C повлекуваме права p паралелна со BD.



Нека $p\cap AB=\{E\}$. Тогаш $DBEC$ е паралелограм, па затоа $\overline{BE}=\overline{DC}$ и $\overline{BD}=\overline{EC}$. Понатаму, $\triangle ACE$ е правоаголен, па затоа

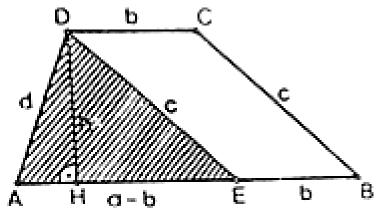
$$\overline{AB}+\overline{BE}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CE}^2}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BD}^2}\,.$$

Од друга страна важи $\overline{AB}+\overline{BE}=\overline{AB}+\overline{CD}=2s$ од што следува

$$2s=\sqrt{2{,}5^2+6^2}=6{,}5\text{, т.е. } s=3{,}25\,cm.$$

140. Пресметај ја плоштината на трапез со основи $20\,cm$ и $11\,cm$ и краци $17\,cm$ и $10\,cm$.

Решение. Повлекуваме права $DE\,||\,BC$ и го добиваме триаголникот AED чии страни имаат должини $a-b=9\,cm$, $17\,cm$ и $10\,cm$ (цртеж десно). Ја применуваме Хероновата формула и за плоштината на триаголникот добиваме



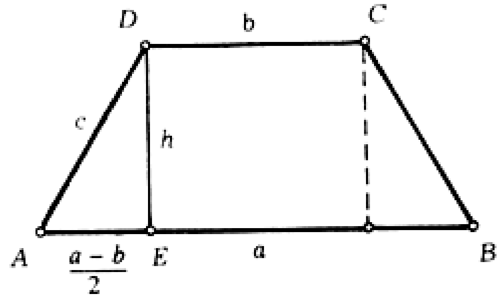
$$P_{AED}=\sqrt{18\cdot(18-9)\cdot(18-10)\cdot(18-17)}=36\,cm^2.$$

Според тоа, висината на триаголникот AED, која е еднаква на висината на трапезот е $h=\frac{2P_{AED}}{a-b}=8\,cm$. Конечно, плоштината на трапезот е

$$P = \frac{a+b}{2} h = \frac{20+11}{2} \cdot 8\, cm^2 = 124\, cm^2 .$$

141. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи $9\,cm$ и $3\,cm$ и крак $5\,cm$.

Решение. За да ја пресметаме плоштината, прво треба да ја определиме висината на трапезот. За правоаголниот триаголник AED (цртеж десно), имаме $\overline{AE} = \frac{a-b}{2} = 3\,cm$ (зошто?). Сега од Питагоровата теорема следува



$$h = \sqrt{c^2 - (\tfrac{a-b}{2})^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\, cm .$$

Според тоа, плоштината на рамнокракиот трапез е

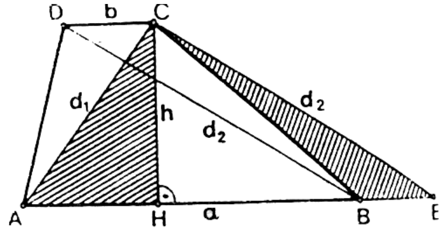
$$P = \frac{a+b}{2} h = \frac{9+3}{2} \cdot 4 cm^2 = 24\, cm^2 .$$

142. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со дијагонала $12 cm$ и ако се знае дека аголот меѓу дијагоналата и поголемата основа е еднакво на 45°.

Решение. Низ темето C повлекуваме права паралелна на дијагоналата BD и во пресекот со основата AB ја определуваме точката E (направи цртеж). Триаголникот AEC е рамнокрак правоаголен триаголник со катета $d = 12 cm$ и неговата плоштина е еднаква на плоштината на трапезот (докажи!). Според тоа, за плоштината на трапезот добиваме $P = \frac{d^2}{2} = 72\, cm^2$.

143. Пресметај ја плоштината на трапез со основи $19 cm$ и $2 cm$ и дијагонали $17 cm$ и $10 cm$.

Упатство. Повлечи $CE \| BD$, со што ќе добиеш триаголник AEC (цртеж десно) за кој ги знаеш сите страни. Пресметај ја неговата плоштина и докажи дека таа е еднаква на плош-



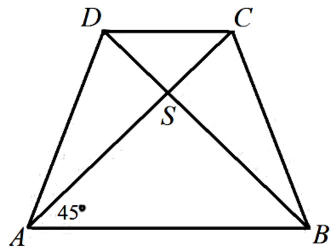
тината на трапезот.

144. Определи ја плоштината на рамнокрак трапез со заемно нормални дијагонали и чија средна линија има должина m.

Решение. Нека основите на трапезот се a и b. Бидејќи дијагоналите на рамнокракиот трапез се сечат под прав агол, висината на трапезот е еднаква на неговата средна линија. Навистина, ако h и h' се деловите на висината од пресекот на дијагоналите до основите, тогаш h и h' се висини на рамнокраки правоаголни триаголници со хипотенузи a и b што значи $h=\frac{a}{2}$ и $b=\frac{h'}{2}$. Според тоа, висината на трапезот е $H=h+h'=\frac{a+b}{2}=m$. Според тоа, плоштината на трапезот е еднаква на $\frac{a+b}{2}H=m\cdot m=m^2$.

145. Дијагоналата AC на рамнокракиот трапез $ABCD$ со основите зафаќа агол од 45° и важи $\overline{AC}=12\,cm$. Определи ја плоштината на трапезот $ABCD$.

Решение. Нека $\overline{AB}>\overline{CD}$ и нека точката S е пресекот на дијагоналите AC и BD. За триаголниците ABC и BAD важи: AB е заедничка страна, $\overline{AD}=\overline{BC}$ и $\measuredangle BAD=\measuredangle ABC$, па затоа $\triangle ABC\cong\triangle BAD$. Од $\triangle ABC\cong\triangle BAD$ следува



$$\measuredangle ABD=\measuredangle BAC=45^\circ$$

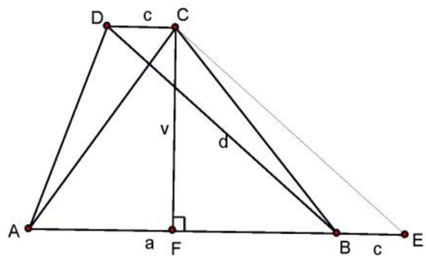
па затоа од $\triangle ABS$ добиваме $\measuredangle ASB=90^\circ$, т.е. $AC\perp BD$. Според тоа, трапезот $ABCD$ е четириаголник со заемно нормални дијагонали, па затоа $P_{ABCD}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{2}=\frac{12\cdot 12}{2}=72\,cm^2$.

146. Дијагоналата AC на трапезот $ABCD$ има должина $13\,cm$. За мерните броеви на втората дијагонала d и висината на трапезот v важи равенството $d^2+v^2-30d-24v+369=0$. Определи ја плоштината на трапезот $ABCD$.

Решение. Имаме

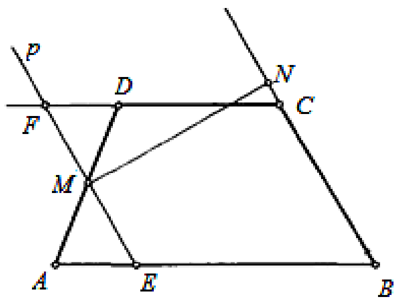
$$d^2+v^2-30d-24v+369=0$$

$$(d-15)^2+(v-12)^2=0,$$



од каде наоѓаме $d=15$ и $v=12$. Низ темето C повлекуваме права паралелна на BD и во пресек со правата AB ја наоѓаме точката E. Според тоа, $\overline{AE}=a+c$. Четириаголникот $BECD$ е паралелограм, па затоа $\overline{CE}=15\,cm$. Од правоаголниот триаголник AFC добиваме $\overline{AF}=\sqrt{13^2-12^2}=5\,cm$, а од правоаголниот триаголник CFE добиваме $\overline{FE}=\sqrt{15^2-12^2}=9\,cm$. Од $a+c=\overline{AE}=\overline{AF}+\overline{FE}=5+9=14\,cm$, следува $P=\frac{a+c}{2}v=84\,cm^2$.

147. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD. Низ средината M на кракот AD е повлечена нормала на правата BC и точката N е подножјето на таа нормала. Докажи, дека плоштината P на трапезот $ABCD$ е еднаква на $\overline{BC}\cdot\overline{MN}$.



Решение. Низ точката M повлекуваме права $p \parallel BC$, која ги сече правите AB и Cd во точките E и F, соодветно. Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм. Имаме, $\overline{AM}=\overline{MD}$, $\measuredangle MAE=\measuredangle MDF$ како агли со паралелни краци и $\measuredangle AME=\measuredangle DMF$ како накрсни агли. Затоа $\triangle AEM \cong \triangle NDF$, што значи $P_{AEM}=P_{MDF}$. Трапезот $ABCD$ и паралелограмот $EBCF$ имаат заеднички дел, петаголникот $EBCDM$, па затоа од $P_{AEM}=P_{MDF}$ следува

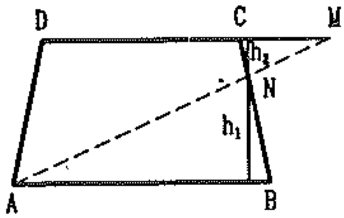
$$P_{ABCD}=P_{EBCF}=\overline{BC}\cdot\overline{MN},$$

што и требаше да се докаже.

148. Даден е трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB}=50\,cm$ и $\overline{CD}=30\,cm$. Основата CD е продолжена преку темето C до точка M. Определи ја должината на отсечката CM ако се знае дека отсечката AM го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини.

Решение. Имаме $P_{ABN}=P_{ANCD}=\frac{1}{2}P_{ABCD}$ (цртеж десно). Значи,

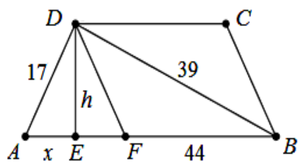
$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h_1 = \frac{1}{4}(\overline{AB}+\overline{CD})\cdot(h_1+h_2)$.



Според тоа, $25h_1 = 20(h_1+h_2)$, па затоа $h_1 = 4h_2$, односно $h_1 : h_2 = 4:1$. Бидејќи $\triangle ABN$ е сличен со $\triangle MCN$ (Докажи!), заклучуваме дека $\overline{AB}:\overline{CM} = h_1 : h_2 = 4:1$.

Според тоа, $\overline{AB} = 4\overline{CM}$, односно $\overline{CM} = \frac{\overline{AB}}{4} = 12{,}5\,cm$.

149. Должината на поголемата основа на рамнокрак трапез е еднаква на $44\,cm$, должината на кракот е еднаква на $17\,cm$ и должината на дијагоналата е еднаква на $39\,cm$. Определи ја плоштината на овој трапез.

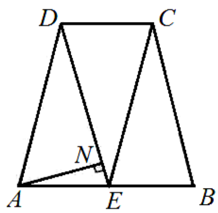


Решение. Нека трапезот е $ABCD$, $\overline{DE} = h$ е должината на висината и $\overline{AE} = x$ (цртеж десно). Тогаш $\overline{BE} = 44 - x$, па од Питагоровата теорема следува $h^2 = 17^2 - x^2$ и $h^2 = 39^2 - (44-x)^2$. Според тоа, $17^2 - x^2 = 39^2 - (44-x)^2$, од каде добиваме $x = 8\,cm$. Сега, $h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15\,cm$. Низ точката D повлекуваме права паралелна на BC и нека F е пресекот на оваа права со основата AB. Четириаголникот $BCDF$ е паралелограм, а триаголникот AFD е рамнокрак, па затоа $b = \overline{CD} = a - 2x = 44 - 2\cdot 8 = 28\,cm$. Конечно, за плоштината на трапезот добиваме

$$P = \frac{a+b}{2}h = \frac{44+28}{2}\cdot 15 = 540\,cm^2.$$

150. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со основи AB и CD, $\overline{AD} = 18\,cm$, $\measuredangle BAD = 75^\circ$ и $\overline{AB} = 2\overline{CD}$. Определи ја плоштината на трапезот.

Решение. Нека E е средината на основата AB. Тогаш $\overline{AB} = 2c$, каде $\overline{CD} = c$. Четириаголниците $AECD$ и $EBCD$ се паралелограми, па како $\overline{AD} = \overline{BC}$, заклучуваме дека $\overline{AD} = \overline{ED}$, т.е. триаголникот AED е рамнокрак.



Во триаголникот AED ја повлекуваме висината од темето A кон страната ED (види цртеж). Бидејќи $\measuredangle DAE = 75^\circ$ и триаголникот AED е рамнокрак следува дека $\measuredangle AED = 75^\circ$,

па затоа

$$\measuredangle NAE = 90^\circ - \measuredangle AEN = 15^\circ \text{ и } \measuredangle DAN = 60^\circ.$$

Според тоа, триаголникот DAN е половина од рамностран триаголник со страна AD, па затоа $\overline{AN} = 9\,cm$. Оттука следува дека

$$P_{\triangle AED} = \frac{\overline{ED} \cdot \overline{AN}}{2} = \frac{18 \cdot 9}{2} = 81\,cm^2.$$

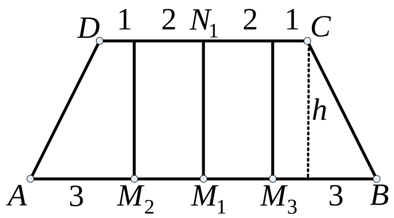
Конечно триаголниците AED, CDE и EBC се складни, па затоа

$$P_{ABCD} = 3P_{\triangle AED} = 3 \cdot 81 = 243\,cm^2.$$

151. Даден е трапез со должини на основите $10\,cm$ и $6\,cm$. Со три паралелни прави подели го трапезот на четири дела кои имаат еднакви плоштини.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот трапез, а M_1 и N_1 се средините на основите AB и CD соодветно (види цртеж). Нека M_2 и M_3 се точки од основата AB такви што

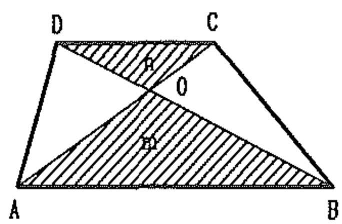
$$\overline{M_1M_2} = \overline{M_1M_3} = 2\,cm.$$



Правата M_1N_1 го дели трапезот на два трапези со еднакви плоштини. Низ точките M_2 и M_3 ќе повлечеме прави паралелни со M_1N_1. Тие основите DN_1 и N_1C ги делат во однос $2:1$, при што се добиваат два паралелограми и два трапези со основи $3\,\text{cm}$ и $1\,\text{cm}$. Делбените трапези и паралелограми имаат еднакви плоштини.
Конечно, повлечените три прави може да бидат бараните прави.

152. Дијагоналите на произволен трапез го делат трапезот на четири триаголници. Плоштините на двата триаголника во кои основите на трапезот се страни се еднакви на $m\,cm^2$ и $n\,cm^2$. Определи ја плоштината на трапезот.

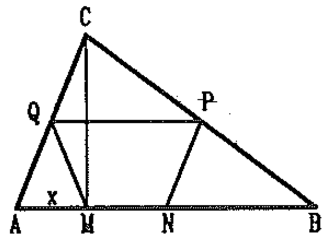
Решение. Нека трапезот е $ABCD$ и O е пресекот на неговите дијагонали (цртеж десно). Триаголниците ABO и CDO се слични со коефициент на сличност $\sqrt{m} : \sqrt{n}$. Ако $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ и h_1 и h_2 се висините на овие триаголници повлечени од темето O, тогаш



$\frac{h_1}{h_2}=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, па затоа $\frac{h_1+h_2}{h_2}=\frac{a+c}{c}=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ и $\frac{(h_1+h_2)(a+c)}{h_2c}=\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}{n}$.

Но, $h_2c=2n$, па затоа $P=\frac{(h_1+h_2)(a+c)}{2}=(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2$.

153. Во триаголникот ABC со должини на страни $a=20\,cm, b=13\,cm$ и $c=21\,cm$, точката M е подножје на најкратката висина. Нека N,P,Q се средините на страните AB,BC,CA на триаголникот ABC. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е рамнокрак трапез. Определи ја плоштината на трапезот $MNPQ$.



Решение. Најкратката висина е висината повлечена кон најдолгата страна, па затоа $M\in AB$. Понатаму, NP е средна линија на триаголникот ABC, па затоа $MQ\,||\,NP$, од каде следува дека четириаголникот $MNPQ$ е трапез. Нека $\overline{AM}=x$. Тогаш $\overline{MB}=21-x$ и од Питагоровата теорема следува

$$13^2-x^2=20^2-(21-x)^2\text{, т.е. } x=5\,cm.$$

Според тоа, висината на триаголникот повлечена кон страната AB е $\overline{CM}=\sqrt{13^2-5^2}=12\,cm$. Понатаму, $\overline{MN}=\overline{AN}-\overline{AM}=5{,}5\,cm$ и како $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}=10{,}5\,cm$ за плоштината на рамнокракиот трапез добиваме

$$P=\frac{(\overline{MN}+\overline{PQ})\cdot\frac{\overline{CM}}{2}}{2}=\frac{(5{,}5+10{,}5)\cdot 6}{2}=48\,cm^2.$$

Сега, бидејќи PN е средна линија за $\triangle ABC$ добиваме $\overline{PN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$. Понатаму, $CM\perp AB$ и како $PQ\,||\,AB$ заклучуваме дека $CM\perp AB$. Но, PQ ја полови CM, па затоа PQ е симетрала на CM, од каде следува дека $\overline{MQ}=\overline{QC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$. Според тоа, $\overline{PN}=\overline{MQ}$, т.е. трапезот $MNPQ$ е рамнокрак.

154. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$, ако: $\overline{AB}=20\,cm$, $\overline{BC}=7\,cm$, $\overline{CD}=13\,cm$, $\overline{DA}=4\,cm$ и $\overline{AC}=15\,cm$.

Решение. Полупериметарот на триаголникот ABC е $s=21cm$, па затоа неговата плоштина е

$$P_{ABC}=\sqrt{21\cdot(21-20)\cdot(21-7)\cdot(21-15)}cm^2=42cm^2.$$

Слично, за $\triangle ACD$ имаме $s_1=16cm$, па затоа

$$P_{ACD}=\sqrt{16\cdot(16-13)\cdot(16-4)\cdot(16-15)}cm^2=24cm^2.$$

Конечно,

$$P_{ABCD}=P_{ABC}+P_{ACD}=(42+24)cm^2=66cm^2.$$

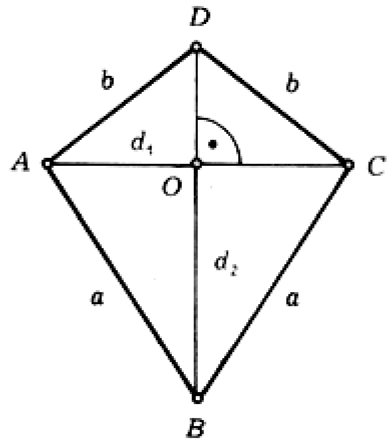
155. Пресметај ја плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали $d_1=6\,dm$ и $d_2=10\,cm$.

Решение. Имаме, $d_1=6\,dm=60cm$ и $d_2=10\,cm$, па како дијагоналите се заемно нормални, следува дека неговата плоштина е

$$P=\tfrac{1}{2}d_1d_2=\tfrac{1}{2}\cdot 60\cdot 10=300\,cm^2=3\,dm^2.$$

156. Пресметај ја плоштината на делтоидот со страни $17cm$ и $113cm$ една дијагонала $30cm$.

Решение. Да ги означиме страните на делтоидот како на цртеж десно. Имаме,



$$\overline{AD}=\overline{CD}=b=17cm,$$
$$\overline{AB}=\overline{BC}=a=113cm.$$

За страните на триаголникот ABD важи неравенството

$$\overline{AD}+\overline{DB}>\overline{AB},$$

од што добиваме $17+\overline{DB}>113$, односно $\overline{DB}>96$. Бидејќи едната дијагонала на делтоидот е $30cm$, од последното неравенство следува дека тоа не може да биде дијагоналата DB, што значи $\overline{AC}=d_1=30\,cm$. Сега, од рамнокраките триаголници ACD и ADC добиваме

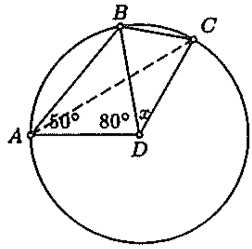
$$\overline{OD}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{17^2-15^2}=8cm,$$
$$\overline{OB}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{113^2-15^2}=112cm,$$

па затоа $\overline{BD}=\overline{DO}+\overline{OB}=120cm$. Конечно, за плоштината на делтоидот $ABCD$ се добиваме

$$P=\frac{1}{2}d_1d_2=\frac{1}{2}\cdot 120\cdot 30=1800cm^2=18dm^2=0{,}18m^2.$$

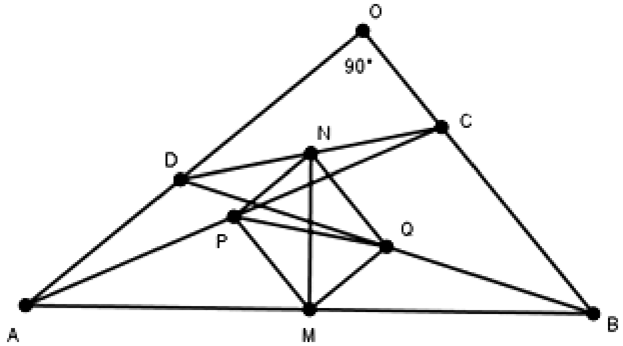
157. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ кај кој $\measuredangle ABD=50^\circ$, $\measuredangle ADB=80^\circ$, $\measuredangle ACB=40^\circ$, а $\measuredangle DBC$ е за 30° поголем од $\measuredangle BDC$. Определи го $\measuredangle DBC$.

Решение. Имаме $\measuredangle BAD=50^\circ$, па затоа $\triangle ABD$ е рамнокрак и $\overline{AD}=\overline{BD}$. Според тоа точката B припаѓа на кружницата k со центар во точката D и радиус $\overline{DA}$, а $\measuredangle ADB=80^\circ$ е централен за таа кружница. Но, $\measuredangle ACB=40^\circ=\frac{1}{2}\measuredangle ADB$, па затоа $\measuredangle ACB$ е периферискиi агол за истата таа кружница, што значи дека точката C припаѓа на кружницата k, што значи $\overline{CD}=\overline{BD}$. Нека $\measuredangle BDC=x$. Тогаш во рамнокракиот триаголник BCD аглите се $x, x+30^\circ$ и $x+30^\circ$, па затоа $3x+60^\circ=180^\circ$, од каде добиваме $x=40^\circ$ и $\measuredangle DBC=40^\circ+30^\circ=70^\circ$.



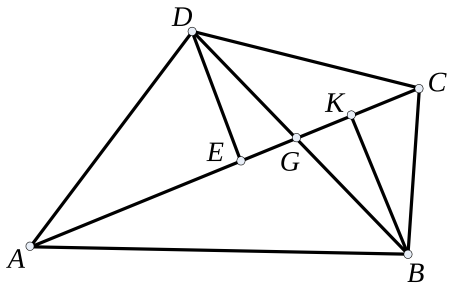
158. Нека е даден конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $AD\perp BC$. Нека растојанието од средината на AB до средината на CD е $1cm$. Пресметај го растојанието од средината на AC до средината на BD.

Решение. Нека M, N, P и Q се средини на AB, CD, AC и BD соодветно. Тогаш $\overline{MN}=1cm$. Од M и P се средини на AB и AC соодветно следува и $\overline{MP}=\frac{\overline{BC}}{2}$. Од N и Q се средини на CD и BD соодветно имаме $NQ\,||\,BC$ и $\overline{NQ}=\frac{\overline{BC}}{2}$. Од $NQ\,||\,BC$ и $PM\,||\,BC$ следува $PM\,||\,NQ$ и $\overline{DM}=\overline{NQ}$.



Аналогно се докажува дека $PN \| MQ$ и $\overline{PN} = \overline{MQ}$. Следува четириаголникот $MQNP$ е паралелограм. Од $AD \perp BC$, $NQ \| BC$ и $PN \| AD$ следува $\measuredangle PNQ = 90^\circ$. Следува четириаголникот $MQNP$ е правоаголник со дијагонали MN и PQ. Следува $\overline{PQ} = \overline{MN} = 1cm$.

159. Конвексен четириаголник $ABCD$ со дијагоналата AC е поделен на два триаголници со еднакви плоштини. Докажи дека AC ја преполовува BD.



Решение. Нека со G го означиме пресекот на дијагоналите AC и BD. Ќе разгледаме два случаи.

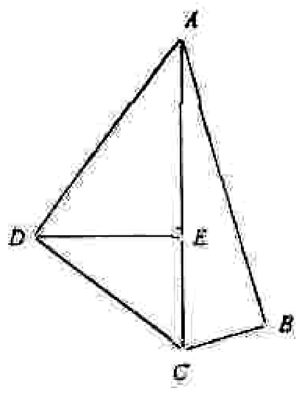
Случај 1. Ако AC и BD се заемно нормални, доказот е тривијален.

Случај 2. Нека AC и BD не се заемно нормални. Нека со K и E ги означиме подножјата на нормалите повлечени од B и D кон AC соодветно. Тогаш

$$P_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BK}}{2} \text{ и } P_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DE}}{2}.$$

Бидејќи плоштините на ABC и ACD се еднакви, добиваме $\overline{BK} = \overline{DE}$. Уште $\measuredangle BGK = \measuredangle DGE$. Затоа правоаголните триаголници BGK и DGE се складни, од каде следува $\overline{BG} = \overline{DG}$.

160. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $AB \perp BC$, $AD \perp DC$, $\overline{BC} = 14$ и $\overline{DC} = 30$. Нека E е точка од дијагоналата AC таква што $DE \perp AC$. Ако $\overline{DE} = 24$, определи ја должината на отсечката AB.



Решение. Од Питагоровата теорема применета на $\triangle CED$ следува

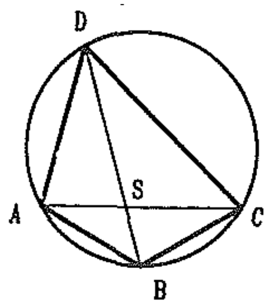
$$\overline{CE}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{DE}^2,$$

односно $\overline{CE}^2 = 30^2 - 24^2 = 324$, па затоа $\overline{CE} = 24$. Точката E е подножје на висината од темето на правиот $\measuredangle ADC$ на хипотенузата AC на правоаголниот

$_\triangle ACD$, па од Евклидовата теорема следува $\overline{DE}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{CE}$, од каде добиваме $\overline{AE} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{CE}} = 32$. Затоа $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} = 32 + 18 = 50$. Сега, од Питагоровата теорема применета на правоаголниот $_\triangle ABC$ следува

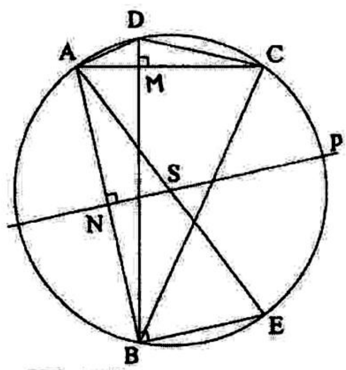
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 50^2 - 14^2 = 64 \cdot 36 = 8^2 \cdot 6^2 = 48^2 \text{, т.е. } \overline{AB} = 48.$$

161. Во кружница е впишан конвексен четириаголник $ABCD$, $\overline{AB} = \overline{BC}$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката S. Определи ја должината на дијагоналата BD ако $\overline{AB} = 6\,cm$ и $\overline{BS} = 4\,cm$.



Решение. Имаме $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$, како периферски агли над тетивата AB. Понатаму, од $\overline{AB} = \overline{BC}$ следува $\measuredangle ACB = \measuredangle BAC$ (периферски агли над еднакви тетиви). Сега, за триаголниците ABD и ASB важи $\measuredangle ABS = \measuredangle ABD$ и $\measuredangle SAB = \measuredangle CAB = \measuredangle ACB = \measuredangle ADB$, па затоа тие се слични. Од докажаната сличност следува $\overline{AB} : \overline{BS} = \overline{BD} : \overline{AB}$, т.е. $\overline{BD} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BS}} = 9\,cm$.

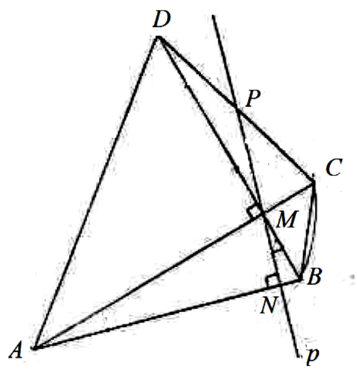
162. Во кружница со центар S е впишан четириаголник $ABCD$ со заемно нормални дијагонали. Докажи дека растојанието од центарот S до страната AB е еднакво на растојанието од центарот S до страната CD.



Решение. Нека точката M е пресек на дијагоналите AC и BD. Нека точката E е пресек на правата AS и кружницата опишана околу четириаголникот $ABCD$. Според Талесовата теорема имаме $\measuredangle ABE = 90^\circ$. Освен тоа, $\measuredangle AEB = \measuredangle ACB$, како агли над тетивата AB. Правоаголните триаголници ABE и BMC имаат два пара еднакви агли, т.е. $\measuredangle BMC = \measuredangle ABE = 90^\circ$ и $\measuredangle AEB = \measuredangle ACB = \measuredangle MCB$, па затоа $\measuredangle EAB = \measuredangle CBM = \measuredangle CBD$. Бидејќи ова се два периферни агли со придружени тетиви BE, односно CD, од обратната теорема за периферни агли следува дека $\overline{BE} = \overline{CD}$. Сега низ точката S да повлечеме права $p \parallel BE$. Нека точката N е пресекот на таа права и страната AB на правоаголниот триаголник ABE. Тогаш SN е средна линија на овој триаголник, па затоа $\overline{SN} = \frac{1}{2}\overline{BE}$, каде $\overline{SN}$ е растојанието од точката S до страната AB на четириаголникот $ABCD$.

Бидејќи $\overline{BE} = \overline{CD}$, со замена во равенството $\overline{SN} = \frac{1}{2}\overline{BE}$ добиваме $\overline{SN} = \frac{1}{2}\overline{CD}$, што и требаше да се докаже.

163. Во дадена кружница е впишан четириаголник $ABCD$ чии дијагонали се сечат во точката M и се заемно нормални. Низ точката M е повлечена права p нормална на страната AB. Докажи дека правата p ја полови страната CD.



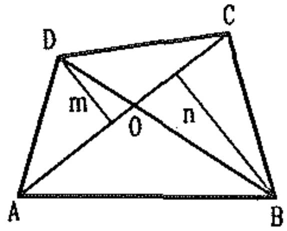
Решение. Нека N и P се пресечните точки на правата p со страните AB и CD, оодветно. Имаме $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$, како периферискi агли над иста тетива BC, а исто така и $\measuredangle BAC = \measuredangle BMN$, бидејќи се остри агли со нормални краци. Според тоа, $\measuredangle BMN = \measuredangle BDC$. Понатаму, $\measuredangle BMN = \measuredangle DMP$ (накрсни агли), па затоа $\measuredangle MDP = \measuredangle BDC = \measuredangle DMP$, што значи дека $\triangle DMP$ е рамнокрак. Затоа $\overline{PD} = \overline{PM}$. Слично заклучуваме во случајот на тетивата AD: $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$ (перифериски агли над тетивата AD) и $\measuredangle ABD = \measuredangle AMN$ (остри агли со нормални краци), па затоа $\measuredangle AMN = \measuredangle ACD$. Бидејќи $\measuredangle AMN = \measuredangle CMP$ (накрсни агли) имаме $\measuredangle MCP = \measuredangle ACD = \measuredangle CMP$, па $\triangle CMP$ е рамнокрак и $\overline{PC} = \overline{PM}$.

Конечно, $\overline{PC} = \overline{PM} = \overline{PD}$, т.е. точката P е средина на страната CD, што значи дека правата p ја полови страната CD.

164. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Ако O е пресекот на неговите дијагонали, докажи дека

$$P_{\triangle AOB} \cdot P_{\triangle COD} = P_{\triangle BOC} \cdot P_{\triangle DOA}.$$

Решение. Нека m и n се должините на висините на триаголниците ACD и ACB, соодветно (цртеж десно). Тогаш



$$2P_{\triangle ABO}=\overline{AO}\cdot n,\ 2P_{\triangle BCO}=\overline{CO}\cdot n,$$

$$2P_{\triangle COD}=\overline{CO}\cdot m \text{ и } 2P_{\triangle DOA}=\overline{AO}\cdot m.$$

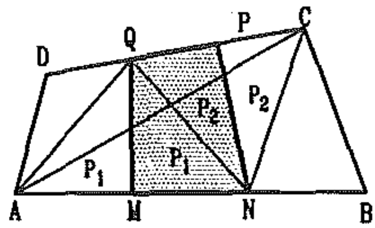
Сега од гоните равенства следува

$$2P_{\triangle ABO}:2P_{\triangle BCO}=\overline{AO}:\overline{CO}=2P_{\triangle DOA}:2P_{\triangle COD},$$

од каде го добиваме бараното равенство.

165. Нека $ABCD$ е произволен четириаголник со плоштина 3. На страната AB дадени се точки M и N такви што $\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}$, а на страната CD дадени се точки P и Q такви што $\overline{CP}=\overline{PQ}=\overline{QD}$. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ има плоштина 1.

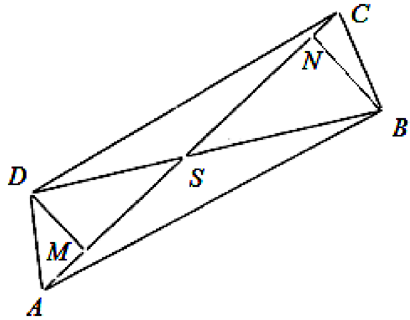
Решение. Триаголниците AMQ и MNQ имаат еднакви основи, $\overline{AM}=\overline{MN}$, и заедничка висина, па тие имаат еднакви плоштини (цртеж десно). Од слични причини се еднакви и плоштините на триаголниците CNP и PQN. Значи, плоштината на четириаголникот $MNPQ$ е еднаква на P_1+P_2. Ќе докажеме дека збирот на плоштините на триаголниците ADQ и BCN е еднаков на третина од плоштината на четириаголникот $ABCD$, т.е. е еднаков на 1. Навистина, триаголникот ADQ има трипати помала основа од триаголникот ACD, а висините им е заедничка, од каде добиваме $P_{\triangle ADQ}=\frac{1}{3}P_{\triangle ACD}$. Слично заклучуваме дека $P_{\triangle BCD}=\frac{1}{3}P_{\triangle ABC}$, па затоа



$$P_{\triangle ADQ}+P_{\triangle BCD}=\tfrac{1}{3}P_{\triangle ACD}+\tfrac{1}{3}P_{\triangle ABC}=\tfrac{1}{3}P_{ABCD}=1.$$

Тоа значи дека $P_{ANCQ}=2$, па затоа $2P_1+2P_2=2$, односно $P_1+P_2=1$. Конечно, $P_{MNPQ}=P_1+P_2=1$.

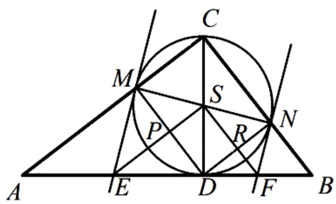
166. Ако дијагоналите на конвексен четириаголник се сечат под агол од 30°, тогаш плоштината на тој четириаголник е еднаква на една четвртина од производот на должините на неговите дијагонали. Докажи!



Решение. Нека четириаголникот е $ABCD$, точката S е пресекот на дијагоналите AC и BD и нека $\measuredangle BSC = \measuredangle ASD = 30^\circ$. Со h_1 да ја означиме должината на висината DM повлечена од темето D на страната AC на $\triangle ACD$, а со h_2 да ја означиме должината на висината BN повлечена од темето B на страната AC на $\triangle ABC$. Бидејќи $\triangle DSM$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $h_1 = \frac{1}{2}\overline{SD}$. Понатаму, $\triangle BSN$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $h_2 = \frac{1}{2}\overline{SB}$. Сега, за плоштината на четириаголникот $ABCD$ добиваме

$$P_{ABCD} = P_{ACD} + P_{ABC} = \frac{\overline{AC}\cdot h_1}{2} + \frac{\overline{AC}\cdot h_2}{2} = \frac{\overline{AC}\cdot(h_1+h_2)}{2}$$
$$= \frac{\overline{AC}}{2}\cdot\left(\frac{\overline{DS}}{2} + \frac{\overline{BS}}{2}\right) = \frac{\overline{AC}}{4}\cdot(\overline{DS} + \overline{SB}) = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{4}.$$

167. Даден е правоаголен триаголник ABC. Од темето C на правиот агол повлечена е висина CD кон хипотенузата AB. Кружницата k, чиј дијаметар е CD, ги сече катетата AC во точка M и катетата BC во точка N. Тангентата на кружницата k во точката M ја сече хипотенузата AB во точка E, а тангентата на кружницата во точката N ја сече хипотенузата AB во точка F. Определи го односот на плоштината на четириаголникот $EFNM$ и плоштината на триаголникот ABC.



