

# ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2026

Недела, 19. Април 2026

**Задача 1.** Нека  $\triangle ABC$  е разностран со опишана кружница  $k$ . Од надворешната страна на  $\triangle ABC$  се конструирани рамнокраки  $\triangle BAK$ ,  $\triangle BCL$  и  $\triangle ACM$  со основи  $BA$ ,  $CB$  и  $AC$ , соодветно, така што  $\angle ABK + \angle BCL + \angle CAM = 90^\circ$  и точките  $K$ ,  $L$ ,  $M$  не лежат на  $k$ . Нека  $S$  е втората пресечна точка на  $k$  со опишаната кружница на  $\triangle AKM$ , а вторите пресечни точка на  $k$  со  $LS$ ,  $MS$  и  $KS$  се  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ , соодветно. Докажете дека правите  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  минуваат низ заедничка точка.

**Задача 2.** Определете ги сите позитивни цели броеви  $a, b$  такви што  $a \mid b^2 + 1$  и  $b \mid a^2 + 1$ .

**Задача 3.** За низата  $a_0, a_1, a_2, \dots$  велиме дека е *просечна* ако за секој ненегативен цел број  $i$ , важи  $a_i \leq a_{i+1}$  и  $a_{i+3} \leq a_i + a_{i+2}$ . Определете го најмалиот позитивен цел број  $p$  за кој постои просечна низа  $a_0, a_1, a_2, \dots$  таква што за секој ненегативен цел број  $i$  важи

$$\frac{a_{i+p}}{a_i} > \frac{a_{i+1}}{a_i} + \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} + \dots + \frac{a_{i+p}}{a_{i+p-1}}.$$

**Задача 4.** Нека  $G$  е сврзан граф со барем две темиња. Темињата на  $G$  претставуваат градови а ребрата двонасочни патишта. Вкупно  $k$  дипломати се распоредени во темињата на  $G$ . Секој *потег* се состои од избирање теме  $v$  кое има барем онолку дипломати колку што е степенот  $\deg_G(v)$ , и испраќање на по еден дипломат долж секое инцидетно ребро со  $v$  до соседните темиња на  $v$ .

Определете ја најголемата можна вредност за  $k$  таква што, за секое почетно распоредување на  $k$  дипломати во темињата на  $G$ , секоја можна низа од потези е конечна.



СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.  
Секоја задача вреди 10 поени.

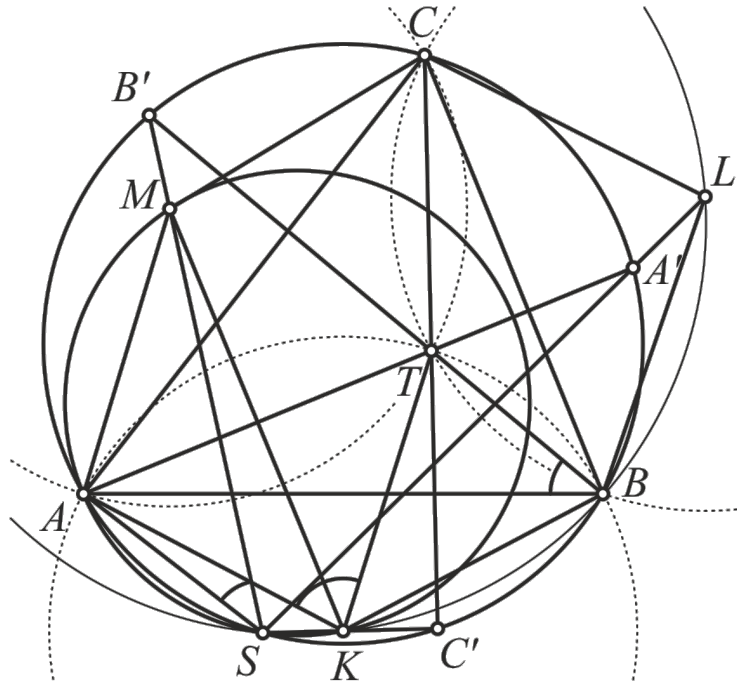
## ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2026