Решение. Од Талесовата теорема добиваме $\measuredangle CND = \measuredangle CND = 90^\circ$ и бидејќи $\measuredangle MCN = 90^\circ$ следува дека $\measuredangle MDN = 90^\circ$, т.е. четириаголникот $MDNC$ е правоаголник. Затоа, $P_{MNC} = P_{MND}$. Нека S е пресекот на дијагоналите MN и CD на правоаголникот $MDNC$. Имаме, $\overline{SD} = \overline{SM} = r$, каде r е радиусот на кружницата k, $\measuredangle EDS = \measuredangle EMS = 90^\circ$ (AD и EM се тангенти на кружницата k во точките D и M) и ES е заедничка страна на $\triangle EDS$ и $\triangle EMS$, па затоа $\triangle EDS \cong \triangle EMS$. Оттука, $\overline{ED} = \overline{EM}$ и $\measuredangle DES = \measuredangle MES$, па значи $\triangle EMD$ е рамнокрак и ES е симетрала на страната MD, т.е. $ES \perp MD$, од каде следува дека $ES \parallel AC$.

Нека P е пресекот на ES и MD. Тогаш $\overline{MP} = \overline{PD}$. Значи, EP е средна линија на $\triangle ADM$, па затоа $\overline{AE} = \overline{ED}$, од каде следува $P_{AEM} = P_{EDM}$. Со аналогни разлислувања добиваме $P_{DFN} = P_{FBN}$. Затоа последователно се точни следниве равенства

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{MNC} + P_{MDN} + P_{AEM} + P_{EDM} + P_{DFN} + P_{FBN} \\ &= 2P_{MDN} + 2P_{EDM} + 2P_{DFN} = 2P_{EFNM} \end{aligned}$$

од каде следува дека $P_{EFNM} : P_{ABC} = 1:2$.

V.4. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

168. Конструирај кружница k која минува низ точката A е допира дадена кружница $k_1(O, r = 2\,cm)$ во дадена точка B.

Решение. *Анализа*. Кружницата k минува низ точките A и B, па затоа нејзиниот центар припаѓа на симетралата на отсечката AB. Понатаму, k и k_1 се допираат во точката B, па затоа центарот на k припаѓа на правата OB.

Конструкција. Ја конструираме симетралата s на отсечката AB и ја повлекуваме правата OB. Наоѓаме $s \cap OB = S$ и конструираме кружница $k(S, \overline{SA})$ и тоа е бараната кружница (направи цртеж).

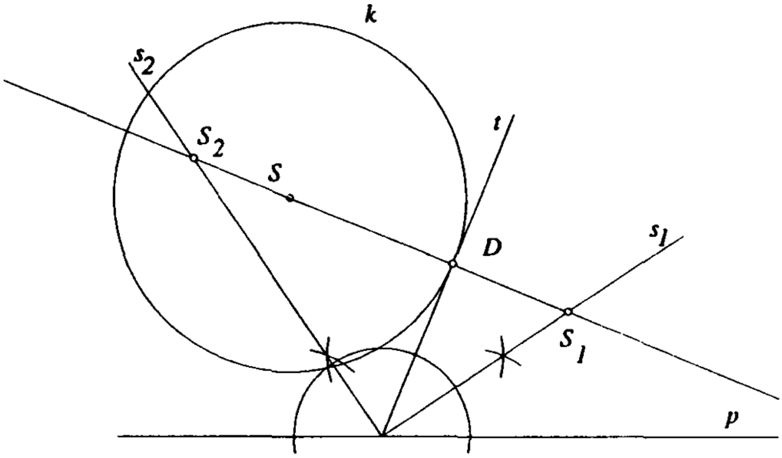
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата нема решение ако $s \cap OB = \varnothing$, т.е. ако $s \parallel OB$, што значи ако $AB \perp OB$, а во спротивно има единствено решение.

169. Дадени се кружница k со центар S, точка D на кружницата и права p која со k нема заеднички точки. Конструирај кружница која ги допира кружницата k во точката D и правата p.

Решение. *Анализа*. Центарот на бараната кружница мора да лежи на правата AD. Понатаму, ако две кружници се допираат (внатрешно или надворешно), тогаш тие во допирната точка имаат заедничка тангента. Во нашиот случај тоа е точката D. Нека правата t е заедничка тангента во точката D на кружницата k и бараната кружница. Тогаш бараната кружница ги допира правите t и p.

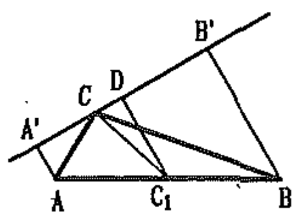
Според тоа, центарот на бараната кружница припаѓа на симетралата на аголот кој го формираат правите t и p.



Конструкција. Во точката D конструираме тангента t на кружницата k, т.е. конструираме права $t \perp SD$. Потоа конструираме симетрала s на аголот кој го формираат t и p (види цртеж). Пресекот на симетралата и правата SD е центарот на бараната кружница, а нејзиниот радиус е еднаков на растојанието од тој пресек до точката D.
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.
Дискусија. Тангентата t и правата p може да имаат една или ниту една заедничка точка. Ако t и p се сечат, тогаш тие формираат два агли, што значи дека имаме две кружнци кои ја допираат кружницата k во точката D. Ако t и p не се сечат, тогаш тие се паралелни, што значи дека $SD \perp p$ и нека $SD \cap p = M$. Во овој случај задачата има едно решение и центарот на бараната кружница е средината на отсечката DM, а нејзиниот радиус е еднаков на $\frac{\overline{DM}}{2}$.

170. Даден е триаголник ABC. Низ темето C, надвор од триаголникот ABC, а во рамнината на триаголникот, конструирај права p таква што бирот на нормалните растојанија од точките A и B до правата p е најголем можен.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека $A'B'$ е бараната права (цртеж десно). Бидејќи $ABB'A'$ е правоаголен трапез, заклучуваме дека збирот



$\overline{AA'} + \overline{BB'}$ е најголем кога должината на средната линија $\overline{C_1D}$ е најголема. Од правоаголниот $\triangle CDC_1$, очигледно дека должината на средната линија е најголема кога $\overline{C_1D} = \overline{C_1C}$.

Конструкција. Ја повлекуваме тежишната линија CC_1 на $\triangle ABC$. Потоа во точката C конструираме права p нормална на CC_1 и тоа е бараната права.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

171. Дадени се квадрати со должини на страни a и b. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на дадените квадрати.

Решение. *Анализа*. Нека x е должината на страната на бараниот квадрат. Според условот на задачата треба да важи равенството $x^2 = a^2 + b^2$, што значи дека страната на бараниот квадрат е еднаква на хипотенузата на правоаголниот триаголник со катети a и b.

Конструкција. Конструираме правоаголен триаголник со катетаи a и b. Над хипотенузата како над страна конструираме квадрат и тоа е бараниот квадрат.

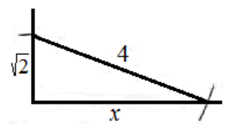
Доказ. Непосредно следува од анализата и коснтрукцијата.

Дискусија. Бидејќи постои само еден правоаголен триаголник со зададените катети a и b, задачата има единствено решение.

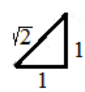
172. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на $14cm^2$.

Решение. Нека x е должината на страната на квадрат со плоштина $14cm^2$. Тогаш $x^2 = 14$, па затоа $x = \sqrt{14}$.

Значи треба да конструираме отсечка со должина $\sqrt{14}cm$. Бидејќи $x^2 = 16 - 2 = 4^2 - (\sqrt{2})^2$, следува дека x е катета на правоаголен триаголник со хипотенуза $4cm$ и катета $\sqrt{2}cm$ (цртеж десно).



Значи, прво треба да конструираме отсечка со должина $\sqrt{2}cm$, а тоа е хипотенизата на рамнокрак правоаголен триаголник со катета $1cm$ (цртеж десно).



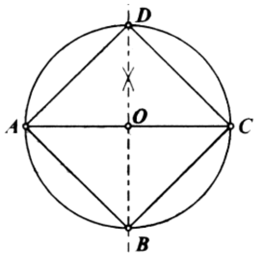
Конечно, прво конструираме отсечка со должина $\sqrt{2}cm$, потоа отсечка со должина $\sqrt{14}cm$ и на крајот квадрат со должина на страна $\sqrt{14}cm$, чија плоштина е еднаква на $14cm^2$.

Забелешка. Отсечка со должина $\sqrt{14}cm$ може да се конструира и со помош на Еввклидовата теорема. Имено, бидејќи $14=2\cdot 7$ прво цртаме кружница со дијаметар $AB, \overline{AB}=2+7=9cm$. Нека D е точка на дијаметарот AB таква што $\overline{AD}=2cm$. Нормалата на AB во точката D ја сече кружницата во точка C. Од Евклидовата теорема следува дека $\overline{CD}^2=2\cdot 7=14$, што значи $\overline{CD}=\sqrt{14}$, т.е. отсечката CD е страната на квадратот со плоштина $14cm^2$.

173. Во кружница $k(O,R)$ конструирај:

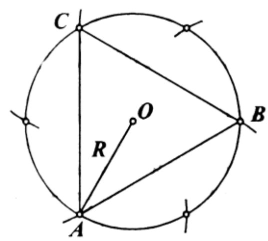
а) квадрат,
б) рамностран триаголник,
в) правилен шестаголник,
г) правилен осумаголник,

Решение. а) За да конструираме квадрат впишан во кружница $k(O,R)$ постапуваме на следниот начин:

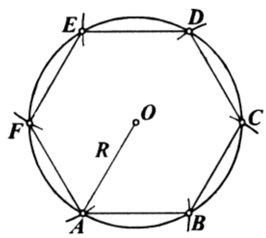


- ја конструираме кружницата k и повлекуваме произволен дијаметар AC на кружницата,
- во точката O конструираме права p нормална на правата AC и наоѓаме $k\cap p=\{B,D\}$,
- четириаголникот $ABCD$ е бараниот квадрат.

б) За да конструираме рамностран триаголник впишан во кружница $k(O,R)$ постапуваме на следниот начин: ја конструираме кружницата k, земаме произволна точка A на k и од A со радиус R во иста насока последователно отсекуваме четири кружни лаци на k при што ги добиваме точките M,B,N и C. Конечно, $\triangle ABC$ е бараниот рамностран триаголник впишан во k (цртеж десно).



в) За да конструираме правилен шестаголник впишан во кружница $k(O,R)$ постапу-

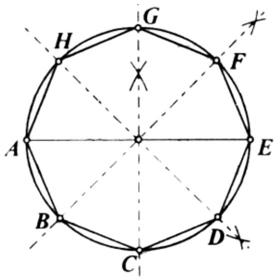


ваме на следниот начин: ја конструираме кружницата k, земаме произволна точка A на k и од A со радиус R во иста насока последователно отсекуваме пет кружни лаци на k при што ги добиваме точките B, C, D, E и F. Конечно, шестаголникот $ABCDEF$ е бараниот правилен шестаголник (цртеж десно).

г) Правилен осумаголник вписан во кружница $k(O,R)$ конструираме на следниот начин:

- конструираме квадрат $ACEG$ впишан во k (цртеж десно),
- конструираме симетрали на страните CE и EG кои ја сечат кружницата k во точките D и H, односно F и B, соодветно.

Конечно, многуаголникот $ABCDEFGH$ е бараниот правилен осумаголник.



174. Конструирај геометриска средина на отсечки со должини a и b, $a > b$.

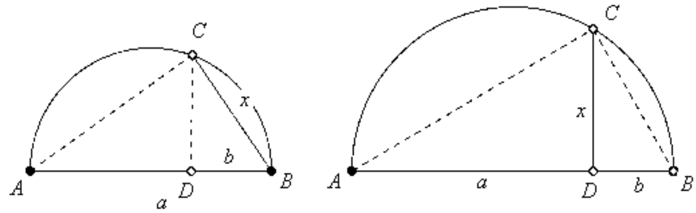
Решение. *Анализа*. Геометриската средина на отсечките a и b е отсечка x за која важи $a : x = x : b$. Според Евклидовата теорема x може да биде:

1) катета на правоаголен триаголник со катета a, а b е нормалната проекција на таа катета на хипотенузата,

2) висина на правоаголен триаголник на кој a и b се нормалните проекции на хипотенузата.

Конструкција. *Прв начин*: На дадена отсечка $AB, \overline{AB} = a$ како над дијаметар конструираме полукружница. На AB наоѓаме точка D за која важи $\overline{BD} = b$. Сега од точката D конструираме нормала на AB до пресекот со полукружницата и во пресекот ја добиваме точката C. Отсечката $\overline{BC} = \sqrt{ab}$ е бараната геометриска средина (цртеж лево долу)

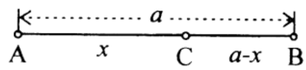
Втор начин. Над отсечката $AB, \overline{AB} = a + b$, како над дијаметар конструираме полукружница. Нека D е точка на AB таква што $\overline{AD} = a$. Во точката D конструираме нормала на AB и во пресекот со полукружницата ја наоѓаме точката C. Отсечката CD е бараната геометриска средина на a и b (цртеж десно)



Доказ. Во двата случаја непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата секога има едно и единствено решение.

175. За точката C ќе велиме дека ја дели отсечката AB по златен пресек ако $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{CB}$ (цртеж десно). Ако ставиме $\overline{AB}=a, \overline{AC}=x$, тогаш имаме



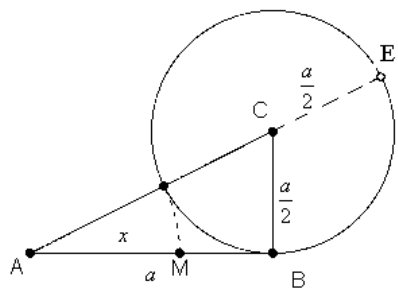
$$a:x=x:(a-x) \text{ т.е } x=\sqrt{a(a-x)}\,,$$

што значи дека при поделбата по златен пресек поголемиот дел е геометриска средина од целата отсечка и нејзиниот помал дел.

Отсечка со должина a подели ја по златен пресек.

Решение. Според дефиницијата отсечката $AB, \overline{AB}=a$ е поделена по златен пресек на поголем дел x и помал дел $a-x$ ако важи $a:x=x:(a-x)$.

Конструкција. Во точката B на дадената отсечка конструираме нормала на AB. На оваа нормала наоѓаме точка C таква што $\overline{BC}=\frac{a}{2}$. Конструираме кружница со радиус $\frac{a}{2}$ и центар C. Оваа кружница ја сече отсечката AC во точката D за која важи $\overline{AD}=x$. Точката M на отсечката AB ја определуваме така што $\overline{AM}=\overline{AD}$ (цртеж десно).



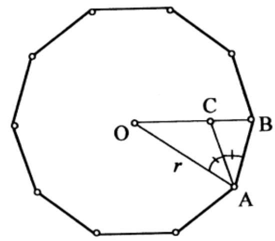
Доказ. Според Питагоровата теорема добиваме $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$, односно $(x+\frac{a}{2})^2-(\frac{a}{2})^2=a^2$, па затоа $x^2+ax=a^2$. Од последното равенство следува $x^2=a^2-ax$, односно $x^2=a(a-x)$, па затоа $a:x=x:(a-x)$. Да забележиме дека x изразено преку a е

$$x=\overline{AC}-\overline{CD}=\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Дискусија. Јасно, постојат две поделби на AB по златен пресек, во зависност од тоа во која крајна точка на AB ја конструираме нормалата h.

176. Конструирај правилен десетаголник впишан во кружница со радиус r.

Решение. Прво ќе го докажеме следното помошно тврдење: за радиусот на кружницата r и страната a на правилниот десетаголник впишан во кружницата важи пропорцијата $r:a=a:(r-a)$.



Да го разгледаме $\triangle ABO$ (цртеж десно). Нека AC е симетралата на $\measuredangle OAB$, каде C е пресечната точка на таа симетрала и страната OB. Бидејќи $\measuredangle AOB=36^\circ$, $\measuredangle OAB=\measuredangle OBA=72^\circ$ добиваме дека

$$\measuredangle OAC=\measuredangle CAB=36^\circ,\ \measuredangle ACB=\measuredangle ABC=72^\circ$$

т.е. $\triangle AOB\sim\triangle BAC$, па затоа

$$\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BC}\text{ т.е. }\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{AB}:(\overline{OB}-\overline{OC})$$

односно $r:a=a:(r-a)$.

Според тоа, за да ја определиме должината на страната на правилен десетаголник, впишан во кружница со радиус r, треба радиусот на кружницата да го поделиме по златен пресек и за страна на десетаголникот да ја земеме поголемата отсечка од оваа поделба.

Конструкција. Цртаме кружница $k(O,r)$ и повлекуваме произволен радиус OA_1. Отсечката OA_1 ја делиме по златен пресек со што ја добиваме страната a на десетаголникот. Сега почнувајќи од точката A_1 со отвор на шестарот еднаков на a последователно на кружницата отсекуваме кружни лаци со што ги добиваме темињата $A_2,A_3,...,A_{10}$.

Забелешка. Претходно ја дадовме конструкцијата на правилен десетагоилник $A_1A_2...A_{10}$ впишан во кружница со радиус r. Точките A_1,A_3,A_5,A_7,A_9 се темиња на правилен петаголник.

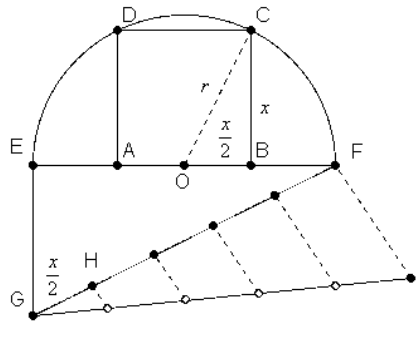
177. Во дадена полукружница со радиус r впиши квадрат.

Решение. *Анализа.* Нека дадената полукружница k има центар O и радиус r и нека во неа е впишан бараниот квадрат $ABCD$ (цртеж долу десно).

Нека страната на тој квадрат е x. Имаме $\overline{OA}=\overline{OB}=\frac{x}{2}$ и од Питагоровата теорема следува

$$r^2=x^2+(\tfrac{x}{2})^2,$$

па затоа $\frac{x}{2}=\frac{r\sqrt{5}}{5}$.



Конструкција. Треба да ја конструираме отсечката $\frac{x}{2}$. Прво ја конструираме отсечката $x_1=\sqrt{(2r)^2+r^2}$ така што на дијаметарот на полукружницата во точката E конструираме нормала и на неа определуваме точка G таква што $\overline{EG}=r$. Хипотенузата FG е еднаква на отсечката x_1. Ја делиме отсечката FG на пет еднакви делова и добиваме $\overline{GH}=\frac{x}{2}=\frac{1}{5}\overline{GF}=\frac{r\sqrt{5}}{5}$. Сега GF ја нанесуваме од точката O на отсечката EF од двете страни на O и така ги добиваме точките A и B. Нормалите од A и B на EF ја сечат полукружницата во D и C. Квадратот $ABCD$ е бараниот квадрат.

Доказ. Триаголникот EFG по конструкција е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува $\overline{FG}=r\sqrt{5}$. Исто така, по конструкција $\overline{GH}=\frac{1}{5}\overline{GF}$, т.е. $\frac{x}{2}=\frac{r\sqrt{5}}{5}$. На крајот $\overline{AB}=2\frac{x}{2}=x$ е нормална и еднаква на $\overline{BC}$.

178. Конструирај правоаголен триаголник ако се дадени висината h која соодветствува на хипотенузата и разликата на катетите m.

Решение. *Анализа*. Ќе ја определиме должината c на хипотенузата на триаголникот ABC. Го квадрираме равенството $a-b=m$ и добиваме

$$a^2-2ab+b^2=m^2.$$

Но, $ab=ch$ и $a^2+b^2=c^2$, па затоа

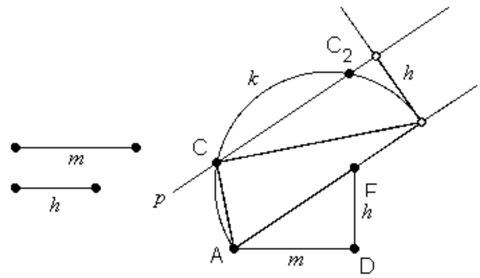
$$c^2-2ch+h^2=h^2+m^2,$$

од каде добиваме $(c-h)^2=m^2+h^2$, т.е. $c=h+\sqrt{h^2+m^2}$.

Конструкција. Прво конструираме правоаголен ADF чии катети се $\overline{AD}=m$ и $\overline{DF}=h$ (цртеж десно). Значи, $\overline{AF}=\sqrt{h^2+m^2}$. Потоа на полуправата AF определуваме точка B таква што

$$\overline{AB} = h + \sqrt{h^2 + m^2} = c.$$

Над AB како над дијаметар конструираме полукружница k. Најпосле паралелно со AB на растојание h конструираме права p на онаа страна на AB на која е k. Имаме



$p \cap k = \{C, C_2\}$. Решение на задачата се триаголниците ABC и ABC_2.

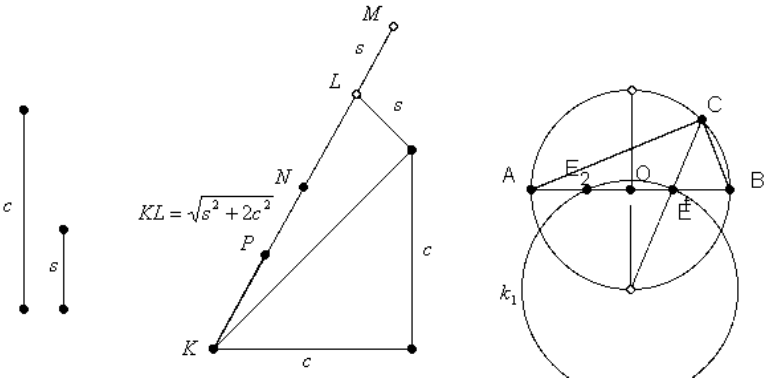
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има решение ако $h \le \frac{c}{2}$, т.е. $h \le \frac{h+\sqrt{h^2+m^2}}{2}$, што значи $\frac{h}{2} \le \frac{\sqrt{h^2+m^2}}{2}$. Условот е исполнет, па затоа задачата има решение за произволни h и m. Решението е единствено бидејќи триаголниците ABC и ABC_2 се складни.

179. Конструирај правоаголен триаголник ако му се познати должините на хипотенузата c и на симетралата на правиот агол s.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека е конструиран бараниот триаголник ABC. Нека кружницата $k(O, \frac{c}{2})$ е опишана околу $\triangle ABC$ и нека E и F се точките во кои симетралата на правиот агол ги сече хипотенузата и лакот AB (види цртеж). Земаме $\overline{FC} = x$. Триаголниците EOF и DCF се слични, па затоа $x : c = \frac{c}{2} : (x - s)$, односно $2x^2 - 2sx - c^2 = 0$. Последната равенка е еквивалентна со равенката $x^2 - sx - \frac{c^2}{2} = 0$, т.е. со равенката $(x - \frac{s}{2})^2 - \frac{s^2+2c^2}{4} = 0$, чие решение е $x = \frac{s+\sqrt{s^2+2c^2}}{2}$.

Конструкција. Користејќи ја Питагоровата теорема прво ја конструираме отсечката $\overline{KN} = x$, а потоа отсечката $\overline{KP} = x - s$ (види цртеж). Над дијаметарот AB ја конструираме опишаната кружница k. ВО центарот O на дијаметарот конструираме нормала која опишаната кружница ја сече во точките D и F .Сега ја конструираме кружницата $k_1(F, x - s)$ која дијаметарот AB го сече во точките E и E_2. Правата FE по вторпат ја сече кружницата k во точката C, со што $\triangle ABC$ е конструиран. Правата FE_2 по вторпат ја сече кружницата k во точка C_2 па добиваме решение $\triangle ABC_2$ кој е складен со $\triangle ABC$.

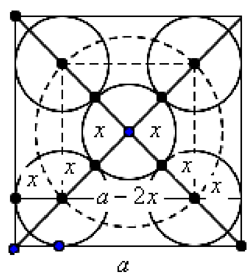


Доказ. По конструкција $\triangle ABC$ е правоаголен и $\overline{AB}=c$. Полуправата CF го полови лакот AB па затоа е симетрала на правиот агол. Исто така важи $\overline{CE}=\overline{CF}-\overline{FE}=x-(x-s)=s$.

Дискусија. Кружницата k_1 го сече дијаметарот AB во точките E и E_2, кои се симетрични во однос на O ако $\overline{FE}=\frac{\sqrt{s^2+2c^2}-s}{2}\geq\frac{c}{2}$, односно $c\geq 2s$. Ако последниот услов е исполнет, тогаш задачата има единствено решени (Зошто?).

180. Во квадрат со страна a впиши пет еднакви кружници така што четири од нив допираат по две страни на квадрато, а петтата ги допира преостанатите четири кружници.

Решение. *Анализа*. Центрите на кружниците мора да припаѓаат на дијагоналите на квадратот (Зошто?). Нека нивниот радису е еднаков на x. Центрите на трите долни кружници формираат рамнокрак правоаголен триаголник со должина на катета $2x$ и хипотенуза $a-2x$. Сега, од Питагоровата теорема следува



$$(2x)^2+(2x)^2=(a-2x)^2, \text{ т.е. } 4x^2+4ax-a^2=0.$$

Од последната равенка добиваме $(2x+a)^2=2a^2$, односно $x=\frac{a\sqrt{2}-a}{2}$.

Конструкцијата и доказот непосредно следуваат од анализата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.
Задачата има едно и единствено решение.

181. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на разликата на плоштината на даден квадрат и даден правоаголник.

Упатство. Нека a е должината на страната на дадениот квадрат, а b,c се должините на страните на дадениот правоаголник. Должината на страната на бараниот квадрат е $x=\sqrt{a^2-bc}=\sqrt{a^2-\sqrt{bc}^2}$. Според тоа, прво треба да се конструира геометриската средина на отсечките b и c, а потоа втората катета на правоаголниот триаголник со хипотенуза a и катета $\sqrt{bc}$. Јасно, задачата има единствено решение ако и само ако $a>\sqrt{bc}$.

182. Нека a и b се должини на дадени отсечки. Конструирај отсечка со должина $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$.

Упатство. Имаме:

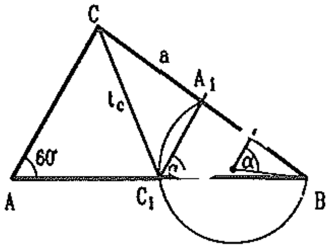
$$x=\sqrt[4]{a^4-b^4}=\sqrt[4]{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=\sqrt{\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Според тоа, прво ги коструираме отсечките со должини $\sqrt{a^2-b^2}$ и $\sqrt{a^2+b^2}$, а потоа нивната геометриска средниа, со што ја добиваме бараната отсечка.

183. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени $\overline{BC}=6\,cm$, $\measuredangle BAC=60^\circ$ и тежишната линија $\overline{CC_1}=t_c=4\,cm$.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека задачата е решена и нека A_1 е средина на BC. Тогаш $A_1C_1 \parallel AC$, па затоа

$$\measuredangle BC_1A_1=\measuredangle BAC=60^\circ.$$



Тоа значи дека точката C_1 се наоѓа во пресекот на кружницата со центар во C и радиус $\overline{CC_1}$ и лакот од чии точки отсечката BA_1 се гледа под агол 60°.

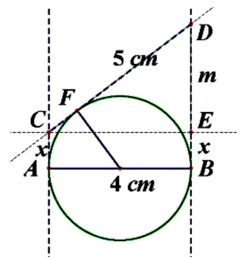
Конструкција. Ја нанесуваме отсечката $\overline{BC}=6\,cm$ и ја наоѓаме нејзината средина A_1. Потоа ги конструираме кружницата $k(C,t_c)$ и лакот од чии точки отсечката BA_1 се гледа под агол 60° и во нивниот пресек ја наоѓаме точката C_1. Сега на полуправата BC_1 ја определуваме точката A за која важи $\overline{AC_1}=\overline{BC_1}$, со што триаголникот е конструиран.

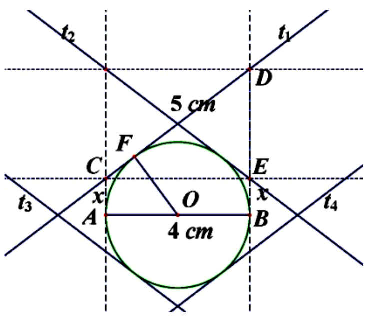
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата нема решение или има две или едно решение, во зависност од тоа дали кружницата $k(C,t_c)$ и лакот од чии точки BA_1 се гледа под агол 60° не се сечат или се сечат во две или една точка.

184. Даден е кружница со центар O и дијаметар $\overline{AB}=4\,cm$. Нацртај три тангенти на оваа кружница, две во точките A и B, а трета во точка така што отсечокот CD меѓу првите две тангенти ќе биде еднаков на $5\,cm$.

Решение. Во точката C повлекуваме права паралелна на AB и нека $\overline{AC}=\overline{BE}=x$. Триаголникот CDE е правоаголен со хипотенуза $\overline{CD}=5\,cm$ и катета $\overline{CE}=4\,cm$, па од Питагоровата теорема следува $\overline{DE}=3\,cm$.





Понатаму, од својствата на тангентните отсечки следува $\overline{CF}=x$ и од исти причини $\overline{DF}=x+3$. Според тоа,

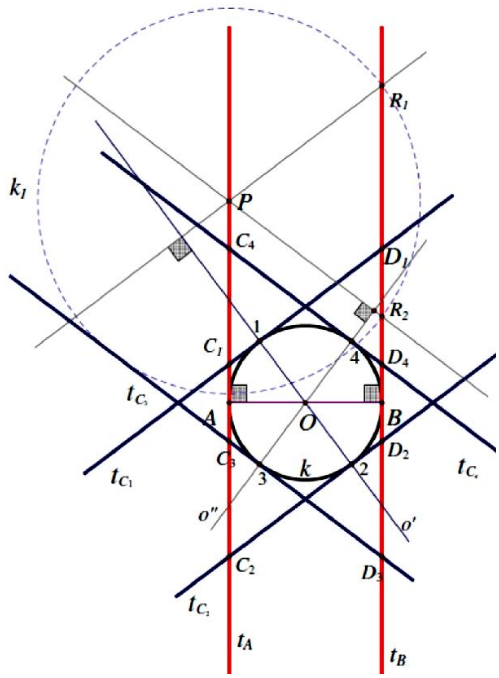
$$5=\overline{CD}=\overline{CF}+\overline{FD}=x+x+3,$$

па затоа $x=1\,cm$. Сега растојанието од $1\,cm$ ножеме да го нанасеме на четири различни начини, па затоа постојат четири тангенти кои го задоволуваат условот на задачата.

Втор начин. Последователно конструираме:

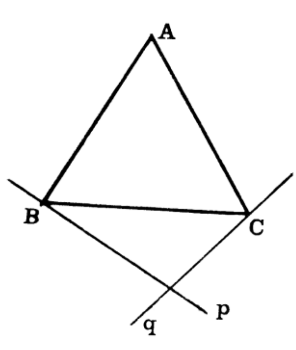
1) Кружница $k(O,4\,cm)$.
2) На кружницата k избираме дијаметар AB.
3) Во точката A конструираме тангента t_A на кружницата k.
4) Во точката B конструираме тангента t_B на кружницата k.
5) На тангентата t_A земаме произволна точка P.
6) Конструираме кружница $k_1(P,5\,cm)$.

7) Кружницата k_1 и тангентата t_B се сечат во точките R_1 и R_2.
8) Во точката O повлекуваме нормала o' на правата PR_1.
9) Кружницата k и правата o' се сечат во точките 1 и 2, кои се допирните точки на бараните тангенти.
10) Во точката 1 конструираме права паралелна на PR_1 и тоа е тангентата t_{c1}.
11) Во точката 2 конструираме права паралелна на PR_1 и тоа е тангентата t_{c2}.
12) Во точката O повлекуваме нормала $o"$ на правата PR_2.
13) Кружницата k и правата $o"$ се сечат во точките 3 и 4, кои се допирните точки на бараните тангенти.
14) Во точката 3 конструираме права паралелна на PR_2 и тоа е тангентата t_{c3}.
15) Во точката 4 конструираме права паралелна на PR_2 и тоа е тангентата t_{c4}.

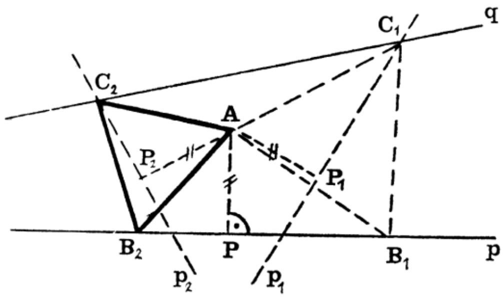


185. Дадени се прави p и q и точка A. Конструирај рамностран триаголник $ABCD$ таков, што $B \in p$ и $C \in q$.

Решение. *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена и нека ABC е бараниот триаголник (цртеж десно). Триаголникот ABC е рамностран, па затоа $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\angle BAC = 60^\circ$. Значи, ако ρ е ротација со центар A и агол 60° или



агол -60°, тогаш $\rho(B)=C$. Точката B лежи на правата p, па точката $C=\rho(B)$ ќе лежи на правата $\rho(p)$. Од другата страна C лежи и на правата q, па значи, $C=\rho(p)\cap q$.



Конструкција. Земаме ротација ρ_1 е ротација со центар A и агол 60°, а ρ_2 ротација со центар A и агол -60° и нека $p_1=\rho_1(p)$, $p_2=\rho_2(p)$. Наоѓаме $C_1=p_1\cap q, C_2=p_2\cap q$,

$$B_1=\rho_2(C_1) \text{ и } B_2=\rho_1(C_2),$$

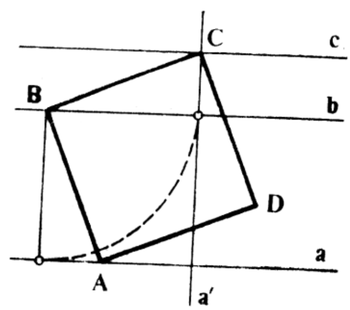
и добиваме дека AB_1C_1 и AB_2C_2 се бараните триаголници.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Бидејќи барем една од правите p_1 и p_2 ја сече правата q, задачата има барем едно решение. Во случај кога и двете прави p_1 и p_2 ја сечат правата q задачата има две решенија.

186. Конструирај квадрат $ABCD$ таков, што три негови темиња да лежат на три дадени паралелни прави.

Решение. *Анализа*. Да претпоставиме дека задачата е решена и $ABCD$ е бараниот квадрат (цртеж десно). Од $\overline{BA}=\overline{BC}$ и $\measuredangle ABC=90^\circ$ следува ρ е ротација со центар B и агол $\alpha=90^\circ$ или $\alpha=-90^\circ$, тогаш $\rho(A)=C$. Нека, на пример, $\measuredangle ABC=90^\circ$. Од $A\in a$, следува $\rho_{B,90^\circ}(A)=C\in\rho_{B,90^\circ}(a)=a'$,



па затоа $C=a'\cap c$. Во случај кога $\alpha=-90^\circ$, добиваме дека $C=a''\cap c$, каде што $a''=\rho_{B,-90^\circ}(a)$,.

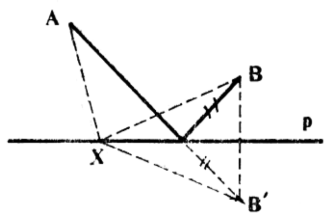
Конструкција. Нека B и произволна точка од правата b. Ги конструираме правите $a'=\rho_{B,90^\circ}(a)$ и $a''=\rho_{B,-90^\circ}(a)$. Понатаму, ги определуваме точките $C_1 = a' \cap c$ и $C_2 = a'' \cap c$, и потоа ги конструираме квадратите $C_1BA_1D_1$ и $C_1BA_2D_2$ чии страни се C_1B и C_2B соодветно.

Доказ. Темињата C_1 и B од квадратот $C_1BA_1D_1$ лежат на правите c и b по конструкцијата. Бидејќи $C = a' \cap c$, добиваме дека $A_1 = \rho_{B,-90^\circ}(C_1)$, т.е. $A_1 \in a$. Значи, квадратот $C_1BA_1D_1$ ги задоволува условите на задачата. Аналогно се докажува дека и квадратот $C_2BA_2D_2$ ги задоволува условите на задачата.

Дискусија. Правата a' е нормална на a, па значи, е нормална и на c. Значи, точката C_1 секогаш постои, па, според тоа, и квадратот $C_1BA_1D_1$ постои. Според тоа, за произволна точка $B \in b$, задачата има секогаш две решенија.

187. Дадена е права p и точки A и B кои не припаѓаат на p и лежат во иста полурамнина определена со p. На правата p определи точка C таква, што збирот $\overline{AC} + \overline{BC}$ да биде најмал.

Решение. *Анализа*. Нека X е произволна точка од правата p и $\sigma_p(B) = B'$ (цртеж десно). Точката X лежи на правата p имаме, па затоа $\overline{BX} = \overline{B'X}$, што значи $\overline{AX} + \overline{XB} = \overline{AX} + \overline{XB'}$. Од досега изнесеното следува дека збирот $\overline{AX} + \overline{XB}$ е најмал, ако збирот $\overline{AX} + \overline{XB'}$ е најмал, т.е. ако должината на искршената линија AXB' е најмала, а тоа е можно кога точките A, X и B' се колинеарни.



Конструкција. Наоѓаме $\sigma_p(B) = B'$ и ја повлекуваме правата AB'. Сега, бараната точка е $C = AB' \cap p$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата секогаш има единствено решение.

188. Конструирај квадрат, така што две негови спротивни темиња да лежат на дадена права p, а другите соодветно на две дадени кружници k_1 и k_2.

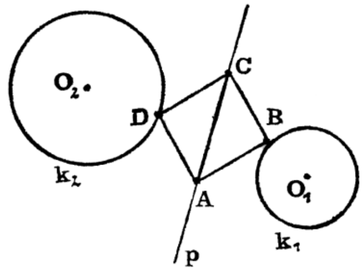
Решение. *Анализа*. Нека $ABCD$ е бараниот кадрат (цртеж долу десно). Правата p е оска на симетрија на квадратот, па затоа

$\sigma_p(A)=A$, $\sigma_p(C)=C$, $\sigma_p(B)=D$.

Бидејќи $B\in k_1$ имаме

$$D=\sigma_p(B)\in\sigma_p(k_1)=k_1'$$

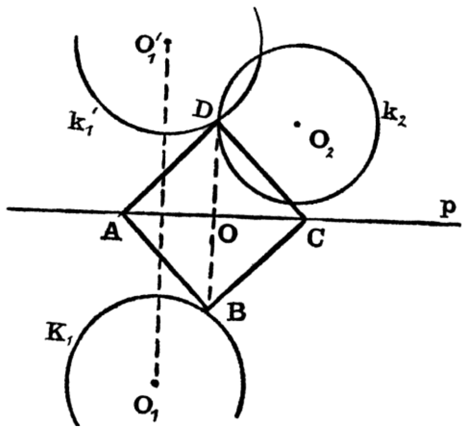
и како $D\in k_2$ добиваме $D\in k_1'\cap k_2$.



Конструкција. Прво конструираме кружница $k_1'=\sigma_p(k_1)$ и наоѓаме точка $D\in k_1'\cap k_2$. Потоа определуваме $B=\sigma_p(D)$ и на таков начин добиваме две спротивни темиња B и D на бараниот квадрат (цртеж десно). Сега ја определуваме точката $O=BD\cap p$ и на правата p наоѓаме точки A и B такви, што

$$\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{OB}=\overline{OD}.$$

Конечно, четириаголникот $ABCD$ е бараниот квадрат.

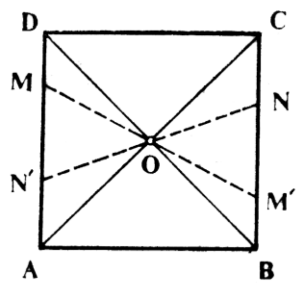


Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата може да има две, едно или ниедно решение, во зависност од бројот на пресечните точки на кружниците k_1' и k_2.

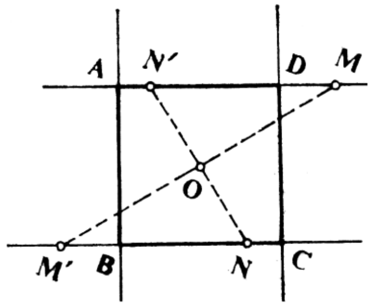
189. Дадени се точките O, M и N. Конструирај квадрат, така што точката O е пресек на неговите дијагонали, а точките M и N лежат на две негови спротивни страни.

Решение. *Анализа*. Нека $ABCD$ е бараниот квадрат (цртеж десно). Квадратот е централно симетрична фигура, со центар на симетрија во пресекот на неговите дијагонали. Значи, ако M лежи на страната AD, тогаш $\sigma_O(M)=M'$ лежи на страната BC. Слично, точката $\sigma_O(N)=N'$ лежи на страната AD. Значи, при централна симетрија σ_O ги определуваме



правите на кои лежат спротивните страни. Сега, растојанието меѓу овие прави е еднакво на страната на квадратот.

Конструкција. Наоѓаме $\sigma_O(M)=M'$ и $\sigma_O(N)=N'$ и ги повлекуваме правите MN' и $M'N$, на кои лежат страните AD и BC, соодветно (цртеж десно). Во точката O конструираме нормала на правата MN', која ги сече правите MN' и $M'N$ во точките P и Q, соодветно. Од точката P на правата MN' лево и десно нанесуваме



растојание $\overline{OP}$, со што ги добиваме темињата A и D. Аналогно, ан правата $M'N$ ги наоѓаме темињата B и C.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. а) Ако точките M,N и O не се колинеарни, тогаш задачата има едно решение.

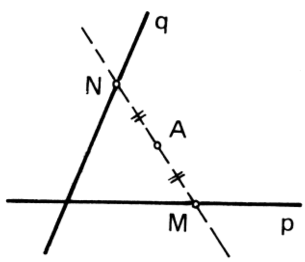
б) Ако точките M,N и O се колинеарни и O е средина на отсечката MN, тогаш на секој пар паралелни прави кои минуваат низ точките M и N ќе му соодветствува по еден квадрат, па значи задачата има бесконечно многу решенија.

в) Ако точките M,N и O се колинеарни и O не е средина на отсечката MN, тогаш M и N не се пресликуваат една во друга при централната симетријата σ_O, па значи задачата нема решение.

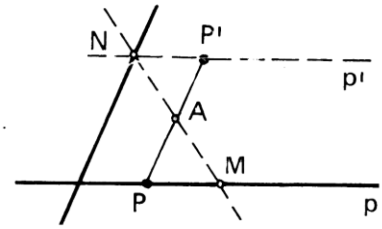
190. Дадени се прави p и q и точка A која не лежи на правите. Низ точката A повлечи права a, така што A да биде средина на отсечката MN, каде што $M=a\cap p$ и $N=a\cap q$

Решение. *Анализа*. Да претпоставиме дека задачата е решена и нека MN е бараната права (цртеж десно). Точката A е средина на отсечката MN, па затоа $N=\sigma_A(M)$.

Притоа точката M лежи на правата p, а точката $N=\sigma_A(M)$ лежи на правата $p'=\sigma_A(p)$, па затоа $N=q\cap p'$.



Конструкција. Земаме произволна точка $P\in p$ и наоѓаме $\sigma_A(P)=P'$ (цртеж долу лево). Низ точката P' повлекуваме права паралелна на p и ја наоѓаме правата $p'=\sigma_A(p)$. Сега $N=q\cap p'$ и ја повлекуваме правата AN, која е бараната права a.



Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. а) Ако правите p и q не се паралелни, тогаш задачата има едно решение.

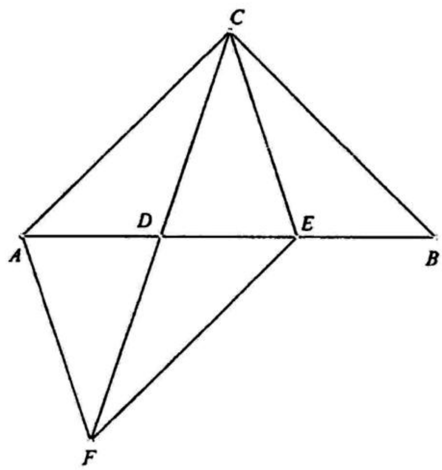
б) Ако правите p и q се паралелни и точката A е на еднакво растојание од нив, тогаш задачата има бесконечно многу решенија, т.е. решение е секоја права која минува низ A и не е паралелна со правите p и q.

в) Ако правите p и q се паралелни и точката A не е на еднакво растојание од нив, тогаш задачата нема решение.

V.4. ГЕОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

191. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. На основата AB избрани се точки D и E такви што $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$. Полуравите CD и CE го делат $\measuredangle ACB$ на три агли. Докажи дека $\measuredangle DCE$ е најголем од трите агли.

Решение. Имаме $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{AD}=\overline{EB}$ и $\measuredangle CAB=\measuredangle CBA$, па затоа $\triangle ADC\cong\triangle BEC$, што значи $\measuredangle ACD=\measuredangle ECB$. Значи, треба да докажеме дека $\measuredangle ACD<\measuredangle DCE$.



Прво, да забележиме дека во рамнокрак триаголник кракот е подолг од секоја отсечка која го поврзува врвот со било која точка од основата. Значи, $\overline{AC}>\overline{CE}$.

На продолжението на отсечката CD преку точката D земаме точка F таква што $\overline{CD}=\overline{DF}$. Тогаш четириаголникот $ACEF$ е паралелограм (дијагоналите му се полoват), т.е. $\overline{AC}=\overline{FE}$. Од $\overline{AC}>\overline{CE}$ следува $\overline{EF} > \overline{CE}$, т.е. $\measuredangle DCE > \measuredangle CFE$. Но, $\measuredangle CFE = \measuredangle ACF$ како агли на трасферзала, па затоа $\measuredangle DCE > \measuredangle ACF$, што и требаше да се докаже.

192. Даден е тангентен четириаголник со страни $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c,$ $\overline{DA} = d$ и дијагонала $\overline{AC} = e.$ Докажи дека $a + c > e.$

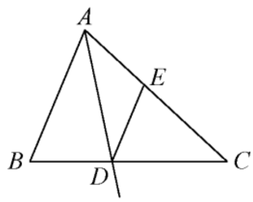
Решение. Од триаголникот ABC следува дека $a + b > e,$ додека од триаголникот ACD имаме $c + d > e.$ Со собирање на двете неравенства имаме $a + b + c + d > 2e.$ Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тангентен важи $a + c = b + d.$ Оттука

$$a + b + c + d = 2(a + c).$$

Конечно, добиваме дека $2(a + c) > 2e$, односно важи $a + c > e.$

193. Точката D е пресек на симетралата на аголот BAC и страната BC на триаголникот ABC. Ако $\overline{AB} = 10cm$ и $\overline{AC} = 15\,cm$, докажи дека $\overline{AD} < 12\,cm$.

Решение. Ако E е точка на страната AC таква да $DE \parallel AB$, тогаш $\measuredangle EDA = \measuredangle BAD = \measuredangle DAE$, па затоа триаголникот ADE е рамнокрак. Јасно, триаголниците ABC и EDC се слични. Да означиме $\overline{AE} = \overline{ED} = x$. Тогаш од сличноста следува $(15 - x) : 15 = x : 10$, од каде наоѓаме $x = 6\,cm$. Конечно,



$$\overline{AD} < \overline{AE} + \overline{DE} = 12\,cm.$$

194. Во правоаголен триаголник катетите се со должина a и b, а должината на висината која соодветствува на хипотенузата е h_c. Докажи дека $h_c \le \sqrt{\frac{ab}{2}}$.

Решение. Во секој правоаголен триаголник е исполнето неравенството $h_c \le t_c = \frac{c}{2}$. Оттука следува дека $2h_c \le c$. Ако последното неравенство го помножиме со h_c и земеме предвид дека $ch_c = ab = 2P$, добиваме $2h_c^2 \le ch_c = ab$, т.е. $h_c \le \sqrt{\frac{ab}{2}}$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $h_c = t_c = \frac{c}{2}$, т.е. ако и само ако правоаголниот триаголник е рамнокрак.

195. Ако се v_a, v_b, v_c должините на висините на триаголникот ABC и ако $a<b$, тогаш важи $v_c < \frac{v_a v_b}{v_a - v_b}$. Докажи!

Решение. За плоштината P на триаголникот ABC важи $P = \frac{av_a}{2} = \frac{cv_c}{2} = \frac{bv_b}{2}$, па затоа $v_a = \frac{2P}{a}$ и $v_b = \frac{2P}{b}$. Од $a<b$ следува дека $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, па затоа $v_a > v_b$, односно $v_a - v_b > 0$. Исто така, важи

$$a = \frac{2P}{v_a}, b = \frac{2P}{v_b}, c = \frac{2P}{v_c}.$$

Од неравенството на триаголник следува $c+a>b$, односно $c>b-a$. Според тоа, важи $\frac{2P}{v_c} > \frac{2P}{v_b} - \frac{2P}{v_a}$, од каде добиваме $\frac{1}{v_c} > \frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_a}$, т.е. $v_c < \frac{v_a v_b}{v_a - v_b}$.

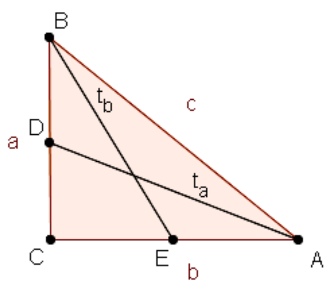
196. Нека се t_a и t_b тежишните линии во правоаголен триаголник со катети a и b. Докажи дека $\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b} < 2$.

Решение. Ќе ја примениме Питагоровата теорема на триаголниците ACD и BCE (цртеж десно). Имаме

$$t_a^2 = (\tfrac{a}{2})^2 + b^2 \text{ и } t_b^2 = (\tfrac{b}{2})^2 + a^2,$$

па затоа

$$(\tfrac{t_a}{t_b})^2 = \frac{a^2 + \frac{b^2}{4}}{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2 + 4b^2}{b^2 + 4a^2} = \frac{(\frac{a}{b})^2 + 4}{1 + 4(\frac{a}{b})^2}$$



Ставаме $\frac{a}{b} = x$ и добиваме

$$(\tfrac{t_a}{t_b})^2 = \frac{x^2+4}{1+4x^2} = \frac{4x^2+1+15}{4(1+4x^2)} = \frac{1}{4} + \frac{15}{4(1+4x^2)} > \frac{1}{4}$$

и

$$(\tfrac{t_a}{t_b})^2 = \frac{x^2+4}{1+4x^2} = \frac{4(1+4x^2)-15x^2}{1+4x^2} = 4 - \frac{15x^2}{1+4x^2} < 4,$$

па затоа важи $\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b} < 2$.

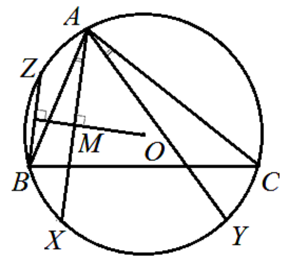
197. Даден е $\triangle ABC$. На лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката A, земени се точки X и Y такви што

$\measuredangle BAX = \measuredangle CAY$. Нека M е средината на тетивата AX. Докажи дека $\overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AY}$.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу ΔABC. Тогаш $OM \perp AX$. Повлекуваме нормала од B на OM и нека таа ја сече опишаната кружница во точката Z.

Од $BZ \perp OM$ следува дека OM е симетрала на BZ. Според тоа, $\overline{MZ} = \overline{MB}$. Сега од неравенството на триаголник следува

$$\overline{BM} + \overline{MC} = \overline{ZM} + \overline{MC} > \overline{CZ}.$$



Но, $BZ \parallel AX$, па затоа

$$AZ = BX = CY$$

од каде добиваме

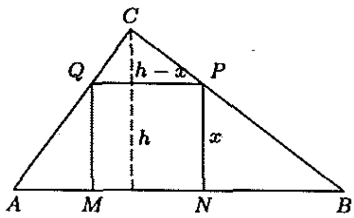
$$ZAC = ZA + AC = YC + CA = YCA$$

т.е. $\overline{CZ} = \overline{AY}$. Затоа

$$\overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AY}.$$

198. Во правоаголен триаголник со должини на катети $15\,cm$ и $20\,cm$ вишан е квадрат така што две негови темиња лежат на хипотенузата, а секое од останатите две темиња припаѓа на по една од катетите. Докажи дека плоштината на квадратот е поголема од $64\,cm^2$.

Решение. За хипотенузата на триаголникот добиваме $c = \sqrt{20^2 + 16^2} = 25\,cm$, а висината повлечена кон хипотенузата е $h = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12\,cm$. Нека дадениот триаголник е ABC (C е темето кај правиот агол) и нека $MNPQ$ е вписаниот квадрат со должина на страна x (цртеж десно). Триаголниците ABC и QPC се слични (Докажи!), па затоа $c : x = h : (h - x)$, од каде добиваме $x = \frac{300}{37} > 8$, па затоа за плоштината на квадратот имаме



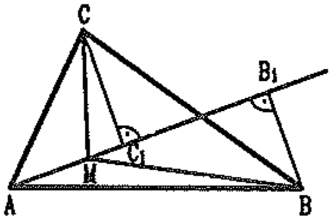
$$P = x^2 > 8^2 = 64\,cm^2.$$

199. Даден е $\triangle ABC$ и точка M во неговата внатрешност. Докажи дека

$$\overline{AM} \cdot \overline{BC} + \overline{BM} \cdot \overline{AC} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} \geq 4P \qquad (1)$$

каде P е плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека B_1 и C_1 се подножјата на нормалите повлечени од B и C, соодветно на правата AM. Тогаш



$$P_{\triangle ABM} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BB_1}}{2} \text{ и } P_{\triangle ACM} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{CC_1}}{2},$$

па затоа

$$P_{\triangle ABM} + P_{\triangle ACM} = \frac{\overline{AM} \cdot (\overline{BB_1} + \overline{CC_1})}{2} \le \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BC}}{2}.$$

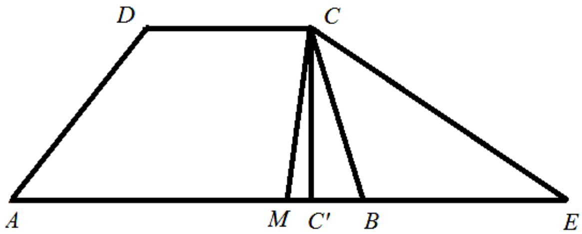
Аналогно се докажува дека

$$P_{\triangle ACM} + P_{\triangle BCM} \le \frac{\overline{CM} \cdot \overline{AB}}{2} \text{ и } P_{\triangle ABM} + P_{\triangle BCM} \le \frac{\overline{BM} \cdot \overline{AC}}{2}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства и земеме предвид дека $P_{\triangle ABM} + P_{\triangle BCM} + P_{\triangle ACM} = P$ го добиваме неравенството (1).

200. Нека m е должината на средната линија, а h должината на висината на трапез чии дијагонали се заемно нормални. Докажи дека $m \ge h$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека E е точка од продолжението на основата AB од страната на темето B така што $\overline{BE} = \overline{CD}$ и нека M е средина на отсечката AE (види цртеж). Тогаш, од нормалноста на дијагоналите следува дека триаголникот ACE е правоаголен. Бидејќи



$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AB} + \overline{CD}$$

добиваме $\overline{MC} = m$. Отсечката MC е хипотенуза на правоаголниот триаголник MCC', а $\overline{CC'} = h$ катета. Според тоа, $m \ge h$. Равенство важи кога $\overline{MC} = \overline{MC'}$, односно $\overline{AC} = \overline{CE} = \overline{BD}$, што значи кога дадениот трапез е рамнокрак.

201. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD и нека $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, $\overline{AC} = m$ и $\overline{BD} = n$. Познато е дека

$$m^2 + n^2 = (a+c)^2.$$

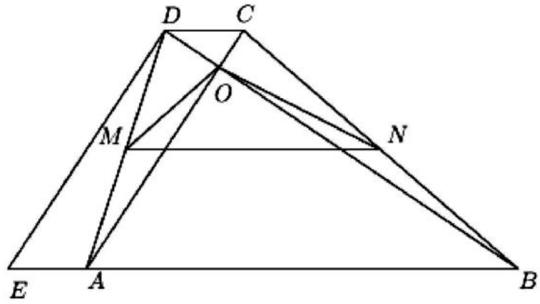
а) Докажи дека AC и BD се заедно нормални.

б) Докажи дека $ac < bd$.

Решение. а) Од точката D повлекуваме права паралелна на AC. Нека таа права ја сече правата AB во точката E (цртеж десно). Четириаголникот $EACD$ е паралелограм, па затоа

$\overline{EA} = \overline{DC} = c$ и

$\overline{DE} = \overline{AC} = d$.



Го разгледуваме триаголникот EBD. Имаме $\overline{EB}^2 = (a+c)^2$ и од условот на задачата важи $m^2 + n^2 = (a+c)^2$, па затоа

$$\overline{EB}^2 = (a+c)^2 = m^2 + n^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DB}^2,$$

што според обратната Питагорова теорема значи дека триаголникот EBD е правоаголен. Според тоа, $ED \perp BD$, па затоа $AC \perp BD$.

б) Нека M и N се средините на страните AD и BC, соодветно. Тогаш MN е средна линија на трапезот, па затоа важи $\overline{MN} = \frac{a+c}{2}$. Нека O е пресекот на дијагоналите AC и BD на трапезот. Од $AC \perp BD$. Следува дека триаголниците AOD и BOC се правоаголни. Отсечките OM и ON се тежишни линии кои соодветствуваат на хипотенузите, па затоа $\overline{OM} = \frac{d}{2}$ и $\overline{ON} = \frac{b}{2}$.

Да го разгледаме триаголникот MNO. Имаме $\overline{MN} < \overline{MO} + \overline{ON}$, т.е. $\frac{a+c}{2} < \frac{b+d}{2}$, па затоа

$$a^2 + 2ac + c^2 < b^2 + 2bd + d^2. \qquad (1)$$

Од правоаголните триаголници ABO и CDO добиваме $a^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$ и $c^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$, па затоа

$$a^2 + c^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2.$$

Од друга страна, од правоаголните триаголници AOD и BOC добиваме $d^2 = \overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2$ и $b^2 = \overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2$, па затоа

$$b^2 + d^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2.$$

Според тоа, $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, па од (1) следува дека $ac < bd$.

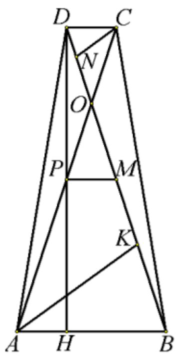
202. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ с основи $\overline{AB} > \overline{CD}$. Нека O е пресекот на дијагоналите и $\measuredangle AOB = 36°$. Симетралите на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle DCA$ ја сечат дијагоналата BD во точките K и N, соодветно. Висината на трапезот DH $(H \in AB)$ ја сече дијагоналата AC во нејзината средина P. На дијагоналата BD е земена точка M таква што $4\overline{PM} = \overline{KN}$. Докажи, дека:

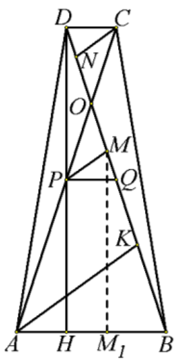
а) $\overline{PM} = \overline{CD}$; б) $\frac{4}{5} < P_{\triangle AHP} : P_{\triangle AHM} \leq 1$.

Решение. а) Од условот, дека точката P е средина на дијагоналата AC и $AB \| CD$ следува, дека P е средина и на висината DH. Така добиваме, дека $AHCD$ е паралелограм и $\overline{AH} = \overline{CD} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2}$, т.е. $\overline{AB} = 3\overline{CD}$.

Трапезот е рамнокрак и затоа $\triangle ABO$ и $\triangle DOC$ се рамнокраки, што значи

$$\measuredangle BAO = \measuredangle ABO = \measuredangle CDO = \measuredangle DCO = 72°$$





Отсечката AK е симетрала на агол во $\triangle ABO$ и затоа

$$\measuredangle BAK = \measuredangle KAO = 36° = \measuredangle AOB$$

и $\overline{AB} = \overline{AK} = \overline{KO}$. Аналогно, $\overline{CD} = \overline{CN} = \overline{NO}$. Тогаш

$$4\overline{PM} = \overline{KN} = \overline{KO} + \overline{ON} = \overline{AB} + \overline{CD} = 4\overline{CD}, \text{ т.е. } \overline{PM} = \overline{CD}.$$

б) За точката M има две можности:

1. M е средината на BD. Тогаш PM е отсечката која ги сврзува средините на дијагоналите на трапезот и затоа е паралелна на на основите. Во случајов точките P и M се еднакво оддалечени од AB. Заклучуваме, де $P_{\triangle AHP} : P_{\triangle AHM} = 1$.

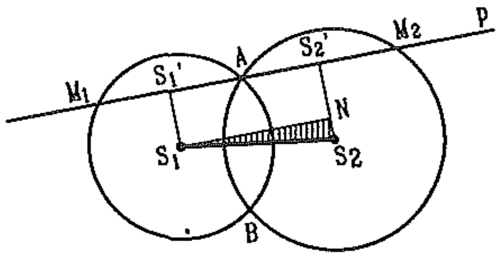
2. M не е средината на BD. Тогаш, ако Q е средината на BD, од $\triangle HBD$ следува, дека $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{HB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{PM}$. Заклучуваме, дека $\triangle PMQ$ е рамнокрак и PM е симетрала на $\measuredangle OPQ$, т.е. точката M е на отсечката OQ. Од складноста $\triangle OPQ$ и $\triangle OCD$

следува, дека $\overline{QO}=\overline{OD}$ и затоа растојанието од O до PQ е $\frac{1}{2}\overline{DP}=\frac{1}{4}\overline{DH}$. Од друга страна $\overline{MQ}<\overline{PM}=\overline{OM}$, од каде заклучуваме, дека растојанието од M до PQ е помало од половината растојание од O до PQ, т.е. од $\frac{1}{8}\overline{DH}$. Добиваме, дека растојанието MM_1 од M до правата AB е помало од $\frac{1}{8}\overline{DH}+\frac{1}{2}\overline{DH}=\frac{5}{8}\overline{DH}$. Затоа

$$\frac{P_{\triangle AHP}}{P_{\triangle AHM}}=\frac{\frac{1}{2}\cancel{\overline{AH}}\cdot\frac{\overline{DH}}{2}}{\frac{1}{2}\cancel{\overline{AH}}\cdot\overline{MM_1}}>\frac{\overline{DH}}{2\cdot\frac{5}{8}\overline{DH}}=\frac{4}{5}.$$

203. Нека кружниците k_1 и k_2 со центри во S_1 и S_2, соодветно се сечат во точките A и B. Права p која минува низ точката A по вторпат ги сече кружниците k_1 и k_2 во точките M_1 и M_2, соодветно. Докажи дека $\overline{M_1M_2}\le 2\overline{S_1S_2}$. Кога важи знак за равенство.

Решение. Нека $S_1^{'}$ и $S_2^{'}$ се подножјата на нормалите повлечени од S_1 и S_2 на правата p (цртеж десно). Точките $S_1^{'}$ и $S_2^{'}$ се средини на отсечките AM_1 и AM_2, па затоа $\overline{M_1M_2}=2\overline{S_1^{'}S_2^{'}}$. Понатаму,



$$\overline{M_1M_2}=2\overline{S_1^{'}S_2^{'}}=2\overline{S_1N}\le 2\overline{S_1S_2}$$

бидејќи катетата S_1N е пократка од хипотенузата S_1S_2. Знак за равенство важи ако и само ако триаголникот S_1S_2N е дегенериран во отсечка, т.е. ако и само ако $S_1S_2 \parallel S_1^{'}S_2^{'}$.

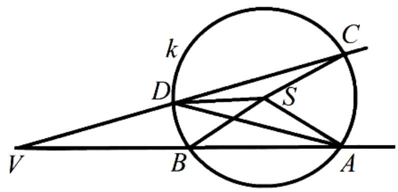
V.6. КРУЖНИЦА И КРУГ

204. Дадена е полукружница со центар O и дијаметар AB. Нека се C и D точки од отсечката AB такви што $\overline{OC}=\overline{OD}$, а E и F точки од полукружницата такви што $CE \parallel DF$. Докажи дека отсечките CE и DF се нормални на EF.

Решение. Нека S е средината на тетивата EF (направи цртеж). Тогаш $OS \perp EF$. Но, OS е средна линија на трапезот $CDFE$, па затоа $CE \| OS \| DF$ и оттука следува $CE \perp EF$ и $DF \perp EF$.

205. Даден е остар агол α со теме во точката V. Во внатрешноста на аголот α земена е точка S која е центар на кружница k. Кружницата k го сече едниот крак на α во точките A и B, а другиот крак во точките C и D, така што точките B и D се поблиску до темето V од точките A и C. Докажи, дека $\measuredangle AVC = \frac{1}{2}(\measuredangle ASC - \measuredangle BSD)$.

Решение. Нека $\measuredangle AVC = \alpha, \measuredangle ASC = \beta$ и $\measuredangle BSD = \gamma$. Од својството на периферниот и централниот агол за кружницата k имаме $\measuredangle ASC = 2\measuredangle ADC$, т.е. $\measuredangle ADS = \frac{1}{2}\beta$ и $\measuredangle BSD = 2\measuredangle BAD$,



т.е. $\measuredangle BAD = \frac{1}{2}\gamma$. Бидејќи $\measuredangle ADC$ е надворешен агол за $\triangle DVA$ добиваме $\measuredangle ADC = \measuredangle AVD + \measuredangle VAD$, а како $\measuredangle AVD = \measuredangle AVC = \alpha$ и $\measuredangle VAD = \measuredangle BAD = \frac{1}{2}\gamma$, добиваме $\frac{\beta}{2} = \alpha + \frac{\gamma}{2}$, т.е. $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, што и требаше да се докаже.

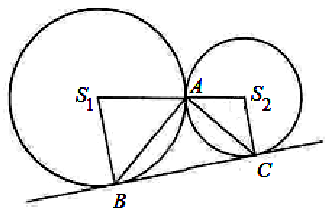
206. Нека k е кружница над дијаметар BD, $\overline{BD} = 12\,cm$ и нека A и C се точки на k на различни страни од правата BD. Ако $\measuredangle DBA = 60^\circ$ и $\measuredangle DBC = 45^\circ$,определи ја должината на тетивата AC

Решение. Од условот на задачата следува $\measuredangle CAD = \measuredangle DBC = 45^\circ$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle DBA = 60^\circ$, како агли над исти лаци во кружницата k (направи цртеж). Сега, ако E е подножјето на нормалата од D на AC, тогаш важи $\measuredangle ADE = 45^\circ$ и $\measuredangle CDE = 30^\circ$. Затоа $\overline{AE} = \frac{\overline{AD}\sqrt{2}}{2}$ и $\overline{EC} = \frac{\overline{CD}}{2}$.

Конечно, бидејќи $\overline{AD} = \frac{\overline{BD}\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,cm$ и $\overline{CD} = 6\sqrt{2}\,cm$, добиваме

$$\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} = \frac{\overline{AD}\sqrt{2}}{2} + \frac{\overline{CD}}{2} = 3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\,cm.$$

207. Две кружници со различни радиуси надворешно се допираат во точката A. Заедничката тангента на кружниците која не минува низ точката A ги допира кружниците во точките B и C. Определи го $\measuredangle BAC$.



Решение. Нека $k_1(S_1,r_1)$ и $k_2(S_2,r_2)$ се дадените кружници, точката B е допирната точка на тангентата и k_1, а точката C е допирната точка на тангентата и k_2. Триаголникот AS_2C рамнокрак, па затоа $\measuredangle S_2AC = \measuredangle S_2CA = \alpha$. Триаголникот AS_1B е рамнокрак, па затоа $\measuredangle S_1BA = \measuredangle S_1AB = \beta$. Сега, $S_1B \perp BC$ и $S_2C \perp BC$, па затоа $\measuredangle CBA = 90^\circ - \beta$ и $\measuredangle BCA = 90^\circ - \alpha$. Од $\triangle ABC$ следува $\measuredangle BAC = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta$. Од друга страна, бидејќи кружниците надворешно се допираат во точката A добиваме $\measuredangle S_1AS_2 = 180^\circ$, па затоа $\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ$, т.е. $\measuredangle BAC = \alpha + \beta = 90^\circ$.

208. Кружниците k_1 и k_2 со центри S_1 и S_2 се сечат во точките A и B. Права која минува низ точката B по втор пат ги сече кружниците k_1 и k_2 во точките C и D, соодветно. Докажи дека $\measuredangle CAS_1 = \measuredangle DAS_2$.

Решение. Тврдењето на задачата е еквивалентно на тврдењето $\measuredangle AS_1C = \measuredangle AS_2D$ (направи цртеж). Бидејќи $\measuredangle ABC + \measuredangle ABD = 180^\circ$, заклучуваме дека еден од овие агли, на пример $\measuredangle ABC$, е остар, а другиот е тап. Значи, $\measuredangle AS_1C = 2\measuredangle ABC$ и $\measuredangle AS_2D = 2(180^\circ - \measuredangle ABD)$, од каде што следува тврдењето на задачата.

209. Кружниците k_1 и k_2 со центри O_1 и O_2, соодветно се допираат однадвор во точката B. Права која минува низ точката B по втор пат ги сече кружниците k_1 и k_2 во точките A и C, соодветно. Докажи дека тангентите на овие кружници во точките A и C се паралелни.

Решение. Нека центрите на кружниците k_1 и k_2 се O_1 и O_2. Јасно, триаголниците $\triangle BO_1A$ и $\triangle BO_2C$ се слични, и важи $\measuredangle O_1BA = \measuredangle O_2BC$, како накрсни агли (направи цртеж). Сега бидејќи $\measuredangle O_1AB = \measuredangle O_2CB$ важи $O_1A \| O_2C$. Конечно, тангентите во точките A и C се паралелни, бидејќи се нормални на O_1A и O_2C.

210. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Правите p и q минуваат низ точката A и ги сечат кружниците k_1 и k_2 во точките C, D и E, F ($C, E \in k_1$ и $D, F \in k_2$). Докажи дека $\measuredangle CBD = \measuredangle EBF$.

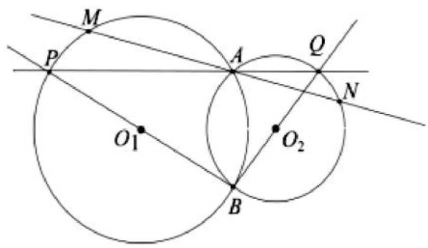
Решение. Нека O_1 и O_2 се центрите на кружниците k_1 и k_2, соодветно (направи цртеж). Тогаш

$$\measuredangle CBD = 180^\circ - (\measuredangle BCA + \measuredangle BDA) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\measuredangle BO_1D + \measuredangle BO_2A)$$

$$= 180^\circ - (\measuredangle BEA + \measuredangle BFA) = \measuredangle EBF,$$

што и требаше дасе докаже.

211. Две кружници со центри O_1 и O_2 имаат две заеднички точки A и B. Права низ точката A, ги сече двете кружници во точките M и N. Докажи дека $\measuredangle O_1MB = \measuredangle O_2NB$.



Решение. Ги повлекуваме правите BO_1 и BO_2. Бидејќи аглите PAB и QAB се прави, следува дека точките P, Q и A се колинеарни. Значи $\measuredangle PAM = \measuredangle QAN$ како накрсни агли. Од друга страна $\measuredangle MBP = \measuredangle MAP$ (како агли над ист кружен лак MP) и $\measuredangle NBQ = \measuredangle NAQ$ (како агли над ист кружен лак NQ). Така $\measuredangle MBP = \measuredangle NBQ$.

Бидејќи триаголниците O_1MB и O_2NB се рамнокраки, добиваме дека $\measuredangle O_1MB = \measuredangle O_1BM$ и $\measuredangle O_2NB = \measuredangle O_2BN$. Конечно $\measuredangle O_1MB = \measuredangle O_2NB$.