**Задача 1.** Нека  $\triangle ABC$  е разностран со опишана кружница  $k$ . Од надворешната страна на  $\triangle ABC$  се конструирани рамнокраки  $\triangle BAK$ ,  $\triangle BCL$  и  $\triangle ACM$  со основи  $BA$ ,  $CB$  и  $AC$ , соодветно, така што  $\angle ABK + \angle BCL + \angle CAM = 90^\circ$  и точките  $K$ ,  $L$ ,  $M$  не лежат на  $k$ . Нека  $S$  е втората пресечна точка на  $k$  со опишаната кружница на  $\triangle AKM$ , а вторите пресечни точка на  $k$  со  $LS$ ,  $MS$  и  $KS$  се  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ , соодветно. Докажете дека правите  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  минуваат низ заедничка точка.

**Решение.** Нека  $T \neq A$  е втората пресечна точка на кружниците со центри  $K$  и  $M$  кои минуваат низ точката  $A$ . За аглиите важи

$$\begin{aligned} \angle BTC &= 180^\circ - \angle ATB + 180^\circ - \angle CTA = \frac{1}{2} \angle BKA + \frac{1}{2} \angle AMC = \\ &= 90^\circ - \angle ABK + 90^\circ - \angle CAM = 90^\circ + \angle BCL = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle CLB. \end{aligned}$$

Следствено, точката  $T$  лежи и на кружницата со центар  $L$  која минува низ  $B$  и  $C$ . (3п)



Бидејќи  $AKTM$  е делтоид, имаме

$$\angle B'BA = \angle B'SA \equiv \angle MSA = \angle MKA = \frac{1}{2} \angle TKA = \angle TBA.$$

Оттука, точката  $T$  лежи на  $BB'$ . Слично,

$$\angle ACC' = 180^\circ - \angle C'SA \equiv 180^\circ - \angle KSA = \angle AMK = \frac{1}{2} \angle AMT = \angle ACT,$$

па точката  $T$  лежи и на  $CC'$ . (3п)

За да докажеме дека  $T$  лежи и на  $AA'$ , прво докажуваме дека  $S$ ,  $K$ ,  $B$  и  $L$  лежат на кружница. Ова следува од

$$\angle KLB = \frac{1}{2}\angle TLB = \angle TCB \equiv \angle C'CB = \angle C'SB \equiv KSB,$$

што е точно бидејќи и  $BLTK$  е делтоид. Конечно,

$$\angle BAA' = \angle BSA' \equiv \angle BSL = \angle BKL = \frac{1}{2}\angle BKT = \angle BAT,$$

повлекува дека  $T$  лежи на  $AA'$ . **(3п)**

Заклучуваме дека правите  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  минуваат низ заеничка точка (имено, низ  $T$ ). **(1п)**  $\square$

**Задача 2.** Определете ги сите позитивни цели броеви  $a, b$  такви што  $a \mid b^2 + 1$  и  $b \mid a^2 + 1$ .

*Одговор:* Сите решенија се  $(F_1, F_2)$ , и  $(F_{2n-1}, F_{2n+1})$  и  $(F_{2n+1}, F_{2n-1})$  за  $n \geq 1$ , каде  $(F_k)_{k=1}^{\infty}$  е низата на Фибоначи со  $F_1 = F_2 = 1$ . **(1п)**

**Решение.** За позитивни цели броеви  $a, b$  такви што  $a \mid b^2 + 1$  и  $b \mid a^2 + 1$  веліме дека се *добар пар*. Јасно, секои вакви  $a, b$  се заемно прости (ако  $p \mid a$  и  $p \mid b$ , тогаш  $p \mid b^2$  и  $p \mid b^2 + 1$ , противречност). Специјално,  $a = b$  повлекува  $(a, b) = (1, 1)$ . **(1п)**

**Тврдење 1.** (*Оџаѓање*) Нека  $1 < a < b$  и  $(a, b)$  е добар пар. Нека  $c = (a^2 + 1)/b$ . Тогаш  $1 \leq c < a$  и  $(c, a)$  е добар пар.