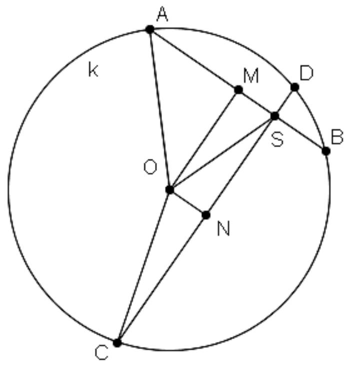
212. Нека AB и CD се тетиви на кружницата $k(O,r)$ кои под прав агол се сечат во точката S. Докажи дека

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4(2r^2 - \overline{OS}^2).$$

Решение. Со M и N да ги означиме средините на тетивите AB и CD (цртеж десно). Имаме

$\overline{AM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OM}^2$ и $\overline{CN}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{ON}^2$.

Ако ги собереме последните две равенства добиваме



$$\overline{AM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OA}^2 - \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$$

$$= 2r^2 - (\overline{ON}^2 + \overline{OM}^2)$$

$$= 2r^2 - \overline{OS}^2$$

и како

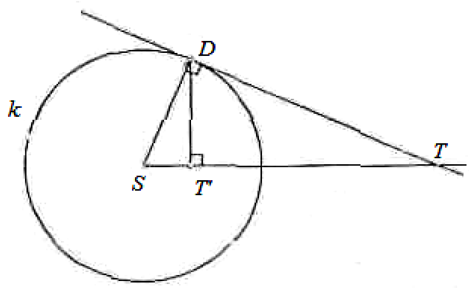
$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4(\overline{AM}^2 + \overline{CN}^2)$$

добиваме

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4(2r^2 - \overline{OS}^2)\,.$$

213. Дадена е кружница $k(S,r)$ и точка T надвор од неа. Од точката T е повлечена тангента на кружницата која кружницата ја допира во точката D. Нека T' е пресекот на нормалата повлечена од точката D на правата ST и правата ST. Докажи дека $\overline{ST}\cdot\overline{ST'} = r^2$.

Решение. Правата DT е тангента на кружницата, па затоа $SD \perp DT$, т.е. $\triangle DST$ е правоаголен (цртеж десно). Понатаму, правоаголните триаголници DST и DST' имаат заеднички остар агол, па затоа се слични. Од сличноста на овие триаголници следува



$$\overline{DS} : \overline{ST'} = \overline{ST} : \overline{DS}\text{, т.е. } \overline{ST'}\cdot\overline{ST} = \overline{DS}^2,$$

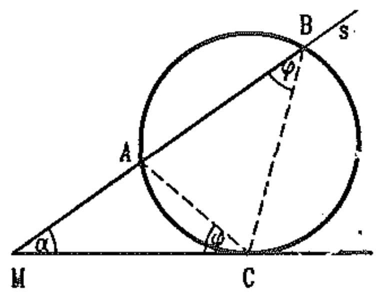
па затоа $\overline{ST'}\cdot\overline{ST} = r^2$.

214. Даден се кружница k и точка M надвор од неа. Низ точката M се повлечени секанта s и тангента t. Секантата s ја сече кружницата во точките A и B, а тангентата t ја допира кружницата во точката C. Определи ја должината на отсечката MC ако $\overline{MA} = 4\,cm$ и $\overline{MB} = 9\,cm$.

Решение. Имаме $\measuredangle CMA = \measuredangle CMB$ и $\measuredangle MCA = \measuredangle MBC$ како агол меѓу тангента и тетива и периферисκи агол над истата тетива. Според тоа, $\triangle MBC \sim \triangle MCA$, па затоа важи

$$\overline{MA} : \overline{MC} = \overline{MC} : \overline{MB},$$

т.е. $\overline{MC}^2 = \overline{MA}\cdot\overline{MB} = 4\cdot 9 = 36$. Значи, $\overline{MC} = 6\,cm$.

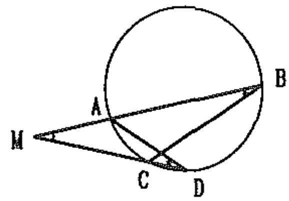


215. Дадени се кружница и во нејзината надворешност точка M. Низ точката M се повлечени прави s_1 и s_2 кои дадената кружница ја сечат

во точките A и B, односно C и D. Ако $\overline{MA}=2\,cm$, $\overline{MB}=6\,cm$ и $\overline{MC}=3\,cm$, определи ја должината на отсечката CD.

Решение. Триаголниците MAD и MBC имаат заеднички агол во темето M и важи $\measuredangle MDA=\measuredangle MBC$ како агли над иста тетива AC, па затоа тие се слични. Од сличноста следува

$$\overline{MA}:\overline{MD}=\overline{MC}:\overline{MB},$$



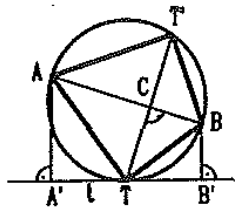
па затоа

$$2:\overline{MD}=3:6,\ \text{т.е.}\ \overline{MD}=4\,cm.$$

Значи,

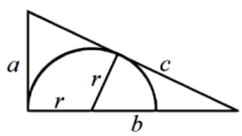
$$\overline{CD}=\overline{MD}-\overline{MC}=4-3=1\,cm.$$

216. Дадена е кружница k со дијаметар AB. Нека t е произволна тангента на k. Ако A' и B' се подножјата на нормалите повлечени од A и B кон t, соодветно, тогаш $\overline{AA'}+\overline{BB'}=\overline{AB}$. Докажи!



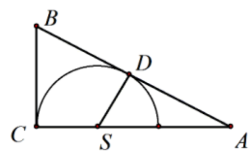
Решение. Нека допирната точка на тангентата и кружницата е T и нека нормалата повлечена од T кон дијаметарот AB го сече дијаметарот во точката C и по втор пат ја сече кружницата во точката T' (цртеж десно). Триаголникот ATT' е рамнокрак, па затоа $\measuredangle ATC=\measuredangle AT'C$. Понатаму, $\measuredangle ATA'=\measuredangle ATT'$ како агол меѓу тангента и тетива и периферски агол над тетивата. Според тоа, $\triangle AA'T\cong\triangle ACT$, па затоа $\overline{AA'}=\overline{AC}$. На потполно идентичен начин се докажува дека $\overline{BB'}=\overline{BC}$, па затоа $\overline{AA'}+\overline{BB'}=\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$.

217. На цртежот е даден правоаголен триаголник со страни a,b,c. Во триаголникот е впишана полукружница со радиус r. Изрази го радиусот r со помош на страните a,b и c.



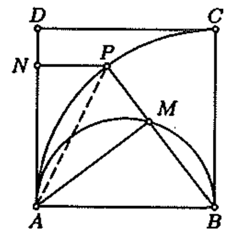
Решение. Нека $\overline{CS}=\overline{SD}=r$. Тогаш $\overline{AS}=b-r$. Бидејќи AB е тангента на полукружницата во точката D важи $SD\perp AB$. Според тоа, важи

$$\measuredangle SDA=90^\circ=\measuredangle ACB\ \text{и}\ \measuredangle DAS=\measuredangle BAC,$$



па затоа важи $\triangle DAS\sim\triangle CAB$. Од сличноста следува $\overline{AS}:\overline{AB}=\overline{SD}:\overline{BC}$, т.е. $(b-r):c=r:a$, па е $cr = a(b-r)$, од каде наоѓаме $r = \frac{ab}{a+c}$.

218. Во квадратот $ABCD$ над страната AB како над дијаметар е конструирана полукружница k. Потоа е конструиран кружниот лак $l = AC$ со центар во B. Нека P е произволна точка од лакот l, M е пресечната точка на отсечката BP и полукружницата k и N е подножјето на нормалата повлечена од P кон страната на квадратот AD. Докажи дека $\overline{MP} = \overline{NP}$.

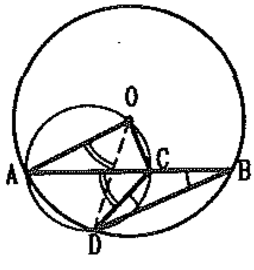


Решение. Нека $\measuredangle ABM = \measuredangle ABP = \varphi$. Триаголникот ABM е правоаголен, па затоа $\measuredangle BAM = 90^\circ - \varphi$. Понатаму, $\overline{BA} = \overline{BP}$ и триаголникот ABP е рамнокрак, па затоа $\measuredangle BAP = \measuredangle APB = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$. Значи,

$\measuredangle NAP = \measuredangle NAB - \measuredangle PAB = \frac{\varphi}{2}$.

Слично, $\measuredangle MAP = \measuredangle BAP - \measuredangle BAM = \frac{\varphi}{2}$. Според тоа, триаголниците AMP и ANP имаат заедничка страна и сите агли им се еднакви, па затоа се складни. Од складноста на овие триаголници следува $\overline{MP} = \overline{NP}$.

219. Дадена се кружница $k(O,r)$ и нејзина тетива AB, која не е дијаметар. На тетивата е избрана произволна точка C. Со D да ја означиме втората пресечна точка на кружницата k и опишаната кружница околу $\triangle OAC$. Докажи дека $\overline{CD} = \overline{BC}$



Решение. Нека $\measuredangle ABD = \varphi$ (цртеж десно). Тогаш $\measuredangle AOD = 2\varphi$, како централен агол над тетивата AD во кружницата $k(O,r)$. Понатаму. $\measuredangle AOD = \measuredangle ACD = 2\varphi$ како периферијски агол над тетивата AD во кружницата $k(AOD)$. Но, $\measuredangle ACD$ е надворешен за $\triangle DBC$, па затоа

$$\measuredangle CDB = \measuredangle ACD - \measuredangle CBD = 2\varphi - \varphi = \varphi.$$

Последното значи дека $\triangle DBC$ е рамнокрак со основа BD, па затоа $\overline{CD} = \overline{BC}$.

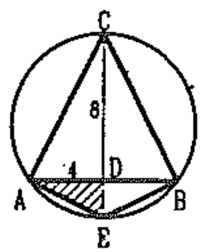
220. Во правоаголен $\triangle ABC$ висината CD повлечена кон хипотенузата ја дели хипотенузата на отсечки $\overline{AD}=32\,cm$ и $\overline{BD}=18\,cm$. Определи ја плоштината на кругот впишан во $\triangle ABC$.

Решение. Аглите CAD и BCD се еднакви како агли со нормални краци, па затоа правоаголните триаголници CAD и BCD се слични. Оттука следува $\overline{CD}:32=18:\overline{CD}$, па затоа $\overline{CD}=24\,cm$. Од Питагоровата теорема применета на $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ добиваме $\overline{AC}=40\,cm$ и $\overline{BC}=30\,cm$. Значи, плоштината на триаголникот е $P=\frac{30\cdot 40}{2}=600\,cm^2$. Понатаму, ако S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и r е нејзиниот радиус, тогаш

$$P=P_{\triangle BCS}+P_{\triangle ACS}+P_{\triangle ABS},$$

па затоа $600=\frac{30r}{2}+\frac{40r}{2}+\frac{50r}{2}$, т.е. $r=10\,cm$. Конечно, плоштината на впишаниот круг е $P_k=\pi r^2=100\pi\,cm^2$.

221. Даден е рамнокрак триаголник со основа и соодветната висина еднакви на $8\,cm$. Определи ја плоштината на опишаниот круг околу овој триаголник.



Решение. Нека AB е основата на рамнокракиот триаголник и нека правата определена со висината CD која соодветствува на основата по втор пат ја сече кружницата во точката E (цртеж десно). Тогаш триаголникот CEA е правоаголен и има ист остар агол со правоаголниот триаголник CAD, па затоа овие триаголници се слични. Од докажаната сличност следува $\overline{DE}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{CD}$, па затоа $\overline{DE}:4=4:8$, т.е. $\overline{DE}=2\,cm$. Според тоа, $\overline{CD}=\overline{CD}+\overline{DE}=10\,cm$, па затоа $R=5\,cm$. Конечно плоштината на кругот опишан околу триаголникот е $\pi R^2=25\pi\,cm^2$.

222. Даден е рамнокрак трапез со основи $a=24\,cm$, $b=10\,cm$ и крак $c=13\sqrt{2}\,cm$. Пресметај ја плоштината на кругот опишан околу дадениот трапез?

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот трапез, $\overline{AB}=24\,cm$, $\overline{CD}=10\,cm$, O е центарот на опишаната кружница, P е средината на основата AB и Q е средината на основата CD (направи цртеж). Тогаш

$$\overline{PQ}=\sqrt{(13\sqrt{2})^2-(12-5)^2}=17\,cm.$$

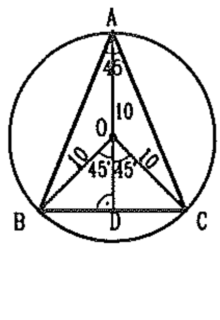
Ставаме $\overline{OP}=x$ и добиваме $r^2=\overline{OB}^2=x^2+12^2=(17-x)^2+5^2=\overline{OC}^2$ од каде наоѓаме $x=3cm$, $r=13cm$ и $P=169\pi\,cm^2$.

223. Околу рамнокрак трапез со основи $24cm$ и $10cm$, а висина еднаква на средната линија на трапезот, е опишан круг. Определи колку проценти од плоштината на кругот зафаќа трапезот.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот трапез со поголема основа AB и нека DD' е негова висина, O е центарот на опишаниот круг и r е неговиот радиус (направи цртеж). Според условот на задачата $\overline{DD'}=\frac{10+24}{2}=17\,cm$, $\overline{AD'}=\frac{24-10}{2}=7\,cm$ и $\overline{D'B}=24-7=17\,cm$. Од $\overline{DD'}=\overline{D'B}$ следува $\measuredangle DBA=45^\circ$, па затоа централниот агол на опишаниот круг над кракот AD е $\measuredangle DOA=90^\circ$. Затоа, $r=\frac{\overline{DA}\sqrt{2}}{2}$ и како $\overline{DA}=\sqrt{\overline{DD'}^2+\overline{AD'}^2}=13\sqrt{2}\,cm$ добиваме $r=13cm$. Значи, плоштината на опишаниот круг е еднаква на $13^2\pi=169\pi\,cm^2$, а плоштината на трапезот е еднаква на $17\cdot17=289\,cm^2$. Значи трапезот зафаќа $\frac{289\cdot100}{169\pi}\approx54,4344\%$ од површината на кругот.

224. Во кружница со радиус $R=10cm$ е впишан рамнокрак триаголник ABC со агол при врвот A еднаков на 45°. Определи ја плоштината на кружниот отсечок определен со основата BC и помалиот лак BC.

Решение. Нека $\measuredangle A$ е периферискиот агол над BC (цртеж десно). Од $\measuredangle A=45^\circ$ следува $\measuredangle BOC=90^\circ$. Според тоа, плоштината на кружниот отсечок е еднаква на разликата на плоштината на четвртина од кругот и плоштината на рамнокракиот правоаголен триаголник BOC, односно

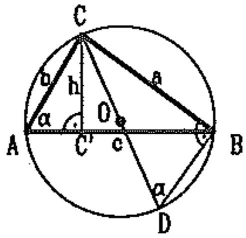


$$P=\tfrac{1}{4}\pi R^2-\tfrac{1}{2}R^2=\tfrac{1}{4}R^2(\pi-2)=25(\pi-2)\,cm^2.$$

225. Даден е триаголник со должини на страни $13cm$, $20cm$ и $21cm$. Пресметај ја плоштината на делот од кругот опишан околу триаголникот, кој се наоѓа надвор од триаголникот.

Решение. Имаме $s=\frac{13+20+21}{2}=27\,cm$, па од Хероновата формула, за плоштината на триаголникот добиваме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\sqrt{27\cdot 14\cdot 8\cdot 6}=126\,cm^2.$$



Нека D е дијаметрално спротивната точка на темето C во опишаната кружница околу триаголникот ABC (цртеж десно). Тогаш $\measuredangle CAB=\measuredangle CDB$ (перифериски агли над иста тетива BC), па затоа правоаголните триаголници CAC' и CDB се слични. Затоа важи $b:h=2R:a$, од каде добиваме $R=\frac{ab}{2h}$. Но, $h=\frac{2P}{c}$, па затоа $R=\frac{abc}{4P}=\frac{65}{6}$. Конечно, бараната плоштина е

$$((\frac{65}{6})^2\pi-126)\,cm^2.$$

226. Должините на соседните страни на еден правоаголник се $\sqrt{404}\,cm$ и $\sqrt{909}\,cm$. Најди ја плоштината на кругот и должината на кружницата која е опишана околу квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на дадениот правоаголник.

Решение. Плоштината на дадениот правоаголник е

$$P_1=\sqrt{404}\cdot\sqrt{909}=\sqrt{4\cdot 101}\cdot\sqrt{9\cdot 101}=2\sqrt{101}\cdot 3\sqrt{101}=606\,cm^2.$$

Ако со a ја означиме должината на страната на квадратот кој има еднаква плоштина како и правоаголникот, тогаш $a^2=606$, што значи дека $a=\sqrt{606}\,cm$. Оттука должината на дијагоналата на квадратот е

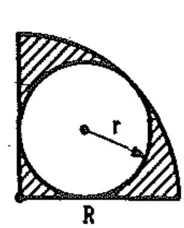
$$d=a\sqrt{2}=\sqrt{606}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{606\cdot 2}=\sqrt{303\cdot 2\cdot 2}=2\sqrt{303}\ \ cm.$$

Според тоа, радиусот на кружницата опишана околу квадратот е

$$r=\frac{d}{2}=\frac{2\sqrt{303}}{2}=\sqrt{303}\,cm.$$

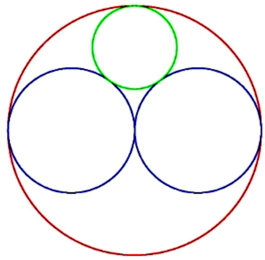
Конечно, должината на кружницата е $L=2r\pi=2\sqrt{303}\pi\,cm$, а плоштината е $P=\pi r^2=(\sqrt{303})^2\pi=303\pi\,cm$.

227. Во правоаголен исечок со радиус R вписан е круг со радиус r (цртеж десно). Изрази ја плоштината на штрафираниот дел на добиената фигура во зависност од R.

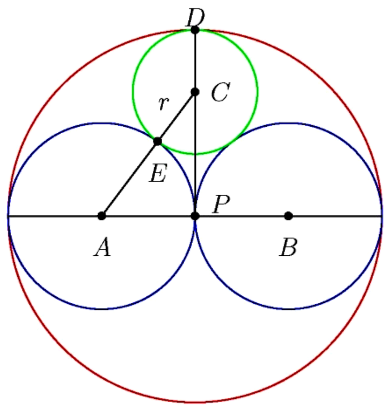


Решение. Нека O и S се центрите на кружниците со радиус R и r, соодветно и T е нивната допирна точка. Точките O,S и допирните точки на кружницата со радиус r со краците на правиот агол се темиња на квадрат со страна r, па затоа $\overline{OS}=r\sqrt{2}$. Понатаму, точките O,S и T се колинеарни, па затоа $R=r(\sqrt{2}+1)$. Затоа $P=\frac{1}{4}R^2\pi-(\frac{R}{\sqrt{2}+1})^2\pi$.

228. Во рамнината се дадени четири кружници така што секоја од нив ги допира останатите три како на цртежот десно. Најголемата кружница има радиус 2, а секоја од средните кружници има радиус 1. Определи го радиусот на најмалата кружница.



Решение. Нека A,B,P и C се центрите на дадените кружници. Притоа точката P е допирната точка на двете кружници со средна големина. Понатаму, заедничката тангента на двете кружници со средна големина минува низ точката C и точката D која е допирна меѓу најмалата и најголемата кружница. Уште повеќе, отсечката AC ја содржи точката E која е допирната точка меѓу најмалата и една од средните кружници. Со r да го означиме радиусот на најмалата кружница. Во правоаголниот триаголник CAP имаме



$$\overline{AP}=1,\ \overline{AC}=\overline{AE}+\overline{EC}=1+r \text{ и } \overline{PC}=\overline{PD}-\overline{DC}=2-r,$$

па затоа

$$(1+r)^2=1^2+(2-r)^2$$
$$1+2r+r^2=5-4r+r^2$$
$$r=\frac{2}{3}.$$

229. Правоаголен триаголник има хипотенуза со должина $5cm$ и висина повлечена кон хипотенузата $2,4cm$. Познато е дека мерните броеви на катетите на триаголникот изразени во сантиметри се природни

броеви. Над страните на триаголникот, во неговата надворешност се нацртани три полукруга. Определи ги плоштината и периметарот на добиената фигура.

Решение. Плоштината на триаголникот е $P=\frac{ch}{2}=\frac{5\cdot 2,4}{2}=6\,cm^2$. Ако a и b се дожните на катетите на триаголникот, тогаш $P=\frac{ab}{2}$, па затоа $\frac{ab}{2}=6$, т.е. $ab=12$. Бидејќи мерните броеви a и b се природни броеви од последното равенство следува

$$(a,b)\in\{(1,12),(2,6),(3,4),(4,3),(6,2),(12,1)\}$$

и како должината на хипотенузата е $5\,cm$, со непосредна проверка од Питагоровата теорема следува дека должините на катетите се $3\,cm$ и $4\,cm$. Конечно, периметарот на добиената фигура е еднаков на

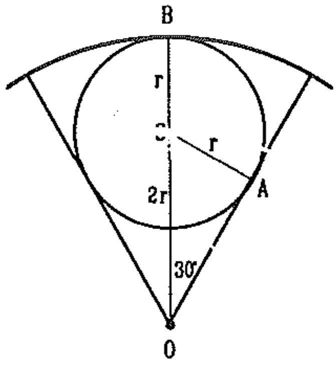
$$\tfrac{1}{2}\pi a+\tfrac{1}{2}\pi b+\tfrac{1}{2}\pi c=\tfrac{1}{2}\pi(a+b+c)=\tfrac{1}{2}\pi\cdot 12=6\pi.$$

За плоштината на добиената фигура добиваме

$$\tfrac{ab}{2}+\tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{a}{2})^2+\tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{b}{2})^2+\tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{c}{2})^2=6+\tfrac{1}{2}\pi((\tfrac{3}{2})^2+2^2+(\tfrac{5}{2})^2)=(6+\tfrac{25}{5})\,cm^2$$

230. Во кружен исечок со големина на шестина на кругот впишан е нов круг. Определи го односот на плоштиние на кружниот исечок и кругот које впишан во него.

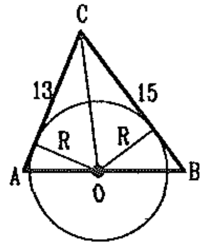
Решение. Од центарот на малиот круг конструираме нормала $r=SA$ на радиусот $R=OB$ на кружниот исечок и добиваме триаголник OSA кој е половина од рамностран триаголник. Отсечката OS ја продолжуваме до големиот круг, до точката B, па затоа $\overline{SB}=r$ и $\overline{OB}=3r$ (цртеж десно). Значи, $r=3r$, па затоа плоштината на малиот и големиот круг се



однесува како $(3r)^2:r^2=9:1$. Конечно, бидејќи кружниот исечок е шестина од големиот круг, заклучуваме дека плоштината на кружниот исечок и големиот круг се однесуваат како $\frac{9}{6}:1=3:2$.

231. Даден е $\triangle ABC$ со должини на страни $\overline{AB}=14\,cm,$ $\overline{BC}=15\,cm$ и $\overline{CA}=13\,cm$ и кружница чиј центар припаѓа на страната AB и ги до-

пира страните BC и CA. Определи ја плоштината на делот од триаголникот кој се наоѓа надвор од кружницата.

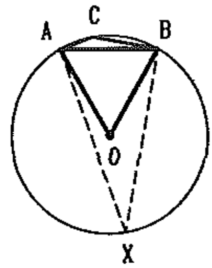


Решение. Имаме $s=\frac{14+15+13}{2}=21cm$, па ако ја искористиме Хероновата формула, за плоштината на триаголникот добиваме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{21\cdot 7\cdot 6\cdot 8}=84\,cm^2.$$

Нека O е центарот на дадената кружница (види цртеж). Бидејќи $P_{\triangle ABC}=P_{\triangle AOC}+P_{\triangle BOC}$, заклучуваме дека $84=\frac{15R}{2}+\frac{13R}{2}=14R$. Значи, $R=6\,cm$. Според тоа плоштината на полукругот е еднаква на $\frac{6^2\pi}{2}=18\pi\,cm^2$, а плоштината на делот кој се наоѓа надвор од кружницата е еднаква на $(84-18\pi)\,cm^2$.

232. Должината на страната AB на триаголникот ABC е еднаква на $10\,cm$ и аголот наспроти неа е еднаков на 150°. Определи ја плоштината на опишаниот круг околу триаголникот ABC.



Решение. Бидејќи централниот агол $\measuredangle ACB=150^\circ$, добиваме дека периферискиот агол е $\measuredangle AXB=30^\circ$. Тоа значи дека централниот агол $\measuredangle AOB=60^\circ$ (цртеж десно). Според тоа, триаголникот AOB е рамностран, па затоа $\overline{AB}=\overline{AO}=\overline{BO}=10\,cm$. Конечно,плоштината на кругот опишан околу триаголникот ABC е еднаква на $10^2\pi\,cm^2$.

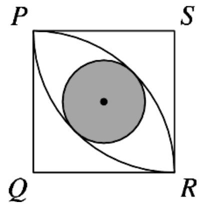
233. Во правоаголен триаголник должината на едната катета е $24\,cm$, а хипотенузата е за $16\,cm$ подолга од другата катета. Определи ги плоштината на овој триаголник и плоштината на кругот опишан околу него.

Решение. Нека b е должината на непозната катета. Тогаш должината на хипотенузата е еднаква на $b+16$ и од Питагоровата теорема следува

$$24^2+b^2=(16+b)^2,$$

од каде по квадрирањето добиваме $32b+256=576$, односно $b=10\,cm$. Според тоа, плоштината на триаголникот е $P=\frac{24\cdot 10}{2}=120\,cm^2$, а како радиусот на опишаната кружница е еднаков на половина од хипотенузата, т.е. $r=\frac{16+10}{2}=13\,cm$, за плоштината на опишаниот круг добиваме $P'=\pi\cdot 13^2=169\pi\, cm^2$.

234. Две четвртини од кружници, чиј центри се во темињата S и Q на квадратот $PQRS$ со должина на страна 2 ги допираат страните на овој квадрат. Во пресекот на двете четвртини кружници е нацртан круг со најголем можен радиус (цртеж десно). Определи ја плоштината на овој круг?



Решение. Нека центарот на сивиот круг го означиме со O, а пресеците на дијагоналата SQ со кружницата која го ограничува сивиот круг (истовремено тоа се пресеците на четвртини од кружниците со малата кружница која го ограничува сивиот круг) ги означиме со A и B каде точката A е поблиску до точката Q (направи цртеж). Дијагоналата на квадратот е $\overline{SQ}=2\sqrt{2}$, додека $\overline{SO}=\overline{QO}=\sqrt{2}$. За радиусот на малата кружница која го ограничува сивиот круг, имаме дека $r=\overline{QB}-\overline{QO}=2-\sqrt{2}$. Според тоа, плоштината која се бара е

$$P=r^2\pi=(2-\sqrt{2})^2\pi=(4-4\sqrt{2}+2)\pi=(6-4\sqrt{2})\pi$$

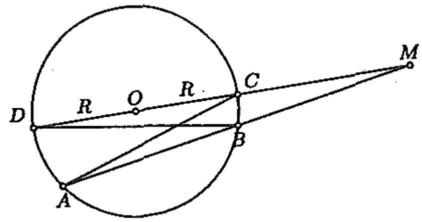
235. Даден е $\triangle ABC$ со должини на страни $a=15\,cm, b=13\,cm, c=14\,cm$. Нека точките D и E припаѓаат на страната AB и се такви што CD е висина, а CE е тежишна линија на $\triangle ABC$. Определи ја плоштината на кругот опишан околу $\triangle CDE$.

Решение. Од триаголниците ACD и BCD, со примена на Питагоровата теорема, добиваме $\overline{AD}=5\,cm$, $\overline{BD}=9\,cm$ и $\overline{CD}=12\,cm$ (направи цртеж). Бидејќи $\overline{AE}=\overline{BE}=7\,cm$, добиваме дека $\overline{DE}=7-5=2\,cm$, па од $\triangle CDE$ добиваме $\overline{CE}^2=144+4=148\,cm^2$, т.е. $\overline{CE}=2\sqrt{37}\,cm$. Но, $\triangle CDE$ е правоаголен, па затоа раиусот на опишаниот круг е еднаков на половина од хипотенузата, т.е. на $\sqrt{37}\,cm$. Конечно, плоштината на опишаниот круг околу $\triangle CDE$ е $P=37\pi\, cm^2$.

236. Дадена е кружница $k(O,r)$ и точка M во нејзината надворешност. Низ точката M е повлечена права s која кружницата ја сече во точ-

ките A и B. Определи ги периметарот и плоштината на кругот $k(O,r)$ ако $\overline{MA}=16\,cm, \overline{MB}=9\,cm$ и $\overline{MO}=13\,cm$.

Решение. Нека радиусот на кружницата е R и нека OM ја сече кружницата во точките C и D (цртеж десно). Тогаш $\measuredangle AMC=\measuredangle BMD$ и $\measuredangle MAC=\measuredangle MDB$ (периферски агли над тетивата BC), па затоа триаголниците MAC и MBD се слични. Од сличноста следува



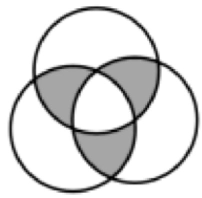
$$\overline{MA}:\overline{MD}=\overline{MC}:\overline{MB},$$

т.е.

$$16:(13+r)=(13-r):9,$$

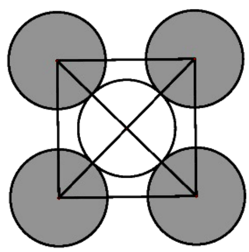
од каде наоѓаме $R=5\,cm$. Според тоа, периметарот на кругот е $10\pi\,cm$, а неговата плоштина е $25\pi\,cm^2$.

237. Три кружници со радиус 2 cm се сечат во центрите, т.е. секои две кружници се сечат во центарот на третата кружница (види цртеж). Колкава е плоштината на делот обоен со сиво.



Упатство. Со помош на плоштина на кружни исечоци и формулата за плоштина на триаголник ако се познати двете страни и аголот помеѓу нив се добива дека збирот од плоштините на сивите делови е $r\pi$, каде што r е радиусот на кружниците. Според тоа, плоштината на делот обоен во сиво е 2π.

238. Пет складни кружници се допираат како што е прикажано на цртежот десно. Средините на надворешните кружници се темиња на квадрат. Определи го односот на збирот на плоштините на сивите кругови и плоштината на белиот дел од квадратот.

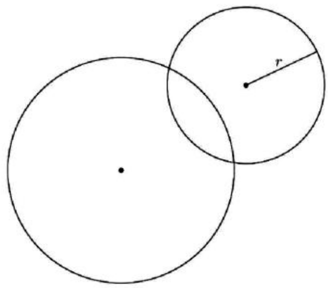


Решение. Нека r е должината на радиусот на складните кружници. Должината на дијагоналата d на квадратот е $4r$, па затоа неговата плоштина е $P=\frac{d^2}{2}=8r^2$.

Збирот на плоштините на сивите кругови е $P'=4\pi r^2$. Во внатрешноста на квадратот се наоѓаат 4 четвртини од затемнетите складни кругови, односно плотината на затаменетиот дел е еднаква на плоштината на еден од складните кругови, т.е. на πr^2. Според тоа, плоштината на белиот дел од квадратот е $P"=P-\pi r^2=(8-\pi)r^2$. Значи, бараниот однос на плоштините е $\frac{P'}{P"}=\frac{4\pi}{8-\pi}$.

239. Два круга се сечат така што $\frac{6}{7}$ од поголемиот круг е надвор од помалиот круг, а $\frac{3}{4}$ од помалиот круг е надвор од поголемиот круг. Ако радиусот на поголемиот круг е $7\,cm$, определи ја плоштината на помалиот круг.

Решение. Според усовот на задачата $\frac{1}{7}$ од големиот круг е во малиот круг и $\frac{1}{4}$ од малиот круг е во големиот круг, што значи дека $\frac{1}{7}$ од големиот круг е еднаква на $\frac{1}{4}$ од малиот круг. Ако радиусот на малиот круг е r, тогаш

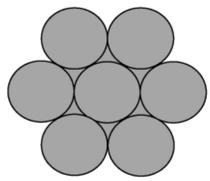


$$\frac{1}{7}\cdot 7^2\pi=\frac{1}{4}\cdot r^2\pi \text{, т.е. } r^2=28.$$

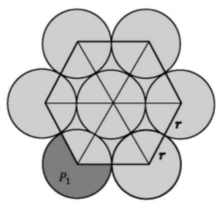
Според тоа, за плоштината на малиот круг добиваме

$$P=r^2\pi=28\pi\,cm^2$$

240. Седум кружници со радиус r се допираат како на цртежот десно. Определи ја плоштината на сивата фигура.



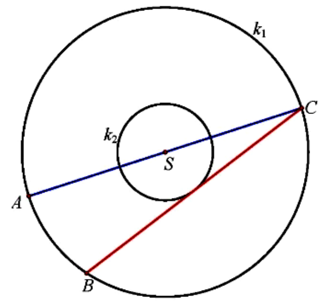
Решение. Ако ги поврземе центрите на надворешните шест кружници ќе добиеме правилен шестаголник со должина на страна $2r$. Плоштината на овој шестаголник е



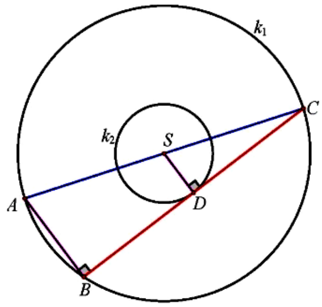
$$P'=6\cdot\frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4}=6r^2\sqrt{3}.$$

Преостанатата плоштина на сивата фигура се состои од шест еднакви кружни исечоци со агли од 240°. Секој од нив има плоштина еднаква на $\frac{2}{3}$ од плоштината на кругот. Значи, $P"=\frac{2}{3}\pi r^2$. Конечно, бараната плоштина е

$$P=P'+6P"=6r^2\sqrt{3}+6\cdot\frac{2}{3}\pi r^2=6r^2\sqrt{3}+4\pi r^2.$$



241. На цртежот десно се дадени две концентрични кружници k_1 и k_2. Должините на радиусите на овие кружници се однесуваат како $3:1$. Отсечката AC е дијаметар ба кружницата k_1, а отсечката BC е тетива на k_1 и е тангента на k_2. Ако $\overline{AB}=12\,cm$, пресметај ја плоштината на прстенот определен со кружниците k_1 и k_2.



Решение. Нека S е центарот на кружниците, а D е допирната точка на тангентата BC на кружницта k_2. Нека r_1 и r_2 се должините на радиусите на кружниците k_1 и k_2, соодветно. Од условот на задачата следува $r_1:r_2=3:1$, т.е. $r_1=3r_2$. Од Талесовата теорема следува дека периферниот агол $\measuredangle ABC$ над дијаметарот AC е прав агол, т.е. $\triangle ABC$ е правоаголен. Тетивата BC на кружницата k_1 е тангента на кружницата k_2, па затоа е нормална на радиусот SD. Значи и $\triangle SDC$ е правоаголен. Триаголниците $\measuredangle ABC$ и $\triangle SDC$ се слични (имаат заеднички агол при темето C и двата имаат по еден прав агол). Од сличноста на овие триаголници следува $\overline{AB}:\overline{SD}=\overline{AC}:\overline{SC}$, т.е. $12:r_2=2r_1:r_1$ од каде добиваме $r_2=6\,cm$. Значи, $r_1=3r_2=18\,cm$. Конечно, плоштината на кружниот прстен ограничен со дадените кружници е

$$P=\pi(r_1^2-r_2^2)=(324-36)\pi=288\pi\,cm^2.$$

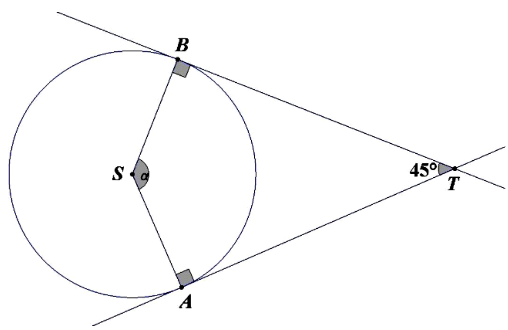
242. Од точката T се повлечени тангенти на кружница со радиус $4\,cm$. Определи ја должината на кружниот лак на кружницата кој се гледа од точката T, ако тангентите зафаќаат агол од 45°.

Решение. Имаме $TB\perp SB$ и $TA\perp SA$, па затоа важи

$$\measuredangle SAT=\measuredangle ABT=90^\circ.$$

Сега од четириаголникот $ATBS$ следува

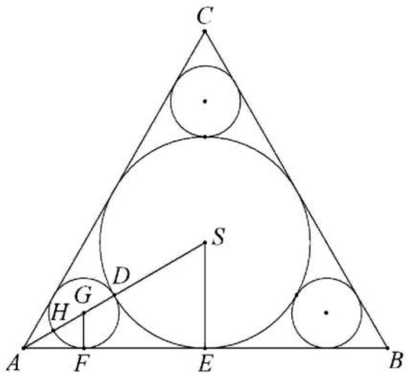
$\measuredangle BSA=180^\circ-2\cdot 90^\circ-45^\circ=135^\circ$



па затоа за должината на кружниот лак кој се гледа од точката T добиваме

$$l=\frac{\pi r\cdot 135^\circ}{180^\circ}=\frac{3\pi r}{4}=3\pi\, cm.$$

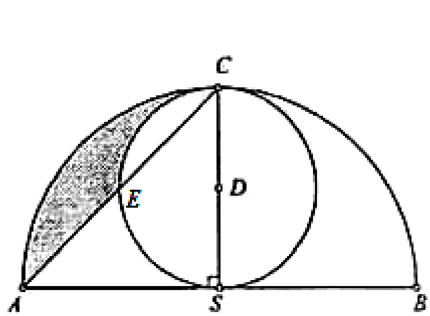
243. Во рамностран триаголник се впишани три кружници така што секоја допира по две страни од триаголникот и ја допира впишаната кружница k во триаголникот. Определи го односот на плоштината на впишаниот круг и збирот на плоштините на трите мали круга.



Решение. Нека точката S е центар на впишаната кружница. Значи, точката S е пресек на симетралите на аглите. Имаме, $\measuredangle BAC=60^\circ$, а правата AS е симетрала на $\measuredangle BAC$ и затоа $\measuredangle EAS=30^\circ$. Точката E е допирна, па затоа $SE\perp AB$, т.е. $\measuredangle AES=90^\circ$. Точката F е допирна, па затоа $GF\perp AB$, т.е. $\measuredangle AFG =90^\circ$.

Триаголниците AFG и AES се правоаголни со агли од 30° и 60°, па затоа должината на хипотенузата е двапати поголема од должината на пократката катета, т.е. $\overline{AG}=2\overline{GF}$ и $\overline{AS}=2\overline{SE}$. Со R да го означиме радиусот на поголемиот круг, а со r радиусот на помалиот круг. Имаме $R=\overline{SE}=\overline{SD}$, а како $\overline{AS}=2\overline{SE}$, следува $\overline{AD}=R$, $r=\overline{GD}=\overline{GF}=\overline{GH}$, а како $\overline{AG}=2\overline{GF}$, следува $\overline{AH}=r, R=\overline{AD}=\overline{AH}+\overline{HG}+\overline{GD}=3r$. Плоштината на големиот круг е $P'=\pi R^2=9\pi r^2$, а плоштината на малиот круг е $P"=\pi r^2$. Имкаме $\frac{P'}{3P"}=\frac{9\pi r^2}{3\pi r^2}=3$.

244. Дадена е отсечка AB со должина $16\,cm$. Над AB како над дијаметар е конструирана полукружница. Во полукружницата е впишана кружница со радиус $\overline{DS}=4\,cm$, која полукружницата ја допира во точката C, а от-



сечката AB ја допира во нејзината средина S (цртеж десно). Потоа е повлечена тетивата AC. Докажи дека плоштината на сивиот дел на цртежот е еднаква на $(12\pi-24)cm^2$.

Решение. Радиусот на полукружницата е $R=\overline{AS}=\overline{SC}=8\,cm$. Нека P_1 е плоштината на кружниот исечок ASC со радиус R. Тогаш $P_1=\frac{\pi R^2}{4}=16\pi\,cm^2$. Понатаму, плоштината на правоаголниот триаголник ASC е $P_{\triangle ASC}=\frac{\overline{AS}\cdot\overline{SC}}{2}=\frac{8\cdot 8}{2}=32\,cm^2$, па затоа плоштината на кружниот отсечок над тетивата AC е еднаква на

$$P_2=P_1-P_{\triangle ASC}=(16\pi-32)\,cm^2.$$

Според Талесовата теорема $\measuredangle CES=90^\circ$, па како $\triangle ASC$, а отсечката ES е висина од темето S повлечена кон основата AC, заклучуваме дека $\overline{AE}=\overline{CE}$. Затоа $ED\,||\,AS$, односно $\measuredangle EDC=90^\circ$. Според тоа, $\triangle EDC$ е рамнокрак правоаголен. За плоштината P_3 на кружниот исечок EDC имаме $P_3=\frac{\pi r^2}{4}=4\pi\,cm^2$, а за плоштината на правоаголниот $\triangle EDC$ имаме $P_{\triangle EDC}=\frac{\overline{DE}\cdot\overline{DC}}{2}=\frac{4\cdot 4}{2}=8\,cm^2$. Според тоа, плоштината на кружниот отсечок над тетивата EC е еднаква на

$$P_4=P_3-P_{\triangle EDC}=(4\pi-8)\,cm^2.$$

Конечно, плоштината на сивата површина е

$$P=P_2-P_4=(16\pi-32-(4\pi-8))\,cm^2=(12\pi-24)\,cm^2.$$

V.7. МНОГУАГОЛНИК

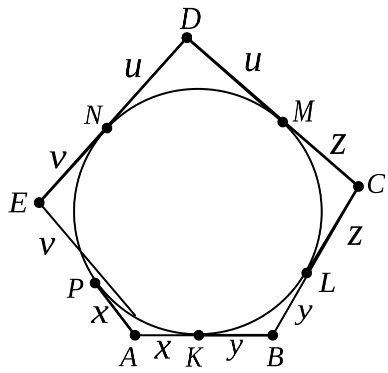
245. Нека $ABCDE$ е петаголник таков што

$$\overline{AB}=4cm,\ \overline{BC}=6cm,\ \overline{CD}=8cm,\ \overline{DE}=7cm \text{ и } \overline{EA}=9cm.$$

Дали во овој петаголник може да се впише кружница? Одговорот да се образложи!

Решение. Нека $ABCDE$ е петаголник таков што $\overline{AB}=4cm$, $\overline{BC}=6cm$, $\overline{CD}=8cm$, $\overline{DE}=7cm$ и $\overline{EA}=9cm$, во кој може да се впише кружница k. Допирните точки на AB, BC, CD, DE, EA со k ќе ги означиме со K, L, M, N, P соодветно (цртеж десно). Тогаш,

$$\overline{PA}=\overline{AK}=x,\ \overline{KB}=\overline{BL}=y,$$
$$\overline{LC}=\overline{CM}=z,\ \overline{MD}=\overline{DN}=u,$$
$$\overline{NE}=\overline{EP}=v$$



и

$$\begin{cases} x+y=4 \\ y+z=6 \\ z+u=8 \\ u+v=7 \\ v+x=9 \end{cases}$$

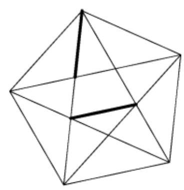
Ако ги собереме равенките, добиваме

$$2(x+y+z+u+v)=34 \Rightarrow x+y+z+u+v=17\,.$$

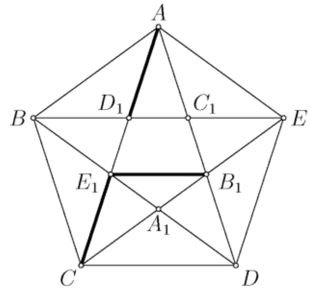
Но, тогаш

$$17=x+y+z+u+v=y+(x+v)+(z+u)=y+9+8=y+17$$

од каде што добиваме дека $y=0$. Ако $y=0$, тогаш $K\equiv B\equiv L$, па како A,K,B се колинеарни и B,L,C се колинеарни добиваме дека A,B и C се колинеарни. Последното противречи на претпоставката дека $ABCDE$ е петаголник. Значи, во петаголникот не може да се впише кружница.



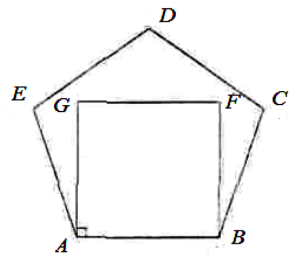
246. На цртежот е даден правилен петаголник во кој се повлечени дијагоналите. Докажи, дека задебелените отсечки имаат еднаква должина.



Решение. Бидејќи $\overline{CE_1}=\overline{AD_1}$, доволно е да докажеме дека триаголникот CB_1E_1 е рамнокрак. Бидејќи дијагоналата на правилен петаголник е паралелна на неговата страна, важи $B_1E_1 \parallel C_1D_1$, односно $E_1B_1 \parallel D_1E$.

Според тоа, $\measuredangle CB_1E_1=\measuredangle CED_1$, како агли со паралелни краци. Заради симетријата на петаголникот триаголникот CED_1 е рамнокрак, па затоа $\measuredangle CED_1=\measuredangle ECD_1$. Конечно, $\measuredangle CB_1E_1=\measuredangle B_1CE_1$, што значи дека триаголникот CB_1E_1 е рамнокрак.

247. Во внатрешноста на правилниот петаголник $ABCDE$ е нацртан квадрат $ABFG$ (цртеж десно). Определи го $\measuredangle ACF$?



Решение. Внатрешниот агол на правилниот петаголник е еднаков на $\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5}=108^\circ$. Според тоа, $\measuredangle CBF=108^\circ-90^\circ=18^\circ$. Триаголникот BCF е рамнокрак, па затоа $\measuredangle BCF=\measuredangle BFC=\frac{180^\circ-18^\circ}{2}=81^\circ$. Бидејќи $\overline{AB}=\overline{BC}$, триаголникот ABC исто така е рамнокрак. Затоа $\measuredangle BCA=\measuredangle BAC$, т.е. $\measuredangle BCA=\frac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$. Конечно,

$$\measuredangle ACF=\measuredangle BCF-\measuredangle BCA=81^\circ-36^\circ=45^\circ.$$

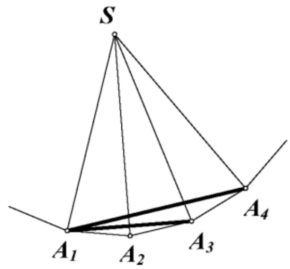
248. Внатрешните агли на два правилни многуаголници се донесуваат како $2:3$. Определи ги сите парови правилни многуаголници кои го имаат ова својство.

Решение. Нека m е бројот на страните на многуаголникот со внатрешен агол α и n е бројот на страните на многуаголникот со внатрешен агол β. Имаме $\alpha:\beta=2:3$, па затоа

$$\frac{(m-2)\cdot 180^\circ}{m}:\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}=2:3, \text{ т.е. } mn+4m=6n.$$

Од последната равенка добиваме $m=6-\frac{24}{n+4}$, односно $n+4|24$ и како $n>0$, добиваме дека $n+4>4$. Според тоа, треба да ги разгледаме само делителите на 24 кои се поголеми од 4, а тоа се 6,8, 12 и 24.
За $n+4=6$, добиваме $n=2$ и тоа не е многуаголник.
За $n+4=8$, добиваме $n=4$ и $m=3$.
За $n+4=12$, добиваме $n=8$ и $m=4$.
За $n+4=24$, добиваме $n=20$ и $m=5$.

249. Даден е правилен многуаголник $A_1A_2A_3...A_n$ кај кој надворешниот агол е девет пати помал од внатрешниот агол.
Определи го аголот меѓу дијагоналите A_1A_3 и A_1A_4.



Решение. Нека α е внатрешниот, а α_1 соседниот надворешен агол на правилниот многуаголник. Од услвот на задачата следува $\alpha=9\alpha_1$ и $\alpha+\alpha_1=180^\circ$, па затоа $10\alpha_1=180^\circ$, т.е. $\alpha_1=18^\circ$. Според тоа, $\alpha=180^\circ-\alpha_1=162^\circ$, па затоа

$$\measuredangle SA_1A_2=\frac{\measuredangle A_1A_2A_3}{2}=81^\circ.$$

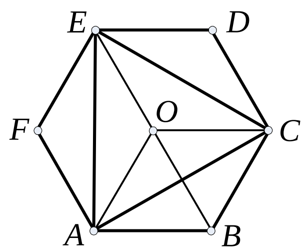
Според тоа,

$$\measuredangle A_3SA_4=180^\circ-2\measuredangle SA_3A_4=180^\circ-2\cdot 81^\circ=18^\circ.$$

Конечно, $\measuredangle A_3A_1A_4=\frac{1}{2}\measuredangle A_3SA_4=\frac{1}{2}\cdot 18=9^\circ$, како периферискi агол на тетивата A_3A_4.

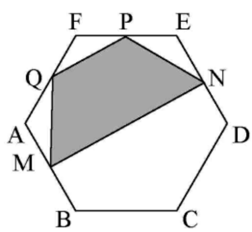
250. Даден е правилен шестаголник *ABCDEF*. Пресметај колкав дел од плоштината на шестаголникот е плоштината на триаголникот *ACE*.

Решение. Нека центарот на правилниот шестаголник го означиме со *O*. Централниот агол *AOB* е еднаков на $\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$. Триаголникот *AOB* е рамнокрак со агол на темето од 60°, т.е. е рамностран. На ист начин се покажува дека триаголникот *BCO* е рамностран, од каде четириаголникот *ABCO* е ромб. Дијагоналата го дели ромбот на два складни триаголници. Значи плоштините на триаголниците *ABC* и *ACO* се еднакви. Од исти причини плоштините на триаголниците *CDE* и *CEO* се еднакви па и плоштините на триаголниците *EFA* и *AOE* се еднакви.



$$P_{ABCDEF}=P_{ABC}+P_{CDE}+P_{EFA}+P_{AOC}+P_{COE}+P_{EOA}=2P_{ACE}.$$

251. На цртежот десно точките M,N,P,Q се средини на страните AB, DE,EF,FA на правилниот шестаголник $ABCDEF$. Определи го односот на плоштините на шестаголникот $ABCDEF$ и четириаголникот $MNPQ$.



Решение. Плоштината на четириаголникот $MNPQ$ е еднаква на половината на плоштината на правилниот шестаголник чии темиња се средините на страните на дадениот шестаголник (Зошто?). Ако со a ја означиме должината на страната на дадениот шестаголник, тогаш бидејќи QP е средна линија на $\triangle AEF$ добиваме дека страната на новодобиениот шестаголник е

$$b=\overline{QP}=\frac{1}{2}\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{MN}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Според тоа,

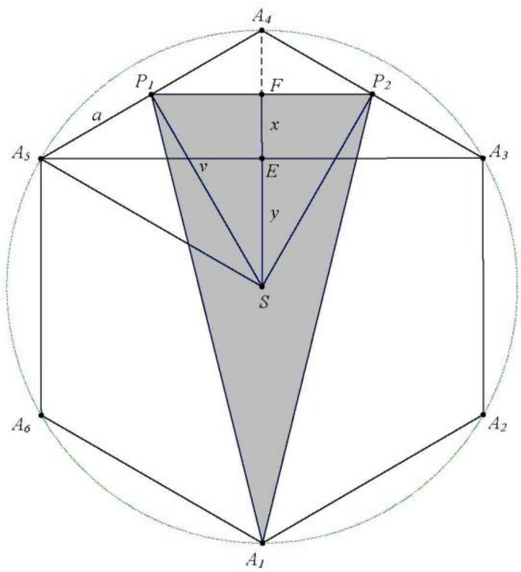
$$P_{ABCDEF}:P_{MNPQ}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}:\left(\frac{1}{2}\frac{3b^2\sqrt{3}}{2}\right)=a^2:\frac{b^2}{2}=a^2:\frac{3a^2}{8}=8:3.$$

252. Даден е правилен шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Точките P_1 и P_2 се средини на страните A_4A_5 и A_3A_4. Определи го односот на плоштините на триаголникот $P_1A_1P_2$ и правилниот шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Решение. Да означиме

$\overline{P_1P_2}=m$, $\overline{FE}=x$,

$\overline{ES}=y$ и $\overline{A_4A_5}=a$.



Тогаш плоштината на шестаголникот е

$$P_6=\frac{6a^2\sqrt{3}}{4},$$

а плоштината на триаголникот $P_1A_1P_2$ е

$$P_3=\frac{m(a+x+y)}{2}.$$

Отсечката P_1P_2 е средна линија на триаголникот $A_5A_3A_4$, па затоа точни се равенствата

$$\overline{P_1P_2}=m=\overline{A_5E}=v \text{ и } \overline{FE}=x=\frac{1}{4}a.$$

Понатаму, $\overline{ES}=y=\frac{a}{2}$, бидејќи y е катета наспроти агол од 30° во правоаголниот триаголник A_5SE со хипотенуза a. Според тоа,

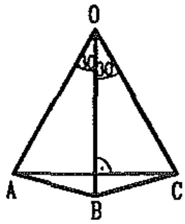
$$P_3=\frac{m(a+x+y)}{2}=\frac{v(a+\frac{a}{4}+\frac{a}{2})}{2}=\frac{7a^2\sqrt{3}}{16},$$

па затоа

$$P_3:P_6=\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}:\frac{6a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{7}{24}.$$

253. Радиусот на кружницата опишана околу правиален дванаесетаголник е $R=12\,cm$. Определи ја плоштината на овој дванаесетаголник.

Решение. На цртежот десно е даден карактеристичниот триаголник на правилниот дванаесетаголник. Имаме,



$$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=12\,cm,$$

а од

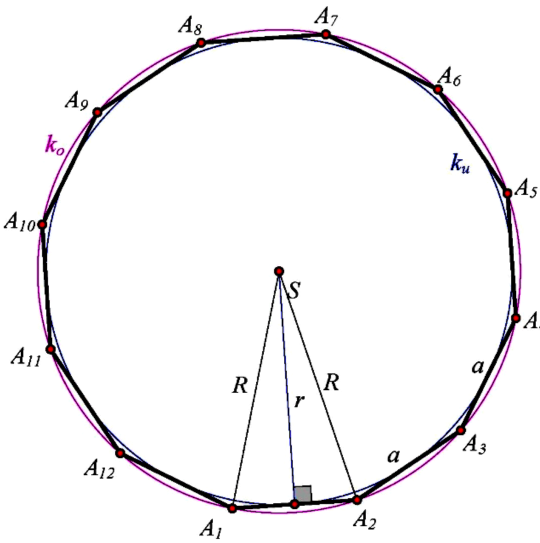
$$\measuredangle AOB=\measuredangle AOC=30^\circ$$

следува $\measuredangle AOC=60^\circ$, па затоа $\triangle ACO$ е рамностран, т.е. $\overline{AC}=12\,cm$. Според тоа, плоштината на дванаесетаголникот е

$$P=6P_{ABCO}=6\cdot\frac{\overline{OB}\cdot\overline{AC}}{2}=3\cdot 12\cdot 12=432\,cm^2.$$

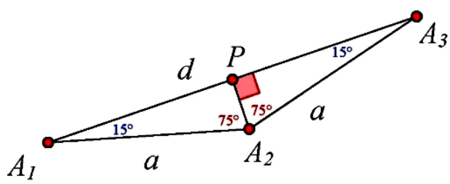
254. Определи ја плоштината на правилниот дванаесетаголник чија најкратка дијагонала е со должина $10\,cm$.

Решение. Темињата на правилниот дванаесетаголник да ги означиме со $A_1A_2...A_{12}$, центарот на опишаната и впишаната кружница со S, должината на страната со a, должината на радиусите на опишаната и впишаната кружница со R и r, соодветно и должината на најкратката дијагонала со d (цртеж десно). Големината на внатрешниот агол на дванаесетаголникот е



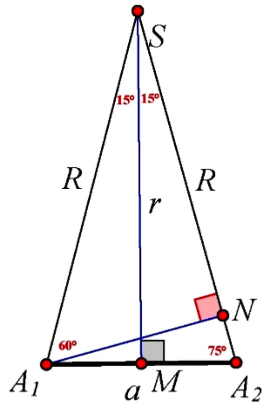
$$\frac{(12-2)\cdot 180^\circ}{12}=150^\circ.$$

Да го разгледаме $\triangle A_1A_2A_3$ и со P да ја означиме средината на страната A_1A_3 (цртеж десно). Тогаш



$$\measuredangle PA_2A_3=\frac{150^\circ}{2}=75^\circ \text{ и } \measuredangle A_2A_3P=90^\circ-75^\circ=15^\circ.$$

Понатаму, $\triangle A_1A_2S$ (цртеж десно) е карактеристичен триаголник за правилниот дванаесетаголник па затоа $\measuredangle A_1SA_2=360^\circ:12=30^\circ$. Нека M е основата на висината повлечена од темето S, а N е подножјето на висината повлечена од темето A_1 во $\triangle A_1A_2S$. Имаме $\measuredangle A_1SM=15^\circ$ и $\measuredangle MA_2S=75^\circ$. Затоа $\triangle PA_2A_3 \sim \triangle MA_2S$, од каде добиваме $r:\frac{d}{2}=R:a$, т.е. $ar=\frac{Rd}{2}$. Понатаму, $\triangle A_1NS$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{A_1N}=\frac{R}{2}$. Според тоа,

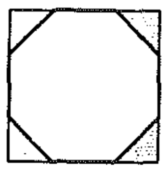


$$P_{12}=12\cdot\frac{ar}{2}=6ar \text{ и } P_{12}=12\cdot P_{\triangle A_1A_2S}=12\frac{R\cdot\overline{A_1N}}{2}=3R^2.$$

Значи, $6\cdot\frac{Rd}{2}=6ar=P_{12}=3R^2$, па затоа $R=d=10\,cm$. Конечно, за плоштината на дванаесетаголникот адобиваме $P_{12}=3\cdot 10^2=300\,cm^2$.

255. Должината на страната на правилен осумаголник е еднаква на $10\,cm$. Определи ја неговата плоштина.

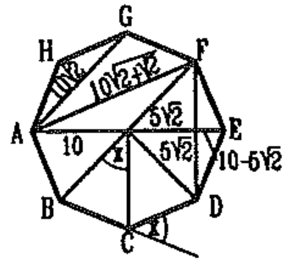
Решение. Дадениот осумаголник го дополнуваме до квадрат (цртеж десно). Плоштината на осумаголникот е еднаква на разликата на плоштината на квадратот и збирот на плоштинитена четирите складни рамнокраки правоаголни триаголници. Ако x е катетата на овие триаголници, тогаш $2x^2=100$, па затоа $x=5\sqrt{2}\,cm$. Конечно,



$$P=(10+10\sqrt{2})^2-4\cdot\frac{(5\sqrt{2})^2}{2}=200(1+\sqrt{2})\,cm^2.$$

256. Внатрешниот агол на еден правилен многуаголник е трипати поголем од надворешниот агол. Определи ги должините на сите дијагонали на овој многуаголник ако радиусот на опишаната кружница околу овој многуаголник е $R=10\,cm$.

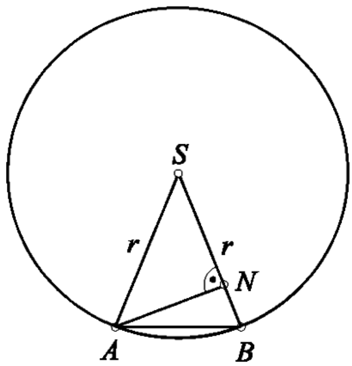
Решение. Нека надворешниот агол е x (види цртеж). Тогаш внатрешниот агол е еданков на $3x$, па затоа $4x=180^\circ$, од каде следува



$x = 45^\circ$. Понатаму, од $n = \frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$ следува дека станува збор за правилен осумаголник. Правилниот осумаголник има три различни должини на дијагоналите и тоа: AG, AF и AE. Бидејќи AG е должината на страната на квадрат со дијагонала $2R = 20\,cm$, добиваме дека $\overline{AG} = 10\sqrt{2}\,cm$. Јасно, $\overline{AE} = 20\,cm$. Триаголникот AFE е правоаголен (Докажи!), па затоа

$$\overline{AF} = 20^2 - (5\sqrt{2})^2 - (10 - 5\sqrt{2})^2, \text{ т.е. } \overline{AF} = 10(2+\sqrt{2})\,cm.$$

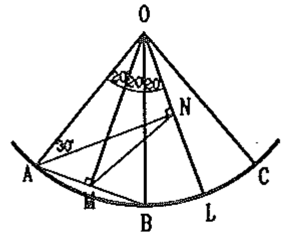
257. Пресметај ја плоштината на правилен осумаголник впишан во кружница со радиус $16\,cm$.



Решение. Да го одделиме карактеристичниот триаголник на правилниот осумаголник $\triangle ABS$. Должините на краците се $8\,cm$. Точката N припаѓа на BS и $AN \perp BS$, т.е. AN е висина на кракот во $\triangle ABS$. Понатаму, од $\measuredangle ASB = 45^\circ$ следува дека $\triangle ANS$ е рамнокрак и правоаголен. Нека $\overline{AN} = \overline{NS} = h$. Вои триаголникот $\triangle ANS$ важи $r = h\sqrt{2}$, па затоа $h\sqrt{2} = 8$, т.е. $h = 4\sqrt{2}$. Плоштината на $\triangle ABS$ е $P_{\triangle ABS} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}cm^2$, па затоа плоштината на осумаголникот е

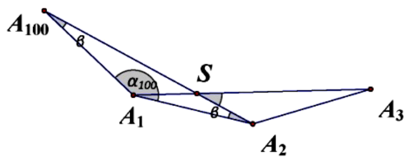
$$P = 8P_{\triangle ABS} = 8 \cdot 16\sqrt{2}cm^2 = 128\sqrt{2}\,cm^2.$$

258. Нека AB и BC се соседни страни на правилен деветаголник, точката L е средина на лакот BC, точката M е средина на отсечката AB и точката N е средина на отсечката OL, каде O е центарот на опишаната кружница околу деветаголникот. Докажи дека $\measuredangle OMN = 30^\circ$.



Решение. Бидејќи AB и BC се страни на правилен деветаголник, добиваме $\measuredangle AOB = \measuredangle BOC = 40^\circ$ (цртеж десно). Понатаму, $\measuredangle BOL = \measuredangle LOC = 20^\circ$, па затоа $\measuredangle AOL = 60^\circ$, што значи дека триаголникот AOL е рамностран. Бидејќи точката N е средина на отсечката OL заклучуваме дека AN е визина на триаголникот AOL и $\measuredangle ANO = 90^\circ$. Сега, бидејќи и $\measuredangle AMO = 90^\circ$ заклучуваме дека четириаголникот $AMNO$ е тетивен, а центарот на опишаната кружница е во средината на отсечката AO. Понатаму, ако искористиме дека периферните агли над иста тетива се еднакви, заклучуваме дека $\measuredangle OMN = \measuredangle OAN = 30^\circ$.

259. Во правиелн 100-аголник $A_1A_2...A_{100}$ дијагоналите A_2A_{100} и A_1A_3 се сечат во точката S. Определи го аголот $\measuredangle A_2SA_3$.



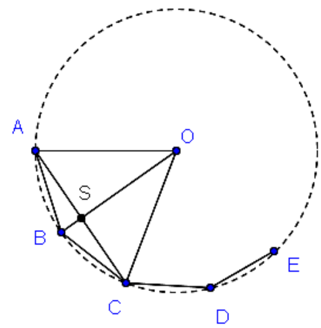
Решение. Внатрешниот агол на правилен 100-аголник е

$$\alpha_{100} = \frac{(100-2)\cdot 180^\circ}{100} = 176,4^\circ.$$

Понатаму $\triangle A_1A_2A_{100}$ е рамнокрак и аголот при врвот е α_{100}, па затоа аголот при основата е $\beta = \frac{180^\circ - \alpha_{100}}{2} = \frac{180^\circ - 176,4^\circ}{2} = 1,8^\circ$. Аналогно $\triangle A_1A_2A_3$ е рамнокрак, добиваме $\measuredangle A_3A_1A_2 = 1,8^\circ$. Сега, $\measuredangle A_3SA_2$ е надворешен за $\triangle A_1A_2S$, па оттука следува дека $\measuredangle A_3SA_2 = \measuredangle SA_1A_2 + \measuredangle A_1A_2S = 1,8^\circ + 1,8^\circ = 3,6^\circ$.

260. Должината на страната на правилен $2n-$аголник изрази ја како функција од должината на страната на правилен $n-$аголник, ако двата многуаголници се впишани во кружница со радиусу R.

Решение. Нека $ABCDE...$ е правилен многуаголник впишан во кружницата $k(O,R)$ и нека $\overline{AB} = a_{2n}$ и $\overline{AC} = a_n$ (цртеж десно). Лесно се докажува дека OB е сметрала на отсечката AC, па од правоаголниот триаголник ABS следува



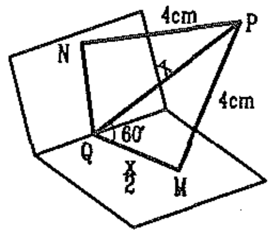
$$a_{2n}^2 = (\tfrac{a_n}{2})^2 + \overline{BS}^2 = \tfrac{a_n^2}{4} + (R - \overline{OS})^2$$
$$= \tfrac{a_n^2}{4} + (R - \sqrt{4R^2 - a_n^2})^2$$

од каде добиваме $a_{2n} = \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + (R - \sqrt{4R^2 - a_n^2})^2}$.

V.7. СТЕРЕОМЕТРИЈА

261. Во внатрешноста на диедар со агол 120° избрана е точка P која е оддалечена по $4\,cm$ од двете страни на диедарот. Определи го најкраткото растојание на точката P до работ на диедарот.

Решение. Нека M и N се подножјата на нормалите повлечени од точката P кон рамнините на диедарот, а Q е подножјето на нормалите повлечени од точките M и N на работ на диедарот (цртеж десно). Тогаш

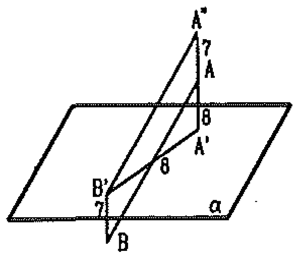


$$\overline{MP}=\overline{NP}=4\,cm \text{ и } \measuredangle MQN=120^\circ.$$

Бидејќи точката P е еднакво оддалечена од правите QM и QN, таа припаѓа на симетралата на $\measuredangle MQN$, па затоа $\measuredangle PQN=\measuredangle PQM=60^\circ$. Според тоа, $\triangle QMP$ е половина од рамностран триаголник со висина $\overline{MP}=4\,cm$. Сега бараното растојание е $\overline{PQ}=x$ и важи $\overline{MP}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$, т.е. $4=\frac{x\sqrt{3}}{2}$, од каде добиваме $x=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

262. Дадени се точките A и B кои се наоѓаат на различни страни на рамнината α и нивните нормални проекции A' и B' на рамнината α, соодветно. Ако $\overline{A'B'}=\overline{AA'}=8\,cm$ и $\overline{BB'}=7\,cm$, определи ја должината на отсечката AB.

Решение. Во точката B' повлекуваме права паралелна на правата AB. Оваа права ја сече правата AA' во точката A''. Притоа важи $\overline{A'A''}=\overline{A'A}+\overline{AA''}=\overline{A'A}+\overline{BB'}=15\,cm$ Понатаму, триаголникот $B'A'A''$ е правоаголен и важи

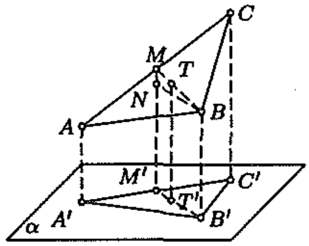


$$\overline{AB}=\overline{B'A''}=\sqrt{\overline{A'A''}^2+\overline{A'B'}^2}=\sqrt{15^2+8^2}=17\,cm.$$

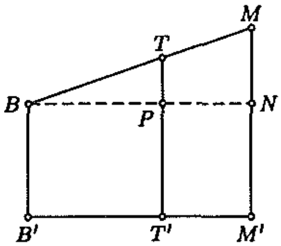
263. Темињата A,B и C на $\triangle ABC$ од рамнината α се оддалечени $24\,cm$, $30\,cm$ и $39\,cm$. Определи го растојанието на тежиштето T на $\triangle ABC$ до рамнината α.

Решение. Нека M е средината на стрната AC и нека A',B',C',M' се проекциите на точките A,B,C,M врз рамнината α, соодветно (цртеж десно). Тогаш $AA' \| CC' \|\ MM''$ следува дека $AA'C'C$ е трапез, а MM'' е неговата средна линија, па затоа

$$\overline{MM'} = \frac{\overline{AA'} + \overline{CC'}}{2} = 31{,}5\,cm.$$



Сега ги разгледуваме трапезот $BB'M'M$, тежиштето T на триаголникот ABC, неговата проекција T' и точката N на отсечката MM' таква што



$$\overline{NM'} = \overline{BB'} = 30\,cm$$

(цртеж лево). Ако $P = BN \cap TT'$, тогаш важи $\overline{TP} : \overline{MN} = 2:3$. Бидејќи

$$\overline{MN} = \overline{MM'} - \overline{NM'} = 31{,}5 - 30 = 1{,}5\,cm$$

добиваме

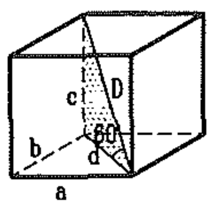
$\overline{TP} = 1\,cm$ и $\overline{TT'} = \overline{TP} + \overline{PT'} = 31\,cm$.

264. Коцка $ABCDA'B'C'D'$ со должина на раб a пресечена е со рамнина π која ги содржи точките A, C и D'. Определи ја плоштината на пресекот на коцката со рамнината π. Определи ги волумените на деловите на кои рамнината π ја дели коцката.

Решение. Пресекот на коцката со рамнината π е рамностран триаголник со страна $a\sqrt{2}$ (направи цртеж). Според тоа, плоштината на пресекот ќе биде $\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Едниот дел е тристраната пирамида $ACD'D$ чиј волумен е еднаков на $\frac{\frac{a \cdot a}{2} \cdot a}{3} = \frac{a^3}{6}$, а волуменот на другиот дел е еднаков на $a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{6}$.

265. Должините на рабовите на едниот ѕид на квадарот се $a = 3\,cm$ и $b = 4\,cm$, а просторната дијагонала на квадарот со овој ѕид зафаќа агол од 60°. Определи ги плоштината и волуменот на овој квадар.

Решение. Дијагоналата на основата на квадарот е $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,cm$ (цртеж десно). Како просторната D со ѕидот зафаќа агол од 60°, заклучуваме дека $D = 10\,cm$. Според тоа,

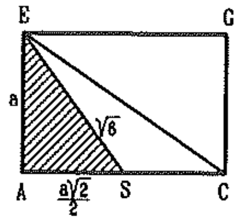


$$c=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}\ cm.$$

Конечно,

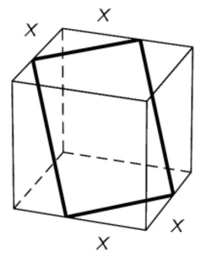
$$V=abc=60\sqrt{3}\ cm^3 \text{ и } P=2(ab+bc+ca)=(24+70\sqrt{3})\ cm^2.$$

266. Дадена е коцка $ABCDEFGH$. За отсечката која го поврзува центарот S на основата $ABCD$ со темето E важи $\overline{SE}=\sqrt{6}\ cm$. Определи ги плоштината и волуменот на коцката.



Решение. Од дијагоналниот пресек $ACGE$ (цртеж десно) на коцката добиваме $\overline{AE}=a$ и $\overline{AS}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Затоа $\overline{SE}^2=a^2+(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2$, од каде добиваме $6=\frac{3a^2}{2}$, т.е. $a=2\,cm$. Конечно, плоштината на коцката е $P=6a^2=24\,cm^2$, а волуменот е $V=a^3=8\,cm^3$.

267. На цртежот десно е даден правоаголник, чии темиња лежат на рабовите на коцка со должина на раб 1. За која вредност на x, овој правоаголник е квадрат?

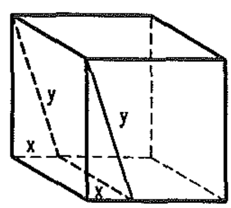


Решение. Јасно, ширината на правоаголникот е $b=x\sqrt{2}$. Нека со c ја означиме должината од темето на правоаголникот кое го допира работ на „основата“ од ортогоналната проекција на темето на правоаголникот кое се наоѓа на горната „основа“ и лежи на иста страна со темето кое го спомнавме претходно. Тогаш $c=(1-x)\sqrt{2}$. Па, $a=\sqrt{1^2+c^2}$, од каде со замена добиваме

$$a=\sqrt{1^2+(1-x)\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+2(1-2x+x^2)}=\sqrt{2x^2-4x+3}.$$

Правоаголникот е квадрат, ако $a=b$, односно $x\sqrt{2}=\sqrt{2x^2-4x+3}$. Оттука, следува $2x^2=2x^2-4x+3$, од каде $x=\frac{3}{4}$.