*Доказ.* Очигледно,  $c \in \mathbb{Z}^+$  и  $c \mid a^2 + 1$ . Од  $b > a$  имаме  $c \leq (a^2 + 1)/a < a + 1$ . Ако  $c = a$ , тогаш  $b = (a^2 + 1)/a$  не е цел број освен за  $a = 1$ , противречност. Значи  $c < a$ . Останува да покажеме дека  $a \mid c^2 + 1$ . Од  $a \mid b^2 + 1$  имаме  $b^2 \equiv -1 \pmod{a}$ . Исто  $cb = a^2 + 1 \equiv 1 \pmod{a}$ , па  $c \equiv b^{-1} \pmod{a}$ . Следствено,  $b^2(c^2 + 1) \equiv 1 + b^2 \equiv 0 \pmod{a}$ . Од  $\gcd(a, b) = 1$ ,  $b^2$  е инвертибилен  $\pmod{a}$ , па  $a \mid c^2 + 1$ . **(3п)**  $\diamond$

**Тврдење 2.** *Единствен добар пар*  $(1, t)$  со  $1 < t$  е  $(1, 2)$ .

*Доказ.* Од  $t \mid 1^2 + 1 = 2$  имаме  $t \in \{1, 2\}$ . Бидејќи  $t > 1$ , заклучуваме дека  $t = 2$ . Непосредна проверка потврдува дека  $(1, 2)$  е добар пар. **(1п)**  $\diamond$

Дефинираме низа  $x_1 = 1, x_2 = 2$  и  $x_{n+1} = (x_n^2 + 1)/x_{n-1}$ .

**Тврдење 3.** Секој пар  $(x_n, x_{n+1})$  е добар пар, и секој добар пар  $(a, b)$  со  $a < b$  се состои од последователни членови на низата  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ .

*Доказ.* Според Тврдењето 1, започнувајќи од произволен добар пар  $(a, b)$  со  $1 < a \leq b$ , можеме строго да ја опаѓаме првата координата сè додека не дојдеме до добар пар од облик  $(1, t)$  со  $1 < t$ , кој (според Тврдење 2) е единствено  $(1, t) = (1, 2)$ . Заклучуваме дека секој добар пар  $(a, b)$  со  $1 < a \leq b$  се состои од два последователни члена на низата генерирана од  $(1, 2)$  со рекурзијата  $x_{n+1}x_{n-1} = x_n^2 + 1$ . **(2п)**  $\diamond$

Да го пресметаме  $x_n$ . Идентитетот на Фибоначи  $F_{2n+1}F_{2n-3} - F_{2n-1}^2 = 1$  (изведен од  $F_mF_{n-1} - F_{m-1}F_n = (-1)^n F_{m-n}$  земајќи  $m = 2n - 1, n = 2n - 2$ ), ни дава  $(F_{2n-1}^2 + 1)/F_{2n-3} = F_{2n+1}$ . За  $x_1 = F_1 = 1$  и  $x_2 = F_3 = 2$ , непосредна индукција ни дава дека  $x_n = F_{2n-1}$  за секој  $n$ . Значи, паровите решенија се точно  $(a, b) = (F_{2n-1}, F_{2n+1})$  за  $n \geq 1$ , дополнително паровите добиени од овие со заменување на местата на  $a, b$ , и парот  $(1, 1)$ . **(2п)**  $\square$

**Задача 3.** За низата  $a_0, a_1, a_2, \dots$  веліме дека е *просечна* ако за секој ненегативен цел број  $i$ , важи  $a_i \leq a_{i+1}$  и  $a_{i+3} \leq a_i + a_{i+2}$ . Определете го најмалиот позитивен цел број  $p$  за кој постои просечна низа  $a_0, a_1, a_2, \dots$  таква што за секој ненегативен цел број  $i$  важи

$$\frac{a_{i+p}}{a_i} > \frac{a_{i+1}}{a_i} + \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} + \dots + \frac{a_{i+p}}{a_{i+p-1}}.$$