268. Од коцка со раб $a=10\,cm$ отсечена е една нејзина третина, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ги должините на отсечките x и y. Колкава е плоштината на отсечениот дел.



Решение. Висината на отсечениот дел е еднаква на висината на коцката, па затоа плоштината на основата еднаква на $\frac{1}{3}$ од плоштинаа на основата на кцката. Според тоа, $\frac{10 \cdot x}{2} = \frac{10 \cdot 10}{3}$, односно $x = \frac{20}{3}\, cm$. Тоа значи,

$$y = \sqrt{(\frac{20}{3})^2 + 10^2} = \frac{10\sqrt{13}}{3}\, cm .$$

За плоштината на отсечениот дел добиваме

$$P = ax + (a + x + y)a = a(a + 2x + y) = \frac{100(7+\sqrt{13})}{3}\, cm^3 .$$

269. Ако должината на работ на коцката се зголеми за 1, тогаш нејзиниот волумен се зголемува за 37. За колку се зголемила плоштината на коцката?

Решение. Нека a е должината на работ на коцката. Тогаш нејзиниот волумен е $V = a^3$. По зголемувањето на работ на коцката за 1, се добива коцка со волумен $V' = (a+1)^3$. Имаме, $V' - V = 37$, односно

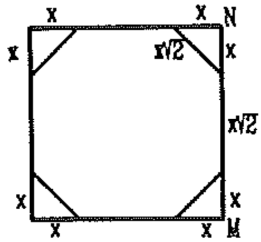
$$\begin{aligned} &(a+1)^3 - a^3 = 37 &&\Leftrightarrow\quad a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - a^3 = 37 &&\Leftrightarrow \\ &3a^2 + 3a - 36 = 0 &&\Leftrightarrow\quad a^2 + a - 12 = 0 &&\Leftrightarrow \\ &a^2 - 3a + 4a - 12 = 0 &&\Leftrightarrow\quad a(a-3) + 4(a-3) = 0 &&\Leftrightarrow \\ &(a-3)(a+4) = 0, \end{aligned}$$

од каде наоѓаме $a - 3 = 0$ или $a + 4 = 0$, т.е. $a = 3$ или $a = -4$. Но, $a > 0$, па затоа $a = 3$. Затоа

$$P' - P = 6(a+1)^2 - 6a^2 = 6 \cdot 4^2 - 6 \cdot 3^2 = 42 .$$

270. Од коцка со должина на раб $6\, cm$, со четири рамнини нормални на основата се отсечени четири еднакви тристрани призми, чии основи се рамнокраки триаголници. Остатокот од коцката е призма со основа правилен осумаголник. Определи ги волуменот и плоштината на добиената осумстрана призма.

Решение. На цртежот десно е прикажана основата на правилната осумстрана призма која е добиена со отсекување на четирите рамнокраки правоаголни триаголници. Имаме $\overline{MN} = 2x + x\sqrt{2}$, па затоа $6 = 2x + x\sqrt{2}$, односно $x = 2(2 - \sqrt{2})\, cm$. Збирот на плоштиние на



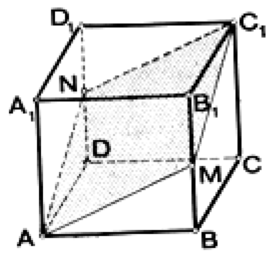
отсечените рамнокраки триаголници е еднаков на $4\frac{x^2}{2}=2x^2$, па затоа плоштината на основата е $B=6^2-2\cdot(3(2-\sqrt{2}))^2=72(\sqrt{2}-1)\,cm^2$. Според тоа, волуменот на призмата е

$$V=BH=6\cdot 72(\sqrt{2}-1)=432(\sqrt{2}-1)\,cm^3,$$

а нејзината плоштина е

$$P=2B+M=2\cdot 72(\sqrt{2}-1)+8\cdot 6\cdot 3(2-\sqrt{2})=144\,cm^2.$$

271. Дадена е коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со раб $a=8cm$. Да се конструира пресекот со рамнината која минува низ средината M на работ BB_1 и дијагоналата AC_1 на коцката и потоа да се пресмета неговата плоштина.



Решение. Бочните ѕидови ABB_1A_1 и CDD_1C_1 се паралелни, па затоа пресечните прави со рамнината се паралелни. Аналогно и пресечните прави на бочните страни ADD_1A_1 и BCC_1D_1 со рамнината се паралелни. Но, $\overline{AM}=\overline{MC_1}$ (зошто?), од што заклучуваме дека пресекот на рамнината и коцката е ромб, кој лесно се конструира. Дијагоналите на ромбот се

$$\overline{AC_1}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CC_1}^2}=\sqrt{(a\sqrt{2})^2+a_1^2}=a\sqrt{3}=8\sqrt{3}cm$$

и

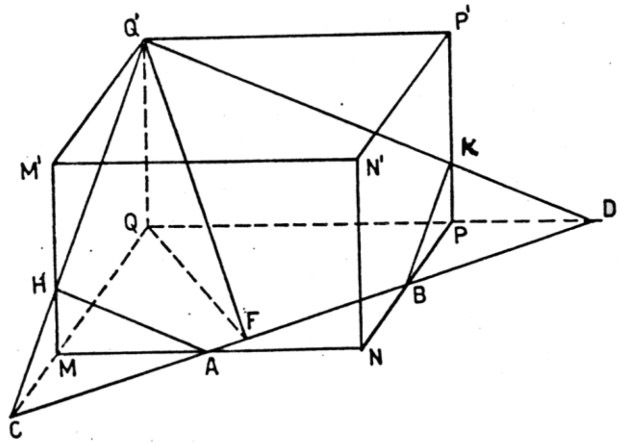
$$\overline{MN}=\overline{BD}=a\sqrt{2}=8\sqrt{2}cm,$$

па затоа неговата плоштина е

$$P=\frac{\overline{MN}\cdot\overline{AC_1}}{2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}=\frac{8^2\sqrt{6}}{2}cm^2=32\sqrt{6}cm^2.$$

272. Даден е правоаголен паралелопипед $MNPQM'N'P'Q'$. Должините на рабовите MN, MQ и MM' се $20\,cm$, $15\,cm$ и $24\,cm$ соодветно. Да се најде плоштината на пресекот на рамнината која минува низ средините на рабовите MN, NP и темето Q'.

Решение. Прво ќе го конструираме пресекот на рамнината е паралелопипедот. Бидејќи рамнината минува низ точките A и B (цртеж долу), добиваме дека правата AB ги сече продолженијата на рабовите QM и QP во точките C и D.



Значи, рамнината минува низ точките Q', C и D, па затоа таа ги сече рабовите MM' и PP' во нивните пресечни точки H и K со правите $Q'C$ и $Q'D$, соодветно. Според тоа, пресекот на паралелопипедот и рамнината е петаголникот $ABKQ'H$.

Бидејќи пресечната рамнина минува низ точките A, B и Q' таа ги сече спротивните страни по правите HQ', BK, AH и KQ' и притоа $HQ' \parallel BK$ и $AH \parallel KQ'$. Според тоа, $\triangle AHC \sim \triangle DQ'C$ и $\triangle BKD \sim \triangle DQ'C$. Од $\overline{CA} = \overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{CD}$ следува дека $P_{AHC} = P_{BKD} = \frac{1}{9}P_{CQ'D}$ т.е. $P_{AHC} = P_{BKD} = \frac{1}{9}P_{CQ'D}$, па затоа $P_{ABKQ'H} = \frac{7}{9}P_{CQ'D}$.

За CD на страната на $\triangle DQ'C$ имаме:

$$\overline{CD} = 3\overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{MP} = \frac{3}{2}\sqrt{\overline{QM}^2 + \overline{QP}^2} = \frac{3}{2}\sqrt{20^2 + 15^2} = \frac{75}{2}\,cm.$$

Понатаму, $\overline{CQ} = 3\overline{CM} = \frac{45}{2}\,cm$ и $\overline{DQ} = 3\overline{PD} = 30\,cm$, па затоа $\overline{QF} = \frac{\overline{QC}\cdot\overline{QD}}{CD} = 18\,cm$. Според тоа,

$$\overline{Q'F} = \sqrt{\overline{QF}^2 + \overline{QQ'}^2} = \sqrt{18^2 + 24^2}\,cm = 30\,cm$$

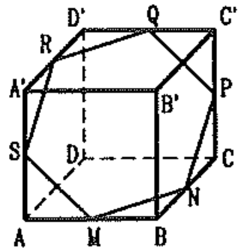
и како $Q'F \perp CD$ добиваме

$$P_{ABKQ'H} = \frac{7}{9}P_{CQ'D} = \frac{7}{9}\cdot\frac{\overline{CD}\cdot\overline{Q'F}}{2} = \frac{7}{9}\cdot\frac{\frac{75}{2}\cdot 30}{2}\,cm^2 = 437{,}5\,cm^2.$$

273. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$ со раб $a = 10\,cm$. Докажи дека пресекот на коцката со рамнината која минува низ средините на рабовите

AB, CC' и $A'D'$ е правилен шестаголник. Определи ја плоштината на овој пресек.

Решение. Нека средините на рабовите AB, CC' и $A'D'$ се M, P и R, соодветно и рамнината ги сече рабовите $BC, C'D'$ и AA' во точките N, Q и S, соодветно. Од Питагоровата теорема следува



$$\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SM} = 5\sqrt{2}\ cm.$$

Бидејќи M и Q, P и S, N и R се средини на спротивни рабови на коцката, добиваме дека $\overline{MQ} = \overline{NR} = \overline{PS} = 10\sqrt{2}\ cm$, што значи дека шестаголникот $MNPQRS$ има еднакви страни и неговите најголеми дијагонали се двапати поголеми од неговите страни. Затоа овој шестаголник е правилен и неговата плоштина е

$$P = 6 \cdot \frac{(5\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 75\sqrt{3}\ cm^2.$$

274. Основата на права четиристрана призма со висина $2\,dm$ е ромб со дијагонали $1\,dm$ и $24\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на призмата.

Решение. За волуменот на призмата добиваме

$$V = BH = \frac{d_1 d_2}{2} H = \frac{10 \cdot 24}{2} \cdot 20 = 2400\ cm^3.$$

Понатаму, должината на страната на ромбот е

$$a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,cm,$$

па затоа за плоштината на призмата добиваме

$$P = 2B + M = 2 \cdot \frac{d_1 d_2}{2} + 4aH = 10 \cdot 24 + 4 \cdot 13 \cdot 20 = 1280\ cm^2.$$

275. Плоштините на ѕидовите на квадар се 16, 20 и 45. Пресметај го волуменот на квадарот.

Решение. Нека страните на квадарот ги означиме со a, b и c. Тогаш од условот на задачата добиваме $ab = 16$, $ac = 20$ и $bc = 45$. Со множење на трите равенки се добива

$$a^2 b^2 c^2 = 16 \cdot 20 \cdot 45 = 14400$$

од каде наоѓаме

$$V = abc = \sqrt{14400} = 120.$$

276. Односот на плоштините на ѕидовите на даден квадар е $2:3:5$. Определи го односот на рабовите на квадарот.

Решение. Нека должините на рабовите на квадарот се a, b и c. Имаме,

$$ab:bc:ca=2:3:5$$
$$\frac{ab}{2}=\frac{bc}{3}=\frac{ca}{5}$$
$$\frac{a}{2}=\frac{c}{3},\ \frac{b}{3}=\frac{a}{5},$$
$$\frac{a}{10}=\frac{c}{15},\ \frac{b}{6}=\frac{a}{10},$$
$$\frac{a}{10}=\frac{b}{6}=\frac{c}{15},$$
$$a:b:c=10:6:15.$$

277. Волуменот на квадарот е еднаков на $192\,cm^3$. Определи ја плоштината на овој квадар, ако должините на неговите рабови се однесуваат како $2:3:4$.

Решение. Нека рабовите на квадарот се a, b и c. Од $a:b:c=2:3:4$ следува $a:b=2:3$ и $a:c=2:4$, т.е. $b=\frac{3}{2}a$ и $c=2a$. Според тоа, $192=abc=a\cdot\frac{3}{2}a\cdot 2a$, т.е. $a^3=64$, од каде добиваме $a^3=4^3$, односно $a=4\,cm$. Значи, $b=6\,cm$ и $c=8\,cm$, па затоа

$$P=2(ab+bc+ca)=2(24+32+48)=208\,cm^2.$$

278. Во базен во форма на квадар со основа $1,5\,m\times 4\,m$ и длабочина $2\,m$ турени се $4,5\,m^3$ вода.

а) За колку ќе се подигне нивото на водата во базенот ако во него ставиме метална коцна со раб $1\,m$?

б) За колку ќе се пдогине нивото на водата ако на дното на базенот спуштиме уште две такви коцки?

Решение. а) Плоштината на основата на базенот е $1,5\cdot 4=6\,m^2$, па затоа висината на водата била $6:4,5=0,75\,m$. Вкупниот волумен на водата и коцката е $5,5\,m^3<6\,m^3$, па затоа по спуштањето на коцката нивото на водата е пониско од $1\,m$ и коцката е над нивото на водата. Затоа водата формира „призма“ со плоштина на основата $6-1=5\,m^2$

и висина $\frac{4,5}{5}=0,9\,m$. Според тоа, нивото на водата е подигнато за $15\,cm$.

б) Сега вкупниот волумен е еднаков на $4,5+3=7,5\,m^3$, па водата ја покрива коцката. Нивото на водата е $\frac{7,5}{6}=1,25\,m$ и истото и поткренато за нови $35\,cm$.

279. Основата на квадар е квадрат, а неговата висина е еднаква на $10\,cm$. Ако работ на основата на квадарот се зголеми за $3\,cm$, тогаш волуменот на квадарот ќе се зголеми за $210\,cm^3$. Определи ги плоштината и волуменот на овој квадар.

Решение. Нека работ на основата е a. Тогаш волуменот на квадарот е $V=10a^2$, а по зголемувањето на работ на основата за $3\,cm$ волуменот на квадарот е $V'=10(a+3)^2$. Бидејќи $V'=V+210$ добиваме

$$10(a+3)^2=10a^2+210, \text{ т.е. } a^2+6a+9=a^2+21,$$

од каде добиваме $a=2\,cm$. Според тоа,

$$V=10a^2=10\cdot 2^2=40\,cm^3 \text{ и } P=2a^2+4\cdot 10a=2\cdot 2^2+4\cdot 10\cdot 2=88\,cm^2.$$

280. Ако должината на квадарот се зголеми за $\frac{1}{3}$, ширината се намали за 25%, а висината се намали за 15%, како ќе се промени неговиот волумен?

Решение. Нека a, b и c се должината, ширината и висината на квадарот. Волуменот на квадарот е $V=abc$. Ако должината на квадарот се зголеми за $\frac{1}{3}$, ширината се намали за 25%, а висината се намали за 15%, тогаш тие ќе бидат еднакви на

$$a+\tfrac{1}{3}a=\tfrac{4}{3}a,\ (1-0,25)b=0,75x=\tfrac{3}{4}b \text{ и } (1+0,15)c=1,15c.$$

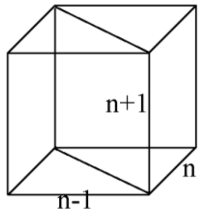
Сега, волуменот на квадарот ќе биде

$$V'=\tfrac{4}{3}a\cdot\tfrac{3}{4}b\cdot 1,15c=1,15abc=1,15V,$$

Што значи декаволуменот се зголемил за 15%.

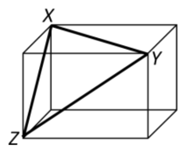
281. Мерните броеви на должините на рабовите на еден квадар, изразени во сантиметри, се три последователни природни броја. Еден од дијагоналните пресеци на квадарот е квадрат.

Определи ги плоштината и волуменот на овој квадар.



Решение. Бидејќи еден од доијагоналните пресеци на квадарот е квадрат, заклучуваме дека дијагоналата на еден ѕид треба да е еднаква на работ кој не лежи ба овој ѕид. Тоа значи дека за рабовите a,b,c важи $a^2+b^2=c^2$. Но, рабовите се три последователни броеви $n-1,n,n+1$, па затоа последното равенство е можно само ако $(n-1)^2+n^2=(n+1)^2$, т.е. $n^2-4n=0$, од каде добиваме $n=4$. Според тоа, должините на рабовите на квадарот се $3cm, 4cm$ и $5cm$, па затоа неговиот волумен е $V=3\cdot 4\cdot 5=60\,cm^3$, а плоштината е $P=2(3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 3)=94\,cm^2$.

282. Должините на страните на триаголникот XYZ се еднакви на $8cm$, $9cm$ и $\sqrt{55}cm$. Најди ја должината на дијагоналата на правоаголниот паралелопипед прикажан на цртежот десно.



Решение. Нека должините на рабовите на правоаголниот паралелопипед ги означиме со a,b,c. Тогаш должината на просторната дијагонала се наоѓа со формулата $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Од условот на задачата имаме дека $a^2+c^2=\overline{YZ}^2$, $a^2+b^2=\overline{XY}^2$, $b^2+c^2=\overline{XZ}^2$, односно $a^2+c^2=81$, $a^2+b^2=64$, $b^2+c^2=55$. Ако ги собереме овие равенства имаме дека $2(a^2+b^2+c^2)=200$, од каде $a^2+b^2+c^2=100$. Конечно, $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{100}=10\,\text{cm}$.

283. Определи ги плоштината и волуменот на квадар кај кој должините на дијагоналите на трите негови ѕида се p,q и r.

Решение. Нека a,b,c се должините на рабовите на квадарот. Тогаш

$$p^2=a^2+b^2,\quad q^2=b^2+c^2,\quad r^2=c^2+a^2.$$

Сега, ако од збирот на првите две равенки ја одземеме третата равенка добиваме

$$2b^2=p^2+q^2-r^2.$$

Слично добиваме

$$2a^2=p^2+r^2-q^2 \text{ и } 2c^2=q^2+r^2-p^2.$$

Според тоа,

$$V=abc=\sqrt{\frac{p^2+r^2-q^2}{2}\cdot\frac{p^2+q^2-r^2}{2}\cdot\frac{q^2+r^2-p^2}{2}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(p^2+q^2-r^2)(q^2+r^2-p^2)(r^2+p^2-q^2)}$$

и

$$P=2(ab+bc+ca)$$
$$=\sqrt{(p^2+q^2-r^2)(q^2+r^2-p^2)}+\sqrt{(q^2+r^2-p^2)(r^2+p^2-q^2)}+$$
$$+\sqrt{(r^2+p^2-q^2)(p^2+q^2-r^2)}.$$

284. Определи го волуменот на квадар кај кој растојанијата од точката на пресек на дијагоналите до рабовите се еднакви на $7\,cm, 8\,cm$ и $9\,cm$.

Решение. Бидејќи растојанијата од точката на пресек на дијагоналите до рабовите се еднакви на $7\,cm, 8\,cm$ и $9\,cm$, заклучуваме дека растојанијата меѓу спротивните рабови се еднакви на $14\,cm, 16\,cm$ и $18\,cm$. Затоа, ако a,b,c се должините на рабовите на квадарот добиваме

$$a^2+b^2=14^2, b^2+c^2=16^2, c^2+a^2=18^2.$$

Ако ги собереме првите две равенки и ја одземеме третата равенка добиваме

$$2b^2=14^2+16^2-18^2,\text{ т.е. } b^2=64,$$

па затоа $b=8\,cm$. Сега од првата и втората равенка лесно следува дека

$$a=2\sqrt{33}\,cm \text{ и } c=8\sqrt{3}\,cm.$$

Конечно, за волуменот на квадарот добиваме

$$V=abc=384\sqrt{11}\,cm^3.$$

285. Определи ја плоштината на квадарот чија просторна дијагонала е $D=19,5\,cm$ и за неговите рабови a,b,c важи $a:b:c=3:4:12$.

Решение. Од условот на задачата следува дека постои k таков што $a=3k, b=4k$ и $c=12k$. Понатаму,

$$D^2=a^2+b^2+c^2,\text{ т.е. } (\tfrac{39}{2})^2=(3k)^2+(4k)^2+(12k)^2,$$

од каде добиваме $(13k)^2=(\frac{39}{2})^2$. Значи, $13k=\frac{39}{2}$ односно $k=\frac{3}{2}$. Конечно, за плоштината на квадарот добиваме

$$P=2(ab+bc+ca)=2\cdot(\tfrac{3}{2})^2(3\cdot4+4\cdot12+12\cdot3)=432\,cm^2$$

286. Основата на права четиристрана призма е ромб со плоштина $\frac{2}{3}k^2$. Помалиот дијагонален пресек е квадрат со плоштина k^2.

а) Определи ги плоштината и волуменот на призмата.

б) Определи го k ако мерните броеви на плоштината и волуменот на примата се еднакви.

Решение. Од плоштината на малиот дијагонален пресек заклучуваме дека малата дијагонала има иста должина како и висината на призмата, т.е. $H=k$. Од плоштината на ромбот ја добиваме втората дијагонала $\frac{dk}{2}=\frac{2}{3}k^2$, т.е. $d=\frac{4}{3}k$. Според тоа, должината на страната на ромбот е $a=\sqrt{(\frac{k}{2})^2+(\frac{2k}{3})^2}=\frac{5k}{6}$.

а) За волуменот на призмата добиваме

$$V=\frac{2}{3}k^2\cdot k=\frac{2}{3}k^3,$$

а за плоштината имаме

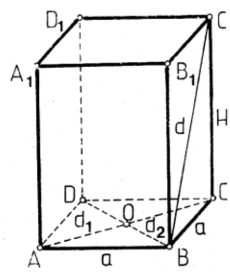
$$P=2\cdot\frac{2}{3}k^2+4k\cdot\frac{5}{6}k=\frac{14}{3}k^2.$$

б) Имаме, $\frac{2}{3}k^3=\frac{14}{3}k^2$, од каде добиваме $k=7$.

287. Основата на права призма е ромб со дијагонали $18\,cm$ и $24\,cm$. Пресметај го волуменот на призмата ако дијагоналата на бочниот ѕид е $17\,cm$.

Решение. Плоштината на основата е

$$B=\frac{d_1d_2}{2}=216\,cm^2.$$



Од $\triangle BCO$ за страната a на ромбот добиваме

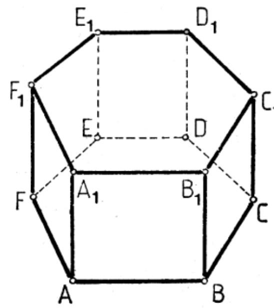
$$a=\sqrt{(\frac{d_1}{2})^2+(\frac{d_2}{2})^2}=15\,cm,$$

а од $\triangle BCC_1$ за висината на призмата имаме

$$h=\sqrt{d^2-a^2}=8\,cm.$$

Конечно, волуменот на призмата е $V=Bh=1728\,cm^3$.

288. Фабрика за стакло добивал нарачка да изработи стаклени чаши во форма на правилна шестстрана призма. Пресметај ја должината на основниот раб на призмата ако чашата треба да биде висока $20\,cm$ и да има волумен $300\,cm^3$.



Решение. Плоштината на основата на правилна шестстрана призма со основен раб е $B=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, па затоа нејзиниот волумен е $V=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}h$. Од условот на задачата имаме $h=20\,cm$ и $V=300\,cm^3$, па затоа

$$300=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot 20 \text{ т.е. } a^2=\frac{10}{\sqrt{3}},$$

што значи дека должината на основниот раб ќе биде $a=\sqrt{\frac{10}{\sqrt{3}}}$.

289. Основата на коса призма $ANCDA'B'C'D'$ е квадрат со должина на страна $10\,cm$. Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата, ако нејзиниот бочен раб е $20\,cm$, бочната страна $ABB'A'$ е нормална на рамнината на основата, а бочната страна $ADD'A'$ со рамнината на основата зафаќа агол од 30°.

Решение. Висината на дадената призма е еднаква на половина од бочниот раб и е еднаква на висината на бочниот ѕид (направи цртеж). Плоштината се состои од два квадрати, два правоаголници и два паралелограми, т.е. $P=2\cdot 10\cdot 10+2\cdot 10\cdot 20+2\cdot 10\cdot 10=800\,cm^2$, а волуменот е $V=10\cdot 10\cdot 10=1000\,cm^3$.

290. Бочните страни на права тристрана призма имаат плоштини $26\,cm^2$, $28\,cm^2$ и $30\,cm^2$. Определи го волуменот на призмата ако основата има плоштина $21\,cm^2$.

Решение. Ѕидовите кои ја формираат обвивката на призмата се правоаголници кај едната страна е еднаква на висината на призмата. Затоа рабовите на основата на призмата се однесуваат како плоштините на бочните ѕидови, т.е. како $26:28:30$, што значи дека нивните должини се $26x, 28x, 30x$. Ако висината на триаголникот на основата на призмата која соодветствува на страната со должина $28x$ ја дели таа страна на отсечки со должини m и $28x-m$, тогаш $(30x)^2-m^2=(26x)^2-(26-m)^2$, па затоа $m=18x$. Значи, висината која соодветствува на $28x$ е еднаква на $\sqrt{(30x)^2-(18x)^2}=24x$. Според тоа, $\frac{24x\cdot 28x}{2}=21$, па затоа $x=\frac{1}{4}$. Според тоа, должините на страните на основата се $\frac{13}{2}, 7$ и $\frac{15}{2}\,cm$, висината на призмата е $4\,cm$, а волуменот на призмата е $4\cdot 21=84\,cm^3$.

291. Основата на права призма е рамнокрак триаголник со основа a и агол при врвот од 120°. Определи го волуменот на призмата во функција од a ако плоштината на омотачот е двапати поголема од плоштината на основата.

Решение. Нека b е кракот на основата и h е висината која соодветствува на основата. Висината на основата е повлечена од темето на агол од 120°, па затоа таа ја дели основата на два складни правоаголни триаголника со остри агли 30° и 60° (направи цртеж). Затоа $\frac{b\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{2}$, т.е. $b=\frac{a}{\sqrt{3}}$ и $h_a=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Според тоа,

$$B=\frac{a^2}{4\sqrt{3}} \text{ и } M=H(a+\frac{2a}{\sqrt{3}}),$$

па затоа $\frac{a^2}{2\sqrt{3}}=H(a+\frac{2a}{\sqrt{3}})$, од каде наоѓаме $H=\frac{a}{4+2\sqrt{3}}$. Конечно,

$$V=BH=\frac{a}{4+2\sqrt{3}}\cdot\frac{a^2}{4\sqrt{3}}=\frac{a^3}{8(3+2\sqrt{3})}.$$

292. Прав насип за пруга со должина $300\,m$ има нормален пресек во форма на трапез со основи $10\,m$ и $6m$ и висина $2,4\,m$. Колку кубни метри земја се потребни за оформување на насипот?

Решение. Очигледно насипот е призма со висина $300m$ и основа рамнокрак трапез $10m$ и $6\,m$ и висина $2,4\,m$. Неговиот волумен е $V=Bh$, каде

$$B=\frac{10+6}{2}\cdot 2,4m^2=19,2\,m^2 \text{ и } h=300\,m.$$

Според тоа, за изградба на насипот се потребни

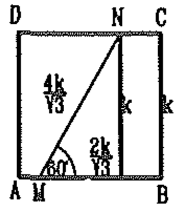
$$V=Bh=19,2\cdot 300=5760\,m^3 \text{ земја.}$$

293. Правилна четиристрана призма со должина на раб при основата $k\,cm$ има висина со должина $3k\,cm$. Вертикална рамнина која со бочната страна формира агол од 60° ја дели призмата на два дела со еднакви волумени.

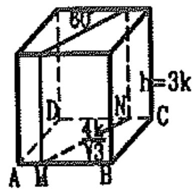
а) Определи ја плоштината на еден од добиените делови во функција од работ на основата на дадената призма.

б) Квадрат со страна $x\,cm$ има плоштина еднаква на плоштината на телото од задачата под а). Определи ја должината x.

Решение. а) Нека $ABCD$ е основата на призмата. Бидејќи вертикалната рамнина со бочната страна формира агол од 60°, таа ја сече односвата во отсечка MN која со AB формира агол од 60° (цртеж десно). Значи, MN е страна на рамностран триаголник со висина k, па затоа $\overline{MN}=\frac{4k}{\sqrt{3}}$.



Според условот на задачата MN го полови квадратот, па затоа збирот на плоштините на основите е еднаков на k^2. Сега, бидејќи



$$\overline{MB}+\overline{BC}+\overline{CN}+\overline{NM}=2\overline{BC}+\overline{NM}=6k+\frac{4k}{\sqrt{3}},$$

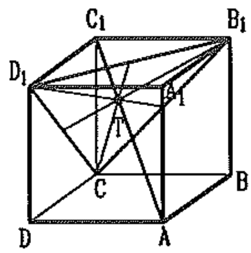
бараната плоштина е

$$P=2B+M=k^2+3k(6k+\tfrac{4k}{\sqrt{3}})=k^2(7+4\sqrt{3}).$$

б) Имаме $x^2=k^2(7+4\sqrt{3})=k^2(2+\sqrt{3})^2$, т.е. $x=k(2+\sqrt{3})$.

294. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со раб $\overline{AA_1}=6\,cm$. Определи ги должините на отсечоците на просторната дијагонала AC_1 определени со проекциите на темињата на коцката врз дијагоналата AC_1.

Решение. Јасно, $\triangle CB_1D_1$ е рамностран со должина на страна $a\sqrt{2}=6\sqrt{2}\,cm$. Со T да го означиме тежиштето на овој триаголник (цртеж десно). Тогаш точката T е подножје на висината повлечена од темето C_1 на правилната тристрана пирамида $C_1CB_1D_1$ и исто тка е подножје на висината повлечена од темето A на правилната тристрана пирамида ACB_1D_1. Според тоа, правата AC_1 е нормална на рамнината CB_1D_1 и ја прободува оваа рамнина во точката T. Волуменот на пирамидата $C_1CB_1D_1$ е еднаков на



$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\overline{CB_1}^2\sqrt{3}}{4}\cdot\overline{C_1T}=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot\overline{C_1T}\,. \qquad (1)$$

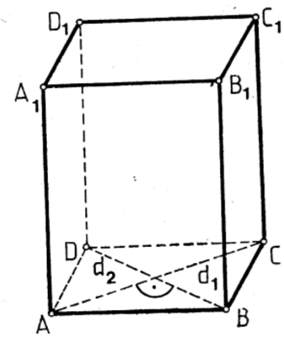
Од друга страна

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\overline{C_1D_1}\cdot\overline{C_1B_1}}{2}\cdot\overline{C_1C}=\frac{a^3}{6}\,. \qquad (2)$$

Сега, од равенствата (1) и (2) следува $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot\overline{C_1T}=\frac{a^3}{6}$, па затоа $\overline{C_1T}=\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{\overline{AC_1}}{2}$. Според тоа, проекциите на темињата на коцката на просторната дијагонала AC_1 ја делат оваа дјагонала на три еднакви дела, а должината на секој од овие делови е еднаква на $2\sqrt{3}\,cm$.

295. Пресметај ја плоштината на права четиристрана призма чија основа е ромб со дијагонали $16\,cm$ и $1{,}2\,dm$ и висина $2\,dm$.

Решение. Од условот на задачата имаме $d_1=16cm$, $d_2=12cm$ и $h=20cm$ (цртеж десно). Од Питагоровата теорема за страната на основата наоѓаме



$$a=\sqrt{(\tfrac{d_1}{2})^2+(\tfrac{d_2}{2})^2}=\sqrt{(\tfrac{18}{2})^2+(\tfrac{12}{2})^2}=10\,cm\,.$$

Според тоа, плоштината на основата е $B=\frac{d_1d_2}{2}=96cm^2$, а бочната плоштина е $M=4ah=800cm^2$. Конечно,за плоштината на призмата наоѓаме

$$P=2B+M=(2\cdot 96+800)cm^2=992cm^2\,.$$

296. Основата на една права призма е ромб со плоштина $6cm^2$, плоштините на дијагоналните пресеци се $Q_1=21cm^2$ и $Q_2=28cm^2$. Пресметај ја плоштината P на призмата.

Решение. Основниот раб да го означиме со a, а висината со h. Плоштината на призмата е $P=2B+M=d_1d_2+4ah$, каде d_1 и d_2 се дијагоналите на ромбот. Од условот на задачата имаме $d_1h=21$, $d_2h=28$, $\frac{d_1d_2}{2}=6$ (зошто?). Ако ги помножиме првите две равенки и ги поделиме со третата равенка добиваме $h^2=49$, од што следува $h=7$. Сега, со замена во првите две равенки на системот наоѓаме

$d_1=3$ и $d_2=4$. Понатаму, дијагоналите на ромбот се сечат под прав агол, па од Питагоровата теорема следува $a^2=(\frac{d_1}{2})^2+(\frac{d_2}{2})^2=\frac{25}{4}$, што значи $a=\frac{5}{2}$. Конечно, со замена во формулата за плоштината на призмата наоѓаме $P=d_1d_2+4ah=82cm^2$.

297. Пресметај ја плоштината на правилна шестстрана призма со основен раб $a=5cm$ и висина $h=12cm$.

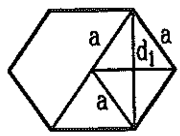
Решение. Според условот на задачата основите на призмата се правилни шестаголници, па затоа секоја од нив има плоштина

$$B=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{75\sqrt{3}}{2}cm^2.$$

Бочната плоштина на оваа призма е $M=6ah=360cm^2$, па затоа плоштината на призмата е

$$P=2B+M=(2\cdot\frac{75\sqrt{3}}{2}+360)cm^2=15(5\sqrt{3}+24)cm^2.$$

298. Правилна шестстрана призма има висина $12\,dm$, а помалата дијагонала на основата е еднаква на $\sqrt{3}\,dm$. Определи ги плоштината и волуменот на оваа призма.



Решение. Нека a и d_1 се страната и помалата дијагонала на основата на призмата. Тогаш $\frac{d_1}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, па затоа $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, т.е. $a=1dm$. Според тоа,

$$V=BH=\frac{6a^2\sqrt{3}}{4}H=18\sqrt{3}\,cm^3 \text{ и}$$

$$P=2B+6aH=2\cdot\frac{6a^2\sqrt{3}}{4}+6aH=(3\sqrt{3}+72)\,cm^2.$$

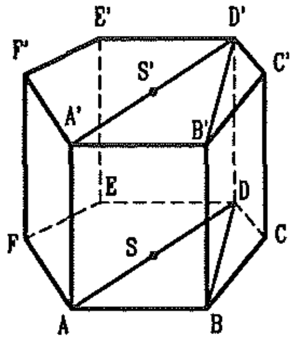
299. Дадена е правилна и права шестстрана призма $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ чија должина на работ на основата е $a=6\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на тристраната призма $ABDA'B'D'$.

Решение. Дадената призма е правилна, што значи дека нејзината основа е правилен шестаголник. Според тоа,

$$\overline{SA}=\overline{SD}=\overline{AB}=6\,cm,$$

па затоа $\overline{AD}=12\,cm$. Понатаму, триаголникот ABD е правоаголен, па затоа

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AB}^2}=6\sqrt{3}\,cm.$$



Но, призмата е правилна и права, па затоа нејзината висина е $\overline{AB}=\overline{BB'}=6\,cm$. Според тоа, за волуменот на тристраната призма $ABDA'B'D'$ добиваме:

$$V=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BD}}{2}\cdot\overline{BB'}=\frac{6\cdot6\sqrt{3}}{2}\cdot6=108\sqrt{3}\,cm^3,$$

а за нејзината плоштина добиваме

$$\begin{aligned}P&=2\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BD}}{2}+(\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{AD})\cdot\overline{BB'}\\&=2\cdot\frac{6\cdot6\sqrt{3}}{2}+(6+6\sqrt{3}+12)\cdot6\\&=36(3+2\sqrt{3})\,cm^2.\end{aligned}$$

300. Надворешните димензии на една дрвена кутија со капак се: должина $30\,cm$, ширина $25\,cm$ и висина $2\,dm$. Дебелината на дрвото од кое е направена кутијата насекаде е $1\,cm$. Определи колку дрво е употребено за правење на кутијата.