**Решение.** Ќе докажеме дека  $p = 6$  е најмалиот позитивен цел број што ги задоволува условите нз задачата. **(1п)**

Ја разгледуваме геометриската прогресија  $a_i = q^i$ , со коефициент  $q = \sqrt[3]{3}$ . Забележуваме дека важат  $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8$  и  $\sqrt[3]{3} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 < \frac{27}{8}$ . Од  $q > 1$ ,  $a_{i+3} = 3a_i < a_i + q^2 a_i = a_i + a_{i+2}$  и

$$\frac{a_{i+6}}{a_i} = q^6 = 9 = 6 \cdot \frac{3}{2} > 6q = \frac{a_{i+6}}{a_{i+5}} + \frac{a_{i+5}}{a_{i+4}} + \frac{a_{i+4}}{a_{i+3}} + \frac{a_{i+3}}{a_{i+2}} + \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_i},$$

следува дека условите се исполнети за  $p = 6$ . **(2п)**

Да претпоставиме дека неравенството од условот е исполнето за некој  $p < 6$ .

За  $p = 1$  имаме  $\frac{a_{i+p}}{a_i} = \frac{a_{i+1}}{a_i}$  - контрадикција.

За секој  $p \in \{2, 3, 4, 5\}$ , од дадените услови и неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува дека  $\frac{a_{i+p}}{a_i} > \frac{a_{i+p}}{a_{i+p-1}} + \dots + \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq p \sqrt[p]{\frac{a_{i+p}}{a_{i+p-1}} \dots \frac{a_{i+1}}{a_i}} = p \sqrt[p]{\frac{a_{i+p}}{a_i}}$ , т.е.,  $\frac{a_{i+p}}{a_i} > p \sqrt[p]{p^p}$ , за секој ненегативен цел број  $i$ .

Сега  $a_{j+1} \leq a_j + a_{j-1} \leq 2a_j$  важи за секој позитивен цел број  $j$  и имаме:

- За  $p = 2$  важи  $a_{i+2} \leq 2a_{i+1} \leq 4a_i = 2^2 a_i$  - контрадикција.
- За  $p = 3$  важи  $a_{i+3} \leq a_{i+2} + a_i \leq 5a_i < \sqrt{27} a_i = \sqrt{3^3} a_i$  - контрадикција.
- За  $p = 4$  од  $\frac{a_{i+4}}{a_i} > \sqrt[3]{4^4} = 2 \cdot \sqrt[3]{32} > 6$  следува дека постои индекс  $i$ , таков што  $\frac{a_{i+4}}{a_{i+3}} > \sqrt[3]{4} > \frac{3}{2}$ . Сега  $a_{i+1} > a_{i+4} - a_{i+3} > (1 - \frac{2}{3})a_{i+4} = \frac{1}{3}a_{i+4}$ , повлекува дека  $a_{i+4} < 3a_{i+1} < 6a_i < \sqrt[3]{4^4} a_i$ , што е контрадикција.
- За  $p = 5$  важи  $\frac{a_{i+5}}{a_i} > \sqrt[4]{5^5} > 5\sqrt{2} > 7$ . Според ова постои индекс  $i > 2$  за кој  $\frac{a_{i+1}}{a_i} = q \geq \sqrt[4]{5}$ . Од  $a_{i-2} \geq a_{i+1} - a_i \geq (q - 1)a_i$  добиваме

$$a_{i+3} \leq a_{i+2} + a_i \leq a_{i+1} + a_{i-1} + a_i \leq a_i + a_{i-2} + 2a_i = 3a_i + a_{i-2} \leq (1 + \frac{3}{q-1})a_{i-2}.$$

Ако  $q \geq \frac{3}{2}$ , тогаш добиваме  $7a_{i-2} < a_{i+3} \leq (1 + \frac{3}{q-1})a_{i-2} \leq 7a_{i-2}$ , што е контрадикција.