Решение. Надворешниот волумен на целата кутија изнесува:

$$30\cdot25\cdot20=15000\,cm^3.$$

Понатаму, дебелината на дрвото насекаде е $1\,cm$ и кутијата има капак, па затоа должината, ширината и висината на внатрешноста на кутијата се по $2\,cm$ помали од димензиите на кутијата. Според тоа, внатрешноста на кутијата има должина $28\,cm$, ширина од $23\,cm$ и висина од $18\,cm$. Внатрешниот волумен на издлабениот дел изнесува:

$$28\cdot23\cdot18=11592\,cm^3.$$

Значи, дрвото има волумен:

$$15000-11592=3408\,cm^3.$$

301. При обработка на некоја дрвена греда во форма на квадар, должината се намалила за 2,5%, ширината за 7%, а висината за 3,2%. Колку проценти од гредата бил отпадот?

Решение. Нека a е должината, b ширината и c висината на гредата пред обработката и нека a_1 е должината, b_1 ширината и c_1 висината на гредата после обработката. Волумените на гредата пред и после обработката се $V=abc$ и $V_1=a_1b_1c_1$, соодветно. После обработката на гредата должината е еднаква на 97,5% од почетната должина, ширината на 93% од почетната ширина и висината на 96,8% од почетната висина, што значи дека $a_1 = 0,975a, b_1 = 0,93b$ и $c_1 = 0,968c$. Затоа важи $V_1 = 0,975a \cdot 0,93b \cdot 0,968c = 0,877734abc = 0,877734V$. Значи, со обработката волуменот се намалил за $1 - 0,877734 = 0,122266$ од почетниот волумен, т.е. за 12,2266%.

302. Коцка е направена од 125 залепени коцки со должина на раб $1cm$, а потоа од секој ѕид на коцката е извадена централната единечна коцка. За бојадисување на една единечна коцка е потребен $2,6\,g$ боја. Колку боја е потребна за бојадисување на вака добиеното тело?

Решение. На секој раб на големата коцка има еднаков број единечни коцки. Бидејќи $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, заклучуваме дека должината на работ на добиената коцка е еднаква на $5cm$. Според тоа, плоштината на големата коцка е еднаква на $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150\,cm^2$. Понатаму, при вадење на една единечна централна коцка плоштината на телото се зголемува за $4cm^2$, па затоа плоштината на добиеното тело е еднаква на $150 + 6 \cdot 4 = 174\,cm^2$. Една мала коцка има плоштина $6\,cm^2$, што значи дека плоштината на телото е $174 : 6 = 29$ поголема од плоштината на една мала коцка. Конечно, за бојадисување на добиеното тело се потребни $29 \cdot 2,6 = 75,4\,g$ боја.

303. Дадени се 2019 еднакви коцки со должина на раб $2cm$. Горјан коцките ги реди една до друга така што добиеното тело е паралелопипед. На колку различни начини може Горјан да ги нареди оцките и колкава е плоштината на секој од добиените паралелопипеди? Од паралелопипедот со помала плоштина Горјан извадил 334 коцки, така што добиеното тело има плоштина $24232\,cm^2$. Дади пример кои коцки може да ги отстрани Горјан.

Решение. Имаме $2019 = 1 \cdot 1 \cdot 2019$ и $2019 = 1 \cdot 3 \cdot 673$ и други случаи не се можни бидејќи 673 е прост број. Во првиот случај должините на страните на паралелопипедот се $2cm, 2cm$ и $4038cm$, па затоа неговата плоштина е: $2 \cdot (2 \cdot 2 + 2 \cdot 4038 + 2 \cdot 4038) = 32312\,cm^2$. Во вториот случај должините на страните на паралелопипедот се $2cm, 6cm$ и $1346cm$, па затоа неговата плоштина е:

$$2\cdot(2\cdot 6+2\cdot 1346+6\cdot 1346)=21560\,cm^2.$$

Ако вадиме коцки од крајните редови на паралелопипедот, тогаш плоштаната на телото се намалува. Плоштината на телото се зголемува само ако вадиме коцки од внатрешен ред. Ако од страната на која има 3 реда коцки вадиме коцки од средниот ред, тогаш при вадење на една коцка плоштината на телото се зголемува за $2\cdot 2\cdot 2=8\,cm^2$. Според тоа, ако од средниот ред извадиме 334 коцки, тогаш плоштината на телото ќе биде

$$21560+8\cdot 334=21560+2672=24232\,cm^2\ .$$

304. Должините на страните на правоаголниот $\triangle ABC$ ($\measuredangle ACB=90^\circ$) се $\overline{AC}=(3x+2)\,cm, \overline{BC}=(4x-2)\,cm$ и $\overline{AB}=5x\,cm$. На хипотенузата AB се избрани точки M и N такви што $\overline{AM}:\overline{MN}:\overline{NB}=3:5:2$.

а) Определи ги должините на страните и висината повлечена кон хипотенузата во $\triangle ABC$.

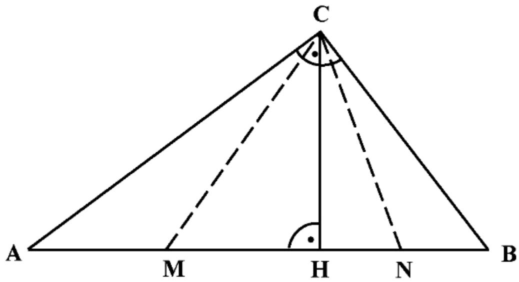
б) Определи го волуменот на права призма со основа $\triangle MNC$ и висина која е за 87,5% поголема од висината повлечена кон хипотенузата во $\triangle ABC$.

Решение. а) Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$$

$$(5x)^2=(3x+1)^2+(4x-2)^2$$

$$x=2.$$



Значи, $\overline{AC}=8\,cm,\ \ \overline{BC}=6\,cm$ и $\overline{AB}=10\,cm$. Имаме,

$$\tfrac{8\cdot 6}{2}=P=\tfrac{10h}{2},$$

па затоа $h=4{,}8\,cm$.

б) Од условот $\overline{AM}:\overline{MN}:\overline{NB}=3:5:2$ и $\overline{AM}+\overline{MN}+\overline{NB}=10\,cm$ следува $\overline{MN}=5\,cm$. Висината на пирамидата е $H=1{,}875h=9\,cm$. Волуменот на пирамидата е $V=BH=\frac{\overline{MN}\cdot h}{2}H=\frac{5\cdot 4{,}8}{2}\cdot 9=108\,cm^3$.

305. Основниот раб шестстрана пирамида е $a=8\,cm$, а висината и е $H=11\,cm$. Пресметај ги апотемата и бочниот раб на пирамидата.

Решение. Основата на пирамидата е правилен шестаголник, па затоа радиусот на впишаната кружница е

$$r=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{8^2-\frac{8^2}{4}}=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\,,$$

а радиусот на опишаната кружница е $R=a=8\,cm$. Според тоа, апотемата на пирамидата е

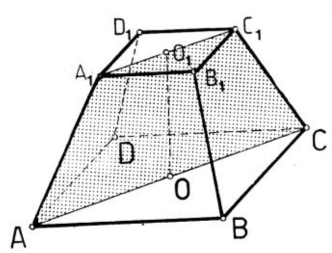
$$h=\sqrt{H^2+r^2}=\sqrt{11^2+(4\sqrt{3})^2}=13\,cm,$$

а бочниот раб е

$$s=\sqrt{R^2+H^2}=\sqrt{8^2+11^2}=\sqrt{185}\,cm.$$

306. Најди ја плоштината на дијагоналниот пресек на правилна четиристрана потсечена пирамида со должини на основите $40cm$ и $24cm$ и висина $16cm$.

Решение. Нека пирамидата е $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$ (цртеж десно). Тогаш дијагоналниот пресек рамнокракиот трапез ACC_1A_1 со основи $\overline{AC}=40\sqrt{2}\,cm$ и $\overline{A_1C_1}=24\sqrt{2}\,cm$, а неговата висина е $\overline{OO_1}=16\,cm$. Според тоа, плоштината на дијагоналниот пресек е



$$P=\frac{\overline{AC}+\overline{A_1C_1}}{2}\cdot\overline{OO_1}=\frac{40\sqrt{2}+24\sqrt{2}}{2}\cdot 16cm^2=512\sqrt{2}\,cm^2.$$

307. Колу ќерамиди се потребни за покривање на една куќа чиј покрив има форма на правилна читиристрана пирамида со основен раб $8\,m$ и висина $3\,m$, ако за покривање на $1\,m^2$ се потребни 20 ќерамиди.

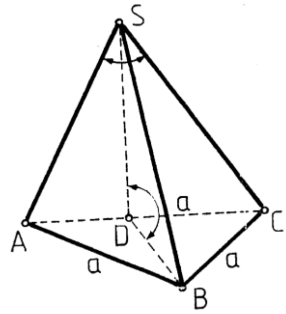
Решение. Со a да го означиме основниот раб, а со h висината на пирамидата. Треба да ја определиме бочната плоштината на дадената пирамида (направи цртеж). Притоа за апотемата имаме

$$l=\sqrt{h^2+(\tfrac{a}{2})^2}=5\,m,$$

па затоа $M=4\frac{al}{2}=80\,m^2$. Бидејќи за $1\,m^2$ се потребни 20 ќерамиди, а треба да покриеме $80\,m^2$, за покривање на куќата ни се потребни $20\cdot 80=1600$ ќерамиди.

308. Основата на една пирамида е рамностран триаголник со страна a, а еден од бочните ѕидови е рамнокрак правоаголен триаголник чија рамнина е нормална на рамнината на основата. Пресметај ја бочната плоштина.

Решение. Нека е дадена пирамидата $SABC$ (цртеж десно) и нека $\overline{SA}=\overline{SC}=x$. Од триаголникот ASC имаме $2x^2=a^2$, па затоа $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $\overline{SD}=\frac{a}{2}$. Од триаголникот ABC имаме $\overline{BD}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, како висина на рамностран триаголник. Од условот на задачата имаме $SD\perp BD$, т.е. триаголник



BSD е правоаголен, што значи $\overline{SB}=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2}=a$.

Триаголниците ABS и SBC се складни рамнокраки триаголници со основа $\overline{SA}=\overline{SC}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и крак $\overline{AB}=\overline{BS}=\overline{BC}=a$, па затоа висината на овие триаголници е $h=\sqrt{a^2-(\frac{a\sqrt{2}}{4})^2}=\frac{a\sqrt{14}}{4}$. Конечно, плоштината на обвивката е

$$M=\frac{x^2}{2}+2\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{14}}{4}}{2}=\frac{2a^2}{8}+\frac{2a^2\sqrt{7}}{8}=\frac{a^2}{4}(1+\sqrt{7}).$$

309. Рабовите AB, AC и AD на тристрана пирамида се заемно нормални. Определи го волуменот на пирамидата ако плоштините на ѕидовите ABC, ACD и ADB на пирамидата се $3\,cm^2, 4\,cm^2$ и $6\,cm^2$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$V=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}}{6}=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{8\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2}\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}{2}}=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{8\cdot 3\cdot 4\cdot 6}=4\,cm^3.$$

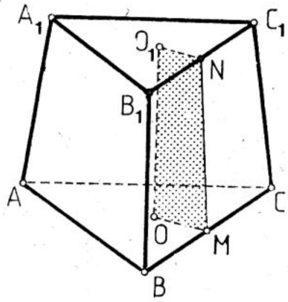
310. Да се пресмета плоштината на правилна тристрана потсечена пирамида со висина $h=5cm$ и радиуси на опишаните кружници околу основите $R=12cm$ и $R_1=6cm$.

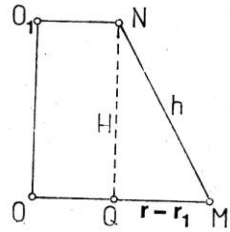
Решение. Со a и a_1 да ги означиме основите на потсечената пирамида (цртеж долу). Користејќи ги формулите за радиусите на опишаните кружници околу рамностраните триаголници

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ и } R_1=\frac{a_1\sqrt{3}}{3}$$

добиваме

$$a=R\sqrt{3} \text{ и } a_1=R_1\sqrt{3}, \text{ т.е. } a=12\sqrt{3}cm \text{ и } a_1=6\sqrt{3}cm.$$





Понатаму, кај рамностран триаголник радиусот на впишаната кружница е половина од радиусот на опишаната кружница (зошто?), па затоа $r=6cm$ и $r_1=3cm$. Од правоаголниот ΔMNQ за апотемата на потсечената пирамида добиваме

$$l=\sqrt{h^2+(r-r_1)^2}=\sqrt{4^2+3^2}cm=5cm.$$

Конечно,

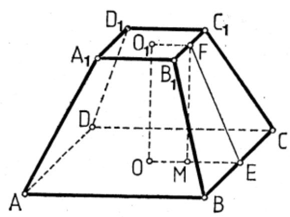
$$B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=108\sqrt{3}cm^2, B_1=\frac{a_1^2\sqrt{3}}{4}=27\sqrt{3}cm^2 \text{ и } M=\frac{3a+3a_1}{2}l=135\sqrt{3}cm^2,$$

па затоа $P=B+B_1+M=270\sqrt{3}cm^2$.

311. Основните рабови на правилна четиристрана потсечена пирамида се $40\,cm$ и $10\,cm$. Пресметај ја висината на потсечената пирамида ако нејзината плоштина е $3400\,cm^2$.

Решение. Плоштината на правилна четиристрана потсечена пирамида (цртеж десно) со основни рабови a и a_1 и апотема l ја пресметуваме според формулата

$$P=a^2+a_1^2+4\frac{a+a_1}{2}l.$$



Од условот на задачата имаме $3400=40^2+10^2+4\frac{40+10}{2}l$ па затоа $l=17\,cm$. Сега, од $\triangle EFM$ наоѓаме

$$h=\sqrt{l^2-(\frac{a-a_1}{2})^2}=8\,cm.$$

312. Да се пресмета волуменот на правилна четристрана пирамида со основен раб $14\,cm$ и апотема $25\,cm$.

Решение. За висината на пирамидата имаме

$$H=\sqrt{h^2-(\tfrac{a}{2})^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24\,cm,$$

од каде што следува дека волуменот

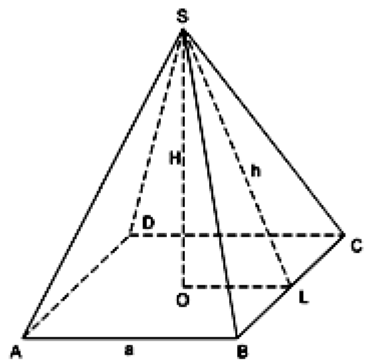
$$V=\tfrac{1}{3}BH=\tfrac{1}{3}a^2H=\tfrac{1}{3}14^2\cdot 24\,cm^3=1568\,cm^3.$$

313. Една правилна четиристрана пирамида има плоштина $P=800\,cm^2$ и бочна плоштина $M=544\,cm^2$. Да се пресмета волуменот на пирамидата.

Решение. Основата на пирамидата е квадрат. Нека страната на квадратот е a, а висината на бочната страна е h. Имаме

$P=\frac{4ah}{2}+a^2=800$ и $M=\frac{4ah}{2}=544$

од што следува $a^2=800-544=256$, па затоа $a=16cm, h=17cm$. Понатаму, од правоаголниот триаголник SOL имаме



$$H^2=h^2-OL^2=17^2-(\tfrac{16}{2})^2=225 \text{ т.е. } H=15\,cm.$$

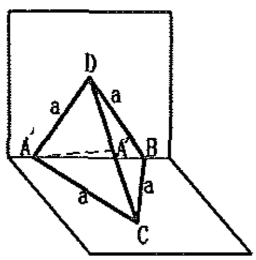
Конечно, за волуменот на пирамидата наоѓаме

$$V=\frac{a^2H}{2}=\frac{256\cdot 15}{3}=1280\,cm^3.$$

314. Два ѕида на тристрана пирамида се рамнострани триаголници со должина на страна a. Рамнините на овие триаголници се заемно нормални. Определи ги плоштината и волуменот на оваа пирамида.

Решение. Имаме

$$V=\frac{BH}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{8}.$$



Понатаму,

$$\overline{CD}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{2},\ \overline{AA'}^2=a^2-(\frac{a\sqrt{6}}{4})^2,$$

т.е. $\overline{AA'}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$, па затоа

$$P = 2P_{\triangle ABC} + 2P_{\triangle ACD}$$
$$= 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{6}}{4}\frac{a\sqrt{10}}{4}$$
$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{5}).$$

315. Даден е правилен тетраедар со волумен $V = 18\sqrt{2}\,cm^3$. Определи ја плоштината на овој тетраедар.

Решение. Ако работ на тетраедарот е a, тогаш апотемата е $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, па затоа неговата висина е $H = \sqrt{a^2 - (\frac{2h}{3})^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (направи цртеж). Според тоа, волуменот на тетраедарот е

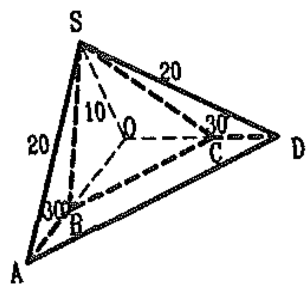
$$V = \frac{BH}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Оттука добиваме $\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}$,односно $a^3 = 18\cdot 12 = 2^3\cdot 3^3 = 6^3$, што значи $a = 6\,cm$. Конечно, за плоштината на тетраедарот добиваме

$$P = 4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\,cm^2.$$

316. Дадена е четиристрана пирамида $SABCD$ чии спротивни бочни страни SAB и SCD лежат во заемно нормални рамнини кои се нормални и на рамнината на основата $ABCD$. Ако $\overline{SA} = \overline{SD} = 20\,cm$ и $\overline{SB} = \overline{SC} = 10\sqrt{2}\,cm$ и ако рабовите SA и SD со рамнината на основата зафаќаат агол од 30°, определи ги плоштината и волуменот на пирамидата $SABCD$.

Решение. Нека рамнините ABS, CDS и $ABCD$ се сечат во точката O. Тогаш $\overline{SO} = 10\,cm$, $\overline{AO} = \overline{DO} = 10\sqrt{3}\,cm$. Бидејќи $\overline{BS} = \overline{CS} = 10\sqrt{2}\,cm$, добиваме $\overline{BO} = \overline{CO} = 10\,cm$ и $\measuredangle OBS = \measuredangle OCS = 45^\circ$.

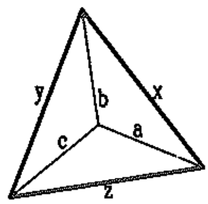


Плоштината на основата на пирамидата е еднаква на разликата на плоштините на триаголниците ADO и BCO, па затоа $B = 150 - 50 = 100\,cm^2$, што значи дека волуменот на пирамидата е $V = \frac{100\cdot 10}{3} = \frac{1000}{3}\,cm^3$

.Плоштината на пирамидата е

$$P = B + M = 100 + 2\cdot\frac{10(10\sqrt{3}-10)}{2} + \frac{(10\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}\ cm^2.$$

317. Рамнините на бочните ѕидови на права тристрана пирамида се заемно нормални и имаат плоштини: $4\sqrt{105}\ cm^2, 16\sqrt{21}\ cm^2$ и $42\sqrt{5}\ cm^2$. Определи ги плоштината и волуменот на оваа пирамида.



Решение. Нека a,b,c се бочните рабови на дадената пирамида. Тогаш за волуменот на пирамидата добиваме $V = \frac{abc}{6}$. Но,

$$\frac{ab}{2} = 4\sqrt{105},\ \frac{bc}{2} = 16\sqrt{21}\ cm^2 \text{ и } \frac{ca}{2} = 42\sqrt{5},$$

и ако ги помножиме последните равенства по средувањето добиваме $(abc)^2 = 5\cdot 672^2$, па затоа $abc = 672\sqrt{5}$. Според тоа, $V = 112\sqrt{5}\ cm^3$. Понатаму,

$$a = \frac{abc}{bc} = \frac{672\sqrt{5}}{32\sqrt{21}} = \sqrt{105}\ cm$$

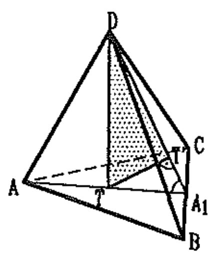
и слично се добива $b = 8cm$ и $c = 4\sqrt{21}\ cm$. Сега со помош на Питагоровата теорема лесно се добива дека $x = 13cm, y = 20\ cm$ и $z = 21cm$, па од Хеорновата формула следува дека плоштината на основата е

$$P = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} = \sqrt{27\cdot 14\cdot 8\cdot 6} = 126\ cm^2.$$

Конечно, плоштината на пирамидата е

$$P' = (4\sqrt{105} + 16\sqrt{21} + 42\sqrt{5} + 126)\ cm^2\ .$$

318. Определи ги плоштината и волуменот на правилна тристрана пирамида чија страна е наклонета кон рамнината на основата под агол од 60°, а растојанието од тежиштето на основата до бочната страна е $3cm$.



Решение. Во призмата $ABCD$ нека DT е висината, DA_1 е апотемата и T' е подножјето на нормалата повлечена од T на DA_1. Тогаш $\triangle TT'A_1$ е правоаголен и важи $\measuredangle TA_1T' = 60^\circ$, па затоа $\frac{\overline{TA_1}\sqrt{3}}{2} = \overline{TT'} = 3$, па затоа $\overline{TA_1} = 2\sqrt{3}\ cm$. Сега $\overline{AA_1} = 3\overline{TA_1} = 6\sqrt{3}\ cm$, па затоа $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, т.е. $a = 12cm$. Понатаму,

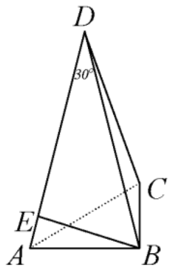
$$h=\overline{DA_1}=2\overline{TA_1}=4\sqrt{3}\,cm \quad \text{и} \quad H=\overline{DT}=\frac{\overline{DA_1}\sqrt{3}}{2}, \text{ т.е. } H=\frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=6\,cm.$$

Сега лесно добиваме

$$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3ah}{2}=108\sqrt{3}\,cm^2 \text{ и } V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=72\sqrt{3}\,cm^3.$$

319. Бочната страна на правилна тристрана пирамида е рамнокрак триаголник со агол при врвот од 30°. Должината на бочниот раб на пирамидата е $8\,cm$. Определи ја плоштината на оваа пирамида.

Решение. Нека основата на пирамидата е $\triangle ABC$, а врвот е D (цртеж десно). Нека точката E е подножјето на висината на бочниот ѕид $\triangle ABD$ повлечена од темето B. Правоаголниот $\triangle BED$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ $=4\,cm$ и $\overline{ED}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BD}=4\sqrt{3}\,cm$. Значи, плоштината



на бочната страна е еднаква на $\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BE}}{2}=\frac{8\cdot4}{2}=16\,cm^2$. Понатаму, бидејќи $\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{ED}=8-4\sqrt{3}\,cm$ од Питагоровата теорема применета на $\triangle ABE$ следува: $\overline{AB}=\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{AE}^2}=8\sqrt{2-\sqrt{3}}\,cm$. Значи, плоштината на основата на пирамидата е еднаква на

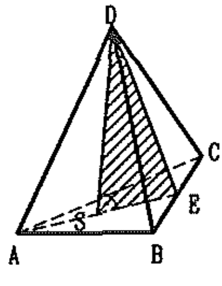
$$\frac{\overline{AB}^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(8\sqrt{2-\sqrt{3}})^2\sqrt{3}}{4}=(32\sqrt{3}-48)\,cm^2.$$

Конечно, плоштината на пирамидата е еднаква на

$$B+M=32\sqrt{3}-48+3\cdot16=32\sqrt{3}\,cm^2.$$

320. Плоштината на правилна тристрана пирамида е еднаква на $648\sqrt{3}\,cm^2$. Определи го волуменот на пирамидата ако нејзината висина е два пати подолга од основниот раб на пирамидата.

Решение. Нека пирамидата е $ABCD$, DS е нејзината висина и DE е апотемата (цртеж десно). Во $\triangle DSE$ имаме $\overline{DS}=2a$ и $\overline{SE}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, па затоа $h^2=(2a)^2+(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2=\frac{49a^2}{12}$, т.е. $h=\frac{7a}{2\sqrt{3}}$. Според тоа, $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3ah}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{7a^2\sqrt{3}}{4}=2a^2\sqrt{3}$, па



затоа $2a^2\sqrt{3}=648\sqrt{3}$, т.е. $a=18\,cm$. Конечно,

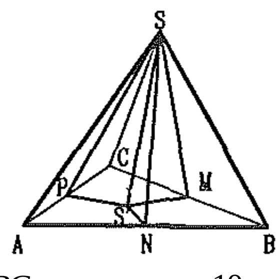
$$V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2a=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}=972\sqrt{3}\,cm^3.$$

321. Оновата на права тристрана призма $ABCA_1B_1C_1$ е рамнокрак правоаголен триаголник ABC со катети $\overline{AB}=\overline{AC}=1\,cm$. Висината на призмата е $H=6\,cm$. Рамнината π ја содржи точката B и од рабовите AA_1 и BB_1 отсекува отсечки $\overline{AA'}=2\,cm$ и $\overline{CC'}=4\,cm$. Определи го волуменот на призмата на делот кој се наоѓа меѓу рамнината π и основата $A_1B_1C_1$.

Решение. Бараниот волумен го добиваме ако од волуменот на дадената призма, за кој важи $V_1=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot H}{2}=3\,cm^3$ го одземеме волуменот на четиристраната пирамида $BACC'A'$, со основа $ACC'A'$ и висина $\overline{AB}=1\,cm$. Плоштината на трапезот $ACC'A'$ е $B=\frac{2+4}{2}\cdot 1=3\,cm^2$, па затоа волуменот на пирамидата е $V_2=\frac{B\cdot\overline{AB}}{3}=1\,cm^3$. Конечно, бараниот волумен е $V_1-V_2=2\,cm^3$.

322. Правоаголен триаголник чии катети се со должини $6\,cm$ и $8\,cm$ е основа на тристрана пирамида чии бочни ѕидови со основата формираат агли од 60°. Определи ги плоштината и волуменот на дадената пирамида.

Решение. Триаголниците $SS'M, SS'N, SS'P$ се правоаголни, имаат заедничка страна SS' и важи $\measuredangle S'SM=\measuredangle S'SN=\measuredangle S'SP=30^\circ$, па затоа тие се складни, т.е. важи $\overline{S'M}=\overline{S'N}=\overline{S'P}$. Според тоа, точката S' е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$ (цртеж десно). Бидејќи хипотенузата на триаголникот ABC е еднаква на $10\,cm$, добиваме $\overline{S'M}=\overline{S'N}=\overline{S'P}=r=\frac{8+6-10}{2}=2\,cm$. Значи, апотемите се $\overline{SM}=\overline{SN}=\overline{SP}=4\,cm$ и $\overline{SS'}=2\sqrt{3}$. Според тоа,

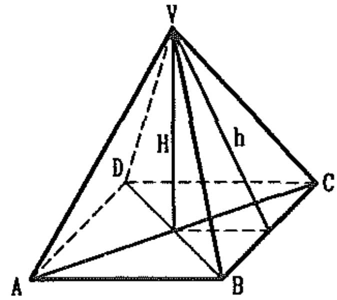


$$P=\frac{8\cdot 6}{2}+\frac{8+6+10}{2}\cdot 4=72\,cm^2 \text{ и } V=\frac{B\cdot H}{3}=\frac{6\cdot 8\cdot 2\sqrt{3}}{6}=16\sqrt{3}\,cm^3.$$

323. Дијагоналниот пресек на правилна и права четиристрана пирамида е рамностран триаголник со плоштина $14\sqrt{3}\,cm^2$. Определи ги плоштината и волуменот на пирамидата.

Решение. Плоштината на рамностраниот триаголник ACV е еднаква на $14\sqrt{3}\,cm^2$, па затоа

$$\overline{AC}=\overline{CV}=\overline{AV}=2\sqrt{14}\,cm.$$



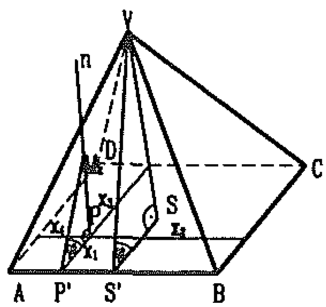
Понатаму, висината на пирамидата е $H=2\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{42}\,cm$. Сега, должината a на основата на пирамидата се добива од равенството $a\sqrt{2}=2\sqrt{14}$, што значи $a=2\sqrt{7}\,cm$. Понатаму, за апотемата на пирамидата добиваме $h^2=(\sqrt{7})^2+(\sqrt{42})^2=49$, па затоа $h=7\,cm$. Значи, плоштината на основата е $B=(2\sqrt{7})^2=28\,cm^2$, а плоштината на омотачот е $M=4\cdot\frac{2\sqrt{7}\cdot 7}{2}=28\sqrt{7}\,cm^2$. Конечно, плоштината на пирамидата е $P=B+M=28(1+\sqrt{7})\,cm^2$, а нејзиниот волумен е $V=\frac{BH}{3}=\frac{28\sqrt{42}}{3}\,cm^3$.

324. Нека P е точка од основата на права четиристрана пирамида. Нормалата n во точката P на рамнината на основата ги сече рамнините на бочните страни на пирамидата во точките M_1, M_2, M_3, M_4. Докажи дека за секоја точка P од основата важи

$$\overline{PM_1}+\overline{PM_2}+\overline{PM_3}+\overline{PM_4}=4H,$$

каде H е висината на пирамидата.

Решение. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 се растојанијата од точката P до рабовите на основата и нека φ е аголот меѓу основата и бочните ѕидови на пирамидата. Тогаш $x_1+x_2+x_3+x_4=2a$, каде a е должината на работ на основата. Нека M_1, M_2, M_3, M_4 се пресечните точки на правата n која минува низ



точката P и е нормална на рамнината на основата, со соодветните бочни ѕидови на пирамидата. Тогаш триаголниците $SS'V$ и $PP'M_k$ се слични (двата се правоаголни и важи $\measuredangle SS'V = \measuredangle PP'M_k = \varphi$). Од сличноста следува

$$\overline{SS'} : \overline{SV} = \overline{PP'} : \overline{PM_K},$$

па затоа $\frac{a}{2} : H = x_k : \overline{PM_K}$, т.е. $\overline{PM_K} = \frac{2Hx_k}{a}$. Конечно,

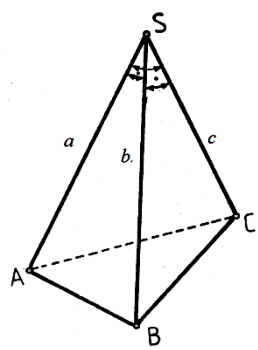
$$\overline{PM_1} + \overline{PM_2} + \overline{PM_3} + \overline{PM_4} = \frac{2Hx_1}{a} + \frac{2Hx_2}{a} + \frac{2Hx_3}{a} + \frac{2Hx_4}{a}$$
$$= \frac{2H(x_1+x_2+x_3+x_4)}{a} = 4H.$$

325. Едно теме на коцката и центрите на трите ѕидови на кои тоа теме им е заедничко се темиња на тристрана пирамида. Определи го волуменот на оваа пирамида, ако работ на коцката е a.

Решение. Нека $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ се две спротивни страни на коцката. Рабовите на пирамидата кои го содржат темето, да кажеме A, се еднакви на половината на дијагоналите на ѕидовите на коцката, т.е. на $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Работ на пирамидата кој се добива со поврзување на центрите на страните $ABCD$ и ABB_1A_1 е средна линија на триаголникот ACB_1, па затоа и тој е еднаков на половина од дијагоналата на ѕидот на коцката. Според тоа, добиената пирамида е правилен тетраедар со должина на страна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и волумен $\frac{1}{12}(\frac{a\sqrt{2}}{2})^3\sqrt{2} = \frac{a^3}{24}$.

326. Пресметај го волуменот на тристрана пирамида чии бочни рабови се заемно нормални и имаат должини $12\,cm, 7\,cm$ и $13\,cm$.

Решение. Од дефиницијата на пирамида следува дека секој ѕид на тристраната пирамида може да се земе за нејзина основа (зошто?). Во случајот, ако за основа на пирамидата земеме еден од бочните ѕидови, тогаш основата на пирамидата ќе биде правоаголен триаголник чии катети се два бочни рабови, а нејзината висина висината на пирамидата ќе биде третиот бочен раб. Ако со a,b,c ги означиме бочните рабови на пирамидата (цртеж десно), тогаш за волуменот на пирамидата имаме



$$V = \frac{Bh}{3} = \frac{\frac{ab}{2}c}{3} = \frac{abc}{6} = 182cm^3.$$

327. Дадена е пирамида во која апотемите на бочните ѕидови се еднакви. Определи го аголот меѓу бочните ѕидови и рамнината на основата, ако плоштината на пирамидата е 1,5 пати поголема од плоштината на нејзиниот омотач.

Решение. Нека $A_1A_2...A_n$ е основата на пирамидата, V е врвот, V' е неговата нормална проекција на рамнината на основата, а $M_1, M_2, ...,$ M_n нека се нормалните проекции на врвот врз правите A_1A_2, A_2A_3, $..., A_nA_1$. Тогаш $\overline{VM_1} = \overline{VM_2} = ... = \overline{VM_n} = h$ се апотемите, а $V'M_1$, $V'M_2, ..., V'M_n$ се висините на триаголниците $V'A_1A_2$, $V'A_2A_3, ...,$ $V'A_nA_1$. Сега од $\overline{VM_1} = \overline{VM_2} = ... = \overline{VM_n} = h$ следува складноста на правоаголните триаголници $V'VM_1, V'VM_2, ..., V'VM_n$, а оттука следува $\overline{V'M_1} = \overline{V'M_2} = ... = \overline{V'M_n} = h'$. Конечно, од $M = 2B$ следува

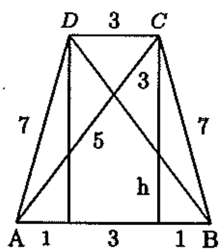
$$(\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_nA_1})\frac{h}{2} = 2(\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_nA_1})\frac{h'}{2}.$$

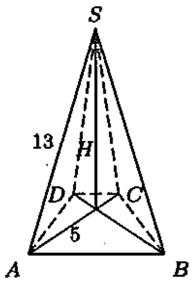
Од последното равенство добиваме $h' = \frac{h}{2}$, па затоа

$$\measuredangle V'M_1V = \measuredangle V'M_2V = ... = \measuredangle V'M_nV = 60^\circ.$$

328. Основата на четиристрана пирамида е рамнокрак трапез со основи $a = 5cm$ и $b = 3cm$ и краци $c = d = 7cm$. Определи го волуменот на дадената пирамида ако висината на пирамидата паѓа во пресекот на дијагоналите на трапезот, а поголемиот бочен раб е еднаков на $13cm$.

Решение. Ако висината на трапезот е h, а дијагоналата е f, тогаш од Питагоровата теорема следува $h^2 = 7^2 - 1^2 = 48$, па $f^2 = h^2 + 4^2 = 64$, што значи дека $f = 8cm$ (цртеж десно). Бидејќи основите на трапезот се однесуваат како $5:3$, заклучуваме дека пресекот на дијагоналите ја дели





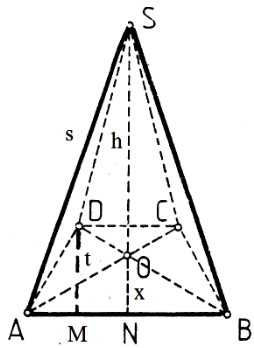
дијагоналата во однос $5:3$, т.е. дијагоналата е поделена на отсечки $5cm$ и $3cm$. Од $H^2 = s^2 - 5^2 =$ $13^2 - 5^2 = 144$ следува $H = 12cm$ (цртеж лево). Конечно, за волуменот на пирамидата добиваме

$$V = \frac{BH}{3} = \frac{(5+3)\cdot 2\sqrt{3}\cdot 12}{3} = 64\sqrt{3}\,cm^3.$$

329. Пресметај го волуменот на четиристрана пирамида со основа трапез со страни $a=5cm, b=3cm$ и $c=7cm$, $(a\| b)$, ако подножната точка на нејзината висина се совпаѓа со пресекот на дијагоналите на основата и поголемиот бочен раб е $s=10\,cm$.