Следува дека  $\frac{3}{2} > q > \sqrt[4]{5}$ . Сега бидејќи важи  $q^4 \cdot \frac{a_{j+1}}{a_j} \geq \frac{a_{j+5}}{a_j} \geq 5 \cdot \sqrt[4]{5}$ , заклучуваме дека  $\frac{a_{j+1}}{a_j} \geq \frac{80}{81} \cdot \sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \frac{7}{5}$ , за секој  $j \geq 1$  ( $(\frac{80}{81})^4 \cdot 5 > \frac{77 \cdot 5}{81} > 4$ ). Оттука

$$a_{i+3} \leq a_{i+2} + a_i \leq a_{i+1} + a_{i-1} + a_i \leq a_i + a_{i-2} + \frac{5}{7}a_i + a_i = \frac{19}{7}a_i + a_{i-2} \leq \frac{45}{7}a_{i-2} < 7a_{i-2},$$

што повторно е контрадикција.

Заклучуваме дека условите на задачата не се исполнети за  $p \leq 5$ . **(7п)** □

**Задача 4.** Нека  $G$  е сврзан граф со барем две темиња. Темињата на  $G$  претставуваат градови а ребрата двонасочни патишта. Вкупно  $k$  дипломати се распоредени во темињата на  $G$ . Секој  $\bar{u}\bar{o}\bar{s}\bar{h}\bar{e}\bar{t}$  се состои од избирање теме  $v$  кое има барем онолку дипломати колку што е степенот  $\deg_G(v)$ , и испраќање на по еден дипломат долж секое инцидетно ребро со  $v$  до соседните темиња на  $v$ .

Определете ја најголемата можна вредност за  $k$  таква што, за секое почетно распоредување на  $k$  дипломати во темињата на  $G$ , секоја можна низа од потези е конечна.

**Решение.** *Одговор:* Нека  $m$  е бројот на ребра на  $G$ . За секое почетно распоредување на  $k$  дипломати во темињата на  $G$ , секоја можна низа од потези е конечна ако и само ако  $k \leq m - 1$ . **(1п)**

*Прв дел.* Ќе покажеме дека ако  $k \leq m - 1$  тогаш секоја можна низа од потези е конечна независно од почетното распоредување на дипломатите. Изложуваме два доказа.

**Доказ 1.** Да претпоставиме дека за некое почетно распоредување на дипломатите постои бесконечна низа од потези. Постојат конечно многу распоредувања на дипломатите во темињата (градовите), што повлекува дека некое распоредување мора да се повтори (при бесконечната низа потези). Нека таква е конфигурацијата  $A$ ; постои низа од потези  $S = (s_1, s_2, \dots, s_t)$  која започнува од  $A$  и резултира со  $A$ . **(1п)**

Нека  $C_1$  и  $C_2$  се две соседни темиња, и  $m_1$  (одн.  $m_2$ ) се бројот на потези содржани во  $S$  при кои испраќаме дипломати од  $C_1$  (одн.  $C_2$ ). Ако  $m_1 > m_2$ , тогаш  $C_2$  добило повеќе дипломати од  $C_1$  одошто испратило дипломати во  $C_1$ . Следствено, со оглед дека во  $C_2$  има еднаков број дипломати на почетокот и крајот на  $S$ , постои тема  $C_3$  такво што повеќе дипломати се испратени од  $C_2$  во  $C_3$  одошто возвратно. Со други зборови,  $m_2 > m_3$ . Итерирајќи го ова аргументирање, и имајќи предвид дека бројот на темиња е конечен, постои циклус од темиња  $C_1 C_2 \dots C_l C_1$  такви што  $m_1 > m_2 > m_3 > \dots > m_l > m_1$ , противречност. Значи, секои две соседни темиња допринесуваат подеднакво во  $S$ . Со оглед дека  $G$  е сврзан, заклучуваме и дека секое теме е „рамноправно“ т.е. допринесува подеднакво во  $S$ .

Рамноправноста на секои две соседни темиња (и фактот дека при секоја конфигурација единствено што нè интересира за секое теме е колку, а не кои, дипломати се распоредни во тоа теме) ни овозможува на секое ребро да му придружиме дипломат - имено, на ребро  $C_1 C_2$  му го придружуваме дипломатот првично распореден во  $C_1$  или  $C_2$  кој прв го користи реброто  $C_1 C_2$  при потезите од низата  $S$  (тој дипломат е секогаш во еден од краевите на тоа ребро во текот на  $S$ ). **(2п)**

Да забележиме дека ова придружување е инјективно, што повлекува дека  $k \geq m$ , противречност. **(1п)** □