Решение. Нека е дадена пирамидата $ABCDS$, за која

$$\overline{AB}=a=5\,cm, \overline{CD}=b=3\,cm,$$
$$\overline{AD}=c=7\,cm, \overline{SA}=s=10\,cm,$$



(цртеж десно). Од $\triangle AMD$ имаме

$$t=\sqrt{c^2-(\tfrac{a-b}{2})^2}=\sqrt{7^2-(\tfrac{5-3}{2})^2}=4\sqrt{3}\,cm$$

и како $\triangle BMD \sim \triangle BNO$ добиваме

$$t:x=\overline{BM}:\overline{BN}$$

од што следува

$$x=\frac{\overline{BN}}{\overline{BM}}\cdot t=\frac{\frac{a}{2}}{a-\frac{a-b}{2}}\cdot t=\frac{a}{a+b}\cdot t=\frac{5\sqrt{3}}{2}\,cm\,.$$

Понатаму, од $\triangle AON$ следува

$$\overline{AO}=\sqrt{\overline{AN}^2+x^2}=\sqrt{(\tfrac{a}{2})^2+x^2}=5\,cm\,,$$

а од $\triangle ASO$ наоѓаме

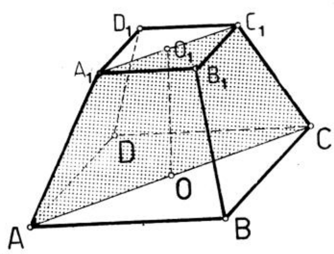
$$h=\sqrt{\overline{SA}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{10^2-5^2}\;cm=5\sqrt{3}\,cm\,.$$

Конечно, за волуменот на пирамидата добиваме

$$V=\frac{Bh}{3}=\frac{\frac{a+b}{2}t}{3}h=\frac{\frac{5+3}{2}\cdot 4\sqrt{3}}{3}\cdot 5\sqrt{3}=80\,cm^3.$$

330. Пресметај го волуменот на правилна потсечена четиристрана пирамида со основни рабови $a_1=7\,cm$, $a_2=5\,cm$ и дијагонала $D=9\,cm$.

Решение. Со d_1 и d_2 да ги означиме дијагоналите на основите на потсечената пирамида. Имаме $d_1=7\sqrt{2}\,cm$ и $d_2=5\sqrt{2}\,cm$. Дијагоналниот пресек на потсечената пирамида (цртеж десно) е рамнокрак трапез со основи d_1 и d_2, висина h еднаква на висината на протсечената пирамида. Според тоа,



$$h=\sqrt{D^2-(d_2+\frac{d_1-d_2}{2})^2}=3\,cm.$$

Основите на потсечената пирамида се квадрати со страни $a_1=7\,cm$, $a_2=5\,cm$, Конечно, од забелешка 8 а) следува дека волуменот на потсечената пирамида е

$$V=\frac{h}{3}(a_1^2+a_2^2+a_1a_2)=109\,cm^3.$$

331. Волуменот на правилна потсечена тристрана пирамида е $196\sqrt{3}cm^3$, едниот основен раб е $10cm$, а висината е $12cm$. Пресметај го вториот основен раб.

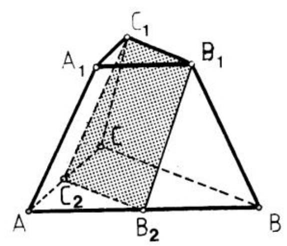
Решение. Имаме, $V=196\sqrt{3}cm^3$, $a_1=10cm$ и $h=12cm$. Според тоа точна е равенката $196\sqrt{3}=\frac{12\sqrt{3}}{12}(10^2+a_2^2+10a_2)$ од која после средувањето ја имаме квадратната равенка

$$a_2^2+10a_2-96=0.$$

Решенија на последната равенка се $a_2=6$ и $a_2=-16$. Второто решение го отфрламе, бидејќи должината не може да биде негативна. Според тоа, вториот основен раб е $a_2=6$.

332. Тристрана потсечена пирамида со рамнина која минува низ еден од рабовите на помалата основа и е паралелна на спротивниот бочен раб е поделена на два дела. Најди го односот на волумените на добиените полиедри ако се знае дека основните рабови на потсечената пирамида се однесуваат како $2:1$.

Решение. Нека е дадена тристраната потсечена пирамида $ABCA_1B_1C_1$ со плоштина на долната и горната основа B и B_1, соодветно и висина h (цртеж десно). Низ работ C_1B_1 повлекуваме рамнина паралелна на бочниот раб AA_1, која ја сече основата ABC во отсечка B_2C_2. Од $\triangle AB_2C_2\sim\triangle A_1B_1C_1$ следува



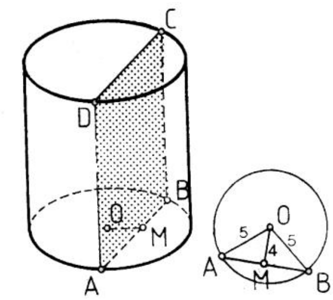
дека $AB_2C_2A_1B_1C_1$ е коса призма со волумен $V_1=B_1h$, па затоа волуменот на полиедарот $BCC_1B_1B_2C_2$ е $V_2=V-V_1$, каде V е волуменот на тристраната потсечена пирамида, т.е. $V=\frac{1}{3}h[B+\sqrt{BB_1}+B_1)]$.

Значи, $V_2=\frac{1}{3}h[B+\sqrt{BB_1}+B_1)]-hB_1$ и ако се има предвид дека $\frac{B}{B_1}=(\frac{2}{1})^2=4$, тогаш за бараниот однос добиваме

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{1}{3}h[B+\sqrt{BB_1}+B_1)]}{hB_1}-1=\frac{1}{3}(\frac{B}{B_1}+\sqrt{\frac{B}{B_1}}+1)-1=\frac{1}{3}(4+2+1)-1=\frac{4}{3}.$$

333. Висината на прав цилиндерот е $11cm$, а радиусот на основата е $10cm$. Пресметај ја плоштината на надолжен пресек кој од оската е оддалечен $8cm$.

Решение. Јасно, пресекот е правоаголник со една страна $h=11cm$, а другата страна е отсечката AB (цртеж десно). Од условот на задачата имаме



$$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{10^2-8^2}cm=12cm,$$

па затоа плоштината на надолжниот пресек е

$$P=\overline{AB}\cdot h=11\cdot 12cm^2=132cm^2.$$

334. Дијагоналата $D=24cm$ на оскиниот пресек на прав цилиндер со рамнината на основата зафаќа агол од 45°. Пресметај ја плоштината на цилиндерот.

Решение. Бидејќи дијагоналата на оскиниот пресек зафаќа агол од 45° заклучуваме дека оскиниот пресек е квадрат, т.е. цилиндерот е рамностран. Значи,

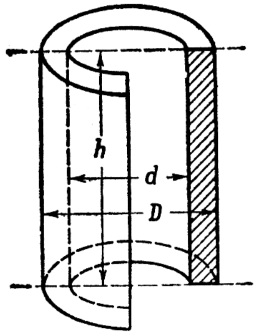
$$2r=h=\frac{24}{\sqrt{2}}=12\sqrt{2}cm, \text{ т.е. } r=6\sqrt{2}cm.$$

Според тоа, $P=2\pi r(r+h)=432\pi cm^3$.

335. Бочната површина на цилиндер е квадрат со страна a. Пресметај го неговиот волумен.

Решение. Јасно, едната страна на бочната површина е висината на цилиндерот, па затоа $h=a$. Другата страна на бочната површина е еднаква на должината на кружницата на основата, па затоа $a=2\pi r$, т.е. $r=\frac{a}{2\pi}$. Заменуваме во формулата $V=\pi r^2 h$ и за волуменот на цилиндерот добиваме $V=\frac{a^3}{4\pi}$.

336. Пресметај го волуменот на водоводна цевка со должина $6m$, ако дијаметарот на надворешната површина е $3cm$, а дијаметарот на внатрешната површина е $2,4cm$.



Решение. Од условот на задачата имаме $h=6m=600cm$, $D=3cm$ и $d=2,4cm$.

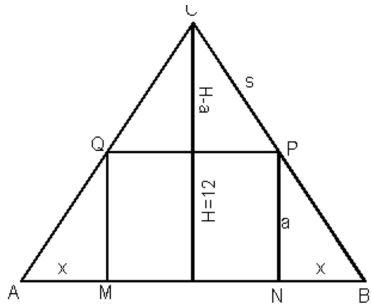
Според тоа, волуменот на цевката е

$$V=\frac{\pi D^2 h}{4}-\frac{\pi d^2 h}{4}=\frac{\pi(D^2-d^2)h}{4}$$

$$=\frac{\pi(3^2-2,4^2)\cdot 600}{4}=486\pi\ cm^3.$$

337. Во прав конус со радиус на основата $r=10cm$ и висина $h=12cm$ е впишана коцка, така што еден ѕид на коцката да лежи на основата на конусот. Пресметај го волуменот на коцката.

Решение. а) Нека коцката $ABCA_1B_1C_1D_1$ е впишана во конусот (цртеж десно). Означуваме $\overline{SO}=h$, $\overline{AB}=a$, $\overline{OM}=r$ и добиваме



$\overline{AC}=\overline{A_1C_1}=a\sqrt{2}$, $\overline{MN}=2r=20cm$.

Триаголниците SMN и SA_1C_1 се слични, па затоа $\frac{2r}{a\sqrt{2}}=\frac{h}{h-a}$ т.е.

$$a=\frac{2rh}{2r+h\sqrt{2}}=\frac{60}{5+3\sqrt{2}}cm=\frac{60(5+3\sqrt{2})}{7}cm.$$

Конечно, за волуменот на коцката добиваме

$$V=a^3=\frac{60^3(5+3\sqrt{2})^3}{7^3}cm^3.$$

338. Пресметај ја плоштината на оскиниот пресек на прав конус со радиус $r=10cm$, ако дијаметарот и генератрисата зафаќаат агол од 45°.

Решение. Оскиниот пресек е рамнокрак правоаголен триаголник за кој дијаметарот е хипотенуза. Јасно, висината на триаголникот е еднаква на радиусот на конусот, па затоа плоштината на оскиниот пресек е $P=r^2=100\,cm^2$.

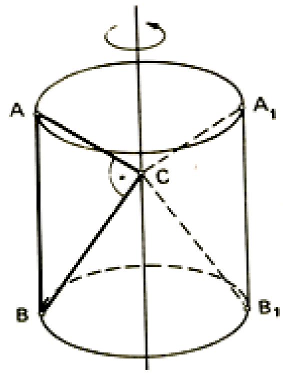
339. Висината на прав конус е $12cm$, а радиусот на основата е $5cm$. Пресметај ја неговата плоштина.

Решение. Изводницата на конусот е $s=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13\,cm$. За плоштината на конусот добиваме

$$P=\pi r(r+s)=5\pi(5+13)=90\pi\,cm^2.$$

340. Правоаголен триаголник со катети $20\,cm$ и $15\,cm$ ротира околу права која минува низ темето на правиот агол и е паралелна со хипотенузата. Пресметај ги плоштината и волуменот на ротационото тело.

Решение. Телото кое се добива е прикажано на цртеж десно и неговата плоштина е збир на плоштините на обвивката на цилиндер „опишан“ од хипотенузата AB и на обвивките на конусите „опишани“ од катетите BC и CA, за кои радиусот е висината h_c на $\triangle ABC$ повлечена од темето C.



Од правоаголниот $\triangle ABC$ имаме

$$\overline{AB}=\sqrt{20^2+15^2}=25\,cm.$$

Но, $P_{BAC}=\frac{\overline{AB}h_c}{2}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}$, па затоа $h_c=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}}=12\,cm$. Конечно, бараната плоштина е

$$P=2\pi h_c\overline{AB}+\pi h_c\overline{AC}+\pi h_c\overline{BC}=\pi h_c(2\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})=1020\,cm^2.$$

Ќе го пресметаме волуменот на ротационото тело. За таа цел од волуменот на цилиндарот кој се добива со ротација на хипотенузата AB треба да ги одземеме волумените на конусите кои се добиваат со ротација на катетите AC и BC. Ако со h_1 и h_2 ги означиме висините на конусите, тогаш $h_1+h_2=\overline{AB}$ и бидејќи сите три тела имаат ист радиус еднаков на висината $h_c=12\,cm$, за волуменот на ротационото тело добиваме

$$V=\pi\overline{AB}\cdot h_c^2-\frac{\pi h_c^2h_1}{3}-\frac{\pi h_c^2h_2}{3}=\pi h_c^2(\overline{AB}-\frac{h_1+h_2}{3})$$
$$=\pi h_c^2(\overline{AB}-\frac{\overline{AB}}{3})=\frac{2\pi h_c^2\cdot\overline{AB}}{3}=2400\pi\,cm^3.$$

341. Плоштината на поголемата основа на прав потсечен конус е $144\pi\,cm^2$, а неговата висина е $8\,cm$. Пресметај ја неговата плоштина ако радиусите на основите се однесуваат како $2:1$.

Решение. Од условот на задачата за радиусот на поголемата основа имаме $\pi R^2 = 144\pi$, па затоа $R = 12\,cm$. Ако со r го означиме радиусот на помалата основа, тогаш $R : r = 2:1$, од каде наоѓаме $r = 6\,cm$. Според тоа

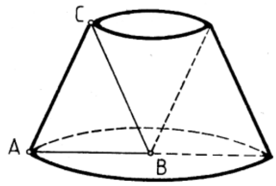
$$s = \sqrt{H^2 + (R-r)^2} = \sqrt{8^2 + (12-6)^2}cm = 10cm.$$

Конечно, за плоштината на потсечениот конус добиваме

$$P = \pi[R^2 + r^2 + s(R+r)] = \pi[12^2 + 6^2 + 10(12+6)]cm^2 = 360\pi cm^2.$$

342. Рамнокрак триаголник со основа $15\,cm$ и крак $17{,}5\,cm$ ротира околу права која минува низ едно теме на основата и е нормална на неа. Пресметај ги плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело.

Решение. При ротацијата на $\triangle ABC$ се добива ротационо тело кај кое од потсечен конус е извaден конус (цртеж десно). Неговата плоштина е



$$P = \pi\cdot\overline{AB}^2 + \pi\overline{AC}\cdot(\overline{AB} + \tfrac{\overline{AB}}{2}) + \tfrac{\pi\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}$$
$$= \pi\cdot\overline{AB}(\overline{AB} + 2\overline{AC}) = 750\pi\, cm^2.$$

За волуменот на ротационото тело добиваме. Радиусите на основите се $R = \overline{AB} = 15cm$ и $r = \frac{\overline{AB}}{2} = 7{,}5cm$, а висината е

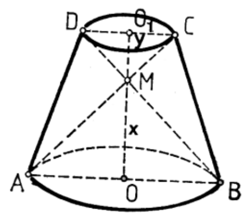
$$H = \sqrt{\overline{BC}^2 - (\tfrac{\overline{AB}}{2})^2} = \sqrt{17{,}5^2 - 7{,}5^2}cm = \sqrt{250}cm = 5\sqrt{10}cm.$$

Сега волуменот на ротационото тело го добиваме ако од волуменот на потсечениот конус го одземеме волуменот на конусот. Имаме

$$V = V_2 - V_1 = \tfrac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \tfrac{\pi H}{3}r^2 = \tfrac{\pi H}{3}R(R+r)$$
$$= \tfrac{5\sqrt{10}\pi}{3}15(15+7{,}5) = 1687{,}5\sqrt{10}\pi\, cm^3.$$

343. Волуменот на потсечен конус е $56\pi cm^3$, а радиусот на едната основа е двапати поголем од радиусот на другата основа. Пресметај ја плоштината на потсечениот конус, ако се знае дека дијагоналите на неговиот оскин пресек се заемно нормални.

Решение. Нека r и R се радиусите на конусот, а H е неговата висина (цртеж десно). Од условот на задачата имаме $R = 2r$, па затоа од волуменот на конусот наоѓаме



$$56=\frac{\pi H}{3}[(2r)^2+2rr+r^2)]=\frac{7\pi Hr^2}{3},$$

т.е. $Hr^2=24$. Дијагоналите на оскиниот пресек на потсечениот конус се заемно нормални, па затоа $\triangle ABM$ и $\triangle DCM$ се рамнокраки правоаголни, што значи дека нивните висини повлечени кон хипотенузите се еднакви радиусите на основите R и r, соодветно. Понатаму, $H=\overline{OM}+\overline{MO_1}=R+r=3r$ што значи $3r^3=24$, односно $r=2cm$. Според тоа,

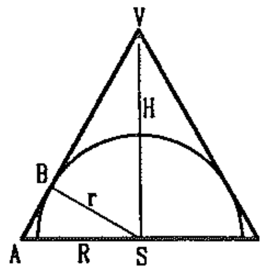
$$R=2r=4cm,\ H=3r=6cm \text{ и } s=\sqrt{H^2-(R-r)^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}cm.$$

Конечно, плоштината на потсечениот конус е

$$P=\pi[R^2+r^2+s(R+r)]=\pi[4^2+2^2+4\sqrt{2}(4+2)]=4(5+6\sqrt{2})\pi\ cm^3.$$

344. Околу полусвера со радиус r е опишан прав конус со висина H така што основата на полусверата и конусот се концентрични кругови. Определи го волуменот на конусот.

Решение. Триаголниците ASV и SBV се правоаголни и имаат заеднички оста агол, па затоа се слични. Ос сличноста следува $\overline{AS}:\overline{BS}=\overline{AV}:\overline{BV}$, т.е.



$$R:r=\sqrt{H^2+R^2}:H,$$

од каде следува дека $R^2H^2=r^2(R^2+H^2)$, односно $R^2=\frac{r^2H^2}{H^2-r^2}$. Според тоа, волуменот на конусот е

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2H^3}{H^2-r^2}.$$

345. Дијагоналите на ѕидовите на квадарот се $15\,cm, \sqrt{481}\,cm$ и $\sqrt{544}\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на топката опишана околу овој квадар.

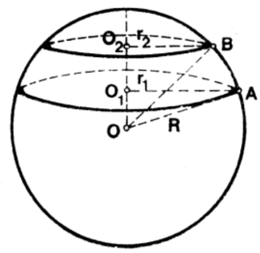
Решение. Нека a,b,c се должините на рабовите на квадарот. Тогаш $a^2+b^2=15^2$, $b^2+c^2=481$ и $c^2+a^2=544$. Ако ги собереме овие равенства добиваме $2(a^2+b^2+c^2)=1250$, односно $a^2+b^2+c^2=625$. Според тоа, за големата дијагонала D на квадарот добиваме

$$D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{625}=25\,cm.$$

Значи, радисут на топката е $R=\frac{D}{2}=\frac{25}{2}\,cm$, па нејзината плоштина е $P=4\pi R^2=625\pi\,cm^2$, а нејзиниот волумен е $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{15625}{6}\pi\,cm^3$.

346. Плоштината на два паралелни пресека коишто се од иста страна од центарот на топката се $25\pi\,cm^2$ и $16\pi\,cm^2$. Да се пресмета плоштината на големиот круг, ако растојанието меѓу паралелните пресеци е $1cm$.

Решение. Од условот на задачата имаме $r_5=5\,cm$ и $r_2=4\,cm$ (цртеж десно). Ако $\overline{O_2O_1}=1cm$, $\overline{OA}=\overline{OB}=R$ и $\overline{OO_1}=x$, тогаш $\overline{OO_2}=x+1$. Од $\triangle OAO_1$ следува дека $R^2=r_1^2+x^2$, а од $\triangle OAO_2$ следува дека е $R^2=r_2^2+(x+1)^2$. Левите страни на последните две равенки се еднакви, па затоа $x^2+r_1^2=r_2^2+(x+1)^2$ од каде добиваме $x=\frac{r_1^2-r_2^2-1}{2}=4\,cm$. Според тоа, $R^2=5^2+4^2=41$, па затоа плоштината на големиот круг е $P=\pi R^2=41\pi\,cm^2$.



347. Радиусот на еден пресек на сферата е $60\,cm$, а висината на добиената калота е $25\,cm$. Пресметај ја плоштината на сферата.

Решение. Нека

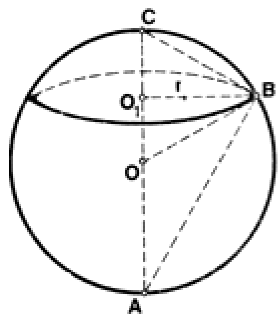
$\overline{BO_1}=r=6\,cm$, $\overline{O_1C}=h=25cm$ и $\overline{OB}=R$.

Од $\triangle ABC$, цртеж десно, следува

$$r^2=h(2R-h)$$

(зошто?), па затоа $60^2=25(2R-25)$ од каде добиваме $R=84{,}5\,cm$. Конечно, за плоштината на сферата имаме

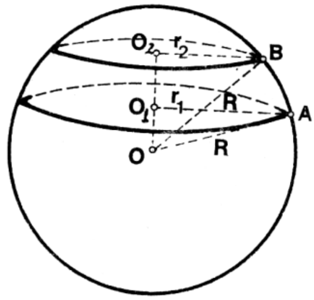
$$P=4R^2\pi=28561\pi\,cm^2.$$



348. Пресметај ја плоштината на топкин појас, ако радиусот на сферата е $65\,cm$ и ако радиусите на граничните кругови се $63\,cm$ и $60\,cm$.

Решение. Имаме, $R=65\,cm$ и кружниците $k_1(O_1,63)$ и $k_2(O_2,60)$ (цртеж десно).

Ставаме $\overline{OO_1}=y$, $\overline{OO_2}=x$ и за висината h на топкиниот појас добиваме $h=x-y$. Понатаму, од правоаголниот $\triangle OO_1A$ добиваме $y=\sqrt{65^2-63^2}=16\,cm$, а од правоаголниот $\triangle OO_2B$ имаме $x=\sqrt{65^2-60^2}=25\,cm$. Значи, $h=25-16=9\,cm$. Конечно, плоштината P на топкиниот појас ќе биде

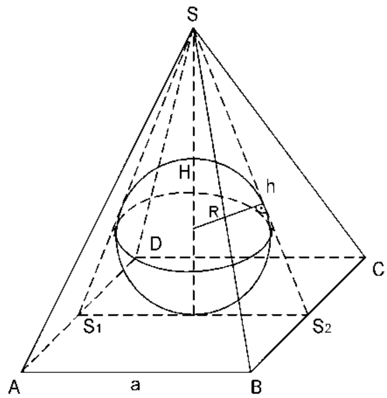


$$P=2R\pi H=1170\pi cm^2.$$

349. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $360\,cm^2$, а работ на основата е $10cm$. Пресметај го волуменот на впишаната топка во пирамидата.

Решение. Плоштината на пирамида е $P=B+M=a^2+2ah$, каде h е висината на бочниот ѕид, па затоа $10^2+20h=360$, т.е. $h=13cm$. Од правоаголниот $\triangle SS_2O_1$ (цртеж десно), добиваме

$$H=\sqrt{h^2-(\tfrac{a}{2})^2}$$
$$=\sqrt{169-25}=12\,cm.$$



Триаголниците SS_2O_1 и SOM се слични, па затоа

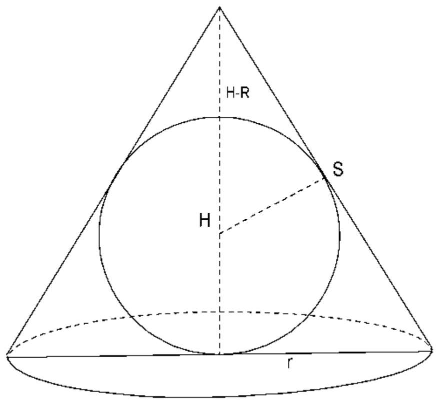
$$(H-R):h=R:\tfrac{a}{2}$$

од што добиваме $R=\frac{aH}{2h+a}$, па затоа $R=\frac{10}{3}\,cm$. Конечно,

$$V=\tfrac{4}{3}R^3\pi=\tfrac{4}{3}(\tfrac{10}{3})^3\pi cm^3=\tfrac{4000}{81}\pi\,cm^3.$$

350. Во прав кружен конус аголот меѓу генератрисата и висината е 30°, а радиусот на основата е $5\sqrt{3}$. Пресметај го волуменот на впишаната топка во конусот.

Решение. Бидејќи $\triangle BSO$ е половина од рамностран триаголник имаме $r=2s$ па затоа $s=10\sqrt{3}\,cm$, од каде следува



$H=\sqrt{s^2-r^2}=15\,cm$.

Понатаму, $\triangle MNS$ е половина од рамностран триаголник имаме $R=2(H-R)$ па затоа

$$R=\frac{H}{3}=5\,cm.$$

Конечно,

$$V=\frac{4}{3}R^3\pi=\frac{500}{3}\pi cm^3.$$

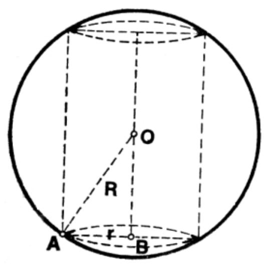
351. Во топка со дијаметар $50\,mm$ треба да се издлаби цилиндричен отвор вдолж дијаметарот на топката. Пресметај го волуменот на делот од топката што останува, ако дијаметарот на цилиндричниот отвор е $30\,mm$.

Решение. Делот што се издлабува се состои од цилиндер и две калоти чии основи се основите на цилиндерот (цртеж десно). Висината на цилиндерот е $H=2\overline{BO}$. Од триаголникот ABO следува

$$\overline{BO}=\sqrt{25^2-15^2}=20\,mm, \text{ т.е. } H=40mm.$$

Според тоа, висината на секоја калота е

$$h=\frac{50-40}{2}=5mm.$$



Бараниот волумен е

$$\begin{aligned} V&=\frac{4}{3}R^3\pi-r^2\pi H-\frac{2}{3}h^2\pi(3R-h)\\ &=\frac{4}{3}\cdot 25^3\pi-15^2\pi\cdot 20-\frac{2}{3}\cdot 5^2\pi(3\cdot 25-5)\\ &=\frac{62500}{3}\pi-4500\pi-\frac{3500}{3}\pi\\ &=\frac{45500}{3}\pi mm^3=\frac{45{,}5}{3}\pi\, cm^3. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.(1991). Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I. (1988).: Primpremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd
3. Ilić, N. V. (1991). Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd
4. Kostić, Z. K. (1963). Između igre i matematike, Tehnička knjiga, Beograd
5. Mićić, V.; Kadelburg, Z. (1989). Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd
6. Stojanović, V. (1985). Matematiskop 2, Naučna knjiga, Beograd
7. Stojanović, V. (1999). Vodić za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd
8. Stojanović, V.; Zolić, A. (1991). Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole), DMS, Beograd
9. Tošić, R. (1990). Rešeni zadaci iz matematike za mlade matematičare, Naučna knjiga, Beograd
10. Tošić, R.; Vukoslavčević, V. (1995). Elementi teorije brojeva, Alef, Novi sad, 1995
11. Zbirka zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola Srbija u 1993 godini, DMS, Valjevo, 1993
12. Zolić, A. (1990). Zbirka rešenih konkursnih zadataka, Matematički list, Beograd
13. Андрић, В. (2006). Математика (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд
14. Андрић, В.; Ђорић, М.; Јовчић, М.; Љубић, Д.; Петровић, Љ.; Стојановић, В. (1997). 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1987-1996. године, ДМС, Београд
15. Аневска, К. (2014). Логички парадокси, Нумерус, Скоје
16. Аневска, К. (2014). Покривање на шаховска табла, Нумерус, Скопје
17. Аневска, К. (2018). Питагорови тројки, Нумерус, Скопје
18. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини I, Нумерус, Скопје

19. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини II, Нумерус, Скопје
20. Аневска, К., Гоговска, В. (2015). Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје
21. Аневска, К., Малчески, Р. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје
22. Аневска, К., Малчески, С. (2013). Геометриско пресметување на збирови, Нумерус, Скопје
23. Антонов, Н. П.; Выгодский, М. Я.; Никитин, В. В.; Санкин, А. И. (1961). Сборник задач по елементарной математике, Наука, Москва
24. Будуров, С.; Серафимов, Д. (1980). Математически олимпиади 2, Народна просвета, София
25. Василевска, Д. Немојте да се излажете, Хероновата формула помага, Нумерус, Скопје
26. Главче, М. (2016). Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје
27. Главче, М. (2016). Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
28. Главче, М. (2016). Пресметуваме збирови, Нумерус, Скопје
29. Главче, М. (2018). Една задача, повеќе начини на решавање, Нумерус, Скопје
30. Главче, М. (2018). Периметар и неравенство на триаголник, Нумерус, Скопје
31. Главче, М. (2018). Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје
32. Главче, М., Анѓелкоска, В. (2013). Магични квадрати и магична коцка, Нумерус, Скопје
33. Главче, М., Аневска, К. (2019). Решавање конструктивни задачи со помош на Питагорова теорема, Нумерус, СКопје
34. Главче, М., Малчески, С. (2019).Решавање на аритметички задачи со доведување до противречност, Нумерус, Скопје
35. Гоговска, В. Вкупен број можности, Нумерус, Скопје
36. Гоговска, В. Да започнеме од крајот, Нумерус, Скопје
37. Гоговска, В. Математички игри во кои се определува најголема и најмала вредност, Нумерус, Скопје
38. Гоговска, В. Неменливи големини, Нумерус, Скопје
39. Граврилов, Ј.; Давидов, Л. (1977). Делимост на числата, Народна просвета, София
40. Гроздев, С. Да побараме она што не се менува, Нумерус, Скопје

41. Гроздев, С. Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус, Скопје
42. Гроздев, С. Неравенство на Шур и примена, Нумерус, Скопје
43. Гроздев, С. Црвенката и Диофантовата равека од прв ред, Нумерус, Скопје
44. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Боиме броеви, Нумерус, Скопје
45. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Броиме со помош на графови, Нумерус, Скопје
46. Гроздев, С., Аневска, К. (2018). Патување на островот на витезите и лажговците, Нумерус, Скопје
47. Гроздев, С., Малчески, А. (2016). Малку математика на шаховска табла I, Нумерус, 2016
48. Гроздев, С., Малчески, А. (2017). Малку математика на шаховска табла II, Нумерус, 2016
49. Димовски, И. Број на делители, Нумерус, Скопје
50. Димовски, И. Проблемот на Швејк, Нумерсу, Скопје
51. Дојчев, С. Дали е можно Дали постои?, Нумерус, Скопје
52. Дојчев, С. Кој број е поголем?, Нумерус, Скопје
53. Дуденков, С.; Чакърян, К. (1999). Задачи по теория на числата, Регалия 6, София
54. Зубелевич, Г. И. (1967). Сборник задач московских математических олимпиад, Просвещение, Москва
55. Иванова, А., Велинов, Д. Златен пресек, омилена пропорција на архитектите, Нумерус, Скопје
56. Јанев, И. И броењето не е лесно, Нумерус, Скопје
57. Јанев, И. Пак броење, Нумерус, Скопје
58. Јанев, К.; Мишовски, К. (1985). Десет години републички натпревари по математика (основни училишта), Нумерус, Скопје
59. Јошеска Јованчева, Б. Функционални равенки, Нумерус, Скопје
60. Лесов, Х. Принцип на Дирихле, Нумерус, Скопје
61. Лукарески, М. Боиме и пребојуваме фигури, Нумерус, СКопје
62. Малчески, А. Адам Рис и лекомислениот геометар, Нумерус, Скопје
63. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Метод на Ферма за решавање Диофантови равенки, Нумерус, Скопје
64. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решаваме задачи со множества, Нумерус, Скопје
65. Малчески, Р. (1994). Математички игри 1, Нумерус, Скопје
66. Малчески, Р. (1994). Математички игри 2, Нумерус, Скопје

67. Малчески, Р. (1995). Математички игри 3, Нумерус, Скопје
68. Малчески, Р. (1995). Математички игри 4, Нумерус, Скопје
69. Малчески, Р. (1995). Стрелките на часовникот се движат, па што, Нумерус, Скопје
70. Малчески, Р. (1996, 2015). Две задачи за правилен шестаголник, Нумерус, Скопје
71. Малчески, Р. (1997). Како да и помогнете на мува која не знае геометрија, Нумерус, Скопје
72. Малчески, Р. (1998). За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово
73. Малчески, Р. (2001). Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје
74. Малчески, Р. (2002). Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје
75. Малчески, Р. (2003). Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София
76. Малчески, Р. (2003). Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје
77. Малчески, Р. (2004). И ова е лесно – алгоритам за решавање задачи со претурање, Нумерус, Скопје
78. Малчески, Р. (2004). Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје
79. Малчески, Р. (2005). Идентитетот на Софија Жермен, Нумерус, Скопје
80. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 1, Нумерус, Скопје
81. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 2, Нумерус, Скопје
82. Малчески, Р. (2012). Кралот Артур и тркалезната маса, Нумерус, Скопје
83. Малчески, Р. (2012). Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје
84. Малчески, Р. (2012). Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје
85. Малчески, Р. (2013). Историјата е добра учителка, Нумерус, Скопје
86. Малчески, Р. (2014). Пресметување на збирови од производи и степени, Нумерус, Скопје
87. Малчески, Р. (2015). Покривање рамностран триаголник со рамнострани триаголници, Математика+ (Нумерус), София (Скопје)
88. Малчески, Р. (2017). Пресметуваме периметри и плоштини, Нумерус, Скопје
89. Малчески, Р. (2018). Решаваме конструктивни задачи, Нумерус, Скопје

90. Малчески, Р. (2019). Пресметување плоштина на паралелограм и триаголник, Нумерус, Скопје
91. Малчески, Р. (2020). Занимливости со броеви, armaganka.org.mk
92. Малчески, Р. (2020). Расекување и составување геометриски фигури, armaganka.org.mk
93. Малчески, Р. (2020). Решавање на некои нелинеарни Диофантови равенки, armaganka.org.mk
94. Малчески, Р., (1998). Еден елементарен доказ на Хероновата формула, Сигма, Скопје
95. Малчески, Р., Аневска, К. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје
96. Малчески, Р., Аневска, К. (2016). Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје
97. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К. (1993). Вовед во теорија на броеви, ММM, Скопје
98. Малчески, Р., Малчески, А. (1995). За златниот пресек, Нумерус, Скопје
99. Малчески, Р., Малчески, А. (2017). Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
100. Малчески, Р., Малчески, А. (2018). Откривање на непознат број, магија или математика, Нумерус, Скопје
101. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решавање на текстуални задачи (четврто издание), Армаганка, Скопје
102. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје
103. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Збирка задачи по елементарна алгебра, Армаганка, Скопје
104. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). По патеките на шампионите за математика (второ издание), Армаганка, Скопје
105. Малчески, С. Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
106. Малчески, С. Конструкција на аритметичка, геометриска и хармониска средина на две отсечки, Нумерус, Скопје
107. Малчески, С. Неколку начини за докажување на едно неравенство, Нумерус, Скопје
108. Малчески, С., Аневска, К. (2013). Шаховските фигури и златниот пресек, Нумерус, Скопје
109. Малчески, С., Аневска, К. (2018). Една теорема многу начини на докажување, Нумерус, Скопје

110. Малчески, С., Лукарески, М. Пополнуваме табели со броеви, Нумерус, Скопје
111. Милошевиќ, Д. Еден проблем во врска со расекување на коцка, Нумерус, Скопје
112. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – втор дел, Нумерус, Скопје
113. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – прв дел, Нумерус, Скопје
114. Милошевиќ, Д. Квадрат и точка, Нумерус, Скопје
115. Милошевиќ, Д. Некои теореми за точки во рамнината на триаголникот, Нумерус, Скопје
116. Милошевиќ, Д. Основни својства на магичните квадрати од ред четири, Нумерус, Скопје
117. Михајлова, Е. Брзо множење, Нумерус, Скопје
118. Михајлова, Е. Како едноставно да решаваме текстуални задачи – вештина за составување равенки, Нумерус, Скопје
119. Младеновиќ, П. Правила на еднаков број, збир и производ, Нумерус, Скопје
120. Муминагиќ, А. За една олимписка задача, Нумерус, Скопје
121. Муминагиќ, А. Плоштина на правилен петаголник; Нумерус, Скопје
122. Муминагиќ, А., Карстенсен, Ј. Од страниците на забавната математика, Нумерус, Скопје
123. Муминагиќ, А., Сведрец, Р. Кои броеви недостасуваат, Нумерус, Скопје
124. Петревски, Н. Максимум и минимум во задачи од геометрија, Нумерус, Скопје
125. Петревски, Н. Ојлерова кружница, Нумерус, Скопје
126. Петровиќ, В. Натпревар во повеќебој, Нумерус, Скопје
127. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1993). Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София
128. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1995). Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София
129. Србиноска, Н. Повеќе начини на решавање на една задача, Нумерус, Скопје
130. Тренчевски, К. За младите логичари, Нумерус, Скопје
131. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д. (1994). Занимлива математика, МММ, Скопје

132. Тфекчиев, И.; Лесов, Х. (1988). Задачи за извнкласна работа по матматака в IV и V клас, Софија
133. Филипоски, С. Неколку избрани задачи од неравенства, Нумерус, СКопје
134. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч. (1998). Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София
135. Цофман, Ј. Користење табели броеви за одредување на збировите на елементите на некои низи броеви, Нумерус, Скопје
136. Шариќ, Милан Метод на помошни фигури, Нумерус, Скопје
137. Шаркова, И. Последните цифри, Нумерус, Скопје
138. Шаркова, И., Караџова, Р. Бројните ребуси помагаат, Нумерсу, Скопје