**Доказ 2.** При потег од темето  $v$ , велиме дека  $v$  „исфрла“ дипломати. Ќе го користиме следново помошно тврдење.

**Тврдење.** Ако  $\bar{u}\bar{o}\bar{s}\bar{h}\bar{e}\bar{t}$  бесконечна низа од  $\bar{u}\bar{o}\bar{s}\bar{h}\bar{e}\bar{t}$ ези,  $\bar{u}\bar{o}\bar{s}\bar{h}\bar{e}\bar{t}$ аши секое  $\bar{u}\bar{o}\bar{s}\bar{h}\bar{e}\bar{t}$ еме од  $G$  исфрла бесконечно многу  $\bar{u}\bar{o}\bar{s}\bar{h}\bar{e}\bar{t}$ и. Специјално, секое  $\bar{u}\bar{o}\bar{s}\bar{h}\bar{e}\bar{t}$ еме исфрла барем еднаш.

*Доказ.* Во секој момент од процесот, постои тема  $w$  во кое има барем  $\deg(w)$  дипломати. Низата од потези е бесконечна, што повлекува дека постои тема  $v$  кое исфрла бесконечно

многу пати. При секое исфрлање на  $v$ , по еден дипломат преминува во секое соседно теме на  $v$ . Доколку постои сосед  $u$  на  $v$  кој исфрла само конечно многу пати, тогаш после конечно многу потези гледано од последното исфлање од  $u$ , темето  $u$  ќе има акумулирано доволно дипломати (имено, барем  $\deg(u)$ ) за да може повторно да исфрла. Од ова заклучуваме дека секој сосед  $u$  на  $v$  исфрла бесконечно многу пати. Така, бидејќи  $G$  е сврзан, со итерирање на претходниот заклучок имаме дека секое теме исфрла бесконечно многу пати. **(1п)**  $\diamond$

Нека е дадена бесконечна низа од потези  $S$ . За секое ребро  $e$ , го разгледуваме првиот дипломат што го користи  $e$  (за да прејде од едниот во другиот крај на  $e$ ) при некој потег од  $S$ . Му го придружуваме на  $e$  тој дипломат. Можеме да сметаме дека во сите подоцнежни исфрлања придружениот дипломат секогаш е во еден од краевите на  $e$ . Така, придружувањето е инјективно. **(2п)** Почетното распоредување има помалку дипломати од ребра. Значи, постои ребро на кое не му е придружен дипломат. Следствено, темињата кои се краеве на такво ребро никогаш не исфрлаат. Имајќи го предвид горното тврдење, добиваме противречност. **(1п)**  $\square$

*Втор дел.* Ќе покажеме дека ако  $k \geq t$  тогаш постои конечно распоредување на дипломатите при кое процесот на исфрлање никогаш не се стабилизира т.е. трае бесконечно.

Избираме  $t$  дипломати и ги боиме во бело, а останите дипломати ги боиме во црно. Избираме една ациклична ориентација на  $G$ , т.е. секое ребро го насочуваме т.ш. нема насочени циклуси; еквивалентно, избираме линеарно подредување на темињата  $v_1, v_2, \dots, v_n$  и секое ребро го насочуваме кон завршетокот со поголем индекс. **(1п)** Нека е почетна конфигурација при која во секое теме  $u$  има  $\deg^+(u)$  бели дипломати. Ги распоредуваме црните дипломати (доколку ги има) произволно. **(1п)** Со оглед дека диграфот е ацикличен, постои теме-извор (на пример, такво е  $v_1$ ). Значи постои теме  $v$  со барем  $\deg(v)$  дипломати (точно  $\deg(v)$  бели дипломати). Исфрламе од  $v$  и ја менуваме насоката на секое ребро инцидентно со  $v$ . **(1п)** Новодобиената ориентација е повторно ациклична и бројот на бели дипломати во секое теме  $u$  е (повторно) еднаков на излезниот степен  $\deg^+(u)$ . **(1п)** Значи, постои теме-извор, и процесот на исфрлање може да повтори (бесконечно). **(1п)**  $\square$